

Atsitiktinių procesų pratybos

Atsitiktiniai procesai (8-oji savaitė)

2013/14 m.m. pavasario semestras

1. Tarkime, X_1, X_2, \dots nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai. Kokios papildomos sąlygos reikalingos, kad atsitiktinis procesas ($X_n, n \geq 1$) būtų stipriai stacionarus?
2. Tegų Y_1, Y_2, \dots yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę a.d. įgyjantys reikšmes 1 ir -1 su tikimybe $\frac{1}{2}$. Nagrinėkime atsitiktinį procesą $\{X_t, t \geq 0\}$ intervale $[0, 1)$ lygų Y_1 , intervale $[1, 2)$ lygų Y_2 , intervale $[2, 3)$ lygų Y_3 ir t.t. Ar atsitiktinis procesas X_t yra stipriai stacionarus?
3. Tegų Y_1, Y_2, \dots yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę a.d. įgyjantys reikšmes 1 ir -1 su tikimybe $\frac{1}{2}$. Z yra tolygiai intervale $[0, 1]$ pasiskirstęs a.d. Z ir Y_1, Y_2, \dots yra nepriklausomi. Nagrinėkime a. procesą $\{X_t, t \geq 1\}$ intervale $[1, 1+Z)$ lygų Y_1 , intervale $[1+Z, 2+Z)$ lygų Y_2 , intervale $[2+Z, 3+Z)$ lygų Y_3 ir t.t.
 - a) Ar a. procesas X_t yra silpnai stacionarus?
 - b) Ištyrinkite, ar a. proceso X_t pirmos ir antros eilės skirstiniai yra invariantiški laiko postūmio atžvilgiu (t.y. ar X_{t_1} ir X_{t_1+h} skirstiniai sutampa, (X_{t_1}, X_{t_2}) ir (X_{t_1+h}, X_{t_2+h}) skirstiniai sutampa kokie bebūtų $1 \leq t_1 < t_2, h > 0$).
4. Tegų (X_t) stipriai stacionarus procesas, f - bet kokia integruojama funkcija, $t_1 < \dots < t_n$. Parodykite, kad $\mathbb{E}f(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ priklauso tik nuo laiko momentų skirtumų $t_2 - t_1, \dots, t_n - t_{n-1}$, bet ne nuo pačių laiko momentų t_1, \dots, t_n .
5. Tegų $\{X_n, -\infty < n < \infty\}$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę a.d. Ar procesas (Y_n)

$$Y_n = \frac{1}{2}X_n + \frac{1}{4}X_{n-1} + \frac{1}{8}X_{n-2}$$

yra stipriai stacionarus?

SAVARANKIŠKO DARBO UŽDAVINIAI:

1. Tegų X ir Ψ yra nepriklausomi a.d., Ψ yra tolygiai pasiskirstęs intervale $[0, 2\pi]$, o a.d. X tankis yra

$$f_X(x) = 2x^3 e^{-\frac{x^4}{2}}, x > 0.$$

Įsitinkite, kad procesas

$$X_t = X^2 \cos(2\pi t + \Psi), t \geq 0$$

yra Gausinis ir suraskite jo vidurkio bei kovariacinę funkcijas.

2. Tegų $\{X_t, t \geq 0\}$ a.proc. su nepriklausomais stacionariais prieaugiais ir $X(0) = 0$. Įrodykite, kad $\mathbb{E}X_t = \mu_1 t$, čia $\mu_1 = \mathbb{E}X_1$.
3. Tegų $\{X_t, t \geq 0\}$ a.proc. su nepriklausomais stacionariais prieaugiais ir $X(0) = 0$. Įrodykite, kad

(a) $\text{var}(X_t) = \sigma_1^2 t$;

(b) $\text{var}(X_t - X_s) = \sigma_1^2(t - s)$,

čia $\sigma_1^2 = \text{var}(X_1)$.