Atsitiktinių procesų pratybos

3-ia savaitė

Mato teorijos elementai (3 dalis)

1. Tarkime, $(X, \mathcal{A})$ mati erdvė, funkcija $g : X \to \mathbb{R}$ mati, o funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borelio. Įrodykite, kad $f \circ g : X \to \mathbb{R}$ yra mati funkcija.

2. Tarkime, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ erdvė su matu, funkcija $g : X \to \mathbb{R}$ mati, $\mathcal{B}$ - Borelio σ-algebra realiųjų skaičių tiesėje. Kiekvienai aibei $B \in \mathcal{B}$ apibrėžkime $\mu_g(B) := \mu(g^{-1}(B))$. Įrodykite, kad μ_g yra matas.

3. Tarkime, $(\mathbb{S}, \mathcal{S})$ ir $(\mathbb{V}, \mathcal{V})$ mačios erdvės, $f : \mathbb{S} \to \mathbb{V}$. Įrodykite, kad su bet kokia aibės $\mathbb{V}$ poaibių klase $\mathcal{A}$ galioja lygybė
$$\sigma(f^{-1}(\mathcal{A})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{A})).$$

4. Tarkime, $(\mathbb{S}, \mathcal{S})$ ir $(\mathbb{V}, \mathcal{V})$ mačios erdvės, $f : \mathbb{S} \to \mathbb{V}$. Įrodykite, kad jei $\mathcal{A}$ yra tokia aibės $\mathbb{V}$ poaibių klasė, kad $\mathcal{V} = \sigma(\mathcal{A})$ ir $f^{-1}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{S}$, tai f yra mati funkcija.

5. $(\mathbb{S}, \mathcal{S})$ ir $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ - mačios erdvės (antroji - realiųjų skaičių tiesė su Borelio σ-algebra). Tegu $f : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ mati funkcija. Įrodykite, kad aibė $L_t := \{x \in \mathbb{S} : f(x) = t\}$ yra mačioji.

UŽDUOTYS SAVARANKIŠKAM DARBUI:

(a) (1.25 pratimas)
(b) (1.28 pratimas)
(c) (1.29 pratimas)
(d) (1.30 pratimas)