

# Atsitiktinių procesų pratybos

2-a savaitė

Mato teorijos elementai (2 dalis)

1. (1.2 pratimas)

2. (1.7 pratimas)

3. (1.8 pratimas)

Parodžius, kad  $\mathcal{A}_0$  yra algebra, belieka įsitikinti, kad ji yra mažiausia iš algebrų, kuriai priklauso  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A} \subset 2^{\mathcal{S}}$ .

Apibrėžkime:

$$\mathcal{F}_1 := \{\mathcal{A} \text{ elementai ir } \mathcal{A} \text{ elementų papildiniai}\} = \{B_{ki} : B_{ki} \in \mathcal{A} \text{ arba } B_{ki}^c \in \mathcal{A}\}$$

$$\mathcal{F}_2 := \{\mathcal{F}_1 \text{ elementų baigtinės sankirtos}\} = \{B_k : B_k = \bigcap_{i=1}^{m_k} B_{ki}, m_k < \infty, B_{ki} \in \mathcal{F}_1\}$$

$$\mathcal{F}_3 := \{\mathcal{F}_2 \text{ elementų baigtinės sąjungos}\} = \{B : B = \bigcup_{k=1}^n B_k, n < \infty, B_k \in \mathcal{F}_2\}$$

Matome, kad taip apibrėžus  $\mathcal{F}_3 = \mathcal{A}_0$ .

Norint įsitikinti, kad  $\mathcal{A}_0$  yra mažiausia iš algebrų, kuriai priklauso  $\mathcal{A}$ , pakanka parodyti, kad  $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{F}$ , čia  $\mathcal{F}$  yra bet kokia algebra, kuriai priklauso  $\mathcal{A}$ . Taigi turime, kad

(\*)  $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$  (t.y.  $\mathcal{A}$  elementai priklauso  $\mathcal{F}$ ),

(\*\*)  $\mathcal{F}$  yra algebra.

$\mathcal{F}_1$  elementai priklauso  $\mathcal{F}$  remiantis (\*), (\*\*) ir antrąja algebros apibrėžimo savybe. Vadinasi,  $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$ . Iš čia ir remiantis (\*\*) bei tuo, kad algebra uždara baigtinės sankirtos operacijos atžvilgiu, gauname, kad  $\mathcal{F}_2$  elementai priklauso  $\mathcal{F}$ . Vadinasi,  $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}$ . Iš čia ir remiantis (\*\*) bei trečiąja algebros apibrėžimo savybe, gauname, kad  $\mathcal{F}_3$  elementai priklauso  $\mathcal{F}$ . Vadinasi  $\mathcal{F}_3 \subset \mathcal{F}$ . Kadangi  $\mathcal{F}_3 = \mathcal{A}_0$  gavome tai, ką ir reikėjo įrodyti.

4. (1.12 pratimas (b), (c))

---

UŽDUOTYS SAVARANKIŠKAM DARBUI:

(a) (1.9 pratimas)

(b) (1.10 pratimas)

(c) (1.11 pratimas)

(d) (1.21 pratimas)