RINKTINIAI KOMBINATORIKOS IR GRAFŲ TEORIJOS SKYRIAI
Pasirenkamasis kursas: III. Ekstremalioji aibių teorija
2017 m. rudens semestras

Parengė: **Eugenijus Manstavičius**

1. Įvadas

Nagrinėsime įvairius diskrečiosios matematikos objektus. Demonstruosime metodus, kuriais gaunami tam tikra prasme nepagerinami arba artimi tokiems rezultatai. Jų kokybę atskleisime sukonstravę pavyzdžius. Vadovaujamasi paradigma – pirminės idėjos ir įrodymo procesas išmoko daugiau negu suformuluota teorema arba atskleistas faktas.

Viską rasite knygose:...

2. Gilius faktus atskleidžia paprasti argumentai

2.1. Paradoksas, bet tiriant sudėtingas situacijas, kai kada pakanka paprastų ir beveik akivaizdžių teiginių. Vieną iš tokių yra suformulavęs L. Dirichlė[1].

Dirichlė principas. *Jei n rutulių yra sudėti į $m < n$ dėžučių, tai bent vienoje dėžutėje yra 2 ar daugiau rutulių.*

Nevisada šio principo pritaikymas yra toks akivaizdus. Išnagrinėkime elementariosios skaičių teorijos teiginį. Posakį *a dalija b* trumpumo dėlei žymėkime $a|b$.

1 pavyzdys. *Bet kokiame $(m+1)$-o elemento poaibyje, išrinktame iš*

$$\{1, 2, \dots, 2m\}$$

yra bent du vienas kitą dalijantys skaičiai.

Įrodymas.Tegul A yra išrinktasis poaibis ir $|A| = m + 1$. Kiekvieną $a \in A$ galime išreikšti $a = 2^k d$, čia $k \geq 0$ ir d yra nelyginis. Todėl $d \in \{1, 3, \dots, 2m-1\}$. Yra tik m galimybių šiai nelyginei skaičiaus a daliai. Vadinasi, pagal Dirichlė principą bent du aibės A skaičiai turės tą pačią nelyginę dalį. Tegu $b = 2^l d \in A$, $l \geq 0$, yra antrasis skaičius. Jei $k \leq l$, tai $a|b$, o atveju $k \geq l$, – skaičius $b|a$. Įrodyta. $\diamond$

Matome, kad „dėžutės" turi alegorinę prasmę. Nelyginės dalies priskyrimas yra įsivaizduojamas „dėjimu į dėžutę". Savarankiškai įsitikinkite, kad pavyzdyje minimas poaibis turi bent du tarpusavyje pirminius skaičius. Kokios „dėžutės" bus dabar?

Dar labiau netikėtas yra toks pavyzdys.

[1]Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) – vokiečių matematikas.

2 pavyzdys. *Tegu* $a_1, \dots, a_m$ *seka, gal būt, pasikartojančių natūraliųjų skaičių. Joje egzistuoja gretimų narių posekis* $a_k, \dots, a_l$*,* $1 \le k < l \le m$*, toks, kad suma*

$$a_k + \dots + a_l$$

yra m *kartotinis.*

Įrodymas.Imkime aibes

$$N := \{0, a_1, a_1 + a_2, \dots, a_1 + \dots + a_m\}, \qquad R = \{0, 1, \dots, m-1\}$$

ir apibrėžkime funkciją $f\colon N \to \mathbb{R}$, skaičiui $a \in N$ priskirdami jo dalybos iš m liekaną. Kadangi $|N| = m + 1 > m = |R|$, tai pagal Dirichlė principą aibėje N egzistuoja dvi sumos $a_1 + \dots + a_{k-1}$ ir $a_1 + \dots + a_l$ su ta pačia dalybos iš m liekana. Jei čia $1 \le k < l \le m$, tai šių sumų skirtumas $a_k + \dots + a_l$ dalysis iš m. $\diamond$

Kaip matėme, yra labai patogu panaudoti atvaizdžius. Performuluodami Dirichlė principą jiems, patį teiginį šiek tiek sustiprinsime.

Teorema 1. *Tegu* M, N *yra aibės,* $|M| = m < n = |N|$*, o* $f\colon N \to M$ *– atvaizdis. Tada egzistuoja* $b \in M$ *toks, kad*

$$|f^{-1}(b)| \ge \lceil n/m \rceil.$$

Čia $\lceil x \rceil$ *– anksčiau apibrėžtos skaičiaus* $x \in \mathbb{R}$ *lubos.*

Įrodymas.Pastebėkime, kad iš ankstesnio dėžučių principo išplauktų tik nelygybė $|f^{-1}(b)| \ge 2$.

Jei $|f^{-1}(b)| < n/m$ kiekvienam $b \in N$, tai pasinaudoję 1 teorema, gautume prieštarą:

$$n = \sum_b |f^{-1}(b)| < \frac{n}{m} \sum_b 1 = \frac{n}{m} m = n.$$

Taigi bent vienam b turi būti $|f^{-1}(b)| \ge \frac{n}{m}$. Kadangi $|f^{-1}(b)|$ yra natūralusis skaičius, tai teoremos teiginys išplaukia iš skaičiaus lubų apibrėžimo. $\diamond$

Pastarosios teoremos pritaikymą iliustruosime pavyzdžiu. Pradedančiajam programuotojui dažnai pasiūloma iš baigtinės skirtingų realiųjų skaičių sekos išrinkti monotonišką posekį. Kaip galėtume įvertinti tokio posekio ilgį?

Teorema 2. *Tegu* $m, n \in \mathbb{N}$ *ir* $a_1, a_2, \dots, a_{mn+1}$ *bet kokia skirtingų realiųjų skaičių seka iš* $(mn+1)$*-o nario. Joje egzistuoja monotoniškai didėjantis* $(m+1)$*-o nario posekis arba monotoniškai mažėjantis* $(n+1)$*-o nario posekis. Galimi ir abu variantai.*

Įrodymas.Dabar Dirichlė principo taikymo galimybė vargu ar įžiūrima. Reikia įrodyti posekių

$$a_{i_1} < a_{i_2} < \dots < a_{i_{m+1}}, \qquad 1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_{m+1} \le mn + 1$$

arba

$$a_{j_1} > a_{j_2} > \cdots > a_{j_{n+1}}, \qquad 1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_{n+1} \le mn + 1$$

egzistavimą.

Imkime bet kurį sekos narį a_i, $1 \le i \le mn+1$. Tegu t_i – *ilgiausio* didėjančio posekio, prasidedančio a_i, ilgis. Jei kažkokiam $t_i \ge m+1$, teoremos teiginys yra teisingas.

Tegu dabar $t_i \le m$ visiems $1 \le i \le mn+1$. Atvaizdžiui $f\colon a_i \mapsto t_i$, vaizduojančiam aibę $A := \{a_1, a_2, \ldots, a_{mn+1}\}$ aibėje $M := \{1, 2, \ldots, m\}$, galime pritaikyti šio skyrelio 1 teoremą. Vadinasi, egsistuoja toks $s \in M$, kad $f(a_i) = s$ dėl

$$\left\lceil \frac{mn+1}{m} \right\rceil = n + 1$$

skaičių $a_i \in A$. Nekeisdami jų išsidėstymo tvarkos sekoje, sužymėkime

$$a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_{n+1}}, \qquad 1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_{n+1} \le mn + 1.$$

Imkime du gretimus šio posekio narius a_{j_k} ir $a_{j_{k+1}}$. Jei $a_{j_k} < a_{j_{k+1}}$, tai pradėdami a_{j_k}-uoju ir prijungdami didėjantį posekį, prasidedantį nuo $a_{j_{k+1}}$ ir turintį s narių, gautume didėjantį posekį, prasidedantį a_{j_k}, jau iš $(s+1)$-o nario. Bet tai prieštara. Vadinasi, $a_{j_k} > a_{j_{k+1}}$ su bet kokais $1 \le k \le n+1$. Taigi, išrinkome $(n+1)$-o elemento mažėjantį posekį.

Teorema įrodyta. $\diamond$

Panagrinėkime ekstremaliąją problemą, kurią nesunku interpretuoti grafų teorijos sąvokomis. Tegu $N = \{1, \ldots, n\}$, $n \ge 3$ ir π_j, $j \le m$, – šios aibės kėliniai. Problema: *Koks yra mažiausias m, kad paėmus bet kokį trejetą $\{a, b, c\} \subset N$ tarp šių kėlinių būtų toks π_j, kad jame c eitų ir po a, ir po b?*

Galima ir tokia interpretacija grafų teorijoje. Įsivaizduokime pilnąjį K_n numeruotąjį grafą. Kėlinys atitiktų $n-1$ ilgio (Hamiltono) taką jame. Problemoje klausiama: koks yra minimalus takų skaičius, kad bet kokioms trims viršūnėms $a, b, c \in V$ bent vienu taku eidami, į c patektume praėję ir a, ir b? Toks minimalus skaičius vadinamas K_n *dimensija* ir žymimas $\dim K_n$. Be to, sakoma, kad kėliniai $\{\pi_j,\ j \le m\}$, kai toks viršūnių apėjimas yra galimas, *reprezentuoja* K_n.

Pvz., $\dim K_n = 3$, jei $n = 3, 4$, bet $\dim K_5 = \ldots, = \dim K_{12} = 4$, o $\dim K_{13} = 5$. Grafą K_4 reprezentuoja

$$(1, 2, 3, 4), \qquad (2, 4, 3, 1), \qquad (1, 4, 3, 2).$$

O grafą K_{12} – kėliniai

$$(1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 4), \qquad (2, 3, 4, 8, 7, 6, 5, 12, 11, 10, 9, 1),$$

$$(3, 4, 1, 11, 12, 9, 10, 6, 5, 8, 7, 2), \qquad (4, 1, 2, 10, 9, 12, 11, 7, 8, 5, 6, 3).$$

Teorema 3. *Kai $n \geq 3$, yra teisinga nelygybė*

$$\dim K_n \geq \log_2 \log_2 n.$$

Įrodymas.Pastebėkime, kad seka $\dim K_n$, $n \geq 3$, yra monotoniškai didėjanti plačiąja prasme. Iš tiesų, suradę K_{n+1} reprezentaciją ir iš visų kėlinių išmetę skaičių $n+1$, gautume K_n reprezentaciją. Tad, šio grafo dimensija gali būti tik mažesnė negu $\dim K_{n+1}$.

Teoremos formuluotė pasufleruoja, kad reikia imti seką

$$n_k = 2^{2^k} + 1, \quad k = 0, 1, \ldots$$

ir visas n reikšmes patalpinti intervaluose

$$n_k \leq n < n_{k+1}.$$

Jei įrodytume, kad

$$\dim K_{n_k} \geq k + 1, \tag{2.1}$$

tai pasinaudoję monotoniškumu ir intervalų apibrėžimu, gautume norimą įvertį:

$$\dim K_n \geq \dim K_{n_k} \geq k + 1 = \log_2 \log_2 \Big(n_{k+1} - 1\Big) \geq \log_2 \log_2 n.$$

Tegu (2.1) yra netenkinama. Vadinasi, $\dim K_{n_k} \leq k$. Todėl egzistuoja reprezentacija $\pi_1, \ldots \pi_k$, sudaryta iš aibės $N_k := \{1, 2 \ldots, n_k\}$ kėlinių. Taikysime 2 teoremą apie monotoniškų posekių egzistavimą. Pastebėkime, kad

$$n_k = 2^{2^{k-1}} \times 2^{2^{k-1}} + 1.$$

Vadinasi, kėinyje π_1 egzistuoja monotoniškas $2^{2^{k-1}} + 1$ ilgio posekis, kurį pažymėkime A_1. Jo elementai yra kažkaip išsidėstę keitinyje π_2. Nemaišydami tvarkos, vėl pagal 1 teoremą iš jų galime išrinkti monotonišką $2^{2^{k-2}} + 1$ ilgio posekį, kurį pažymėkime A_2. Procesą pratęsę, po k žingsnių kėlinyje π_k būsime išrinkę monotonišką posekį A_k iš $2^{2^{k-k}} + 1 = 3$ ilgio posekį, kurį pažymėkime $A_k = \{a, b, c\}$. Šie trys elementai sudaro monotoniškus posekius $a < b < c$ arba $a > b > c$ visuose kėliniuose $\pi_1, \ldots, \pi_k$. Vadinasi, jokiame iš jų b neina nei po a, nei po c. Šis kėlinių rinkinys nereprezentuoja K_{n_k}.

Prieštara įrodo teoremos tvirtinimą. $\diamond$

Istorinei apžvalgai paminėsime, kad tikslų viršutinį $\dim K_n$ rėžį 1972 metais gavo J. Spencer, o 1992 metais P. Erdős, A. Szemeredi ir ?. Trotter įrodė asimptotinę formulę

$$\dim K_n \sim \log_2 \log_2 n + \Big(1/2 + o(1)\Big) \log_2 \log_2 \log_2 n, \quad n \to \infty.$$

Dėmesys šiam uždaviniui nenutrūko ir iki šiol. S. Hosten ir W.D. Morris 1999 metais surado greitą algoritmą, kaip tiksliai skaičiuoti $\dim K_n$. Jis, pavyzdžiui, patikrino, kad

$$\dim K_n \leq 7 \Longleftrightarrow n \leq 1422564.$$

Įsivaizduokite keitinių skaičių, kai n yra toks didelis!

2.2. Skaičiuojant aibių galias pravartu elementus skaičiuoti dviem skirtingais būdais. Tai vadinama *skaičiuok dukart* principu.

Tegu A ir B dvi aibės, o $S \subset A \times B$. Jis vadinamas sąryšiu. Jei $a \in A$, $b \in b$ ir $(a,b) \in S$, tai sakoma, kad a ir b susieti sąryšiu S. Moksliškiau kalbant, sakytume: *yra incidentūs* S. Tegu r_a – skaičius tokių $b \in B$, kad $(a,b) \in S$ ir q_b – skaičius tokių $a \in A$, kad $(a,b) \in S$. Mūsų aptariamasis principas turi tokią formalią išraišką:

$$\sum_{a\in A} r_a = |S| = \sum_{(a,b)\in S} 1 = \sum_{b\in B} q_b. \tag{2.2}$$

Čia vidinė dvilypė suma yra išreikšta kartotinėmis sumomis su skirtinga sumavimo tvarka ir nieko įrodinėti nereikia.

Vėl panagrinėkime paprastą pavyzdį.

Lema 1. *(„Delnų paspaudimo"). Bet kokiam grafui $G = (V,E)$ turime*

$$\sum_{v\in V} \delta(v) = 2\sum_{e\in E} 1 = 2|E|.$$

Įrodymas.Nagrinėkime grafą $G = (V,E)$ ir Dekarto sandaugą $V \times E$. Joje apibrėžkime sąryšį

$$S = \{(v,e):\ v \text{ incidenti}\, e\}.$$

Tada

$$\delta(v) = \sum_{e\in E,\, e\,\mathrm{inc.}\, v} 1 \quad - \quad \text{viršūnės laipsnis},$$

o

$$\sum_{v\in V,\, v\,\mathrm{inc.}\, e} 1 = 2,$$

nes tik dvi viršūnės yra incidenčios briaunai. Todėl (4.1) įrodyta. $\diamond$

Pateiksime Lemos taikymo pavyzdį, įvertindami grafo, neturinčio savyje trikampio, didumą.

Teorema 4. *Tegul $G = (V,E)$ yra $n = |V|$ eilės ir $m = |E|$ didumo grafas, neturintis pografio K_3. Įrodyti, kad*

$$m \le [n^2/4].$$

Įrodymas.Nagrinėjamame grafe $G = (V,E)$ briaunos $e = u_1u_2 \in E$ galai u_1 ir u_2 negali turėti bendros gretimos viršūnės poaibyje $V_0 := V \setminus \{u_1,u_2\}$, nes priešingu atveju grafe atsirastų pografis K_3 (t.y., trikampis). Pažymėkime $U_i \subset V_0$ viršūnės u_i, $i = 1,2$, gretimųjų viršūnių, esančių V_0, aibę. Turime

$$U_1 \cap U_2 = \emptyset, \qquad U_1 \cup U_2 \subset V_0.$$

Vadinasi,

$$|U_1| + |U_2| = \Big(\delta(u_1) - 1\Big) + \Big(\delta(u_2) - 1\Big) \le |V_0| = n - 2.$$

Gavome nelygybes

$$\delta(u_1) + \delta(u_2) \le n,$$

teisingas bet kokiai briaunai $e = u_1u_2$. Sudėkime jas visas. Kairiojoje pusėje gausime sumą laipsnių $\delta(u)$, $u \in V$, ir joje šis dėmuo pasikartos $\delta(u)$ kartų. Kitaip tariant,

$$\sum_{e=u_1u_2\in E} \Big(\delta(u_1) + \delta(u_2)\Big) = \sum_{u\in V} \delta^2(u).$$

Dešinėje –

$$\sum_{e=u_1u_2\in E} n = |E|n =: mn.$$

Taigi

$$\sum_{u\in V} \delta^2(u) \le mn.$$

Bet pagal Koši nelygybę

$$(2m)^2 = \left(\sum_{u\in V} \delta(u)\right)^2 \le n \cdot \sum_{u\in V} \delta^2(u).$$

Iš pastarųjų nelygybių išplaukia

$$\frac{(2m)^2}{n} \le \sum_{u\in V} \delta^2(u) \le mn.$$

Suprastinę gauname geidžiamą nelygybę, nes m yra sveikasis skaičius. $\diamond$

Ciklas C_4 neturi trikampio, bet 4 briaunas. Todėl jo atveju teoremos nelygybė yra lygybė. Taigi bendru atveju rezultatas nepagerinamas. O kaip yra dideliems n?

Po lengvo apšilimo imkimės rimtesnės grafų ekstremaliosios problemos:

Tegu $G = (V, E)$ – n-os eilės grafas, neturintis ciklo C_4. Kiek daugiausia briaunų $m = |E|$ jis gali turėti?

Pavyzdžiui, kai $n = 5$ ir $m = 6$ vienintelis grafas be C_4 yra sudarytas iš dviejų trikampių su bendra viršūne, kai $n = 5$ ir $m \ge 7$ grafas visada turės tokį ciklą.

Teorema 5. *(I. Reiman, 1958) Jei $G = (V, E)$ – n-osios, $n \ge 4$, eilės grafas, neturintis ilgio 4 ciklo C_4, tai*

$$m \le \Big[\frac{n}{4}\Big(1 + \sqrt{4n-3}\Big)\Big].$$

Įrodymas.Taikysime dvigubo skaičiavimo principą, kai $A = V$ ir $B = V \times V$, o

$$S = \{(u, (v, w)) :\ u \,\text{gretima ir}\, v,\ \text{ir}\, w\}.$$

Dabar r_u – skaičius porų viršūnių v ir w, kurios yra gretimos u. Jei $\delta(u)$ - viršūnės laipsnis, tai

$$r_u = \binom{\delta(u)}{2}, \qquad |S| = \sum_{u\in V} \binom{\delta(u)}{2}.$$

Jei $q_{(v,w)}$ – skaičius viršūnių $u \in V$, gretimų abiem viršūnėms v ir w, tai $q_{(v,w)} \leq 1$, nes priešingu atveju grafas turėtų ciklą C_4. Iš formulės (2.1) išplaukia

$$|S| = \sum_{u \in V} \binom{\delta(u)}{2} = \sum_{(v,w) \in V \times V} q_{(v,w)} \leq \sum_{(v,w) \in V \times V} 1 \leq \binom{n}{2}.$$

Taigi,

$$\sum_{u \in V} \frac{\delta(u)\big(\delta(u) - 1\big)}{2} \leq \frac{n(n-1)}{2}.$$

Pritaikę ką tik minėtą Eulerio lemą, gauname

$$\sum_{u \in V} \delta^2(u) - 2m \leq n(n-1).$$

Kadangi pagal Cauchy nelygybę

$$2m = \sum_{u \in V} \delta(u) \leq \left(n \sum_{u \in V} \delta^2(u)\right)^{1/2},$$

iš čia gauname

$$4m^2 \leq n^2(n-1) + 2mn.$$

Išsprendę šią nelygybę baigiame 1 teoremos įrodymą. $\diamond$

Ar yra tokių grafų, neturinčių C_4 ir kurių didumas yra artimas dydžiui,

$$\left[\frac{n}{4}\Big(1 + \sqrt{4n-3}\Big)\right]$$

bei kaip juos konstruoti?

Čia labai praverčia baigtinė geometrija. Tegu F_q – baigtinis kūnas, turintis $q \geq 2$ elementų, o $F_q^3 = \{u = (u_1, u_2, u_3) : \ u_1, u_2, u_3 \in F_q\}$ – vektorinė erdvė virš F_q. Kiekvienas nenulinis vektorius $u \in F_q^3$ generuoja vienamatį poerdvį $< u >:= \{cu : \ c \in F_q\}$. Du skirtingus poerdvius generuoja tik du tarpusavyje tiesiškai nepriklausomi (neproporcingi) vektoriai. Apibrėžkime grafą $G_q = (V, E)$, kurio viršūnės yra skirtingi poerdviai $< u >$, $u \in F_q^3 \setminus \{0\}$, o briauna jungia dvi viršūnes $< u >$, $u = (u_1, u_2, u_3)$, ir $< v >$, $v = (v_1, v_2, v_3)$, tada ir tik tada, jei

$$u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0. \tag{2.3}$$

Nubraižykite grafas G_2 eskizą.

Keliose lemose išvardinsime grafo G_p, jei p yra pirminis skaičius, savybes.

1 lema. *Grafas G_p neturi ciklo C_4.*

Įrodymas.Pažiūrėkime, kiek bendrų gretimų viršūnių gali turėti viršūnių pora $< u >$ ir $< v >$. Kaip buvom pastebėję, vektoriai būtinai yra tiesiškai nepriklausomi. Jei $< x > \in V$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, – gretima abiems viršūnėms, tai x turi būti sistemos

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0, \tag{2.4}$$

$$v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 = 0$$

sprendinys. Bet ši sistema turi tik vieną tiesiškai nepriklausomą sprendinį. Tad, dvi viršūnės G_p grafe turi tik vieną bendrą gretimą viršūnę, todėl šis grafas neturi ilgio 4 ciklo C_4. $\diamond$

2 lema. *Grafo G_p eilė lygi $n = p^2 + p + 1$.*

Įrodymas.Turime $|F_q^3| = p^3$ vektorių. Viename vienamačiame poerdvyje yra p vektorių, iš jų – $(p-1)$-ą nenulinių. Visi nenuliniai erdvės vektoriai išsidėsto

$$(p^3 - 1)/(p-1) = p^2 + p + 1$$

poerdviuose. Tai yra visų vienamačių F_q^3 poerdvių skaičius. Tokia ir grafo eilė. $\diamond$

Ateityje teks pasinaudoti viena algebrine lema, kurios įrodymą praleisime.

3 lema. *Kūne F_q lygtis*

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \tag{2.5}$$

turi p^2 sprendinių, sudarančių $(p+1)$-ą vienamatį poerdvį.

Įrodymas.praleidžiamas.

Vietoj jo apsiribosime trumpu komentaru. Pastebėkime, kad jei vektorius $u = (u_1, u_2, u_3) \neq 0$ tenkina (2.5) lygtį, tai ir visi jam proporcingi vektoriai yra jos sprendiniai. Todėl sprendinių skirstymas į poerdvius yra natūralus.

4 lema. *Grafo G_p didumas lygus $m = \frac{p}{2}(p+1)^2$.*

Įrodymas.Pagal Eulerio lemą reikia rasti grafo viršūnių laipsnių sumą. Viršūnė $[x]$ yra gretima $< u >$, jei vektorius $x = (x_1, x_2, x_3)$ tenkina (2.3) lygtį. Jos sprendiniai sudaro dvimatį poerdvį, kuriame iš viso yra p^2 vektorių. Kaip ir ką tik pateiktame komentare, šie vektoriai pasiskirsto po vienamačius poerdvius. Tokių yra $(p^2-1)/(p-1) = p+1$. Grafe G_p vienamačiai poerdviai, nelygūs $< u >$, atitinka gretimoms viršūnėms. Lygties (2.2) sprendinys, sutampantis su $< u >$, tenkina ir (2.3) lygtį, t.y. jam galioja sąlyga

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0. \tag{2.6}$$

Vadinasi,

$$\delta(< u >) = p + 1, \quad \text{jei (2.6) nepatenkinta,}$$

ir

$$\delta(< u >) = p, \quad \text{jei (2.6) patenkinta.}$$

Iš 3 lemos išplaukia, kad antrasis atvejis galioja dėl $(p+1)$-os viršūnės $< u >$, o likusių $p^2 + p + 1 - (p+1) = p^2$ viršūnių laipsnis yra $(p+1)$. Taigi,

$$2m = \sum_{<u>\in V} \delta(< u >) = p(p+1) + (p+1)p^2.$$

4 lema įrodyta. $\diamond$

Mus labiausiai dominantį teiginį pateiksime kaip teoremą.

Teorema 6. *Grafo G_p eilė n ir didumas m tenkina sąryšį*

$$m = \frac{n-1}{4}\Big(1 + \sqrt{4n-3}\Big).$$

Įrodymas.Išplaukia iš formulių, įrodytų 2 ir 4 lemose. Pakanka eliminuoti p. $\diamond$

Kaip matome, grafas G_p yra beveik ekstremalus, pagal 1 lemą jis neturi ciklo C_4, bet jo didumas artimas 1 teoremoje gautam įverčiui.

3. Klikų problema

Priminsime, kad pilnasis pografis K_p grafe yra vadinamas *klika.* Intuityviai aišku, kad grafas, neturintis didelės eilės p klikos, negali turėti daug briaunų. Rasime šio fakto kiekybinį įvertinimą.

Teorema 7. *(***Turano t.***) Jei grafas $G = (V, E)$ neturi p eilės klikos, tai*

$$|E| \leq \left(1 - \frac{1}{p-1}\right)\frac{n^2}{2}.$$

Įrodymas.Pasinaudokime ir tikimybėmis, ir viena optimizavimo idėja. Grafo viršūnių aibėje V įveskime tikimybinį skirstinį, viršūnei $u \in V$ priskirdami tikimybę $w_u \geq 0$ taip, kad

$$\sum_{u \in V} w_u = 1.$$

Nagrinėkime sumą

$$f(\bar{w}) := \sum_{uv \in E} w_u w_v,$$

kurioje, kaip matome, imamos tik gretimų viršūnių tikimybės.

Tegu u_1 ir v_1 – bet kokios negretimos viršūnės. Pažymėkime jų kaimyninių viršūnių tikimybes

$$s = \sum_{u_1 v \in E} w_v, \qquad t = \sum_{u v_1 \in E} w_u.$$

Tegu $s \geq t$. Kaip keistųsi $f(\bar{w})$, jei v_1 tikimybę perduotume u_1, tuo pačiu mažintume viršūnių su teigiamomis tikimybėmis skaičių? Kadangi

$$\begin{aligned} f(\bar{w}) &= \sum_{\substack{uv \in E \\ u \neq u_1, v \neq v_1}} w_u w_v + w_{u_1} \sum_{u_1 v \in E} w_v + w_{v_1} \sum_{u v_1 \in E} w_u \\ &= \sum_{\substack{uv \in E \\ u \neq u_1, v \neq v_1}} w_u w_v + w_{u_1} s + w_{v_1} t, \end{aligned} \tag{3.1}$$

tai naujoje sumoje išnyktų paskutinis, o priešpaskutinis dėmuo padidėtų dydžiu $w_{v_1} s$. Taigi, naujajam tikimybių skirstiniui

$$f(\bar{w}') = f(\bar{w}) + w_{v_1} s - w_{v_1} t \geq f(\bar{w}).$$

Vadinasi, galime padaryti išvadą: negretimų viršūnių tikimybes perduodant tai viršūnei, kurios kaimynių tikimybė yra didesnė, funkcijos f reikšmė nemažėja. Ji pasiekia maksimumą, kai viršūnės su teigiamomis tikimybėmis yra poromis gretimos. Tada jos sudaro kliką, kurios eilę pažymėkime $k \le p-1$.

Tegu dabar u_1 ir v_1 dvi šios klikos viršūnės su tikimybėmis $w_{u_1} > w_{v_1}$. Imkime $0 < \varepsilon < w_{u_1} - w_{v_1}$ ir pakeiskime šių viršūnių tikimybes per ε mažindami didesnę ir didindami mažesnę. Panašiai kaip (10.1), bet atsižvelgdami į tai, kad dabar ir $u_1 v_1 \in E$, gauname naująją funkcijos f reikšmę

$$\begin{aligned} f(\bar{w}'') = &\sum_{\substack{uv \in E \\ u \ne u_1, v \ne v_1}} w_u w_v + \Big(w_{u_1} - \varepsilon\Big) \sum_{u_1 v \in E} w_v + \Big(w_{v_1} + \varepsilon\Big) \sum_{u v_1 \in E} w_u \\ &+ \Big(w_{u_1} - \varepsilon\Big)\Big(w_{v_1} + \varepsilon\Big) = f(\bar{w}) - \varepsilon\Big(1 - w_{u_1}\Big) + \varepsilon\Big(1 - w_{v_1}\Big) - \varepsilon^2 \\ &= f(\bar{w}) + \varepsilon\Big(w_{u_1} - w_{v_1}\Big) - \varepsilon^2 > f(\bar{w}). \end{aligned}$$

Šis įvertis rodo, kad klikoms funkcija f pasiekia maksimumą, kai skirstinys viršūnių aibėje yra tolygus. Jei $v_1, \dots, v_k$ – klikos viršūnės, tai jų tikimybės tada turi būti lygios $1/k$. Klika turi $k(k-1)/2$ briaunų, todėl maksimali funkcijos f reikšmė lygi

$$\frac{k(k-1)}{2} \frac{1}{k} \frac{1}{k}.$$

Didėjant $k \le p-1$, ji didėja, tad bet kokiam tikimybiniam skirstiniui virūnių aibėje turime

$$f(\bar{w}) \le \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{p-1}\Big).$$

Paėmę tolygųjį skirstinį $w_u \sim 1/n$, $u \in V$, gauname

$$\frac{|E|}{n^2} \le \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{p-1}\Big).$$

Tą ir reikėjo įrodyti. ◇

Ar Turano teorema nurodo tikslų grafo didumo įvertinimą? Atsakymas yra teigiamas. Pakanka panagrinėti $(p-1)$-dalius pilnuosius grafus. Pagal apibrėžimą jie gaunami suskaidžius viršūnių aibę į $(p-1)$-ą galios $n_i > 0$ poaibį taip, kad $1 \le i \le p-1$ ir $n_1 + \cdots n_{p-1} = n$, ir sujungiant kiekvieną porą viršūnių, gulinčių skirtinguose poaibiuose, briaunomis. Maksimalus briaunų skaičius bus tada, kada poaibiuose esančių viršūnių skaičius yra labiausiai artimas. Jei vienodo negalima pasiekti, tai imama sąlyga $|n_i - n_j| \le 1$. Pastarieji grafai vadinami Turano vardu. Jei $(p-1)$ dalija n, tai turime $n_i \sim n/(p-1)$. Tokio $(p-1)$-dalio pilnojo grafo didumas lygus

$$\binom{p-1}{2}\Big(\frac{n}{p-1}\Big)^2 = \Big(1 - \frac{1}{p-1}\Big)\frac{n^2}{2}.$$

Kadangi $(p-1)$-daliai grafai neturi p eilės klikos, tai matome, kad Turano gautas įvertis yra pasiekiamas. Bendru atveju nagrinėjamos klikų problemos atžvilgiu Turano grafai yra ekstremalieji.

4. TIKIMYBINIS METODAS KOMBINATORIKOJE

4.1. Viena poaibių spalvinimo problema. Pradėkime nuo paprastos spalvinimo problemos. Imkime pradinę aibę X ir tarkime, kad turime galimybę jos elementus nuspalvinti naudodami vieną iš dviejų spalvų. Nagrinėkime jos d poaibių šeimą $\mathcal{A}$. Sakoma, kad $\mathcal{A}$ yra *dvispalvė*, jei yra toks X nuspalvinimas, kad kiekviename $\mathcal{A}$ poaibyje atsiras abiejų spalvų elementai. Jei $\mathcal{A}$ su $|\mathcal{A}| = m$ yra dvispalvė, tai ir daliniai pošeimiai su mažesniu skaičiumi poaibių bus dvispalviai. Didinant m ši savybė nebūtinai išlieka. Pavyzdžiui, aibės X su $|X| = 2d-1$ visų d poaibių šeima $X^{(d)}$ jau nebėra dvispalvė. Iš tiesų, bet kaip spalvinant bus bent d vienodos spalvos elementų ir toks poaibis priklauso $X^{(d)}$. Kokia yra mažiausia poaibių šeimos $\mathcal{A} \subset X^{(d)}$, kai $d \geq 2$, galia, kad $\mathcal{A}$ nebūtų dvispalvė. Pažymėkime šią galią $m(d)$. Kitaip tariant, jei $|\mathcal{A}| < m(d)$, tai šeima $\mathcal{A}$ jau bus dvispalvė. Pritaikę Stirlingo formulę, iš pateiktojo pavyzdžio matome, kad

$$m(d) \leq \binom{2d-1}{d} = (1+o(1))\frac{2^{2d}}{2\sqrt{\pi d}}, \quad d \to \infty.$$

Tai yra gana grubokas įvertis iš viršaus. Daugiau informacijos suteikia apatiniai įverčiai. Ateityje tarsime, kad pradinė aibė X yra pakankamai didelė.

Teorema. *Teisingas toks įvertis iš apačios*:

$$m(d) > 2^{d-1}, \quad d \geq 2.$$

Įrodymas.Reikia įsitikinti, kad bet kokia d poaibių šeima $\mathcal{A}$ su $|\mathcal{A}| = m \leq 2^{d-1}$ yra dvispalvė. Nuspalvinkime aibės X elementus viena iš spalvų su vienoda tikimybe ir nepriklausomai vieną nuo kito. Galime sakyti, kad prieš spalvindami viršūnę metame monetą. Jei $A \in \mathcal{A}$ yra bet koks iš poaibių, tai tikimybė, kad visi jo elementai yra vienos spalvos, yra

$$P(S_A) := P(A - \textit{vienspalvis}) = (1/2)^{d-1}.$$

Čia atsižvelgėme į dviejų spalvų galimybes. Tikimybė, kad bent vienas iš $\mathcal{A}$ poaibių bus vienspalvis, lygi

$$P\bigg(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} S_A\bigg).$$

Jei poaibiai iš $\mathcal{A}$ nesikerta, ieškomas nuspalvinimas akivaizdžiai egzistuoja. Priešingu atveju užrašytoje įvykių sąjungoje įvykiai nėra nesutaikomi, o sankirtų tikimybės yra teigiamos. Tada

$$P\bigg(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} S_A\bigg) < \sum_{A\in\mathcal{A}} P(S_A) = (1/2)^{d-1}m \leq 1.$$

Iš čia išplaukia, kad priešingo įvykio, kad visi poaibiai bus dvispalviai, tikimybė yra teigiama, todėl egzistuoja X nuspalvinimas toks, kad $\mathcal{A}$ būtų dvispalvis. $\diamond$

Pastebėkime, kad $m(2) = 3$. Tai reiškia, kad 1 teoremoje gautas įvertis yra pasiekiamas. Pakanka panagrinėti trikampio viršūnių nuspalvinimo dviem spalvomis variantus. Visada bent viena kraštinė turės vienodos spalvos galus.

Sunkiau įrodyti teiginį, kad $m(3) = 7$. Panagrinėkite lygiakraščio trikampio viršūnių ir pusiaukraštinių visus tarpusavio susikirtimo taškus. Gausite 7 taškų aibę. Sudarykite šeimą 7 poaibių po tris iš taškų, esančių kraštinėse, pusiaukraštinėse ir kraštinių vidurio taškų. Kad ir kaip keistume visų taškų nuspalvinimo variantus, bent viena iš šeimos aibių bus vienaspalvė. Todėl $m(3) \leq 7$.

Pabandykite rasti $m(4)$ bei kitų šios funkcijos reikšmių.

4.2. Ramsey skaičiai. Ypač sunkios yra Ramsey'io skaičių problemos. Įsivaizduokime, kad juoda ir balta spalvom nuspalvinome pilnojo grafo K_n briaunas ir keliame klausimą, ar jame yra vienaspalviai pilnieji pografiai K_s arba K_t. Čia $s, t \leq n$. Jei vieną iš šių pografių radome n eilės grafe, tai juo labiau rasime ir didesniame. Įdomus uždavinys yra surasti mažiausią n, kad bet kokiu būdu dviem spalvom nuspalvinatas K_n turėtų bent vieną minėtą vienaspalvį pografį. Šis mažiausias skaičius vadinamas *Ramsey skaičiumi* $R(s, t)$.

Su jais susijęs plačiai žinomas faktas, jog šešių studentų draugijoje visada egzistuoja trejetas, kurie pažįsta vienas kitą arba nei vienas nepažįsta kito. Vaizduokime studentus šeštos eilės grafo viršūnėmis ir junkime briauna viršūnes, jei atitinkami studentai pažinojo vienas kitą. Šalia nubrėžkime *grafo papildinį*, t.y., grafą su šešiomis viršūnėmis, kurios sujungtos briaunomis, jei atitinkami studentai nepažinojo vienas kito. Uždėjus abu grafus vieną ant kito, gautume pilnąjį K_6 grafą. Taigi, minėtas faktas teigia, kad bet kaip perskyrus pilnojo grafo briaunas į dvi dalis (pvz., nudažius jas dviem skirtingomis spalvomis), arba viename, arba kitame pografyje bus pilnasis K_3 pografis. Deja, penkių studentų draugija tokios savybės jau nebeturi.

Performuluojant Ramsey skaičiaus $R(s, t)$ apibrėžimą, juo galima laikyti mažiausią eilę G grafo, kuriame arba jo papildinyje yra vienas iš vienspalvių pografių K_s arba K_t.

Ateityje laikysime, kad $s, t \geq 2$. Pastebėkime, kad

$$R(s, t) = R(t, s), \quad s, t \geq 2,$$

o

$$R(s, 2) = R(2, s) = s, \quad s \geq 2.$$

Iš tiesų, dažant K_s grafo briaunas juodai ir baltai, arba visos briaunos bus juodos, arba bent viena balta.

1 teorema (Ramsey, 1928). *Tarkime, kad* $R(s-1, t)$ *ir* $R(s, t-1)$ *egzistuoja, o* $s, t > 2$. *Tada egzistuoja* $R(s, t)$ *ir yra teisinga nelygybė*

$$R(s, t) \leq R(s-1, t) + R(s, t-1).$$

Be to, kai $s, t \geq 2$,

$$R(s,t) \leq \binom{r+s-2}{s-1}.$$

Įrodymas. Pirmąją nelygybę įrodinėjant, pagal sąlygą galime laikyti, kad dešinėje esantys dėmenys yra baigtiniai. Tegu

$$n := R(s-1,t) + R(s,t-1) =: n_1 + n_2.$$

Spalvinkime K_n grafo briaunas juodai ir baltai bet kokiu būdu. Reikia rasti juodai nudažytą pografį K_s arba baltą pografį K_t.

Fiksuokime K^n viršūnę x. Jos laipsnis $\delta(x) = n-1 = n_1 + n_2 - 1$. Todėl ši viršūnė yra incidenti nemažiau negu n_1 juodų briaunų arba nemažiau negu n_2 baltų briaunų. Simetriškumo dėka galime teigti, kad yra teisingas pirmasis atvejis. Nagrinėkime pilnąjį K_{n_1} grafą, kurio viršūnės yra incidentiškos x ir kurias su x jungia juodos briaunos. Jei K_{n_1} turi baltą K_t pografį, tai pirmoji nelygybė įrodyta.

Priešingu atveju, pagal pažymėjimą $n_1 = R(s-1,t)$, pilnasis K_{n_1} grafas turi juodą K_{s-1} pilnąjį pografį, kuris kartu su x ir juodosiomis briaunomis, incidenčiomis x, sudaro pilnąjį pografį K_s. Pirmoji teoremos nelygybė įrodyta.

Antrąją nelygybę įrodome matematinės indukcijos metodu. Kaip esame pastebėję, kai $s = 2$ arba $t = 2$, antroji nelygybė virsta lygybe. Tarkime, kad $s, t > 2$, o $s', t' \geq 2$ kita pora natūraliųjų skaičių, $s' + r' < s + t$, kuriai antroji teoremos nelygybė jau yra teisinga pagal indukcinę prielaidą. Iš anksčiau įrodytos nelygybės išplaukia

$$\begin{aligned} R(s,t) &\leq R(s-1,t) + R(s,t-1) \\ &\leq \binom{t+s-3}{s-2} + \binom{t+s-3}{s-1} = \binom{t+s-2}{s-1}. \end{aligned}$$

Teorema įrodyta. $\diamond$

Išvada. *Teisingas toks įvertis iš viršaus*:

$$R(s,s) \leq 2^{2s-3}.$$

Įrodymas. Binominių koeficientų

$$\binom{2s-3}{s-1}, \qquad \binom{2s-3}{s-2}$$

suma suskaičiuoja ne visus $(2s-3)$ aibės poaibius, tai

$$R(s,s) \leq \binom{2s-2}{s-1} = \binom{2s-3}{s-1} + \binom{2s-3}{s-2} \leq 2^{2s-3}. \tag{4.1}$$

Išvada įrodyta. $\diamond$

Pritaikę Stirlingo formulę, galėtume šį įvertį truputį patikslinti.

Jau anksčiau matėme, kad $R(2,2)=2$, o. Įsitikinkite, kad minėta studentų būrelio savybė matematiškai yra išreiškiama lygybe $R(3,3)=6$. Jai įrodyti pastebėtume, kad pirmoji iš (2.1) nelygybių parodo, jog $R(3,3)\le 6$. Apatinį įvertį gautume išnagrinėję pilnąjį K_5 grafą, pavaizdavę jį penkiakampiu ir nuspalvinę vidines briaunas baltai, o išorines – juodai. Kadangi jame nerastume vienspalvio trikampio, padarytume išvadą, kad $R(3,3)\ge 6$.

Ramsey'io skaičių įvertinimas iš apačios yra žymiai sudėtingesnė problema. Ją nagrinėsime naudodami tikimybinius samprotavimus.

2 teorema (P. Erdős). *Visiems $s\ge 2$ turime*

$$R(s,s)\ge 2^{s/2}.$$

Įrodymas.Galime pradėti nuo $s\ge 4$. Imkime K_n grafą, kai $n<2^{s/2}$, ir nepriklausomai su vienodomis tikimybėmis $1/2$ nuspalvinkime jo briaunas juoda ir balta spalvomis. Bet kokio visų briaunų nuspalvinimo tikimybės yra lygios

$$2^{-\binom{n}{2}}.$$

Jei A yra viršūnių s aibė, o S_A – įvykis, kad visos A viršūnes jungiančios briaunos yra baltos, tai

$$P(S_A)=2^{-\binom{s}{2}}.$$

Vadinasi, tikimybė, kad yra bent vienas baltas pilnasis pografis K_s, lygi

$$P\bigg(\bigcup_{|A|=s} S_A\bigg)\le \sum_{|A|=s} P(S_A)=\binom{n}{s}2^{-\binom{s}{2}}.$$

Pasinaudokime nelygybe

$$\binom{n}{s}\le \frac{n^s}{2^{s-1}},\qquad s\ge 4,$$

išplaukiančia iš

$$\binom{n}{s}=\frac{n(n-1)\cdots(n-s+1)}{s!}\le \frac{n^s}{s!}\le \frac{n^s}{2^{s-1}}.$$

Taigi, jei $n<2^{s/2}$,

$$P\bigg(\bigcup_{|A|=s} S_A\bigg)\le \frac{n^s}{2^{s-1}}2^{-\binom{s}{2}}<2^{s^2/2-\binom{s}{2}-s+1}=2^{-s/2+1}\le 1/2.$$

Tokia pati tikimybė ir dėl juodojo K_s pografio egzistavimo. Vadinasi, tikimybė, kad neegzistuos nei baltas, nei juodas K_s, yra griežtai teigiama. Darome išvadą, kad yra grafo K_n nuspalvinimas su šia savybe. Teorema įrodyta. $\diamond$

Aptartus Ramsey skaičiaus $R(s,s)$ įverčius pavyksta patikslinti tik atskirais atvejais. Nežiūrint to, kad mes naudojome primityvius tikimybinus samprotavimus, bet kokiam s P.Erdős'o įvertį pagerinti sunku.

Užduotys. 1. Įrodykite, kad

$$R(3,4) = 9.$$

2. Tegul $2K_s = K_s + K_s$ yra dviejų pilnųjų grafų suma, raskite $R(2K_s, K_t)$.

4.3. Grafų vaizdavimo plokštumoje problema. Panagrinėkime grafų įdėties į plokštumą problemą. Prisiminkime, kad grafas vadinamas *planariuoju*, jei egzistuoja jam izomorfiškas plokščiasis grafas. Tai reiškia, kad planarųjį grafą galima pavaizduoti plokštumoje taip, kad briaunas vaizduojančios Žordano kreivės nesikirstų vidiniuose taškuose. Žinoma, gretimos briaunos bus vaizduojamos kreivėmis, turinčiomis bendrą galinį tašką. Paprastajam jungiam plokščiam grafui $G = (V, E)$ su $|V| = n$, $|E| = m$ ir veidų (valstybių) skaičiumi f galioja Eulerio lygybė

$$n - m + f = 2.$$

Iš čia išplaukia nelygybė

$$m \leq 3n - 6. \tag{4.2}$$

Iš tiesų, jei f_i – skaičius veidų, apribotų $i \geq 3$ briaunų, tai

$$f = f_3 + f_4 + \cdots, \qquad 2m = 3f_3 + 4f_4 + \cdots.$$

Vadinasi, $2m - 3f \geq 0$. Įstatę šį įvertį į Eulerio lygybę, gauname (4.1).

Taigi, matome, jog vaizduodami didelius grafus plokštumoje, neišvengsime briaunų susikirtimų. Aišku, galėtume išvengti briaunos susikirtimo su savimi, briaunų su bendra viršūne susikirtimo, dviejų briaunų susikirtimo dukart ir daugiau kartų. Kalbėdami apie briaunų susikirtimus čia išvardintų atvejų neturėsime omenyje. Koks yra minimalus briaunų susikirtimų skaičius paprastajam grafui? Pažymėkime jį $cr(G)$. Grafo įdėtį į plokštumą su tokiu susikirtimų skaičiumi vadinkime *minimaliuoju*.

1 teorema. *Teisingas įvertis iš apačios*

$$cr(G) \geq m - 3n + 6.$$

Įrodymas.Tarkime, kad grafą G įdėjome į plokštumą ir gavome $cr(G)$ briaunų susikirtimų. Susiskirtimo taškus prijungę prie viršūnių aibės, o jais apribotas briaunų dalis – prie briaunų, gauname naują grafą, kuris bus plokščias. Naujojo grafo eilė lygi $n' = n + cr(G)$, briaunų skaičius – $m' = m + 2cr(G)$, nes kiekviena naujoji viršūnė yra ketvirto laipsnio. Pagal (4.1) gauname

$$m + 2cr(G) \leq 3(n + cr(G)) - 6.$$

Iš čia išplaukia teoremos tvirtinimas. $\diamond$

Pastebėkite, kad $cr(K_6) = 3$. Jei m priklauso nuo n tiesiškai, tai 3 teoremos rezultatas yra gana tikslus. Bendru atveju jis grubokas. 1973 metais P. Erdős ir R.K. Guy iškėlė hipotezę, kad $cr(G) \geq cm^3/n^2$; čia $c > 0$. Ją 1982 metais įrodė visas būrys matematikų. Mes pateiksime tikimybinį kiek tikslesnio rezultato įrodymą.

2 teorema. *Jei paprastajam n eilės ir m didumo grafui $m \geq 4n$, tai*

$$cr(G) \geq \frac{1}{64}\frac{m^3}{n^2}.$$

Įrodymas.Nagrinėkime minimalų grafo G įdėjimą į plokštumą. Tarkime, kad jame viršūnės atsiranda nepriklausomai su vienodomis tikimybėmis $0 < p < 1$. Gauname atsitiktinį grafą G_p. Jo eilė n_p, didumas m_p ir mažiausias susikirtimų skaičius $cr(G_p)$ yra priklausomi atsitiktiniai dydžiai. Tačiau 1 teoremos teiginys jam galioja. Dėl, gal būt, sumažėjusio briaunų skaičiaus ne visi grafe G buvę susikirtimai išliko įdedant G_p į plokštumą su mažiausiu briaunų susikirtimų skaičiumi. Tas $cr(G_p)$ yra ne didesnis, kaip a.d. X_p - skaičius susikirtimų buvusiose grafo G vietose. Pakeitę $cr(G_p)$ dydžiu X_p 1 teoremos nelygybę išsaugome, t.y.,

$$X_p - m_p + 3n_p \geq 6 > 0.$$

Iš čia išplaukia sąryšis vidurkiams

$$\mathbf{E}X_p - \mathbf{E}m_p + 3\mathbf{E}n_p > 0. \tag{4.3}$$

Suskaičiuojame juos

$$\mathbf{E}n_p = pn, \qquad \mathbf{E}m_p = mp^2, \qquad \mathbf{E}X_p = p^4 cr(G).$$

Sunkiau pastebima paskutinė lygybė argumentuojama tuo, kad naujajame grafe susikirtimas atsiranda senojo vietoje, jei pasirodo visos keturios briaunų galinės viršūnės. Dabar įstatę į (4.3), gauname

$$p^4 cr(G) - p^2 m + 3pn > 0.$$

Vadinasi,

$$cr(G) > \frac{p^2 m - 3pn}{p^4} = \frac{m}{p^2} - \frac{3n}{p^3}.$$

Parinkę $p = 4n/m$, iš čia gauname reikiamą įvertį. $\diamond$

Sugalvokite dar gražesnį įrodymą!

4.4. Dominuojantis viršūnių aibės poaibis. Viršūnių aibės poaibis D yra *dominuojantysis*, jeigu bet kokia viršūnė $v \in V \setminus D$ turi bent vieną gretimą viršūnę aibėje D. (Žargone - yra matoma iš aibės D).

Problema - rasti minimalios galios dominuojančias aibes.

1 teorema. *Tegul G yra n-os eilės grafas, $\delta(G) = \delta \geq 1$. Įrodyti, kad jis turi dominuojančią viršūnių aibę D, kurios galia*

$$|D| \leq n \cdot \frac{1 + \ln(1+\delta)}{1+\delta}.$$

Įrodymas. Kiekvieną $v \in V$ imkime nepriklausomai atsitiktinai su tikimybe $0 < p < 1$. Gavome atsitiktinę aibę $X \subset V$. Aišku, kad $\mathbf{E}(|X|) = np$.

Aibės X papildinyje $V \setminus X$ yra aibė $Y = Y_X$ visų „nedominuojamų" iš X viršūnių, t.y. $y \in Y$, bet y neturi gretimų viršūnių aibėje X. Tegul $v \in V$ bet kokia, skaičiuojame tikimybę

$$P(v \in Y) = P\Big(\{v \,\text{ir jos gretomosios nepriklauso}\, X\}\Big) < (1-p)^{\delta+1}.$$

Aibės galia gali būti užrašyta indikatorių suma, todėl vidurkio tiesiškumu galima naudotis:

$$\mathbf{E}(|X| + |Y|) \le np + n(1-p)^{\delta+1}.$$

Aibė $U = X \cup Y$ yra dominuojanti. Iš nelygybės vidurkiui išplaukia, kad egzistuoja bent viena aibių realizacija - dominuojanti aibė, kurios galia yra nedidesnė negu šis įvertis.

Kitas įrodymo etapas - optimizuoti p parinkimą. Iš nelygybės

$$1 - p \le e^{-p}$$

išplaukia

$$|U| \le np + ne^{-(1+\delta)p}.$$

Dešinėje pusėje esanti p funkcija įgyja minimumą, kai

$$p = \frac{\ln(\delta+1)}{\delta+1}.$$

Taip pasirinkę p, baigiame įrodymą.

5. Poromis nesikertančių poaibių šeimos

Dabar išnagrinėkime sunkesnį teiginį, taip pat įrodomą tikimybiniu metodu.

Tarkime, kad X yra n aibė, t. y. $|X| = n \ge 1$. Ji turi iš viso 2^n poaibių. Jie sudaro visų poaibių aibę, kurį mes žymėsime $\mathcal{P}(X)$. Dėl kalbinio sklandumo vietoje "poaibių aibė" sakysime "poaibių šeima", nors žodis "šeima" galėtų leisti jos elementų pasikartojimus. Dabar visais atvejais poaibiai bus skirtingi.

Nagrinėsime n aibės $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ skirtingų poaibių šeimas

$$\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\} \subset \mathcal{P}(X),$$

kurios poromis nesikerta ir vertinsime m.

Įveskime

$$d(\mathcal{A}) = \Big|\Big\{\{A_i, A_j\} : \; A_i, A_j \in \mathcal{A}, \; A_i \cap A_j = \emptyset\Big\}\Big|.$$

1 teorema. *Tegul poaibių šeimos $\mathcal{A}$ galia*

$$m = 2^{(1/2+\delta)n}$$

su $0 < \delta \le 1/2$. Tada

$$d(\mathcal{A}) < m^{2-\delta^2/2}.$$

Įrodymas. Tarkime priešingai, kad

$$d(\mathcal{A}) \geq m^{2-\delta^2/2}. \tag{5.1}$$

ir atsitiktinai rinkime aibes F_i, $1 \leq i \leq t$, iš $\mathcal{A}$ su grąžinimu, t.y. su vienodomis tikimybėmis

$$P(F_i = A_j) = 1/m.$$

Taigi F_i yra atsitiktinės, gal būt pasikartojančios, o t yra pakankamai didelis.

Tikslas: įrodyti, kad su teigiama tikimybe

$$|U| := |F_1 \cup \cdots \cup F_t| > n/2,$$

bet U nesikerta su daugiau nei $2^{n/2}$ skirtingų poaibių iš X.

Betgi to ir gana: visi šie poaibiai yra iš aibės $X \setminus U$, kurios galia $|X \setminus U| < n/2$ ir todėl turi ne daugiau kaip $2^{n/2}$ poaibių. Prieštara įrodo teoremą!

Trumpumo dėlei nagrinėsime tik lyginius n; tegul $S \subset X$ ir $|S| = n/2$. Skaičiuojame

$$P\Big(|U| \leq n/2\Big) \leq \sum_{\substack{S \subset X \\ |S|=n/2}} P\Big(F_i \subset S;\ i = 1, 2, \ldots t\Big).$$

Pastebime, kad dėl bet kokios $F := F_i$ grubiai vertindami, gauname

$$P\Big(F \subset S\Big) = \sum_{A \subset S} P\Big(F \subset S | F = A) P(F = A) \leq 2^{n/2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{m}.$$

Vadinasi, iš teoremos sąlygos išplaukia, kad

$$P\Big(|U| \leq n/2\Big) \leq 2^n \Big(2^{n/2} 2^{-(1/2+\delta)n}\Big)^t = 2^{n(1-\delta t)}. \tag{5.2}$$

Taigi,

$$P\Big(|U| \geq n/2\Big) > 0,$$

jei toliau rinkdami t užtikrinsime, kad $\delta t > 1$.

Apibrėžkime

$$\nu(B) := \Big|\{A \in \mathcal{A} :\ B \cap A\} = \emptyset\Big|.$$

Tada

$$\sum_{B \in \mathcal{A}} \nu(B) = 2d(\mathcal{A}) \geq 2m^{2-\delta^2/2}.$$

Tegul a. dydis Y yra lygus skaičiui $\mathcal{A}$ poaibių, kurie nesikerta su visais atsitiktiniais F_i, $1 \leq i \leq t$. Tada jis yra indikatorių suma:

$$Y = \sum_{B \in \mathcal{A}} \mathbf{1}\{B \cap F_j = \emptyset,\ 1 \leq j \leq t\}.$$

Tikslas bus pasiektas, jei įsitikinsime, kad

$$\begin{aligned} P\Big(|U| > n/2,\ Y > 2^{n/2}\Big) &= P\Big(Y > 2^{n/2}\Big) - P\Big(|U| \leq n/2,\ Y > 2^{n/2}\Big) \\ &\geq P\Big(Y > 2^{n/2}\Big) - P\Big(|U| \leq n/2\Big) > 0. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Tegul $F := F_j$ ir $B \in \mathcal{A}$, randame tikimybę

$$P(B \cap F = \emptyset) = \sum_{A \in \mathcal{A}} P\Big(B \cap F = \emptyset |\, F = A\Big) P(F = A)$$
$$= \frac{1}{m} \sum_{A \in \mathcal{A}} P\Big(B \cap F = \emptyset |\, F = A\Big) = \frac{1}{m}\nu(B),$$

nes sąlyginės tikimybės yra 0 arba 1. Be to, 1-ų yra $\nu(B)$. Dabar galime rasti

$$\mathbf{E}Y = \sum_{B \in \mathcal{A}} P\Big(B \cap F_j = \emptyset,\, 1 \le j \le t\Big) = \sum_{B \in \mathcal{A}} \Big(\frac{\nu(B)}{m}\Big)^t.$$

Bet iš Koši nelygybės išplaukia

$$(2d(\mathcal{A})^t = \Big(\sum_{A \in \mathcal{A}} \nu(A)\Big)^t \le m^{t-1} \sum_{A \in \mathcal{A}} \nu(A)^t,$$

todėl pagal mūsų prielaidą

$$\mathbf{E}Y \ge m^{1-t} \cdot \Big(\frac{2d(\mathcal{A})}{m}\Big)^t \ge 2m^{1-t\delta^2/2}.$$

Pagal apibrėžimą $Y \le m$, todėl galime pasinaudoti nelygybe

$$P(Y \ge a) \ge \frac{1}{m} \int_a^m y dF_Y(y) \ge \frac{\mathbf{E}Y}{m} - \frac{a}{m},$$

kai $a = m^{1-t\delta^2/2}$. Gauname

$$P(Y \ge m^{1-t\delta^2/2}) \ge m^{-t\delta^2/2}.$$

Vadinasi, $t > 1/\delta$ parinkimas turi užtikrinti sąlygą

$$m^{1-t\delta^2/2} > 2^{n/2},$$

nes tada

$$P(Y > 2^{n/2}) \ge P(Y \ge m^{1-t\delta^2/2}) \ge m^{-t\delta^2/2}$$

ir dėl (7.2) bei (5.3) - sąlygą

$$m^{-t\delta^2/2} > 2^{n(1-\delta t)}.$$

Tokį t galime rasti, kai patenkintas teoremos sąryšis su m ir δ. Panaudoję jį, matome, kad turi būti patenkinta tokia nelygybių sistema:

$$a := \Big(\frac{1}{2} + \delta\Big)\Big(1 - \frac{t\delta^2}{2}\Big) > \frac{1}{2},$$
$$\Big(\frac{1}{2} + \delta\Big)\Big(-\frac{t\delta^2}{2}\Big) > 1 - t\delta.$$

Imkime „lubas"

$$1 + 1/\delta \le t = \lceil 1 + 1/\delta \rceil < 2 + 1/\delta$$

ir tikrinkime dvi pastarąsias nelygybes.

Panaudoję $t < 2 + 1/\delta$, be vargo įsitikiname pirmosios teisingumu:

$$a > \frac{1}{2} + \delta\Big(1 - \Big(\frac{1}{2} + \delta\Big)\frac{\delta}{2}\Big(2 + \frac{1}{\delta}\Big)\Big) = \frac{1}{2} + \delta\Big(1 - \Big(\frac{1}{2} + \delta\Big)^2\Big) \geq \frac{1}{2}.$$

Panašiai,

$$\begin{aligned} t\delta\Big(1 - \frac{\delta}{2}\Big(\frac{1}{2} + \delta\Big)\Big) &\geq (\delta + 1)\Big(1 - \frac{\delta}{2}\Big(\frac{1}{2} + \delta\Big)\Big) \\ = 1 + \delta\Big(1 - \frac{1+\delta}{2}\Big(\frac{1}{2} + \delta\Big)\Big) &\geq 1 + \frac{\delta}{4}. \end{aligned}$$

Iš čia išplaukia ir antroji nelygybė.

Teorema įrodyta.

Panagrinėkime poaibių porų šeimas

$$\mathcal{F} = \Big\{(A_i, B_i) :\ A_i, B_i \subset X,\, 1 \leq i \leq h\Big\},$$

renkamas iš aibės X. Čia $A_i \neq A_j, B_i \neq B_j$, jei $i \neq j$. Galime tiesiog imti

$$X = \bigcup_{i=1}^{h} (A_i \cup B_i).$$

Šeimą $\mathcal{F}$ vadinsime <u>(k, l) sistema</u>, $k, l \in \mathbb{N}$, jeigu

$$|A_i| = k, \qquad |B_i| = l, \qquad A_i \cap B_i = \emptyset,\ A_i \cap B_j \neq \emptyset;$$

čia $i \neq j$ ir $1 \leq i, j \leq h$.

Kokios galios gali būti šios šeimos?

2 teorema. *Jei* $\mathcal{F} = \Big\{(A_i, B_i)\Big\}$, $1 \leq i \leq h$, *yra* (k, l) *sistema, tai*

$$h \leq \binom{k+l}{k}.$$

Įrodymas. Tegul $|\mathcal{F}| = n \geq k + l$. Panaudokime atsitiktinius keitinius $\sigma \in \mathbb{S}_n$ ir gaukime atsitiktinius X kėlinius X_σ. Kokia tikimybė, kad visi A_i elementai tokiame kėlinyje eis prieš visus aibės B_i elementus? Pažymėkime tokį įvykį X_i. Simboliškai $X_i = \{a \prec b\}$. Šis įvykis nepriklauso nuo X elementų, ne iš $A_i \cup B_i$, išsidėstymų. Todėl jo tikimybė bus tokia pati, kaip ir nesant šiems elementams. Tada aišku, kad $a \in A_i$ gali išsidėstyti visais įmanomais būdais pirmose k pozicijų, o $b \in B_i$ - likusiose l pozicijų. Taigi, palankių variantų yra $k!l!$, o kėlinių yra $(k + l)!$. Ieškoma tikimybė lygi

$$P(X_i) = \binom{k+l}{k}^{-1}.$$

Kai $i \neq j$, taip pat turime $X_i \cap X_j = \emptyset$. Jei bent vienam σ, visi $a \in A_i$ eis prieš visus $b \in B_i$, t.y. $a \prec b$, ir visi $a' \in A_j$ eis prieš visus $b' \in B_j$, t.y., $a' \prec b'$, o paskutinis iš $a \preceq a'$, čia a' - paskutinis iš A_j, tai $A_i \cap B_j = \emptyset$. Tai prieštarauja teoremos sąlygai $A_i \cap B_j \neq \emptyset$. Tas pats ir esant paskutiniųjų elementų sąryšiui $a' \preceq a$.

Vadinasi,

$$1 \geq P\left(\bigcup_{i=1}^{h} X_i\right) = \sum_{i=1}^{h} P(X_i) = h\binom{k+l}{k}^{-1}.$$

Išsprendę nelygybę, gauname h įvertį.

Teorema įrodyta.

6. Poromis susikertančių poaibių šeimos

Nagrinėkime jos poaibių šeimas $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\} \subset \mathcal{P}(X)$ su savybe

$$A_i \cap A_j \neq \emptyset, \quad 1 \leq i < j \leq m.$$

Jas vadinsime poromis *susikertančių poaibių šeimomis.*

1 teorema. *Jei $\mathcal{A}$ – n aibės susikertančių poaibių šeima, tai*

$$|\mathcal{A}| \leq 2^{n-1}.$$

Be to, egzistuoja tokia $\mathcal{A}$, kad $|\mathcal{A}| = 2^{n-1}$.

Įrodymas. Turime 2^{n-1} skirtingų nesutvarkytųjų poaibių porų $(A, X \setminus A)$, kai A perbėga visus poaibius iš $\mathcal{P}(X)$. Bet kokioje šeimoje $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$ iš bet kurios šios poros gali būti ne daugiau kaip vienas poaibis. Kitaip sakant, atitiktis

$$A_i \mapsto (A, X \setminus A),$$

jei $A_i = A$ arba $A_i = X \setminus A$, apibrėžia $\mathcal{A}$ injektyvų atvaizdį su reikšmėmis šių porų aibėje. Tad, $m \leq 2^{n-1}$.

Visi poaibiai, turintys 1, sudaro aibės $\{1, \dots, n\}$ susikertančių poaibių šeimą. Jų yra 2^{n-1}. $\diamond$

Užduotis. *Raskite $\mathcal{A}$, sudarytos iš visų n aibės poaibių, turinčių daugiau nei $n/2$ elementų, galią. Ir pastebėkite, kad tokia $\mathcal{A}$ sudaro besikertančių poaibių šeimą.*

Kaip įvertinama susikertančių poaibių šeimos galia, kai įvedami papildomi apribojimai poaibiams? Imkime tik k poaibius su $k \leq n/2$.

2 teorema (P. Erdős, Ch. Ko, R. Rado, 1938) *Jei $n \geq 2k$, tai didžiausia susikertančių n aibės k poaibių šeima turi ne daugiau kaip*

$$\binom{n-1}{k-1}$$

narių.

Įrodymas. Pasinaudokime netikėtu įvaizdžiu. Imkime aibės $X = \{1, \dots, n\}$ skaičių ciklinį kėlinį (t.y. sutapatiname kėlinius pavidalo $(1234) = (2341) = (3412) = (4123)$), pažymėkime jį τ ir juo sunumeruokime vienetinio apskritimo vienodo ilgio $2\pi/n$ lankelius, apeidami juos pagal laikrodžio rodyklę. Pastebėkime, kad poromis susikertančių lankų, sudarytų iš k iš eilės einančių lankelių, šeima $\{L_1, \dots, L_l\}$ negali turėti daugiau negu k lankų, t.y. $l \le k$.

Iš viso turime $(n-1)!$ ciklinių kėlinių τ ir galimybių sunumeruoti apskritimo lankus. Tegu $\mathcal{A} = \{A_1, \dots A_l\}$. Fiksavus poaibio $A \in \mathcal{A}$ elementų numeraciją, jį galima vaizduoti k iš eilės einančių lankelių lanku L_τ kažkokioje lankelių numeracijoje, gautoje ciklinio kėlinio τ pagalba. Tą žymėkime $A \mapsto L_\tau$. Panagrinėkime porų aibę

$$S = \{(A, \tau): \ A \in \mathcal{A}, \ \tau \ - \text{cikl. keit.}, \ A \mapsto L_\tau\}$$

ir skaičiuokime dukart. Iš vienos pusės,

$$|S| = \sum_\tau \sum_{A \in \mathcal{A}} \mathbf{1}\{A \mapsto L_\tau\} \le \sum_\tau k = k(n-1)!.$$

Antra vertus,

$$|S| = \sum_{A \in \mathcal{A}} \sum_\tau \mathbf{1}\{A \mapsto L_\tau\} = \sum_{A \in \mathcal{A}} k!(n-k)! = |\mathcal{A}|k!(n-k)!.$$

Čia, skaičiuodami vidinę sumą pastebėjome, kad aibės A elementus galime pernumeruoti $k!$ kartų. Vadinasi, jos vaizdavimas lanku tiek kartų pasikartojo kitose lankų numeracijose naudojant kitus τ. Dar daugiau kėlinio skaičiai, nepatenkantys į A, gali būti keičiami $(n-k)!$ kartų ir visi pakeistieji kėliniai duos šios aibės vaizdą. Vadinasi, yra $k!(n-k)!$ ciklinių τ, užtikrinančių sąryšį $A \mapsto L_\tau$.

Sulyginę abi $|S|$ išraiškas, gauname

$$|\mathcal{A}| \le \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!} = \binom{n-1}{k-1}.$$

Teorema įrodyta. $\diamond$

Teorema 1 teigia, kad susikertančių poaibių šeimos galia bent du kartus mažesnė už visų poaibių aibės galią. Joje buvo naudojamas sąryšis $x \in A$. Panagrinėkime teiginį, išreiškiamą operacija $A \setminus \{x\}$.

3 teorema (J.A. Bondy, 1972). *Tegu $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ – n aibės poaibių šeima, tai egzistuoja $x \in X$ toks, kad poaibiai $A_i \setminus \{x\}$, $1 \le i \le n$, yra skirtingi. Egzistuoja $(n+1)$-o poaibio šeima, neturinti tokios savybės.*

Įrodymas. Pastebėkime, kad teoremoje leidžiamas ir vienas tuščiasis poaibis tarp A_i, suprantant $\emptyset \setminus \{x\} = \emptyset$.

Panaudokime poaibių simetrinį skirtumą Δ. Pagal apibrėžimą

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \qquad A, B \in \mathcal{P}(X).$$

Tarkime, kad dėl $\mathcal{A}$ negalioja teoremos teiginys.

Bet kokiam $D \subset X$ galime apibrėžti nebūtinai skirtingų poaibių rinkinį

$$\mathcal{A}_D = \{A_i \cap D: \ A_i \in \mathcal{A}\}.$$

Jei $x \in A_1 \Delta A_2$, pvz., $x \in A_1$ (tada $x \notin A_2$), o $D = \{x\}$, tai $|\mathcal{A}_D| \geq 2$, nes turi tuščiąjį poaibį ir $\{x\}$. Vadinasi, poaibių šeima

$$\mathcal{D} := \{D \subset X : \ |\mathcal{A}_D| \geq |D| + 1\}$$

yra netuščia ir joje egzistuoja maksimalios galios poaibis D. Kokia jo galia? Kadangi $|\mathcal{A}_D| \leq |\mathcal{A}| = n$, tai $|D| \leq n - 1$. Lygybė $|D| = n - 1$ reikštų, jog $\mathcal{A}_D$ sudaro skirtingos aibės, o $D = X \setminus \{d\}$ su kažkokiu $d \in X$. Kadangi

$$A_i \cap (X \setminus \{d\}) = A_i \setminus \{d\}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

pagal mūsų padarytą prielaidą tokie poaibiai negali būti skirtingi. Taigi,

$$|D| \leq n - 2. \tag{6.1}$$

Panašiai pastebėkime, kad

$$|\mathcal{A}_D| \leq n - 1. \tag{6.2}$$

Iš tiesų, jei

$$A_i \cap D = A_i \setminus \bar{D}, \qquad \bar{D} = X \setminus D,$$

būtų skirtingos, tai ir $A_i \setminus \{x\}$ būtų skirtingos kiekvienam $x \in \bar{D}$. Pagal (6.1) jų yra bent 2. Tai prieštarautų mūsų prielaidai dėl $\mathcal{A}$.

Iš (6.2) išplaukia, kad egzistuoja maksimalios galios D su savybe $A_i \cap D = A_j \cap D$ kažkokiem $1 \leq i < j \leq n$. Jei $x \in A_i \Delta A_j$, tai $x \notin D$ (Įsitikinkite!). Imkime $E = D \cup \{x\}$. Pastebėję, jog $A_i \cap E \neq A_j \cap E$ bei $A_s \cap E \neq A_t \cap E$ visoms poroms $1 \leq s < t \leq n$, kurioms buvo $A_s \cap D \neq A_t \cap D$, turime

$$|\mathcal{A}_E| \geq |\mathcal{A}_D| + 1 \geq |D| + 2 = |E| + 1.$$

Tokiu būdu, apibrėžėme didesnios galios nei maksimali aibę iš $\mathcal{D}$. Prieštara įrodo pirmą teoremos teiginį.

Antrajam tvirtinimui pagrįsti, pakanka imti šeimą

$$\emptyset, \{1\}, \ldots, \{n\}.$$

Teorema įrodyta. $\diamond$

Antras 3 teoremos įrodymas remiasi grafų teorija. Tegu vėl $\mathcal{A}$ neturi teoremoje nurodytos savybės. Paprastumo dėlei imkime $X = \{1, \ldots, n\}$. Taigi, kiekvienam $1 \leq i \leq n$ egzistuoja $1 \leq k(i) < l(i) \leq n$ su savybe $A_{k(i)} \neq A_{l(i)}$, bet

$$A_{k(i)} \setminus \{i\} = A_{l(i)} \setminus \{i\}$$

ir todėl

$$A_{k(i)} \Delta A_{l(i)} = \{i\}. \tag{6.3}$$

Sudarykime multigrafą su viršūnių aibe $V = \{1, \ldots, n\}$ ir kiekvienam i išveskime briauną sujungdami $k(i)$ su $l(i)$. Multigrafo didumas irgi yra n. Įsitikinkime, kad jame nėra ciklo, todėl jis bus grafas.

Tegu jame yra ciklas, turintis briaunas

$$k(i_1)l(i_1), \ k(i_2)l(i_2), \ldots, k(i_{s-1})j(i_{s-1}), \ k(i_s)l(i_s)$$

su sutampančiomis viršūnėmis $l(i_j) = k(i_{j+1})$, kai $1 \leq j \leq s-1$ ir $l(i_s) = k(i_1)$. Supaprastinkime žymenis pakeisdami $i_r \mapsto r$, $A_{k(j)} = A'_j$ bei $A_{l(j)} = A'_{j+1}$. Dabar pagal (6.3) turėsime

$$A'_1 \Delta A'_2 = \{1\}, A'_2 \Delta A'_3 = \{2\}, \ldots, A'_s \Delta A'_{s+1} = A'_s \Delta A'_1 = \{s\}.$$

Pasinaudokime gerai žinomu faktu, kad $\mathcal{P}(X)$ sudaro Abelio grupę simetrinio skirtumo atžvilgiu. Joje neutralusis elementas yra $\emptyset$, o kiekvienai $A \in \mathcal{P}(X)$ simetriškuoju (priešinguoju) elementu yra jis pats. Todėl įterpdami tuščias aibes ir pasinaudodami asociatyvumu, gauname

$$\begin{aligned}\{s\} &= A'_1 \Delta A'_s = (A'_1 \Delta A'_2) \Delta (A'_2 \Delta \cdots \Delta A'_{s-1}) \Delta (A'_{s-1} \Delta A'_s) \\ &= \{1\} \Delta \{2\} \Delta \cdots \Delta \{s-1\} = \bigcup_{j=1}^{s-1} \{j\}.\end{aligned}$$

Akivaizdi prieštara įrodo, kad grafas yra beciklis, bet tada jo didumas nėra didesnis už $n-1$. Vadinasi, prielaida apie $\mathcal{A}$ buvo klaidinga. $\diamond$

Panašiai galime nagrinėti atvejį, kai aibės kertasi tam tikru elementų skaičiumi.

7. Skirtingi poaibių atstovai

Prisiminkime

Hall'o vedybų teoremą. *Visi m vaikinų, pažįstančių po keletą merginų, galės vesti savo pažįstamas tada ir tik tada, kada bet kuris k poaibis vaikinų, $1 \leq k \leq m$, kartu paėmus pažįsta ne mažiau kaip k merginų.*

Matematikai svarbi ir kita Hall'o teoremos interpretacija. Tarkime $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ - aibės X netuščių poaibių šeima. Kada egzistuoja rinkinys $(x_1, \ldots, x_m)$ tokių skirtingų X elementų, kad $x_i \in A_i$, $1 \leq i \leq m$?

Tokį x-ų poaibį iš X vadinsime poaibių A_i *skirtingų atstovų rinkiniu.* Sutinkamas ir $\mathcal{A}$ *transversalės* terminas.

1 teorema. *X aibės poaibių šeimos $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ skirtingų atstovų rinkinys egzistuoja tada ir tik tada, kada*

$$\left| \bigcup_{i \in F} A_i \right| \geq |F| \tag{7.1}$$

su kiekvienu poaibiu $F \subset \{1, \ldots, m\}$.

1 Įrodymas. Sudarykime dvidalį grafą $G(V_1, V_2)$ su $V_1 = \mathcal{A}$, o $V_2 = X$. Be to, išveskime briaunas $A_i x_j$, jei $x_j \in A_i$. Ką reikštų visiškasis suporavimas šiam dvidaliui grafui? Tai būtų X poaibio, turinčio m elementų bei sujungtų briaunomis su $\mathcal{A}$, radimas. Akivaizdu, kad toks poaibis ir būtų $\mathcal{A}$ skirtingų atstovų rinkinys. Vadinasi, 2 teorema yra 1 teoremos išvada. $\diamond$

R.Rado įrodymas. Įrodysime tik pakankamumą. Idėja: jei (7.1) sąlyga yra patenkinta su aibe A_i, $|A_i| \geq 2$, tai ji išlieka patenkinta ir atėmus iš jos kokį nors elementą. Šią savybę įrodysime vėliau. Dabar iš jos išvedame teoremos teiginį.

Pasinaudoję minėta savybe keletą kartų ir išmetę iš A_i elementus, vietoje visų aibių A_i galime gauti vieno elemento poaibius. Bet tada (7.1) sąlyga reiškia, kad visi likę A_i elementai yra skirtingi X elementai. Todėl jie sudaro ieškomą skirtingų atstovų rinkinį. Tuo būdu, teorema būtų įrodyta.

Grįžtame prie minėtos savybės. Tarkime, kad $i = 1$, $|A_1| \geq 2$, $x, y \in A_1$, ir bet kurio iš jų atėmimas iš A_1 pakeistų (7.1) sąlygą. Tai reiškia, jog turime tokius du indeksų poaibius $F_1, F_2 \subset \{2, ..., m\}$, kad

$$|P| := \left| \bigcup_{i \in F_1} A_i \cup (A_1 \setminus \{x\}) \right| \leq |F_1| \tag{7.2}$$

ir

$$|Q| := \left| \bigcup_{i \in F_2} A_i \cup (A_1 \setminus \{y\}) \right| \leq |F_2|. \tag{7.3}$$

Tada

$$P \cup Q = \bigcup_{i \in F_1 \cup F_2} A_i \ \cup A_1 \subset X$$

ir ji patenkina (7.1) sąlygą, tad

$$|P \cup Q| \geq |F_1 \cup F_2| + 1. \tag{7.4}$$

Be to,

$$|P \cap Q| \geq \left| \bigcup_{i \in F_1 \cap F_2} A_i \right| \geq |F_1 \cap F_2|, \tag{7.5}$$

nes ir paskutinė sąjunga tenkina (7.1) sąlygą. Dabar iš (7.2), (7.3), (7.4) ir (7.5) nesunkiai išvedame prieštarą:

$$\begin{aligned} |F_1| + |F_2| &\geq |P| + |Q| = |P \cup Q| + |P \cap Q| \\ &\geq |F_1 \cup F_2| + 1 + |F_1 \cap F_2| = |F_1| + |F_2| + 1. \end{aligned}$$

1 teorema įrodyta. $\diamond$

2 teorema. *$X = \{1, \ldots, b\}$ aibės poaibių šeima $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$, kuri kokiam nors $1 \leq r \leq n$ tenkina sąlygas:*
(i) $|A_j| = r$;
(ii) kiekvienas $x \in X$ priklauso ne daugiau kaip r poaibių iš $\mathcal{A}$.
Tada egzistuoja skirtingų atstovų rinkinys.

Įrodymas. Tikriname Hall'o sąlygą (ref1). Dukart skaičiuokime porų (j, x) su $j \in F$ ir $x \in A_j$ skaičių. Iš vienos pusės pagal (i) sąlygą

$$\sum_{j \in F, x \in A_j} 1 = \sum_{j \in F} \sum_{x \in A_j} 1 = r|F|.$$

Iš kitos pusės pagal (ii) sąlygą turime

$$\sum_{j\in F, x\in A_j} 1 = \sum_{x\in\cup_{j\in F} A_j} \sum_{j, x\in A_j} 1 \le r\left|\bigcup_{j\in F} A_j\right|.$$

Vadinasi, (1) galioja ir teiginys yra teisingas. $\diamond$

Prisiminsime vieną viduramžių žaidimą – lotyniškąjį kvadratą, jo sudarymą. Pagal apibrėžimą n *eilės lotyniškuoju kvadratu* vadinama skaičių $1, 2, ..., n$ matrica, kurios eilutėse ir stulpeliuose yra skirtingi elementai. Ar su kiekvienu n tokia matrica egzistuoja?

3 teorema. *Tegu $n \ge 1$ – natūralusis skaičius. Egzistuoja n eilės lotyniškasis kvadratas.*

Įrodymas. Įrodysime net daugiau: kiekvieną stačiakampę matricą, vadinamą *lotyniškuoju stačiakampiu*, $m \times n$, $1 \le m < n$, su skirtingais elementais (iš skaičių $1, ..., n$) eilutėse ir stulpeliuose galime papildyti iki lotyniškojo stačiakampio su didesniu eilučių skaičiumi. Kadangi bet kuris skaičių $1, ..., n$ kėlinys sudaro vienos eilutės lotyniškąjį stačiakampį, kartodami papildymo procedūrą, sudarytume lotyniškąjį kvadratą.

Tarkime, turime $m \times n$ lotyniškąjį stačiakampį, $m < n$. Kartu paėmus, šiame stačiakampyje kiekvienas elementas pakartotas m kartų, po vieną kiekvienoje eilutėje. Pažymėkime $A_1, ..., A_n$ skaičių, nepatekusių į matricos stulpelius, aibes. Pastebėkime, kad $|A_j| = n - m$, o kiekvienas skaičius iš $X = \{1, ..., n\}$ jose pasikartoja $n - m$ kartų. Pastarąjį teiginį nesunku įžvelgti nagrinėjant matricos stulpelius, papildytus aibėmis A_j. Taip susidarytų n kėlinių, kuriuose bet kuris iš skaičių, neviršijančių n, pasikartotų n kartų. Pradiniame lotyniškajame stačiakampyje šis skaičius pakartotas m kartų, todėl visose aibėse A_j jis pasikartoja $n - m$ kartų.

Vadinasi, yra patenkintos 2 teoremos salygos su $r = n - m$. Egzistuoja skirtingų atstovų rinkinys poaibių šeimai $\mathcal{A} = \{A_1, ..., A_n\}$, kuris gali sudaryti naują lotyniškojo stačiakampio eilutę. Pakartoję tai keletą kartų baigiame 2 teoremos įrodymą. $\diamond$

Kai kada pasiseka išrinkti tik $t \le m$ skirtingų atstovų rinkinį (dalinę transversalę). Jo egzistavimo sąlyga šiek tiek silpnesnė.

4 teorema. *Tegu $\mathcal{A} = \{A_1, ..., A_m\}$ – netuščių aibės X elementų poaibių šeima. Skirtingł atstovų rinkinys iš t elementų, priklausančių kažkurioms iš A_i aibių po vieną, egzistuoja tada ir tik tada, kai kiekvienam $F \subset \{1, ..., m\}$*

$$\left|\cup_{i\in F} A_i\right| \ge |F| + t - m. \tag{7.6}$$

Įrodymas. Kai $|F| + t - m \le 0$, sąlyga triviali. Tegu $t < m$, imkime bet kokią aibę D, $|D| = m - t$ ir nesikertančią su X. Sudarykime aibós $X \cup D = X'$

poaibių šeimą $\mathcal{A}' = \{A_1 \cup D, ..., A_m \cup D\}$. Įsitikinkime, jog $\mathcal{A}$ dalinis t skirtingų atstovų rinkinys egzistuoja tada ir tik tada, kada $\mathcal{A}'$ turi skirtingų X' atstovų rinkinį.

Iš tiesų, radę dalinį rinkinį $x_1, ..., x_t$ galėtume prirašyti visus D elementus ir tuo būdu gauti pilną $\mathcal{A}'$ skirtingų X' atstovų rinkinį, jau turintį m elementų. Atvirkščiai, turėdami pastarąjį rinkinį, ir išmetę iš jo visus D atstovus, kurių bus ne daugiau negu $m - t$, gautume bent t skirtingų aibių iš $\mathcal{A}$ atstovų, t. y., dalinę transversalę.

Lieka įsitikinti, kad (7.6) sąlyga yra ekvivalenti Hall'o teoremos sąlygai, pritaikytai šeimai $\mathcal{A}'$. Tai išplaukia iš sąryšio

$$\left| \cup_{i \in F} (A_i \cup D) \right| = \left| \cup_{i \in F} A_i \right| + m - t \geq |F|.$$

4 teorema įrodyta. $\diamond$

Jei dvidaliame grafe $G = G(V_1 \cup V_2, E)$ egzistuoja bent t briaunų, jungiančių skirtingas V_1 viršūnes su skirtingomis V_2 viršūnėmis, tai sakome, kad grafe yra *dalinis* $t < |V_1|$ *suporavimas.* Tegu, $|V_1| = m$ bei kaip ir anksčiau $\Phi(x_i) \subset V_2$ – viršūnių, sujungtų briaunomis su x_i, aibė.

Išvada. *Dvidaliame* $G(V_1 \cup V_2, E)$ *grafe yra dalinis* $t < |V_1|$ *suporavimas tada ir tik tada, kada*

$$\left| \cup_{i \in F} \Phi(x_i) \right| \geq |F| + t - m, \qquad F \subset \{1, ..., m\}.$$

Užduotis. Prie kokių sąlygų egzistuoja dalinis skirtingł atstovų iš $\mathcal{A}$ rinkinys, išrinktų iš $X_0 \subset X$?

7.1. Nulių ir vienetų matricos. Hall'o teoremos sąlygos tikrinimą palengvina matricų, kurių elementai yra tik nuliai arba vienetai, nagrinėjimas. Tokios matricos vadinamos *(0,1) matricomis.* Tarkime, kad $\mathcal{A} = \{A_1, ..., A_m\}$ – netuščių aibės $X = \{x_1, ..., x_n\}$ elementų poaibių šeima.

Matricą $M = (m_{ij})$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, su $m_{ij} \in \{0, 1\}$ ir $m_{ij} = 1$ tada ir tik tada, kada $x_j \in A_i$ vadiname *šeimos* $\mathcal{A}$ *incidentumo matrica.* Dvidaliame $G(V_1 \cup V_2, E)$ grafe, $V_1 = \{x_1, ...x_m\}$, $V_2 = \{y_1, ..., y_n\}$, imdami kaip ir anksčiau aibą V_2 viršūnių, kurios buvo sujungtos su $x_i \in V_1$, gautume, jog $m_{ij} = 1$ tada ir tik tada, kai $x_i y_j \in E$.

Matricos iš 0 ir 1-ų *incidentumo rangu* (tiesiog, *rangu*, nelygu *matricos rangui*!) vadiname didžiausią skaičių vienetų, kurie yra skirtingose eilutėse ir skirtinguose stulpeliuose. Aišku, eilučių ar stulpelių keitimas vietomis neturės įtakos šio rango skaičiavimui.

1 teorema. *Aibės X poaibių šeima $\mathcal{A} = \{A_1, ..., A_m\}$ turi didžiausią t skirtingų atstovų rinkinį tada ir tik tada, kai jos incidentumo matricos rangas lygus t. Įrodymas* išplaukia iš apibrėžimų. $\diamond$

Kita teorema, skirta palengvinti (0,1) matricos incidentumo rangui skaičiuoti.

2 teorema (König, Egerváry, 1931). *(0,1) matricos incidentumo rangas lygus mažiausiam bendram skaičiui eilučių ir stulpelių, kuriuose bendrai yra visi matricos vienetiniai elementai.*

Įrodymas. Tarkime, kad visi vienetiniai elementai bendrai yra r eilučių ir s stulpelių, o $\mu = r + s$ yra minimalus. Aišku, jog incidentumo rangas neviršija μ. Galime tarti, jog matrica neturi nulinių eilučių ir stulpelių.

Įrodysime, kad matricoje yra μ vienetų, išsidėsčiusių skirtingose eilutėse ir skirtinguose stulpeliuose. Patogumo sumetimais, perstatykime eilutes ir stulpelius taip, kad visi vienetai būtł viršutinėse r eilučių ir paskutiniuose s stulpelių. Gauname tokią matricą:

$$M = \begin{pmatrix} P\ Q \\ 0\ Q \end{pmatrix}.$$

Čia kairiajame apatiniame kampe yra dalinė nulinė matrica, kurios matmenys yra $(m - r) \times (n - s)$. Atkreipkime dėmesį į dalines matricas P ir Q. Nei viena matricos P eilutė negali būti nulinė. Priešingu atveju visus M vienetus būtume sutalpinę į mažiau negu r eilučių ir s stulpelių. Panašiai samprotaudami gautume, kad Q stulpeliai yra nenuliniai.

Tegu A_i, $i \leq r$, – pirmųjų $n - s$ stulpelių indeksų j, kai $m_{ij} = 1$, poaibis. Šių poaibių šeima $\mathcal{A} = \{A_1, ..., A_r\}$ tenkina Hall'o teoremos sąlygą. Iš tiesų, jei koks nors k šių poaibių rinkinys turės mažiau negu k elementų, tai vienetai, esantys šiose eilutėse tilps $l < k$ stulpelių. Pradinėje matricoje M tas k eilučių pakeiskime l stulpeliu, kuriuos prijunkime prie stulpelio $\binom{S}{Q}$. Bendras eilučių ir stulpelių, talpinančių visus vienetus būtų

$$(r - k) + s + l = \mu - (k - l) < \mu.$$

Prieštara įrodo, kad Hall'o sąlyga yra patenkinta.

Pagal Hall'o teoremą galime išrinkti skirtingų atstovų rinkinį iš r elementų. Jis nurodys skirtingus indeksus stulpelių, kuriuose yra M matricos r vienetų, kurie be to bus ir skirtingose eilutėse. Panašiai pasielgę su matrica Q, gausime dar s vienetų skirtingose M eilutėse ir stulpeliuose. Todėl M incidentumo rangas yra lygus $r + s = \mu$.

2 teorema įrodyta. $\diamond$

8. Politiko teorema

Kombinatorikos folkloru yra tapusi „Politiko" teorema.

Tarkime, kad žmonių bendruomenė turi savybę: bet kokios jos narių poros abu asmenys pažįsta lygiai vieną kitą asmenį. Tada bendruomenė turi vieną „politiką", t. y., narį, kurį pažįsta visi.

Palyginę su 7 skyrelio teorema matome, kad dabar vietoje sąryšio „elementas priklauso" formulavime naudojamas išsireiškimas „abu poros asmenys pažįsta kitą". Grafų teorijoje tai lengva išreikšti gretimumo sąryšiu.

Teorema. *Tarkime, kad grafe $G = (V, E)$ kiekvienos viršūnių poros abu elementai yra gretimi su viena ir tik viena viršūne. Tada egzistuoja viršūnė, gretima su visomis kitomis grafo viršūnėms.*

Grafas, vadinamas „vėjo malūnu": BRĖŽINYS

iliustruoja tokią galimybę. Pasirodo, kad tai – vienintelis grafas, tenkinatis teoremos sąlygą.

Įrodymas. Pirmoje dalyje įrodysime, kad G – grafas, tenkinantis teoremos sąlygą, bet neturintis teoremoje nurodytos viršūnės, kuri būtų gretima su visomis kitomis viršūnėmis, yra *reguliarus.* Pagal apibrėžimą tokio grafo viršūnių laipsniai $\delta(u)$, $u \in V$, yra vienodi. Aišku, kad G nebus nei pilnasis grafas K_1, nei K_3.

Pradžioje pastebėkime, kad G neturi ilgio 4 ciklo C_4. Iš tiesų, priešingu atveju negretimų ciklo viršūnių pora turėtų dvi bendras gretimas viršūnes, o ne vieną. Taigi, G nebus pilnasis grafas K_s, $s \geq 4$. Vadinasi, egzistuoja negretimų viršūnių porą $u, v \in V$. Tegu $\delta(u) = k \geq 1$, o $W := \{w_1, \dots, w_k\}$ – jos kaimyninių viršūnių aibė. Pastebėkime, kad teoremos sąlyga tenkinama tik, kai $k \geq 2$.

Poros $\{u, v\}$ bendra gretimoji viršūnė bus aibėje W. Tarkime, kad tai viršūnė w_2. Poros $\{u, w_2\}$ bendra gretimoji viršūnė irgi bus aibėje W. Tegu tai yra w_1. Panašiai porų $\{w_2, v\}, \dots, \{w_k, v\}$ bendras gretimąsias viršūnes sužymėkime raidėmis $z_2, \dots, z_k$ atitinkamai. Kadangi $C_4 \notin G$, viršūnės z_i nepriklauso W, be to z_i, $2 \leq i \leq k$ yra skirtingos. Vadinasi,

$$\delta(v) \geq k = \delta(u).$$

Mūsų samprotavimuose galėtume sukeisti u ir v vietomis. Todėl

$$\delta(u) = \delta(v) = k \geq 2. \tag{8.1}$$

Gautą situaciją pavaizduokime grafu BRĖŽINYS

Matome, kad atveju $k = 2$ turėtume „vėjo malūną", tenkinantį teoremos išvadą. Taigi toliau nagrinėsime atvejį, kai $k \geq 3$. Visos nepaminėtos viršūnės, jei tokių yra, bus negretimos ir u, ir v, o viršūnės w_i ir z_j – negretimos arba u, arba v. Vadinasi, pagal (8.1) visų viršūnių laipsniai yra k. Įrodę G reguliarumą, pastebėkime, kad k ir $n = |V|$ yra tarpusavyje susiję dydžiai. Iš vienos pusės,

$$\sum_{i=1}^{k} \delta(w_i) = k^2. \tag{8.2}$$

Iš kitos pusės, įsitikinkime, kad suma kairioje pusėje „suskaičiuoja" visas grafo viršūnes, o u – net k kartų. Iš tiesų, jei kažkokia viršūnė x nebūtų gretima vienai iš w_i, tai panagrinėję poros $\{x, u\}$ bendrą gretimą gautime prieštarą. Vadinasi, dėmuo $\delta(w_i)$ suskaičiuoja w_i kaimynes, skirtingiems i šios kaimynių aibės kertasi tik viršūne u. Iš (8.2) išplaukia

$$k^2 - k + 1 = n. \tag{8.3}$$

Antra įrodymo dalis yra algebrinė. Pagrindinė idėja – ištirti grafo G gretimumo matricos tikrines reikšmes. Tegu $A = (a_{ij})$ - tokia matrica. Ji yra simetrinė, kiekvienoje jos eilutėje yra $k \geq 3$ vienetų, o kiti elementai yra nuliniai. Pagrindinė įstrižainė taip pat sudaryta iš nulių. Teoremos sąlyga reikalauja, kad bet kokioje poroje eilučių būtų lygiai viena vieta, kai vienetas yra virš vieneto. Todėl galime nesunkiai rasti

$$A^2 == (k-1)I + J.$$

Čia I – n eilės vienetinė, o J – matrica, sudaryta tik iš vienetų. Kadangi charakteristinis polinomas

$$\det(J - tI) = (n-t)(-t)^{n-1},$$

tai matricos A^2 tikrinės reikšmės yra

$$(k-1) + n, \qquad (k-1) + n - 1$$

kartotinumų 1 ir $(n-1)$-as atitinkamai. Pritaikę (8.3) lygybę iš čia gauname, kad matricos A tikrinė reikšmė k yra pirmojo kartotinumo, o reikšmės $\sqrt{k-1}$ ir $-\sqrt{k-1}$ turi kažkokius kartotinumus s ir r, $s + r = n - 1$. Prisiminę dar vieną tiesinės algebros faktą, kad matricos įstrižainės elementų suma lygi jos tikrinių reikšmių sumai, matome, jog

$$k + s\sqrt{k-1} - r\sqrt{k-1} = 0.$$

Vadinasi, $s \neq r$ bei

$$\sqrt{k-1} = \frac{k}{s-r}.$$

Dešinėje pusėje turime racionalųjį skaičių, o kairioji yra kvadratinė šaknis iš natūraliojo skaičiaus. Iš čia išplaukia, kad ši šaknis irgi yra natūralusis skaičius (Įsirodykite!). Paymėkime jį h. Gauname sąryšį

$$h(s-r) = k = h^2 + 1,$$

parodantį, kad h dalija $h^2 + 1$. Todėl $h = 1$, o $k = 2$. Bet šį atvejį mes buvome išmetę iš nagrinėjimo. Gautoji prieštara parodo, kad grafo G, neturinčio teoremoje nurodytos savybės nėra.

Teorema įrodyta. $\diamond$

Performuluodami teoremą, matome, kad grafas, kuriame tarp bet kokių dviejų viršūnių yra tik vienintelis ilgio 2 kelias, yra „vėjo malūnas". Paskutiniame dešimtmetyje didelio dėmesio buvo susilaukusi A. Kotzigo hipotezė.

Kotzigo hipotezė. *Tegu $l > 2$. Nėra grafų su savybe, kad bet kokią viršūnių porą jungia vienintelis ilgo l kelias.*

Pats autorius patvirtino ją, kai $l \leq 8$. Tik 2000 metais Y. Yang, J. Lin, C. Wang ir V. Li įrodė hipotezę.

9. Grafų spektrinė analizė

Tegul $G = (V, E)$, $V = \{1, 2, \dots, n\}$, yra (paprastasis) grafas, o $A = ((a_{ij}))$, $a_{ij} = \mathbf{1}\{ij \in E\}$ - jo gretimumo matrica. Briaunas sunumeravę, galime apibrėžti grafo incidentumo matricą

$$B = ((b_{ik})), \quad 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq k \leq m = |E|;$$

čia $b_{ik} = \mathbf{1}\{i \,\text{inc.}\, e_k\}$, o e_k yra k-oji briauna.

1 *teorema.* Teisingas sąryšis $BB^t = D + A$, čia D - diagonali matrica, kurios įstrižainėje iš eilės išdėstyti viršūnių laipsniai.

Įrodymas. Pritaikyti apibrėžimus. $\diamond$

Pastaba. Ne bet kokia 0-1 matrica yra gretimumo matrica.

Ką slepia matrica $A^k = ((a_{ij}^{(k)}))$, $k \in \mathbb{N}$? Atsakymas:

2 *teorema.* Elementas $a_{ij}^{(k)}$ lygus k ilgio $(i - j)$ kelių skaičiui.

Įrodymas. Pasinaudokime indukcija pagal k. Jei $k = 1$, akivaidu. Jei jau žinome, kad $a_{ij}^{(k-1)}$ lygus $k-1$ ilgio $(i-j)$ kelių skaičiui, tai sudauginę matricas, gauname

$$a_{ij}^{(k)} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}^{(k-1)} a_{rj}^{(1)}.$$

Tai jau k ilgio $(i - j)$ kelių skaičius. $\diamond$

Toliau visada I_m - vienetinė matrica, o $J_m = ((1))$ ir $m \times m$ matmenų, o $I_n =: I$ ir $J_n =: J$.

3 *teorema.* Grafas G yra jungus tada ir tik tada, jei matrica $(A+I)^{n-1}$ neturi nulinių elementų.

Įrodymas. Pritaikę Niutono binomo formulę, turime

$$((q_{ij})) := (A + I)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} A^k I^{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} A^k.$$

Todėl

$$q_{ij} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a_{ij}^{(k)}.$$

Suma skaičiuoja visų ilgių $(i-j)$ kelius, net su svoriu. Suma teigiama, jei bent vienas iš dėmenų yra teigiamas. $\diamond$

4 *teorema.* Jei grafai G ir G' yra izomorfiniai, tai jų gretimumo matricas A ir A' sieja lygybė

$$A = PA'P^{-1},$$

čia P - keitinio matrica.

Įrodymas. Pritaikyti apibrėžimus. $\diamond$

Išvada. Izomorfiniai grafai turi tą patį gretimo matricų charakteristinį polinomą, t.y.,

$$p_G(\lambda) = \det(\lambda I - A) = p_{G'}(\lambda) = \det(\lambda I - A').$$

5 *teorema.* Pilnojo dvidalio grafo $K_{r,s} = G$ charakteristinis polinomas lygus

$$p_G(\lambda) = \lambda^{n-2}(\lambda^2 - rs),$$

čia $n = r + s$.

Įrodymas. Atitinkamai sunumeravę viršūnes, matome, kad gretimumu matrica yra blokinė

$$A = \begin{pmatrix} 0 & J_r \\ J_s & 0 \end{pmatrix}.$$

Čia 0 atitinkami nulių blokai. Matricos A rangas yra 2, tai kartu yra ir nenulinių tikrinių reikšmių skaičius. Vadinasi, charakteristinio polinomo pavidalas

$$p_G(\lambda) = \lambda^{n-2}(\lambda - b_1)(\lambda - b_2),$$

Simetrinės matricos tikrinės reikšmės yra realios, ir jų suma yra matricos A pėdsakas $tr(A) = 0 = b_1 + b_2$.

$$p_G(\lambda) = \lambda^{n-2}(\lambda^2 - a^2), \quad a := b_1.$$

Lieka rasti a.

Prisimename A^2 elementų prasmę. Įstrižainėje - ilgio 2 uždarų kelių $(i-j-i)$ ir $(j-i-j)$ skaičiai. Pilname dvidaliame grafe juos galime suskaičiuoti. Iš viso jų yra $2rs$. Bet $tr(A^2) = 2a^2$. Vadinasi,

$$2a^2 = 2rs$$

Iš čia išplaukia teoremos teiginys. $\diamond$

Pastaba. Ar charakteristinis polinomas apibrėžia grafą izomorfizmo tikslumu? NE!

Pavyzdys. Jei $G = C_4 \cup x$, $x \notin V$, tai

$$p_G(\lambda) = \lambda p_{C_4}(\lambda) = \lambda^3(\lambda^2 - 4).$$

Imkime $K_{1,4} = G' \not\simeq G$. Pagal 5 teoremą, jam irgi

$$p_{G'}(\lambda) = \lambda^3(\lambda^2 - 4).$$

Koks dvidalio, nebūtinai pilnojo, grafo spektras - tikrinių matricos A reikšmių rinkinys?

6 *teorema.* Jei G yra dvidalis grafas, o $\lambda \in \mathbb{R}$ jo charakteristinio polinomo k-ojo kartotinumo šaknis, tai $-\lambda$ irgi.

Įrodymas. Atitinkamai sunumeravę viršūnes, matome, kad gretimumo matrica yra blokinė

$$A = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^t & 0 \end{pmatrix}.$$

Čia 0 žymi atitinkamus nulių blokus, B yra (0-1) matrica ir B^t - transponuotoji matrica. Tikrinis reikšmės λ nenulinis vektorius $X \neq 0$ irgi turi pavidalą

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

čia x, y atitinkamų dimensijų vektoriai, nes

$$\lambda X = AX = \begin{pmatrix} By \\ B^t x \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Taigi

$$By = \lambda x, \qquad B^t x = \lambda y.$$

Jei vektorius y nenulinis, imkime vektorių

$$X' := \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix},$$

tada

$$AX' = \begin{pmatrix} -By \\ B^t x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = -\lambda X'.$$

Matome, kad X' yra tikrinės reikšmės $-\lambda$ tikrinis vektorius.

Kai tikrinės reikšmės λ kartotinumas yra k, tai jai atitinka k tiesiškai nepriklausomų tikrinių vektorių. Pakartoję argumentus, kiekvienam iš jų rastume reikšmės $-\lambda$ tikrinius vektorius ir jie būtų nepriklausomi. Vadinasi, ir pastarosios tikrinės reikšmės kartotinumas yra k.

Įrodyta. $\diamond$

7 *teorema.* Šie teiginiai yra ekvivalentūs:

(1) G yra dvidalis grafas;

(2) bet kokiam $k \in \mathbb{N}$ tikrinių reikšmių laipsnių suma

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{2k-1} = 0.$$

Įrodymas. Užrašytoji suma - matricos A^{2k-1} pėdsakas. Taigi, nelyginio ilgio uždarų kelių grafe G nėra. Jame nėra ir nelyginio ilgio ciklo. Iš čia išplaukia, kad G yra dvidalis.

Iš tiesų, jei $G_0 \subset G$ yra bet kokia jungi komponentė ir $u \in V(G_0) = V_0$, o

$$f(v) = \min\{(u - v)\,\text{kelio ilgis}\}$$

Tada apibrėžę skaidinį $V_0 = U_1 \cup U_2$ dalis pagal $f(v)$ lyginumą:

$$U_1 = \{v : \ f(v)\,\text{yra nelyginis}\}$$

ir

$$U_2 = \{v : \ f(v)\,\text{yra lyginis}\},$$

matytume, kad $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Briauna tarp U_1 ir U_2 sukurtų lyginio ilgio ciklą. To būti negali.

Taip išskaidę kiekvieną komponentę, gauname dvidalį grafą. Vadinasi, (2) $\Rightarrow$ (1).

Teiginys (1) $\Rightarrow$ (2) išplaukia iš pereitos teoremos, nes nenulinės tikrinės reikšmės įeina poromis. $\diamond$

Jau 6 teoremos įrodyme, ieškodami tikrinių reikšmių, pradėjome nuo tikrinių vektorių, kurių tiesiškai nepriklausomų turi būti lygiai n, nes matrica A yra simetrinė. Verta įsidėmėti, kad tikrinis vektorius $X = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$, atitinkantis reikšmę λ, „svorį" λx_i išskirsto i-os viršūnės kaimynėms. Šia savybe galima pasinaudoti ieškant jų. Suradę n tiesiškai nepriklausomų vektorių ir jų atitinkančių tikrinių reikšmių, įskaitant kartotinumus, turime visą informaciją.

Pavyzdys. Pilnajame grafe priskyrę viršūnėms po 1-etą galime imti $\lambda = n - 1$. Vadinasi, vektorius $X_1 = (1, \ldots, 1)$ yra tikrinis ir atitinka reikšmę $\lambda = n - 1$. Tiesiškai nepriklausomi vektoriai $X_i = (1, \ldots, 0, -1, 0, \ldots, 0)$ su (-1) irgi turi „skirstytojo savybę" savybę, jei paimtume $\lambda = -1$. Iš viso turime n t.n. vektorių, atitinkančių reikšmes $n - 1$ ir -1 su kartotinumu $(n - 1)$-as.

Užduotis. Ką tik aptartu būdu raskite žvaigždinio grafo spektrą.

Namų darbas. Raskite ciklinio grafo C_n spektrą.

8 *teorema.* Jei $G = (V, E)$ yra d reguliarus grafas ir poromis ortogonalūs vektoriai

$$X_1 = (1, \ldots, 1), \quad X_2, \quad \ldots \quad X_n$$

yra jo tikrinių vektorių, atitinkančių reikšmes $\lambda_1 = d, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ šeima, tada papildinio $\overline{G}$ tikriniai vektoriai yra tie patys, bet atitinka reikšmes

$$(n - 1 - d), \quad -1 - \lambda_2, \quad \ldots, -1 - \lambda_n$$

Įrodymas. Pasinaudosime lygybe

$$A_{\overline{G}} = J - I - A_G.$$

Vadinasi,

$$A_{\overline{G}}X = JX - IX - A_GX.$$

Jei $X = X_i$, $2 \le i \le n$, yra tikrinis matricos A vektorius, tai

$$A_{\overline{G}}X_i = JX_i - X_i - \lambda_i X_i = -(1+\lambda_i)X_i,$$

nes skaliarinė sandauga $< X_1, X_i >= 0$, todėl JX_i yra nulinis vektorius. Dėl $X_1 = (1, \ldots, 1)$ lygybė

$$A_{\overline{G}}X_1 = (n-1-d)X_1$$

yra akivaizdi, nes $\overline{G}$ yra $(n-1-d)$ reguliarus.

Įrodyta. $\diamond$

Įdomūs spektro ir grafo skersmens sąryšiai. Pagal apibrėžimą, jeigu $d(u,v)$ yra atstumas tarp viršūnių u ir v (minimalus briaunų skaičius $(u-v)$ take), tai grafo skersmuo yra

$$\mathrm{diam}(G) = \max\{d(u,v) : \ u, v \in V\}.$$

Jungiame grafe $\mathrm{diam}(G) < \infty$.

9 *teorema.* Jei $G = (V, E)$ yra jungus grafas, o jo spektras turi k skirtingų tikrinių reikšmių, tai

$$\mathrm{diam}(G) < k.$$

Įrodymas. Žiupsnis algebros faktų, pritaikytų gretimumo matricai A:

• (Keilio-Hamiltono t.) matrica A yra savo charakteristinio polinomo šaknis, t.y., $p_G(A) = 0$ - nulinė matrica.

• jei $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k$ yra visos skirtingos spektro reikšmės, tai matrica A yra polinomo

$$g(\lambda) := \prod_{j=1}^{k} (\lambda - \lambda_j)$$

šaknis, t.y., $g(A) = 0$; be to, tai mažiausio laipsnio polinomas, kurio šaknimi yra A.

Polinomas $g(\lambda)$ vadinamas *minimaliuoju* matricai A.

Grįžtame prie grafo. Jei matricos

$$I = A^0, \ A, \ A^2, \ \ldots, \ A^r \tag{9.1}$$

tiesiškai priklausomos virš $\mathbb{R}$, tai A yra r-ojo laipsnio polinomo šaknis ir atvirkščiai.

Vadinasi, kai $r < k$, išvardinti matricos laipsniai (9.1) yra tiesiškai nepriklausomi. Teoremos teiginys išplauks iš fakto, kad su

$$r = \mathrm{diam}(G)$$

sistema (9.1) yra tiesiškai nepriklausoma.

Sudarykime tiesinę kombinaciją ir prilyginkime ją nulinei matricai

$$c_0A^0 + c_1A^1 + \cdots + c_rA^r = 0 \tag{9.2}$$

Įsitikiname, kad
$$c_0 = c_1 = \cdots = c_r = 0.$$
Nenulinę pagrindinę įstrižainę turi tik I, todėl $c_0 = 0$.

Tegul $u = u_i, u_j \in V$, $i \neq j$, realizuojančios
$$d(u_i, u_j) = \mathrm{diam}(G) = r.$$
Matricos A^r elementas, esantis (i, j) pozicijoje, lygus kelių $(u_i - u_j)$ skaičiui, todėl nelygus nuliui. Bet toje pačioje pozicijoje esantys matricų $A^0, A, A^2, \ldots, A^{r-1}$ elementai lygūs nuliui, nes nėra trumpesnio $(u_i - u_j)$ kelio nei iš r briaunų. Vadinasi, iš (9.2) išplaukia $c_r = 0$. Toliau taikome matematinę indukciją. Tegul gavome, kad $c_r = c_{r-1} = \cdots c_{l+1} = 0$ ir (9.2) virto
$$c_1 A + \cdots + c_l A^l = O.$$
Nagrinėjame sluoksnį
$$V_l := \{v \in V : \ d(u, v) = l\}.$$
Jis netuščias, nes grafe buvo net r ilgio takai iš u. Jei $v = u_j \in V_l$, tai dabar matricos A^l elementas pozicijoje (i, j) yra nenulinis, o žemesnio laipsnio matricose A^i jis nulinis. Todėl ir $c_l = 0$. Pagal indukcijos principą, visi $c_l = 0$.

Teorema įrodyta. $\diamond$

Teorema bendru atveju nepagerinama: Pilnojo grafo $\mathrm{diam}(K_n) = 1$ ir jis turi 2 skirtingas tikrines reikšmes.

Dvidaliam grafui $\mathrm{diam}(K_{r,s}) = 2$ ir jo spektras turi 3 skirtingas reikšmes: $0, \pm\sqrt{rs}$.

Raskite dar bent vieną klasę grafų G, turinčių $1 + \mathrm{diam}(G)$ skirtingų tikrinių reikšmių.

Užduotis. Tegul t_3 yra trikampių skaičius grafe $G(V, E)$, $|V| = n$ ir $|E| = m$. Įrodyti, kad
$$\mathrm{tr}(A^2) = 2m, \qquad \mathrm{tr}(A^3) = 6t_3.$$
Atlikite savarankiškai.

10. Nelygybės

Neneigiamų elementų simetrinės nenulinės matricos maksimali tikrinė reikšmė yra teigiama, visos jos realios, tad galime išrikiuoti
$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n.$$
Dar žinoma:

• λ_1 yra paprastoji tikrinė reikšmė ir vienintelė turinti neneigiamų koordinačių tikrinį vektorių;

•• Jei
$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_k, \quad 1 \leq k < n,$$

yra pagrindinės dalinės matricos M, gautos iš A parinkus $\{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ stulpelius ir eilutes, tai

$$\lambda_{n-k+j} \leq \mu_j \leq \lambda_j, \quad 1 \leq j \leq k. \tag{10.1}$$

Jei $k = n - 1$, tai

$$\lambda_n \leq \mu_{n-1} \leq \cdots \mu_2 \leq \lambda_2 \leq \mu_1 \leq \lambda_1.$$

• • • Simetrinei neneigiamai matricai A turime

$$\min_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \leq \lambda_1 \leq \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}. \tag{10.2}$$

Be to,

$$\lambda_n \leq \frac{X^t AX}{X^t X} \leq \lambda_1. \tag{10.3}$$

Nelygybes galima naudoti tik su vienetinio ilgio vektoriais $X \in \mathbb{R}^n$.

Išvada. Indukuotojo grafo G pografio H, kurio eilė yra k tikrinės reikšmės μ_j turi persipynimo savybę (10.1).

1 *užduotis.* Įrodyti, kad grafo maksimali tikrinė reikšmė $\lambda_1 \geq \sqrt{\Delta(G)}$.

Sprendimas. Tegul u yra ta viršūnė su $\delta(u) = \Delta(G) = k$. Imkime žvaigždę, sudarytą iš jos ir gretimųjų viršūnių v_i, $1 \leq i \leq k$, bei briaunų. Tai indukuotasis pografis. Žvaigždė yra pilnasis dvidalis grafas $K_{1,k}$, todėl jos spektras

$$\sqrt{1 \cdot k}, 0, \ldots, 0, -\sqrt{k}.$$

Vadinasi, $\sqrt{1 \cdot k} \leq \lambda_1$.

2 užduotis. Įrodyti, kad lygybė $\lambda_1 = 0$ yra teisinga tada ir tik tada, jei $G = K_1$.

Įrodymas. Netriviali tik viena dalis. Jei grafe G būtų briauna, tai ji sudarytų indukuotąjį pografį K_2, kurio spektras $\{1, 0\}$. Vadinasi, tokiu atveju $\lambda_1 \geq 1$.

3 *užduotis.* Įrodyti nelygybes

$$\delta(G) = \min_u \delta(u) \leq \lambda_1 \leq \Delta(G) = \max_u \delta(u).$$

Įrodymas. Pritaikyti (10.2).

Kaip jau matėme, kairįjį įvertį galima pakeisti $\sqrt{\Delta(G)}$, bet ir patisklinti.

4 *užduotis.* Įrodyti nelygybę

$$\frac{1}{n} \sum_{u \in V} \delta(u) \leq \lambda_1.$$

Įrodymas. Pritaikyti (10.3) su $X = (1, \ldots, 1)$.

Pritaikykime tas žinias vertindami kitus grafo parammetrus. Primename, kad grafo *nepriklausomumo* skaičius $\alpha(G)$ yra maksimalus negretimų viršūnių kiekis.

Tegul $n+$, n^0, ir n^- yra teigiamų, nulinių ir neigiamų tikrinių reikšmių skaičiai.

1 **teorema.** $\alpha(G) \leq \min\{n - n^-, n - n^+\}$.

Įrodymas. Nepriklausomos viršūnės sudaro indukuotąjį tuščiąjį pografį iš $k := \alpha(G)$ viršūnių. Pastarojo matrica yra matmenų $k \times k$ nulinė matrica su nulinėmis tikrinėmis reikšmėmis. Jos atskiria G tikrines reikšmes:

$$\lambda_{n-k+j} \leq \mu_j = 0 \leq \lambda_j, \quad 1 \leq j \leq k.$$

Taigi

$$\lambda_n \leq \cdots \leq \lambda_{n-k+1} \leq 0$$

ir šių reikšmių yra $n - (n - k + 1) = k$. Vadinasi, $n - n^+ \geq k$. Panašiai,

$$\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_k \geq 0$$

ir šių reikšmių yra k. Vadinasi, $n - n^- \geq k$.

Įrodyta. $\diamond$

Teorema nepagerinama, nes dėl K_n, $n^- = n - 1$, o $\alpha(K_n) = 1$.

Vertinant grafo chromatųjį skaičių $\chi(G)$, pasinaudosime

Lema. Jei

$$p := \max\Big\{\delta(H) : \ H \,\text{yra indukuotas pografis}\Big\},$$

tai

$$\chi(G) \leq 1 + p.$$

Įrodymas. Lemos sąlyga leidžia sunumeruoti grafo viršūnes taip, kad taikant „godųjį" algoritmą, pakanka $1 + p$ spalvų. Algoritmas spalvina viršūnes iš eilės pagal numeraciją, kai nebeturi galimybės panaudoti anksčiau naudotą spalvą ima naują iš spalvų sąrašo.

Imkime seką H_k, $1 \leq k \leq n$, indukuotųjų pografių pradėdami nuo didžiausiojo $H_n = G$. Egzistuoja viršūnė x_n, kurios laipsnis $\delta(x_n) \leq p$.

Apibrėžkime H_{n-1} ir raskime x_{n-1} su $\delta(x_{n-1}) \leq p$.

Tęsdami pagal indukciją sudarėme seką

$$H_n \supset H_{n-1} \supset \cdots \supset H_1 = \{x_1\}.$$

Naudodami „godųjį" algoritmą spalviname iš eilės $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Visada kaimyninių viršūnių bus ne daugiau kaip p, atsiras atliekama spalva ir jai taisyklingai nuspalvinti.

Vadinasi, $\chi(G) \leq 1 + p$.

Įrodyta $\diamond$

2 *teorema.* Teisinga nelygybė

$$\chi(G) \leq 1 + \lambda_1.$$

Įrodymas. Visų indukuotųjų pografių H, minimų lemoje, maksimalios tikrinės reikšmės $\lambda_1(H) \leq \lambda_1 = \lambda_1(G)$. Teiginys išplaukia iš lemos. $\diamond$

11. Tiesinis grafas

Apibrėžimas. Grafo $G = (V, E)$ *tiesiniu* grafu vadinsime grafą $L(G) = (E, \widetilde{E})$, jei $\tilde{e} = e_i e_j \in \widetilde{E}$ tada ir tik tada, kad briaunos e_i ir e_j yra neprilausomos grafe G.

Pavyzdžiai.: ... Grafų G ir $L(G)$ spektrai susiję.

Lema. Tegul P ir Q yra matricos matmenų $n \times m$ ir $m \times n$ atitinkamai ir $m \geq n$, tai

$$\det(xI_n - PQ) = x^{n-m}\det(xI_m - QP).$$

Čia I_m vienetinė m-os eilės matrica.

Be *įrodymo.*

Išvada. Jei $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ yra matricos PQ spektras, tai

$$\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n, 0, \ldots, 0\}$$

yra QP spektras su $m - n$ nulių.

Teorema. Tegul $G = (V, E)$ yra d reguliarus grafas, $m \geq n$ ir $\widetilde{G} := L(G)$ jo tiesinis grafas, tai pastarojo tikrinės reikšmės yra -2 kartotinumo $m - n$ ir

$$d - 2 + \lambda$$

kiekvienai λ iš G spektro su tuo pačiu kartotinumu.

Įrodymas. Žinoma, kad d reguliaraus grafo G gretimumo matrica A ir incidentumo matrica B susijusios lygybe

$$A = BB^t - dI_n,$$

Ar tiesinio grafo $L(G) = \widetilde{G}$ matrica $\widetilde{A} = ((\tilde{a}_{ij}))$ turi panašią išraišką? Pagal apibrėžimą $\tilde{a}_{ij} = 1$, kai e_i ir e_j yra grafo G priklausomos briaunos, ir lygus nuliui priešingu atveju. Skaičiuojame

$$B^t \cdot B = ((c_{kl})), \quad 1 \leq k, l \leq m.$$

Turime

$$c_{kl} = \sum_{r=1}^{n} b_{rk} b_{rl}.$$

Jei $k = l$, matricos B k-ajame stulpelyje yra lygiai du 1-ai, pažymintys briaunos $e_k \in E$ galus, todėl $c_{kk} = 2$. Jei $k \neq l$, iš visų sumos c_{kl} dėmėnų tik vienas yra nenulinis, o pastarasis lygus 1-am. Tai nurodo situaciją, kai e_k ir e_l turi bendrą galą - k-ąją viršūnę.

Reziumuodami matome, kad

$$\widetilde{A} = ((\tilde{a}_{ij})) = B^t B - 2I_m.$$

Dabar skaičiuodami tikrines reikšmes, galime pritaikyti lemą. Gauname

$$\begin{aligned}
p_{\widetilde{A}}(\lambda) &= \det\Big(\lambda I_m - \widetilde{A}\Big) = \det\Big(\lambda I_m - B^t B + 2I_m\Big) \\
&= \det\Big((\lambda+2)I_m - B^t B\Big) \\
&= (\lambda+2)^{m-n}\det\Big((\lambda+2)I_n - BB^t\Big) \\
&= (\lambda+2)^{m-n}\det\Big((\lambda+2-d)I_n - A\Big) \\
&= (\lambda+2)^{m-n} p_A(\lambda+2-d).
\end{aligned}$$

Iš čia išplaukia teoremos teiginys. $\diamond$

Nepamirškime, kad viena d reguliaraus grafo tikrinė reikšmė yra d, ji atitinka vienetinių koordinačių vektorių.

Užduotis. Rasti Peterseno grafo spektrą.

Sprendimas. Žinome grafo K_5 spektrą: $\{4, -1, -1, -1, -1\}$. Vadinasi, $L(K_5)$ spektras yra

$$\Big\{4 - 2 + 4 = 6,\ \ 4 - 2 - 1 = 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \ -2,\ -2,\ -2,\ -2,\ -2\Big\}.$$

Pateikta aritmetika nurodo atitinkamas tikrinių reikšmių skaičiavimo taisykles. Didžiausia reikšmė 6 yra $L(K_5)$ reguliarumo eilė. Jo papildinio $\overline{L(K_5)}$ spektrą irgi jau mokame skaičiuoti. Gauname

$$\Big\{10 - 1 - 6 = 3,\ \ -1 - 1 = -2,\ -2,\ -2,\ -2,\ \ -1 - (-2) = 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1\Big\}.$$

O dabar atradimas: $\overline{L(K_5)}$ yra Peterseno grafas! Įsitikinkite nubrėždami visus čia nagrinėtus grafus.

NAUDOTA LITERATŪRA

1. M. Aigner, G.M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK*, Springer, Berlin, 2nd edition, 2001.

2. N. Alon, J.H. Spenser, *The probabilistic Method*, Wiley, 3rd edn, 2008.

3. P.J. Cameron, *Combinatorics: Topics, Techniques, Algorithms*, Cambridge University Press, 1994.

4. S.M. Cioabă, M.R. Murty, *A First Course in Graph Theory and Combinatorics*, Hindustan Book Agency, 2009.