Atsitiktinių procesų pratybos

Atsitiktiniai procesai (7-oji savaitė)

2013/14 m.m. pavasario semestras

1. Apibrėžkime procesą
$$X_t = A\cos(\phi + \lambda t), t \geq 0,$$
čia A ir ϕ nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, $EA = 0, E(A^2) < \infty$, o ϕ tolygiai pasiskirstęs intervale $[0, 2\pi]$. Rasti vidurkio ir kovariacines funkcijas.

2. Tegul $\epsilon_n, n \geq 0$ yra seka nekoreliuotų a. d. su nuliniu vidurkiu ir vienetine dispersija. Apibrėžkime procesą
$$Y_n = \sum_{i=0}^{r} a_i \epsilon_{n-i}, \quad n \geq 0,$$
čia $a_1, a_2, \ldots, a_r$ yra realūs skaičiai. Įrodykite, kad procesas $(Y_n, n \geq 1)$ yra stacionarus ir raskite jo autokovariacinę funkciją.

3. Tarkime, $(Z_n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ yra nekoreliuoti atsitiktiniai dydžiai su nuliniu vidurkiu ir vienetine dispersija. Tegul a. procesas $Y = (Y_n)$ tenkina autoregresinę lygtį:
$$Y_n = \rho Y_{n-1} + Z_n, \quad n = 0, \pm 1, \ldots,$$
čia $|\rho| < 1$. Raskite proceso Y autokovariacinę funkciją.

4. Tegu U yra tolygusis intervale $[0, 1]$ a.d. Jo dvejetainis išsidėstymas yra $U = \sum_{i=1}^{\infty} X_i 2^{-i}$. Apibrėžkime
$$V_n = \sum_{i=1}^{\infty} X_{i+n} 2^{-i}, \quad n \geq 0.$$
Įrodykite, kad procesas $V = (V_n, n \geq 0)$ yra griežtai stacionarus ir raskite jo autokovariacinę funkciją.

5. Tegul $(X_n, n = 0, \pm 1, \ldots)$ yra stacionarus procesas su nuliniu vidurkiu ir kovariacine funkcija $c_X(m)$. Tegu
$$Y_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X_{n-k}, \quad n \in Z,$$
čia $\sum_k |a_k| < \infty$. Raskite proceso Y autokovariacinę funkciją $c_Y(m), m = 0, \pm 1, \ldots$

6. Apibrėžkime procesą
$$X(n) = \{X_n, \quad n \geq 1\},$$
čia X_n yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę a.d. su pasiskirstymo funkcija $F_X(x)$, vidurkiu μ ir dispersija σ^2. Raskite proceso vidurkio ir autokovariacines funkcijas.

7. Įrodykite, kad 2-os eilės stipriai stacionarus procesas yra ir silpnai stacionarus.

8. Tegu $\{X_n, \quad n \geq 0\}$ yra nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių a.d. seka su vidurkiu 0 ir dispersija 1. Įsitikinkite, kad šis procesas silpnai stacionarus.

9. Nagrinėkime atsitiktinį procesą $(X_t, -\infty < t < \infty)$, apibrėžtą tokiu būdu:
$$X_t = U\cos\omega t + V\sin\omega t,$$
čia ω yra konstanta, o U ir V a.d.

(a) Įsitikinkite, kad jei procesas (X_t) yra stacionarus, tai $\mathbb{E}U = \mathbb{E}V = 0$;

(b) Įrodykite, kad procesas (X_t) yra silpnai stacionarus tada ir tik tada, kai U ir V yra nekoreliuoti a.d. su lygiomis dispersijomis ir nuliniais vidurkiais, t.y. $\mathbb{E}(UV) = 0$, $\mathbb{E}U = \mathbb{E}V$ ir $\mathbb{E}(U^2) = \mathbb{E}(V^2) = \sigma^2$.

10. Nagrinėkime atsitiktinį procesą $(X_t, -\infty < t < \infty)$, apibrėžtą tokiu būdu:

$$X_t = U\cos t + V\sin t,$$

čia U ir V nepriklausomi a.d., įgyjantys reikšmes -2 ir 1 su tikimybėmis $\frac{1}{3}$ ir $\frac{2}{3}$ atitinkamai. Parodykite, kad taip apibrėžtas procesas yra silpnai stacionarus, bet nėra stipriai stacionarus.

11. Nagrinėkime atsitiktinį procesą $(X_t, -\infty < t < \infty)$, apibrėžtą tokiu būdu:

$$X_t = A\cos(\omega t + V),$$

čia A ir ω yra konstantos, o V tolygiai intervale $(-\pi, \pi)$ pasiskirstęs a.d. Įrodykite, kad taip apibrėžtas procesas yra silpnai stacionarus.

12. Atsitiktinis procesas X_t gali įgyti tik dvi reikšmes: 1 arba -1, $EX_t = 0, \forall t$. Proceso X_t ženklo pasikeitimų skaičius laikotarpyje $(t, t+h)$ yra Puasono a.d. su parametru ah, čia $a > 0$ konstanta. Raskite proceso X_t autokovariacinę funkciją ir nustatykite, ar procesas yra silpnai stacionarus.

UŽDUOTYS SAVARANKIŠKAM DARBUI: neišspręsti pratybų metu uždaviniai.