Atsitiktinių procesų pratybos

9-oji savaitė: Sąlyginis vidurkis

2013/14 m.m. pavasario semestras

1. Tegu a.d. Y tolygiai pasiskirstęs intervale $(0, 5]$. Raskite $\mathbb{E}(Y|Y > x)$, kai $0 < x \leq 5$.

2. Tegu $X_1, X_2, \cdots$ nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai. Sveikareikšmis teigiamas reikšmes įgyjantis a.d. Y ir kiekvienas $X_i, i = 1, 2, \ldots$ yra nepriklausomi. Apibrėžkime
$$S_Y = \sum_{i=1}^{Y} X_i.$$
Įrodykite, kad
$$\mathbb{D}S_Y = (\mathbb{E}X_1)^2\mathbb{D}Y + \mathbb{E}Y\mathbb{D}X_1.$$
Nuoroda: naudokite sąlyginio vidurkio savybę $\mathbb{E}X = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y))$.

3. Atsitiktinis taškas (X, Y) tolygiai pasiskirstęs trikampyje $\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\}$. Raskite $\mathbb{E}(X|Y)$, $\mathbb{E}(Y|X)$, ir $\mathbb{E}((X - Y)^2|X)$.

4. Tegu X ir Y tokie atsitiktiniai dydžiai, kad $\mathbb{E}(X|Y) = Y$ ir $\mathbb{E}(Y|X) = X$. Įrodykite, kad $\mathbb{E}(X - Y)^2 = 0$.

5. Tegu $X_1, X_2, \cdots$ nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai ir $\mathbb{E}|X| < \infty$. Apibrėžkime
$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$$
$$\mathcal{G}_n = \sigma(S_n, S_{n+1}, S_{n+2}, \cdots).$$
Įsitikinkite, kad $\mathbb{E}(X_1|\mathcal{G}_n) = n^{-1}S_n$.

6. Tegu $(Y_n, n \geq 1)$ yra nepriklausomų atsitiktinių dydžių tolygiai pasiskirsčiusių intervale $[-1, 1]$ seka. Tegu $S_0 = 0, S_n = Y_1 + \cdots + Y_n, n \geq 1$. Patikrinkite, ar duotoms sekoms X_n su kiekvienu $n \geq 1$ teisinga $\mathbb{E}(X_{n+1}|\sigma(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)) = X_n$.
   (a) $X_n = \sum_{k=1}^{n} S_{k-1}^2 Y_k, \quad X_0 = 0;$
   (b) $X_n = S_n^2 - \frac{n}{3}, \quad X_0 = 0.$