Diskrečioji matematika, IT 1 kursas

Pagal Hein'o vadovėlio 1 skyrių
(Panaudoti R. Petuchovo failai)

Prof. Eugenijus Manstavičius

Vilniaus universitetas

2017

1.1 Įrodymo abėcėlė

Nagrinėsime teiginius, kurie yra *tiesa* arba *netiesa* (true or false). Jeigu A ir B yra du teiginiai, tada:

„not A" – teiginio A *neiginys*;

„A and B" – teiginių A ir B *konjunkcija*;

„A or B" – teiginių A ir B *disjunkcija*.

Teiginiams suprasti sudarinėjame jų *teisingumo lenteles*.

Sąlyginiai teiginiai

A	B	If A then B	If not B then not A	If B then A
T	T	T	T	T
F	T	T	T	F
T	F	F	F	T
F	F	T	T	T

Turime

„If A then B” ≡ „If not B then not A” (pirmojo apgrąža).

Pirmame teiginyje A yra *prielaida*, o B *išvada*.
Teiginiai su ta pačia teisingumo lentele vadinami *ekvivalenčiaisiais*.

Teiginys „If B then A” vadinamas *priešinguoju* teiginiui „If A then B”.

Kaip įrodinėjama?

Panagrinėsime keletą įrodymų, susijusių su *sveikaisiais* skaičiais. Reikalingos sąvokos:

- Sveikieji skaičiai: $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$;
- Nelyginiai skaičiai: $\ldots, -3, -1, 1, 3, \ldots$;
- Lyginiai skaičiai: $\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots$.
- Sakome, m dalija n ir rašome $m|n$, jeigu $m \neq 0$ ir $n = km$, o k yra sveikasis skaičius.
- Skaičius p yra vadinamas pirminiu, jeigu $p > 1$ ir vieninteliai jo sveikieji teigiami dalikliai yra 1 ir p.

Perranka

Kai kurie teiginiai gali būti įrodyti atrankos būdu, tikrinant baigtinį atvejų skaičių.

1 pavyzdys. Tarp skaičių 200 ir 220 yra pirminis skaičius.

Įrodymas. Imdami skaičius iš eilės nuo 200 iki 220, išsiaiškiname, jog 211 yra pirminis skaičius, todėl teiginys teisingas. □

2 pavyzdys. Kiekvienas iš skaičių 288, 198 ir 387 dalijasi iš devynių.

Įrodymas. Patikriname, kad 9 dalija kiekvieną skaičių. □

Sąlyginio teiginio įrodymas

Tariame, kad prielaida yra tiesa, ir stengiamės gauti išvadą, įrodyti, kad ji yra teisnga.

3 pavyzdys. Jeigu x yra nelyginis skaičius, o y lyginis, tada $x - y$ yra nelyginis.

Įrodymas. Pagal prielaidą, turime $x = 2k + 1$ ir $y = 2m$; čia k, m yra sveikieji. Tokiu atveju

$$x - y = 2k + 1 - 2m = 2(k - m) + 1,$$

o tai yra nelyginis skaičius, nes $k - m$ yra sveikasis skaičius. $\square$

4 pavyzdys. Jeigu x nelyginis, tai x^2 yra nelyginis skaičius.

Įrodymas. Pagal prielaidą, $x = 2k + 1$. Todėl

$$\begin{aligned} x^2 &= (2k+1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1, \end{aligned}$$

o tai yra nelyginis skaičius, nes $2k^2 + 2k$ yra sveikasis. □

5 pavyzdys. Jeigu x^2 nelyginis, tai x yra nelyginis skaičius.

Įrodymas. Ekvivalentus tvirtinimas šiam tvirtinimui yra

„Jeigu x yra lyginis, tai x^2 yra lyginis skaičius",

todėl pakanka įrodyti pastarąjį teiginį. □

Teiginio „... tada ir tik tada ...” įrodymas

Teiginys

„A tada ir tik tada, jeigu B”

(trumpinys A $\Leftrightarrow$ B) reiškia

„jeigu A, tai B”

ir

„jeigu B, tai A”.

Todėl šiuo atveju reikalingi du įrodymai. Kartais šie du įrodymai gali būti apjungti į vieną

„A $\Leftrightarrow$ C $\Leftrightarrow$ D $\Leftrightarrow$ ... $\Leftrightarrow$ B”,

kai kiekvienas teiginys aiškus iš prieš jį einančio.

6 pavyzdys. x yra lyginis tada ir tik tada, kai $x^2 - 2x + 1$ yra nelyginis skaičius.

Įrodymas.

$$
\begin{aligned}
x \text{ yra lyginis} &\Leftrightarrow x = 2k, \text{ čia k yra sveikasis} \qquad (\textit{apibrėžimas}) \\
&\Leftrightarrow x - 1 = 2k - 1 \qquad (\textit{naudojamės aritmetika}) \\
&\Leftrightarrow x - 1 = 2(k - 1) + 1 \qquad (\textit{aritmetika}) \\
&\Leftrightarrow x - 1 \text{ yra nelyginis skaičius} \qquad (\textit{apibrėžimas}) \\
&\Leftrightarrow (x - 1)^2 \text{ yra nelyginis skaičius} \qquad (\textit{jau nagrinėta}) \\
&\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \text{ yra nelyginis skaičius} \qquad (\textit{algebra})
\end{aligned}
$$

□

Įrodymas prieštaros būdu

Ap. Klaidingas teiginys vadinamas prieštara.

Pvz., teiginys „S ir *not* S" yra prieštara su bet kuriuo teiginiu S.

Galime įsitikinti (panaudokite teisingumo lenteles!), kad

„jeigu A, tai B"   yra ekvivalentus „jeigu A ir *not* B, yra prieštara".

Tad, norint įrodyti pirmąjį teiginį, pakanka įrodyti antrąjį. Šis įrodymo metodas vadinamas įrodymu prieštaros būdu.

1 pavyzdys. Jeigu x^2 yra nelyginis, tai x yra nelyginis skaičius.

Įrodymas: Tarkime, x yra lyginis. Tada $x = 2k$, čia k yra sveikasis skaičius, ir

$$x^2 = (2k)^2 = 2(2k^2)$$

yra lyginis skaičius. Vadinasi, x^2 yra nelyginis ir lyginis skaičius, kas yra prieštara. □

2 pavyzdys. Jeigu $2|5n$, tai n yra lyginis.

Įrodymas: Tarkime, kad n yra nelyginis. Turime $5n = 2d$ ir $n = 2k + 1$. Todėl

$$2d = 5n = 5(2k + 1) = 10k + 5.$$

Iš čia išplaukia

$$5 = 2d - 10k = 2(d - 5k).$$

Gavome, kad 5 yra lyginis skaičius – prieštara. □

1.2 Aibės

Apibr. Aibė yra elementų rinkinys.

- $x \in S$ arba $x \notin S$.
- $\{x_1, \ldots, x_n\}$ yra aibė, kurią sudaro elementai $x_1, \ldots, x_n$.
- Tuščia aibė yra aibė, kuri neturi elementų. Ją žymime $\{\}$ arba $\emptyset$.
- $\{a\}$ - vieno elemento aibė, $\{a, b\}$ - dviejų elementų aibė ir t.t.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\},$$

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\},$$

$$\mathbb{Q} = \{\tfrac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z} \text{ ir } n \neq 0,\ n \in \mathbb{N}\},$$

Tapačios aibės

Apibr. Jeigu aibes A ir B sudaro tie patys elementai, tada sakome, kad aibės A ir B yra lygios ir rašome $A = B$.

1 pvz., $\{a, b, c\} = \{c, b, a\}$ (neturi tvarkos sąryšio).

2 pvz., $\{a, a, b, c\} = \{a, b, c\}$ (neturi pasikartojančių elementų).

Tegul S yra savybė, tada $\{x \mid S\}$ reiškia aibę, kurią sudaro elementai x, tenkinantys savybę S.

3 pvz., $\{x \mid x = 2k + 1, k \in \mathbb{N}\} = \{1, 3, 5, \ldots\}$.

Poaibiai

Ap. Jeigu kiekvienas aibės A elementas priklauso ir aibei B, sakome, kad aibė A yra aibės B poaibis ir rašome $A \subset B$.

Pavyzdžiai:

1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
2. $S \subset S$; čia S bet kokia aibė.
3. $\emptyset \subset S$; čia S bet kuri aibė.

Ap. Visų aibės S poaibių aibę žymime $\mathrm{power}(S)$.

4. $\mathrm{power}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

Dažnai vartojamas ir žymuo $\mathrm{power}(A) = 2^A$, susisijęs su poaibių skaičiumi.

Tegul $A = \{2k + 7 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ir $B = \{4k + 3 \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Klausimas. Ar $A \subset B$?

Atsakymas: Ne, nes $9 \in A$, bet $9 \notin B$.

Klausimas. Ar $B \subset A$?

Atsakymas: Taip.

Įrodymas. Tegul $x = 4k + 3 \in B$, čia $k \in \mathbb{Z}$. Turime

$$\begin{aligned} x &= 4k + 3 \\ &= 4k - 4 + 7 \\ &= 2(2k - 2) + 7 \end{aligned}$$

ir todėl $x \in A$. Matome, kad $B \subset A$. $\square$

Lygybė panaudojant poaibio sąvoką:

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \textbf{ ir } B \subset A.$$

Pavyzdys. Tegul $A = \{2k + 5 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ir $B = \{2k + 3 \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Įrodysime, kad $A = B$.

Įrodymas: Iš pradžių parodysime, kad $A \subset B$. Tegul $x \in A$. Tada

$$x = 2k + 5 = 2(k + 1) + 3 \in B.$$

Matome, kad $A \subset B$. Dabar įsitikinsime, kad $B \subset A$. Tegul $y \in B$. Tada

$$y = 2k + 3 = 2(k - 1) + 5 \in A.$$

Gavome, kad $B \subset A$. Taigi $A \subset B$ ir $B \subset A$, todėl $A = B$. $\square$

Aibių veiksmai

Sąjunga: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ arba } x \in B\}$.

Sankirta: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ ir } x \in B\}$.

Skirtumas: $A - B = \{x \mid x \in A \text{ ir } x \notin B\}$.

Simetrinis skirtumas:

$A \oplus B = \{x \mid x \in A \text{ arba } x \in B, \text{ bet ne } x \in A \text{ ir } x \in B\}$.

Papildinys: Tarkime, kad turime universalią aibę U ir $A \subset U$, tada rašome

$$A' = U - A$$

ir A' vadiname aibės A papildiniu.

Pavyzdys. Tegul

$$D_n = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ ir } x|n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tada

1. $D_0 = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N} - \{0\}$, $D_5 = \{1, 5\}$, $D_6 = \{1, 2, 3, 6\}$, $D_9 = \{1, 3, 9\}$.
2. $D_5 \cup D_6 = \{1, 2, 3, 5, 6\}$.
3. $D_5 \cap D_6 = \{1\}$.
4. $D_9 - D_6 = \{9\}$.
5. $D_5 \oplus D_6 = \{2, 3, 5, 6\}$.
6. Tegul $\mathbb{N}$ yra universali aibė. Tada $D_0' = \mathbb{N} - D_0 = \{0\}$ ir $\{0\}' = D_0$.

Veno (Venn'o) digramos:....

Užduotis. Turime trijų aibių A, B, C Veno diagramas. Užrašykite užtušuotos srities išraišką veiksmų su aibėmis pavidalu.

Aibių veiksmų savybės

- Komutatyvumas:
  $A \cup B = B \cup A$ ir $A \cap B = B \cap A$.
- Distributyvumas:
  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ir
  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- Absorbcija:
  $A \cup (A \cap B) = A$ ir $A \cap (A \cup B) = A$.
- De Morgano dėsniai:
  $(A \cup B)' = A' \cap B'$ ir $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

Patikrinkime vieną iš jų:...

Aibės elementų skaičiavimas

Ap. Aibės S elementų skaičių vadiname jos dydžiu arba galia ir žymime $|S|$ arba $\#S$.

- Rėčio principas: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
- Skirtumo taisyklė: $|A - B| = |A| - |A \cap B|$.

1 užduotis. Raskite formulę trijų aibių sąjungos galiai $|A \cup B \cup C|$ apskaičiuoti.

Atsakymas:
$|A \cup B \cup C| = |A|+|B|+|C|-|B \cap C|-|A \cap B|-|A \cap C|+|A \cap B \cap C|$.

2 užduotis. Tegul A, B ir C yra pieštukų aibės iš universaliosios aibės U. Žinoma, kad $|A| = 20$, $|B| = 40$, $|C| = 60$, $|A \cap B| = 10$, $|A \cap C| = 8$, $|B \cap C| = 6$ ir $|U| = 100$. Įvertinkite aibės $A \cap B \cap C$ galią.

Atsakymas: $|A \cap B \cap C| \leq 4$.

Ap. Multiaibe vadiname elementų rinkinį, kuriam tas pats elementas gali priklausyti daugiau nei vieną kartą.

Iš apibrėžimo seka, kad visos aibės yra multiaibės, bet ne visos multiaibės yra aibės.

Pavyzdžiui, turime multiaibes

$$[a, c, c, a] = [c, a, a, c] \neq [c, a, a].$$

Matome, tvarka tarp elementų nėra svarbi, bet svarbus skirtingų elementų skaičius.

Multiaibių sąjunga ir sankirta apibrėžta tokiu būdu, kad imamas atitinkamai didžiausias ir mažiausias pasikartojančių elementų skaičius.

Užduotis. Tegul

$$A = [l, a, b, a, d, i, e, n, a]$$

ir

$$B = [l, a, b, a, s, l, a, b, a, s].$$

Išrašysime multiaibių $A \cup B$ ir $A \cap B$ elementus.

Ats.:

$$A \cup B = [l, l, a, a, a, a, b, b, s, s, d, i, e, n],$$

o

$$A \cap B = [l, a, a, a, b].$$

1.3 Sutvarkytosios struktūros

Ap. Elementų pora $a \in A$ ir $b \in B$ vadinama sutvarkytąja ir žymima (a, b), jeigu atsižvelgiama į jų tvarką poroje.

$$(a, b,) \neq (b, a), \text{ jei } a \neq b.$$

$$(a, b,) = (c, d), \text{ jei } a = c \text{ ir } b = d.$$

Ap. Aibių A ir B Dekarto sandauga vadiname aibę

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ ir } y \in B\}.$$

Galima apibendrinti. Pavyzdžiui,

$$A \times B \times C = \{(x, y, z) \mid x \in A,\ y \in B,\ z \in C\}.$$

Ap. Sutvarkytuosius rinkinius vadinkime *gretiniais*, ang. *tuples*. Žymenys:

- $A^0 = \{()\}; \quad A^1 = \{(x) \mid x \in A\}, \ldots$
- $A^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in A\}.$

Klausimas. Ar $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$?

Gretinyje $(x_1, \ldots, x_n)$ elementų eilė; yra 3-asis ar 10-asis... Jų radimui sugaištama vienodai. Kai elementų numeracija sutvarkytame rinkinyje neaiški, vartojama kita sąvoka: *sąrašas*.

Apdorojant sąrašą, tik pirmojo ar paskutinio elemento radimas užtrunka tiek pat laiko.

Pavyzdžiui, $\langle a, b, a, c\rangle$ sąrašas, kurį sudaro 4 elementai, o $\langle\rangle$ tuščias sąrašas.

Operacijos su sąrašais yra *head*, *tail* ir *cons*:

- $head(\langle a, b, a, c\rangle)=a$,
- $tail(\langle a, b, a, c\rangle)=\langle b, a, c\rangle$,
- $cons(a, \langle b, a, c\rangle)=\langle a, b, a, c\rangle$.

Aibę visų sąrašų, kurių visi elementai iš aibės A, žymime $lists(A)$.

Klausimas. Tegul $L = \langle\langle a\rangle, b, \langle c, d\rangle\rangle$. Kas čia $tail(L)$?

Ap. Žodžiai, eilutės (angl. *strings, words*) yra panašūs į gretinius ir sąrašus, tik užrašomi kaip greta einantys vienas po kito elementai iš aibės, vadinamos abėcėle.

Pavyzdys. Jeigu $A = \{a, b\}$ yra abėcėlė, tai turime tokius žodžius virš aibės A:

$$a, b, aa, ba, bb, aaa, baa, \ldots$$

Ap. Dviejų žodžių junginiu vadiname žodį, kurio pradžią sudaro pirmasis žodis, o pabaigą antrasis.

Pavyzdžiui, žodžių ab ir bab junginys yra $abbab$.
Pats veiksmas – *susiejimas, sujungimas*, ang. *concatenation, juxtaposition.*

- Tuščiasis žodis (eilutė) žymimas Λ ($\emptyset$ – tuščioji aibė).
- Su bet kuriuo žodžiu z, turime $z\Lambda = \Lambda z = z$.
- z^n yra žodis, kurį sudaro n vienodų raidžių:

$$z^0 = \Lambda,\ z^1 = z,\ z^2 = zz \text{ ir t.t.}$$

Pavyzdys. $(ab)^3 = ababab$.

Kalbos

Ap. Kalba vadiname žodžių aibę, kuri paprastai sudaroma virš abėcėlės (raidžių aibės).

Pavyzdys. $\{ab^na \mid n \in \mathbb{N}\} = \{aa, aba, abba, abbba, \ldots\}$ yra kalba virš $\{a, b\}$.

Jeigu A abėcėlė, tai aibė visų žodžių virš A žymima A^*.

Pavyzdys. Turime tokias kalbas virš A: $\emptyset$, $\{\Lambda\}$, A, A^*, ...

Kalbų veiksmai

Tegul L ir M yra kalbos.

Ap. Kalbų L ir M sandauga yra kalba

$$LM = \{st \mid s \in L \text{ ir } t \in M\}.$$

Žymenys:

- $L^0 = \{\Lambda\}, \quad \text{net} \quad L = \emptyset \quad \text{atveju}$
- $L^n = \{s_1 \dots s_n \mid s_i \in L,\ i \in \overline{1, n}\}.$

Klausimas. Kam lygios sandaugos $L\emptyset$ ir $L\{\Lambda\}$? Ats.: $\emptyset$ ir L.

Užduotis. Raskite kalbą L, jei

$$\{\Lambda, a, b\}L = \{\Lambda, a, b, aa, ba, aba, bba\}.$$

Ats.: $L = \{\Lambda, a, ba\}$.

Ap. Kalbos L uždariniu vadiname aibę

$$L^* = L^0 \cup L^1 \cup \ldots \cup L^n \cup \ldots$$

1 klausimas. Kokie žodžiai sudaro kalbas $\{\Lambda\}^*$ ir $\emptyset^*$? Ats.: Λ.

2 klausimas. Kokia yra atsitiktinai paimto žodžio $x \in L^*(ML)^*$ struktūra?

Sprendimas. Apibūdinsime x žodžiais iš L ir M:

1. Kadangi $x \in L^*(ML)^*$, tai $x = uv$, $u \in L^*$ ir $v \in (ML)^*$.
2. Kadangi $u \in L^*$, tai $u = \Lambda$ arba $u = s_1 \ldots s_n$, čia $s_i \in L$.
3. Kadangi $v \in (ML)^*$, tai $v = \Lambda$ arba $v = r_1 t_1 \ldots r_k t_k$, $r_i \in M$, $t_i \in L$.

Ats.: x turi vieną iš keturių pavidalų: Λ, $s_1 \ldots s_n$, $r_1 t_1 \ldots r_k t_k$ arba $s_1 \ldots s_n r_1 t_1 \ldots r_k t_k$; čia $s_i, t_i \in L$, o $r_i \in M$.

Sąryšis

Ap. *Sąryšis* yra gretinių aibė;
kitaip sakant, – aibių Dekarto sandaugos poaibis. Pvz.,

$$
\begin{aligned}
R &= \{(0,0),(1,1),(2,4),(3,9),\ldots,(n,n^2),\ldots\} \\
&= \{(n,n^2) \mid n \in \mathbb{N}\} \\
&\subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}. \qquad \text{(binarusis sąryšis)}
\end{aligned}
$$

Galimi žymenys: $(2,4) \in R$, $R(2,4)$ arba $2R4$.

Sąryšių duomenų bazė

Ap. *Sąryšių duomenų baze* vadiname sąryšį (aibę gretinių), kurių elementai turi savo asocijuotus vardus, vadinamus *atributais*.

Pavyzdžiui. Tegul

$S = \{(x, y, z) \mid x - \text{Vardas},\ y - \text{Specialybė},\ z - \text{Kreditai}\}.$

a) Kurie studentai studijuoja kompiuterines sistemas?

$\{x \mid (x, \text{kompiuterinės sistemos}, z) \in S, z \in \mathbb{N}\}.$

b) Kiek yra studentų, studijuojančių matematiką ir surinkusių ne mažiau kaip 90 kreditų?

$|\{x \mid (x, \text{matematika}, z) \in S \text{ ir } z \geq 90\}|.$

c) Ką studijuoja Ema Linkoln?

$\{y \mid (\text{Ema Linkoln}, y, z) \in S,\ z \in \mathbb{N}\}.$

Gretinių skaičiavimas

Daugybos taisyklė:

$$|A \times B| = |A||B|$$

ir

$$|A^n| = |A|^n.$$

Pavyzdys. Tegul $A = \{a, b\}$ ir $B = \{1, 2, 3\}$. Tada

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$

ir

$$|A \times B| = |A||B| = 2 \cdot 3 = 6.$$

Pavyzdys. Kiek yra žodžių virš $A = \{a, b, c\}$, kuriuos sudaro aštuonios raidės ir kurie prasideda raidėmis a arba c, ir turi bent vieną raidę b?

Sprendimas: Tegul U yra 8 ilgio žodžių aibė, kurioje jie prasideda raide a arba c, o $B \subset U$ yra 8 ilgio žodžių aibė, kurioje jie neturi raidės b. Tada ieškomas dydis yra $|U - B|$,

$$
\begin{aligned}
|U - B| &= |U| - |U \cap B| \\
&= |U| - |B| \\
&= |\{a, c\}||A|^7 - |\{a, c\}|^8 \\
&= (2)3^7 - 2^8 \\
&= 4118.
\end{aligned}
$$

1.4 Grafai ir medžiai

Ap. Grafu vadiname aibių porą

$$(V, E);$$

čia V - viršūnių aibė, o E - briaunų aibė. Briaunų aibę sudaro 2 galios aibės, kurių elementai yra viršūnės iš V.

1 pavyzdys. Turime grafą $G = (V, E)$, kurio viršūnių aibė

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\},$$

o briaunų aibė

$$E = \{\{v_1, v_5\}, \{v_2, v_5\}, \{v_2, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}\}.$$

2 pavyzdys. Nubrėšime grafą, kurio viršūnės atitinka Pietų Amerikos šalis, kurių krantus skalauja Ramusis vandenynas, ir joms kaimynines šalis, o briaunos jungia tik viršūnes, kurios yra kaimyninių šalių.

V={Co, V, E, Br, P, Bo, Ch, A}
B={ {Co, V},{Co, E}, . . . }

Ap. Grafas (V, E) tampa digrafu, kai nustatome viso jo briaunų kryptis.

3 pavyzdys. Turime digrafą $D = (V, E)$, kurio viršūnių aibė

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\},$$

o briaunų aibė

$$E = \{(v_1, v_5), (v_5, v_2), (v_2, v_4), (v_4, v_3), (v_3, v_2)\};$$

čia $(v_1, v_5) \neq (v_5, v_1)$.

Elementarios grafų teorijos sąvokos

Gretimosios viršūnės – dvi viršūnės, kurias jungia briauna.

Kelias – gretimų viršūnių seka.

Trasa – kelias, kuriame nepasikartoja briaunos.

Takas – kelias, kuriame nepasikartoja viršūnės.

Kelio ilgis – kelią sudarančių briaunų skaičius, įskaitant pasikartojančias briaunas.

Ciklas – uždaras takas, t.y., kuris prasideda ir baigiasi toje pačioje viršūnėje.

Grafo pografis – grafas, kurio viršūnių ir briaunų aibės atitinkamai yra nagrinėjamo grafo viršūnių ir briaunų aibių poaibiai.

n-spalvis grafas – grafas, kurio viršūnės gali būti nuspalvintos n skirtingų spalvų tokiu būdu, kad gretimos būtų skirtingų spalvų.

Chromatusis skaičius – tai mažiausias spalvų skaičius, kurio pakanka grafo viršūnes nuspalvinti taip, kad gretimos būtų skirtingų spalvų.

1 klausimas. Antrame pavyzdyje, kokio ilgio ilgiausia trasa iš A į V, kuri neturi ciklų?

Ats.: Ilgio 7. Pvz., ABrBoChPECoV.

2 klausimas. Antrame pavyzdyje, koks grafo chromatusis skaičius?
Ats.: 3.

Kelias per visas grafo viršūnes

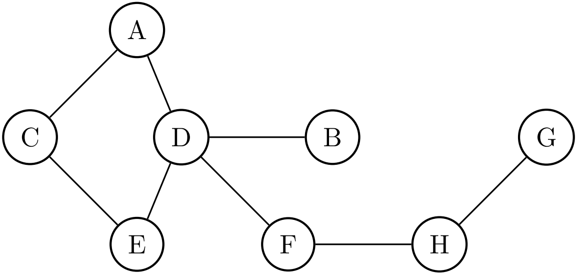
Atraskime visas viršūnes x, kurioms yra kelias iš v į x.
Čia $v, x \in V$, o $G = (V, E)$ yra grafas.

Paieška platyn (*Breadth-First*): Jeigu grafas turi n viršūnių, tai pradedame nuo viršūnės v ir toliau elgiamės tokiu būdu

for k:=0 **to** n-1 **do** visit(v,k) **od**;

čia visit(v,k) reiškia aplankome visas neaplankytas viršūnes x, jeigu tik yra k ilgio kelias iš v į x.

Paprastai tariant, Breadth-First prisilaiko strategijos – visų pirma aplankomos viršūnės, esančios arčiausiai nuo pradinės.



1 užduotis. Kokia tvarka atrandamos viršūnės pavyzdyje taikant breadth-first, jei pradedama nuo viršūnės F. Vienas iš atsakymų: F,H,D,G,B,A,E,C.

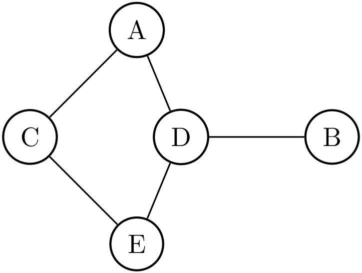
2 užduotis. O jei pradedama nuo viršūnėje C? Vienas iš atsakymų: C,A,E,D,B,F,H,G.

Paieška gilyn (*Depth-First*): Pradedame nuo viršūnės v ir iškviečiame procedūrą D(v), kuri apibrėžta taip:

D(v): **if** v viršūnė nebuvo aplankyta **then**
visit(v);
for kiekvienai briaunai iš v į x **do** D(x) **od**
fi

3 užduotis. Kokia tvarka atrandamos viršūnės pavyzdyje taikant depth-first, jei pradedama nuo viršūnės F. Vienas iš atsakymų: F,H,G,D,B,A,C,E.

4 užduotis. O jei pradedama viršūnėje E. Vienas iš atsakymų: E,D,F,H,G,A,C,B.

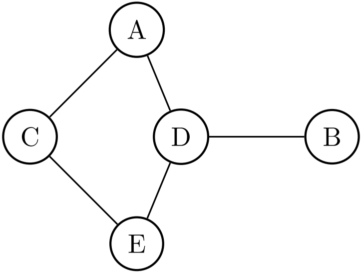


Grafus kompiuterin galime įvesti **gretimumo sąrašais.** Šiam pavyzdžiui:

$$\mathit{Adj}[A] =< C, D >, \quad \mathit{Adj}[B] =< D >, \quad \mathit{Adj}[C] =< A, E >,$$

$$\mathit{Adj}[D] =< A, B, E >, \quad \mathit{Adj}[E] =< C, D >$$

Didesnis *viršūnės laipsnis* (gretimų viršūnių skaičius) – ilgesnis sąrašas.



Grafą į kompiuterį galime įvesti **gretimumo matrica** (kvadratine 0 ir 1-ų lentele). Tokiam pavyzdžiui turėtume:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

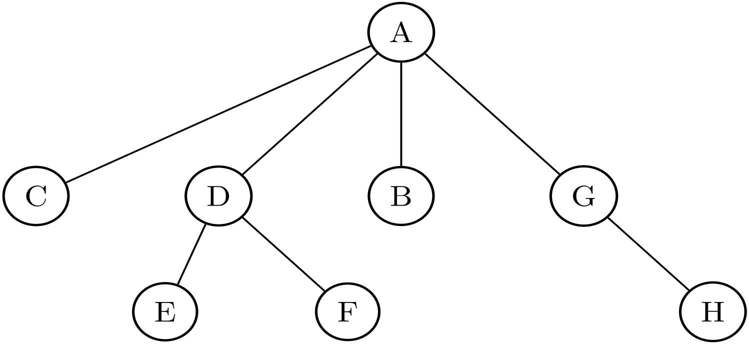
Čia viršūnės sunumeruotos pagal abėcėlę. Jas atitinka matricos eilutės. Jei dar būtų $\{A, A\}$ briauna (*kilpa*), tai kairiajame viršutiniame kampe tektų įrašyti 2. Kodėl?

Medžiai

Ap. Jungiuoju grafu vadiname grafą, kuris turi kelią tarp bet kurių dviejų viršūnių.

Ap. Jungų beciklį grafą vadiname medžiu.

Medžio pavyzdys:



Keletas apibrėžimų, susijusių su medžiais:

<u>Šaknis</u> – viena viršūnė, kuriai suteiktas ypatingas vaidmuo. Pavyzdyje – tegul viršutinė viršūnė A.

Tada keliaujant iš jos, kitos pasiekiamos vieninteliu (!) taku. Todėl atsiranda tvarka, galimi apibrėžimai:

<u>Vaikai</u> – viršūnės, esančios žemiau viršūnės.

<u>Tėvas</u> – viršūnės gretima viršūnė, esanti per žingsnį aukščiau jos.

<u>Lapai</u> – pirmojo laipsnio viršūnės;
viršūnės, neturinčios vaikų (žemiausiai esančios).

<u>Medžio ilgis</u> – ilgiausio tako, prasidedančio šaknyje ir pasibaigiančio lape, ilgis.

Vienas iš būdų pateikti medį yra sąrašas, kurio *head* yra šio medžio šaknis, o *tail* - pografių sąrašas, kuriame kiekvienas pografis pateiktas tuo pačiu principu.

Pavyzdžiui, anksčiau pavaizduotas medis, užrašytas kaip sąrašas, atrodo taip.

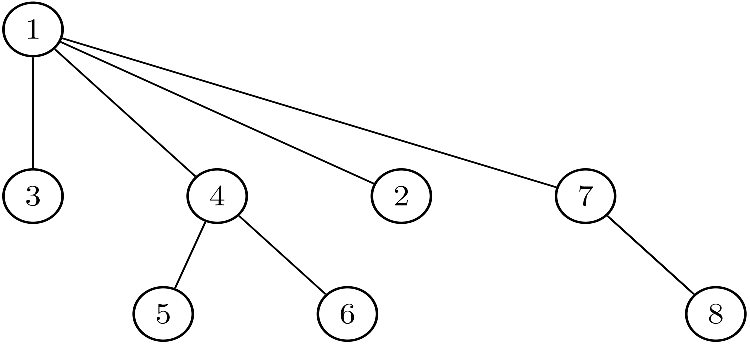
$$\langle A, \langle C\rangle, \langle D, \langle E\rangle, \langle F\rangle\rangle, \langle B\rangle, \langle G, \langle H\rangle\rangle\rangle.$$

Medžio Priūferio kodas - viršūnių numerių sąrašas.
Algoritmas, kai medžio viršūnės jau sunumeruotos nuo 1 iki n:

- Raskite mažiausio numerio lapą;
- Kodą pradėkite to lapo gretimosios viršūnės numeriu;
- Iš medžio atimkite išnagrinėtą briauną ir jungiančiąją briauną;
- Kartokite procedūrą su taip iš eilės gautaisiais medžiais, kol gausite $n-2$ skaičių sąrašą.

Informacija apie dvi likusias viršūnes perteklinė.

Medžio pavyzdyje Priūferio kodas:



Ats.: $\alpha := < 1, 1, 4, 4, 1, 7 >$

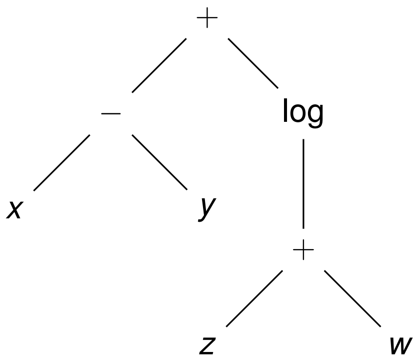
Atvirkštinis algoritmas lygina skaičius kode $\alpha =< a_1, a_2, \dots, a_{n-2} >$ ir aibėje $V = \{1, 2, \dots, n\}$.

- Raskite mažiausią V skaičių, nepatekusį į kodą α, tegu v_1;
- Išveskite briauną $\{a_1, v_1\}$;
- Apibrėžkite $V_1 = V - \{v_1\}$ ir $\alpha_1 = \alpha - \{a_1\}$;
- Kartokite pirmąją procedūrą su V_1 ir α_1; taip pat iš eilės su $V_2, \dots, V_{n-2}$ ir $\alpha_2, \dots, \alpha_{n-2}$;
- Išsėmę kodą, sujunkite porą viršūnių, likusių V_{n-2}.

Atstatykite pavyzdžio medį pagal anksčiau gautą Priūferio kodą

$$\alpha :=< 1, 1, 4, 4, 1, 7 >$$

Kiekvienas algebrinis reiškinys gali būti pavaizduotas kaip medis. Pvz., nubrėšime reiškinio $(x - y) + \log(z + w)$ medį.



Užduotis. Apkeliaukite šį medį depth-first (iš kairės į dešinę) principu.
Atsakymas: $+ - xy \log + zw$.

Binarieji medžiai

Ap. Binariuoju medžiu vadiname tuščią medį $\langle\rangle$ arba medį, kurio kiekviena viršūnė turi du pografius, kurie yra binarieji medžiai.

Pastebime, kad binariojo medžio apibrėžimas yra rekurentinis.

Ap. Binariojo medžio viršūnių pografiai vadinami kairiuoju ir dešiniuoju.

Jeigu binarusis medis netuščias, mes jį galime pateikti kaip sąrašą

$$\langle L, x, R\rangle,$$

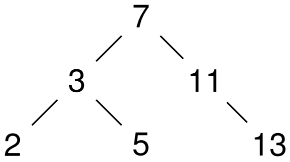
kuriame x yra šaknis, o L ir R yra atitinkamai kairysis ir dešinysis x pografiai.

Pavyzdys. Binarusis medis su vienintele viršūne x turi pavidalą

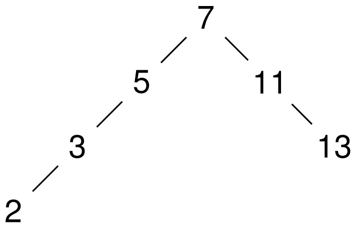
$$\langle\langle\rangle, x, \langle\rangle\rangle.$$

Binarusis paieškos medis pateikia sutvarkytą informaciją. Jame pradinė ir tolimesnė informacija yra atitinkamai viršūnės kairiajame ir dešiniajame pografiuose.

Pavyzdys. Nubrėšime pirmųjų šešių pirminių skaičių paieškos binarųjį medį.



arba

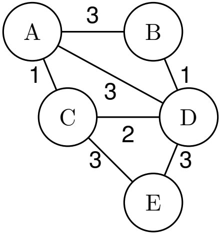


Dengiantysis medis

Ap. Jungaus grafo dengiančiuoju medžiu vadiname medį, kurio viršūnės sutampa su grafo viršūnėmis ir kurio briaunų aibė yra grafo briaunų aibės poaibis.

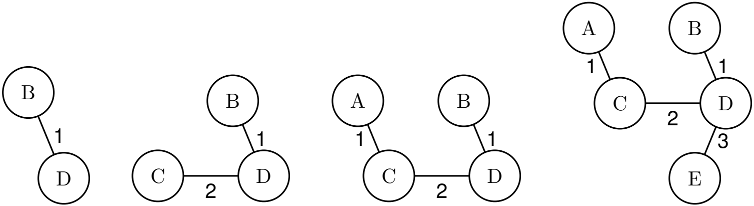
Ap. Minimalus dengiantysis medis – grafo dengiantysis medis, kurio briaunų svorių suma yra mažiausia.

Pavyzdys. Taikydami Primo algoritmą, rasime grafo

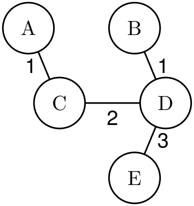


minimalų dengiantįjį medį. Sutariame pradėti nuo viršūnės D.

Sprendimas:



Ats.:



arba