Diskrečioji matematika, IT I kursas

Pagal Hein'o vadovėlio 5.2 skyrelį

(Panaudoti R.Petuchovo failai)

Prof. Eugenijus Manstavičius

Vilniaus universitetas

2017

5 skyrius. Algoritmų analizė

5.2 Sumavimas ir uždaros formos

Matematinius reiškinius stengiamasi užrašyti vadinamąja uždarąja forma. Tada, imant konkrečius jo argumentus, reiškinys gali būti apskaičiuotas atliekant tik keletą veiksmų.

Palyginkite:

$$2 + 4 + \cdots + 2n$$

$$n(n+1).$$

Pastarasis, parašytas uždara forma, lygus pirmajam; jam apskaičiuoti tereikia dviejų veiksmų - sudėties ir daugybos.

Sumavimo žymuo

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \ldots + a_n.$$

Ši suma (tuščia) laikoma nuliu, jei $n = 0$.
Kai kurios sumavimo savybės:

1. $$\sum_k ca_k = c \sum_k a_k,$$

2. $$\sum_k (a_k + b_k) = \sum_k a_k + \sum_k b_k,$$

3. $$\sum_k a_k x^{i+k} = x^i \sum_k a_k x^k.$$

Visada, sumuojant pagal k, reikia nurodyti jo kitimo sritį.

4.

$$\sum_{k=m}^{n} a_{k+i} = \sum_{k=m+i}^{n+i} a_k,$$

5.

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0$$

ir

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{k-1} - a_k) = a_0 - a_n.$$

Kai kurios naudingos uždaros formos:

1. $$\sum_{k=m}^{n} c = (n - m + 1)c.$$

2. $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

3. $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

4. $$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1},$$

   kai $a \neq 1$.

5.
$$\sum_{k=1}^{n} ka^k = \frac{a-(n+1)a^{n+1}+na^{n+2}}{(a-1)^2},$$
kai $a \neq 1$.

1 pavyzdys. Rasime sumos $\sum_{k=2}^{n}(k-1)2^{k+1}$ uždarą formą.

Sprendimas:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n}(k-1)2^{k+1} &= \sum_{k=1}^{n-1} k2^{k+2} && \text{(4 savybė)} \\
&= 2^2 \sum_{k=1}^{n-1} k2^k && \text{(3 savybė)} \\
&= 2^2(2-n2^n+(n-1)2^{n+1}) && \text{(5 forma)} \\
&= 2^3+(n-2)2^{n+2}.
\end{aligned}$$

2 pavyzdys. Rasime sumos

$$2 + 2^2 \cdot 7 + 2^3 \cdot 14 + \ldots + 2^n \cdot (n-1) \cdot 7$$

uždarą formą.

Sprendimas:

$$
\begin{aligned}
2 + \sum_{k=2}^{n} 2^k (k-1) 7 &= 2 + 7 \sum_{k=2}^{n} (k-1) 2^k && \text{(1 savybė)} \\
&= 2 + 7 \sum_{k=1}^{n-1} k 2^{k+1} && \text{(4 savybė)} \\
&= 2 + 14 \sum_{k=1}^{n-1} k 2^k && \text{(3 savybė)} \\
&= 2 + 14(2 - n2^n + (n-1)2^{n-1}). && \text{(5 forma)}
\end{aligned}
$$

1 užduotis. Pritaikę sumavimo savybes, įrodykite, kad

$$2 + 3 + \ldots + n = \frac{(n-1)(n+2)}{2}.$$

2 užduotis. Pritaikę sumavimo savybes, raskite sumos

$$3 + 7 + \ldots + (3 + 4n)$$

uždarą formą.

Atsakymas: $(2n+3)(n+1)$.

3 pavyzdys. Tegul $\mathsf{count}(n)$ yra žemiau esančiame algoritme atliekamų priskyrimų (:=) skaičius.

$i := 1;$ $\qquad (1)$

while $i < n$ **do**

  $i := i + 1;$ $\qquad (n - 1)$

  for $j := 1$ **to** i **do** S **od** $\qquad (2 + 3 + \ldots + n)$

od,

čia $n \in \mathbb{N}$. Reiškiniai tarp skliaustų parodo kiek kartų buvo įvykdytas priskyrimas := . Taigi,

$$
\begin{aligned}
\mathsf{count}(n) &= 1 + (n - 1) + (2 + 3 + \ldots + n) \\
&= (n - 1) + (1 + 2 + \ldots + n) \\
&= n - 1 + \frac{n(n + 1)}{2}.
\end{aligned}
$$

Užduotis. Tegul $\mathsf{count}(n)$ yra veiksmo S įvykdymų aukščiau nurodytame algoritme skaičius. Raskite funkcijos $\mathsf{count}(n)$ uždarą formą.

Sprendimas:

$$\begin{aligned}\mathsf{count}(n) &= (2 + 3 + \ldots + n) \\ &= (1 + 2 + 3 + \ldots + n) - 1 \\ &= \frac{n(n+2)}{2} - 1.\end{aligned}$$

4 pavyzdys. Tegul $\mathsf{count}(n)$ yra S veiksmo atlikimų skaičius pateiktame algoritme:

$i := 1;$

while $i < n$ **do**

  $i := i + 2;$

  for $j := 1$ **to** i **do** S **od**

od,

kuriame $n \in \mathbb{N}$.
Rasime funkcijos $\mathsf{count}(n)$ uždarą formą.

Sprendimas: pastebėkime, kad parametro i reikšmės prieš kiekvieną **for** ciklą yra tokios:

$$3,\ 5, \ldots, (2k+1);$$

čia $i = 2k + 1 \geq n$ yra **while** ciklo sustojimo taškas.

Gauname

$$\begin{aligned}
\mathsf{count}(n) &= 3 + 5 + \ldots + (2k + 1) \\
&= \sum_{i=1}^{k}(2i + 1) = 2\sum_{i=1}^{k} i + \sum_{i=1}^{k} 1 \\
&= \frac{2k(k + 1)}{2} + k = k(k + 2),
\end{aligned}$$

bet mums reikia $\mathsf{count}(n)$ išreikšti per n. Kadangi $2k + 1 \geq n$ yra while ciklo sustojimo taškas, tai $2k - 1 < n$ yra taškas, su kuriuo while sąlyga buvo paskutinį kartą išpildyta, todėl

$$2k - 1 < n \leq 2k + 1.$$

Išsprendę pastarąsias nelygybes k atžvilgiu, gauname $k = \lceil (n - 1)/2) \rceil$, todėl

$$\mathsf{count}(n) = k(k + 2) = \lceil (n - 1)/2 \rceil^2 + 2\lceil (n - 1)/2 \rceil.$$

Sumos apytikris skaičiavimas.

Harmoninių skaičių seka H_n apibrėžiama taip:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Deja, uždaros formos ji neturi.
Teisinga nelygybė

$$\ln n = \int_1^n \frac{du}{u} \leq H_n \leq 1 + \int_1^n \frac{du}{u}.$$

Įrodymui pakanka įžiūrėti geometrinę sumos ir integralo prasmę.

Sumos apytikris skaičiavimas.

Harmoninių skaičių seka H_n apibrėžiama taip:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Deja, uždaros formos ji neturi.
Teisinga nelygybė

$$\ln n = \int_1^n \frac{du}{u} \leq H_n \leq 1 + \int_1^n \frac{du}{u}.$$

Įrodymui pakanka įžiūrėti geometrinę sumos ir integralo prasmę.
Panašiai ir kitų monotoniškų funkcijų reikšmių sumavimui.
Plačiau:

Rekomenduojamos literatūros sąrašas

- James L. Hein, "Discrete Structures, Logic, and Computability" (5.2 section)
- + StudentStudyGuide.pdf