Diskrečioji matematika, IT I kursas
Pagal Hein'o vadovėlio 4 skyrių
(Panaudoti R.Petuchovo failai)

Prof. Eugenijus Manstavičius

Vilniaus universitetas

2017

IV skyrius.
Ekvivalentiškumas, tvarkos ir matematinė indukcija

4.1 Binariųjų sąryšių savybės

Ap. Jeigu $R \subset A \times A$, sakome, kad aibė R yra binarusis sąryšis virš aibės A.

Kai $(x, y) \in R$, dažnai rašysime xRy.

Binariųjų sąryšių virš aibės $A = \{0, 1\}$ pavyzdžiai:

$$\emptyset, \quad A \times A, \quad eq = \{(0,0), (1,1)\}, \quad less = \{(0,1)\}.$$

Tegul R yra binarusis sąryšis virš A, o x, y, z yra bet kurie A elementai. Vartojamos tokios sąvokas:

Tegul R yra binarusis sąryšis virš A, o x, y, z yra bet kurie A elementai. Vartojamos tokios sąvokas:

- R yra refleksyvusis: kada xRx su visais $x \in A$.

Tegul R yra binarusis sąryšis virš A, o x, y, z yra bet kurie A elementai. Vartojamos tokios sąvokas:

- R yra <u>refleksyvusis</u>: kada xRx su visais $x \in A$.
- R yra <u>simetrinis</u>: jeigu iš xRy išplaukia yRx.

Tegul R yra binarusis sąryšis virš A, o x, y, z yra bet kurie A elementai. Vartojamos tokios sąvokas:

- R yra refleksyvusis: kada xRx su visais $x \in A$.
- R yra simetrinis: jeigu iš xRy išplaukia yRx.
- R yra tranzityvusis: jeigu iš xRy ir yRz išplaukia xRz.

Tegul R yra binarusis sąryšis virš A, o x, y, z yra bet kurie A elementai. Vartojamos tokios sąvokas:

- R yra refleksyvusis: kada xRx su visais $x \in A$.
- R yra simetrinis: jeigu iš xRy išplaukia yRx.
- R yra tranzityvusis: jeigu iš xRy ir yRz išplaukia xRz.
- R yra antirefleksyvusis: kada $(x, x) \notin R$ su visais $x \in A$.

Tegul R yra binarusis sąryšis virš A, o x, y, z yra bet kurie A elementai. Vartojamos tokios sąvokas:

- R yra refleksyvusis: kada xRx su visais $x \in A$.
- R yra simetrinis: jeigu iš xRy išplaukia yRx.
- R yra tranzityvusis: jeigu iš xRy ir yRz išplaukia xRz.
- R yra antirefleksyvusis: kada $(x, x) \notin R$ su visais $x \in A$.
- R yra antisimetrinis: jeigu iš xRy ir yRx išplaukia $x = y$.

Išnagrinėsime, kuriomis savybėmis pasižymi paminėti sąryšiai:

1. $\emptyset$

Išnagrinėsime, kuriomis savybėmis pasižymi paminėti sąryšiai:

1. $\emptyset$

   Ats.: simetrinis, tranzityvusis, antirefleksyvusis, antisimetrinis.

Išnagrinėsime, kuriomis savybėmis pasižymi paminėti sąryšiai:

1. $\emptyset$

   Ats.: simetrinis, tranzityvusis, antirefleksyvusis, antisimetrinis.

2. $A \times A$

Išnagrinėsime, kuriomis savybėmis pasižymi paminėti sąryšiai:

1. $\emptyset$

   Ats.: simetrinis, tranzityvusis, antirefleksyvusis, antisimetrinis.

2. $A \times A$

   Ats.: refleksyvusis, tranzityvusis, simetrinis.

Išnagrinėsime, kuriomis savybėmis pasižymi paminėti sąryšiai:

1. $\emptyset$

   Ats.: simetrinis, tranzityvusis, antirefleksyvusis, antisimetrinis.

2. $A \times A$

   Ats.: refleksyvusis, tranzityvusis, simetrinis.

3. $eq = \{(0, 0), (1, 1)\}$

Išnagrinėsime, kuriomis savybėmis pasižymi paminėti sąryšiai:

1. $\emptyset$

   Ats.: simetrinis, tranzityvusis, antirefleksyvusis, antisimetrinis.

2. $A \times A$

   Ats.: refleksyvusis, tranzityvusis, simetrinis.

3. $eq = \{(0,0),(1,1)\}$

   Ats.: refleksyvusis, simetrinis, tranzityvusis, antisimetrinis.

Išnagrinėsime, kuriomis savybėmis pasižymi paminėti sąryšiai:

1. $\emptyset$

   Ats.: simetrinis, tranzityvusis, antirefleksyvusis, antisimetrinis.

2. $A \times A$

   Ats.: refleksyvusis, tranzityvusis, simetrinis.

3. $eq = \{(0,0),(1,1)\}$

   Ats.: refleksyvusis, simetrinis, tranzityvusis, antisimetrinis.

4. $less = \{(0,1)\}$.

Išnagrinėsime, kuriomis savybėmis pasižymi paminėti sąryšiai:

1. $\emptyset$

   Ats.: simetrinis, tranzityvusis, antirefleksyvusis, antisimetrinis.

2. $A \times A$

   Ats.: refleksyvusis, tranzityvusis, simetrinis.

3. $eq = \{(0, 0), (1, 1)\}$

   Ats.: refleksyvusis, simetrinis, tranzityvusis, antisimetrinis.

4. $less = \{(0, 1)\}$.

   Ats.: antirefleksyvusis, tranzityvusis, antisimetrinis.

Kompozicija

Ap. Jeigu R ir S yra binarieji sąryšiai, tai R kompozicija su S vadiname sąryšį

$$R \circ S = \{(x, z) \mid xRy \text{ ir } ySz\}.$$

Pavyzdžiai:

1. Jeigu $R = \{(0, 0), (1, 1)\}$, o $S = \{(0, 1)\}$, tai

Kompozicija

Ap. Jeigu R ir S yra binarieji sąryšiai, tai R kompozicija su S vadiname sąryšį

$$R \circ S = \{(x, z) \mid xRy \text{ ir } ySz\}.$$

Pavyzdžiai:

1. Jeigu $R = \{(0, 0), (1, 1)\}$, o $S = \{(0, 1)\}$, tai

$$R \circ S = \{(0, 1)\}.$$

Kompozicija

Ap. Jeigu R ir S yra binarieji sąryšiai, tai R kompozicija su S vadiname sąryšį

$$R \circ S = \{(x, z) \mid xRy \text{ ir } ySz\}.$$

Pavyzdžiai:

1. Jeigu $R = \{(0, 0), (1, 1)\}$, o $S = \{(0, 1)\}$, tai

$$R \circ S = \{(0, 1)\}.$$

2. Jeigu $R = \{(0, 0), (1, 0)\}$, o $S = \{(0, 1)\}$, tai

Kompozicija

Ap. Jeigu R ir S yra binarieji sąryšiai, tai R kompozicija su S vadiname sąryšį

$$R \circ S = \{(x, z) \mid xRy \text{ ir } ySz\}.$$

Pavyzdžiai:

1. Jeigu $R = \{(0, 0), (1, 1)\}$, o $S = \{(0, 1)\}$, tai
$$R \circ S = \{(0, 1)\}.$$

2. Jeigu $R = \{(0, 0), (1, 0)\}$, o $S = \{(0, 1)\}$, tai
$$R \circ S = \{(0, 1), (1, 1)\}.$$

Klausimas. Kam lygios kompozicijos:

$$R \circ \emptyset,$$

$$\mathit{isMotherOf} \circ \mathit{isFatherOf}$$

ir

$$\mathit{isSonOf} \circ \mathit{isSiblingOf}?$$

Ats.:

Klausimas. Kam lygios kompozicijos:

$$R \circ \emptyset,$$

$$\mathit{isMotherOf} \circ \mathit{isFatherOf}$$

ir

$$\mathit{isSonOf} \circ \mathit{isSiblingOf}?$$

Ats.:

$$R \circ \emptyset = \emptyset,$$

Klausimas. Kam lygios kompozicijos:

$$R \circ \emptyset,$$

$$isMotherOf \circ isFatherOf$$

ir

$$isSonOf \circ isSiblingOf?$$

Ats.:

$$R \circ \emptyset = \emptyset,$$

$$isMotherOf \circ isFatherOf = IsPaternalGrandmotherOf,$$

Klausimas. Kam lygios kompozicijos:

$$R \circ \emptyset,$$

$$\mathit{isMotherOf} \circ \mathit{isFatherOf}$$

ir

$$\mathit{isSonOf} \circ \mathit{isSiblingOf}?$$

Ats.:

$$R \circ \emptyset = \emptyset,$$

$$\mathit{isMotherOf} \circ \mathit{isFatherOf} = \mathit{IsPaternalGrandmotherOf},$$

$$\mathit{isSonOf} \circ \mathit{isSiblingOf} = \mathit{IsNephewOf}.$$

Pavyzdys (vaizdavimas digrafu). Tegul

$$R = \{(a, b), (b, a), (b, c)\}$$

yra binarusis sąryšis virš $A = \{a, b, c\}$, tada

$$R, \quad R^2 = R \circ R \quad \text{ir} \quad R^3 = R \circ R \circ R$$

galime pavaizduoti digrafais:

Pavyzdys (vaizdavimas digrafu). Tegul

$$R = \{(a, b), (b, a), (b, c)\}$$

yra binarusis sąryšis virš $A = \{a, b, c\}$, tada

$$R, \quad R^2 = R \circ R \quad \text{ir} \quad R^3 = R \circ R \circ R$$

galime pavaizduoti digrafais:

$$R: \quad \begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left] & b \arrow[l, bend left] \arrow[r] & c \end{tikzcd}$$

Pavyzdys (vaizdavimas digrafu). Tegul

$$R = \{(a, b), (b, a), (b, c)\}$$

yra binarusis sąryšis virš $A = \{a, b, c\}$, tada

$$R, \quad R^2 = R \circ R \quad \text{ir} \quad R^3 = R \circ R \circ R$$

galime pavaizduoti digrafais:

R :
$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left] & b \arrow[l, bend left] \arrow[r] & c \end{tikzcd}$$

R^2 :
$$\begin{tikzcd} a \arrow[loop above] \arrow[rr, bend right] & b \arrow[loop above] & c \end{tikzcd}$$

Pavyzdys (vaizdavimas digrafu). Tegul

$$R = \{(a,b),(b,a),(b,c)\}$$

yra binarusis sąryšis virš $A = \{a,b,c\}$, tada

$$R, \quad R^2 = R \circ R \quad \text{ir} \quad R^3 = R \circ R \circ R$$

galime pavaizduoti digrafais:

$$R: \quad \begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left] & b \arrow[l, bend left] \arrow[r] & c \end{tikzcd}$$

$$R^2: \quad \begin{tikzcd} a \arrow[loop above] \arrow[rr, bend right] & b \arrow[loop above] & c \end{tikzcd}$$

$$R^3: \quad \begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left] & b \arrow[l, bend left] \arrow[r] & c \end{tikzcd}$$

Uždariniai

Ap. Sąryšio R uždariniu, tam tikros savybės atžvilgiu, vadiname mažiausią sąryšį, kuriam priklauso R ir kuris turi nurodytą savybę.

Dažniausiai vartojami trys žymenys ir savybės:

1. R refleksyvusis uždarinys yra
$$r(R) = R \cup Eq;$$
čia Eq yra lygybės sąryšis virš A.
2. R simetrinis uždarinys yra
$$s(R) = R \cup R^c;$$
čia $R^c = \{(b, a) \mid aRb\}$.

3. R tranzityvusis uždarinys yra

$$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$$

Pastaba. Jeigu $|A| = n$, tai

$$t(R) = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n.$$

Pavyzdys. Tegul

$$R = \{(a, b),\ (b, a),\ (b, c)\}$$

virš $A = \{a, b, c\}$. Parašysime visus tris sąryšio R uždarinius:

Pavyzdys. Tegul

$$R = \{(a, b),\ (b, a),\ (b, c)\}$$

virš $A = \{a, b, c\}$. Parašysime visus tris sąryšio R uždarinius:

$$\begin{aligned} r(R) &= R \cup Eq \\ &= \{(a, b),\ (b, a),\ (b, c),\ (a, a),\ (b, b),\ (c, c)\}, \end{aligned}$$

Pavyzdys. Tegul

$$R = \{(a, b),\ (b, a),\ (b, c)\}$$

virš $A = \{a, b, c\}$. Parašysime visus tris sąryšio R uždarinius:

$$\begin{aligned} r(R) &= R \cup Eq \\ &= \{(a, b),\ (b, a),\ (b, c),\ (a, a),\ (b, b),\ (c, c)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s(R) &= R \cup R^c \\ &= \{(a, b),\ (b, a),\ (b, c),\ (c, b)\}, \end{aligned}$$

Pavyzdys. Tegul

$$R = \{(a, b),\ (b, a),\ (b, c)\}$$

virš $A = \{a, b, c\}$. Parašysime visus tris sąryšio R uždarinius:

$$\begin{aligned} r(R) &= R \cup Eq \\ &= \{(a, b),\ (b, a),\ (b, c),\ (a, a),\ (b, b),\ (c, c)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s(R) &= R \cup R^c \\ &= \{(a, b),\ (b, a),\ (b, c),\ (c, b)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t(R) &= R \cup R^2 \cup R^3 \\ &= \{(a, b),\ (b, a),\ (b, c),\ (a, a),\ (b, b),\ (a, c)\}. \end{aligned}$$

Užduotis. Tegul

$$R = \{(x, x+1) \mid x \in \mathbb{Z}\}.$$

Raskime $t(R)$, $rt(R)$ ir $st(R)$.

Atsakymas:

Užduotis. Tegul

$$R = \{(x, x + 1) \mid x \in \mathbb{Z}\}.$$

Raskime $t(R)$, $rt(R)$ ir $st(R)$.

Atsakymas:

$$t(R) = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z} \text{ ir } x < y\},$$

Užduotis. Tegul

$$R = \{(x, x+1) \mid x \in \mathbb{Z}\}.$$

Raskime $t(R)$, $rt(R)$ ir $st(R)$.

Atsakymas:

$$t(R) = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z} \text{ ir } x < y\},$$

$$rt(R) = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z} \text{ ir } x \leq y\},$$

Užduotis. Tegul

$$R = \{(x, x+1) \mid x \in \mathbb{Z}\}.$$

Raskime $t(R)$, $rt(R)$ ir $st(R)$.

Atsakymas:

$$t(R) = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z} \text{ ir } x < y\},$$

$$rt(R) = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z} \text{ ir } x \leq y\},$$

$$st(R) = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z} \text{ ir } x \neq y\}.$$

Kelio paieška (Ar yra kelias iš i į j sąryšyje $t(R)$?)

Tegul

$$R = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}.$$

Galime R pavaizduoti gretimumo matrica $M = (M_{ij})$, $M_{ij} = 1$, jei iRj, priešingu atveju $M_{ij} = 0$. Pavyzdyje

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{bmatrix},$$

Atsakyti į iškeltą klausimą mums padės sąryšio $t(R)$ matrica M'. Joje tiesiog patikrinsime, ar $M'_{ij} = 1$.
Kai aibė A baigtinė, $|A| = n$, tai matrica $n \times n$ matmenų.

Varšalo algoritmas (Warshall's algorithm)

Tai algoritmas sąryšio $t(R)$ matricai sudaryti, kai turime R matricą. Jis sukuria briauną (i, j), jeigu randa briaunas (i, k) ir (k, j). Jo veikimas:

for $k := 1$ **to** n **do**
  for $i := 1$ **to** n **do**
    for $j := 1$ to n **do**
      if $M_{ik} = M_{kj} = 1$ **then** $M_{ij} := 1$.

Pavyzdys. Turime pradinę matricą R. Paleidę algoritmą, gauname tokius pokyčius:

$$\underset{\text{(nepakito)}}{\overset{\text{k=1}}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}} \rightarrow \overset{\text{k=2}}{\overset{M_{13} := 1}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}} \rightarrow \overset{\text{k=3}}{\overset{M_{14} := 1,\ M_{24} := 1}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}} \rightarrow \overset{\text{k=4}}{\overset{\text{(nepakito)}}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}}$$

čia dešiniausia matrica yra $t(R)$ matrica.

Kelio paieška (Koks yra trumpiausias kelio iš i į j ilgis?)

Tarkime, kad kiekvienai digrafo briaunai priskirtas neneigiamas skaičius, t.y., jos svoris arba, šiuo atveju, ilgis. Reikia taip pakeisti gretimumo matricą M, kad M_{ij} būtų trumpiausio kelio iš i į j ilgis; $M_{ii} = 0$ ir visi kiti įrašai, kuriuose nėra kelio, būtų ∞.

Floido algoritmas (Floyd's algorithm)

Tai algoritmas, kuris sukonstruoja $t(R)$ matricą su trumpiausiais kelių ilgiais:

for $k := 1$ to n
  for $i := 1$ to n
    for $j := 1$ to n
      do $M_{ij} := \min\{M_{ij}, M_{ik} + M_{kj}\}$

Pavyzdys. Tegul

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & \infty \\ \infty & 0 & 2 & 3 \\ \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}.$$

Pritaikę Floido algoritmą, gauname ($k = 1$ vėl nepakito)

$$M \to \overset{\substack{\text{k=2} \\ M_{14} := 5}}{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 5 \\ \infty & 0 & 2 & 3 \\ \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}} \to \overset{\substack{\text{k=3} \\ M_{14} := 4}}{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 4 \\ \infty & 0 & 2 & 3 \\ \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}} \to \overset{\substack{\text{k=4} \\ \text{(nepakito)}}}{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 4 \\ \infty & 0 & 2 & 3 \\ \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}}.$$

Dešiniausia matrica yra $t(R)$ gretimumo matrica, kurioje yra apskaičiuoti trumpiausių kelių ilgiai. Norėdami įsitikinti, nubrėžkite M digrafą.

Kelio paieška (Koks yra trumpiausias kelias iš i į j?)

Papildom Floido algoritmą, kad jis dar sukurtų ir matricą P, kurios įrašai P_{ij}. Jeigu briauna (i, j) yra trumpiausias kelias, iš viršūnės i į j, tai $P_{ij} = 0$ (čia $M_{ij} \neq 0$), kitu atveju $P_{ij} = k$ reiškia, kad trumpiausias kelias iš i į j eina per viršūnę k, t.y., $M_{ij} = M_{ik} + M_{kj}$.

Modifikuotas Floido algoritmas

Sukonstruoja $t(R)$ gretimumo matricą, nusako trumpiausio kelio ilgį ir sukonstruoja matricą P. Pradžioje, matricos P visi įrašai yra lygūs nuliui.

Taigi, algoritmas:

for $k := 1$ to n
  for $i := 1$ to n
    for $j := 1$ to n do
      if $M_{ik} + M_{kj} < M_{ij}$ **then**
        $M_{ij} := M_{ik} + M_{kj}$;
        $P_{ij} := k$

Tas pats *Pavyzdys.* Šį kartą ir matrica P.

$$M \quad \to \overset{\substack{\text{k=2} \\ M_{14} := 5}}{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 5 \\ \infty & 0 & 2 & 3 \\ \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}} \to \overset{\substack{\text{k=3} \\ M_{14} := 4}}{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 4 \\ \infty & 0 & 2 & 3 \\ \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}} \to \overset{\substack{\text{k=4} \\ \text{(nepakito)}}}{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 4 \\ \infty & 0 & 2 & 3 \\ \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}}$$

$$P \quad \to \overset{P_{14} := 3}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \quad \to \overset{\text{(nepakito)}}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}.$$

Matome, trumpiausias kelias iš 1 į 4 yra $1 \to 3 \to 4$. Iš tikrųjų, jeigu kelią sudaro daugiau nei viena briauna, matrica P parodo trumpiausio kelio priešpaskutinę viršūnę.

Ekvivalentumo sąryšiai

Ap. Binarusis sąryšis yra vadinamas ekvivalentumo sąryšiu, jeigu jis yra refleksyvusis, simetrinis ir tranzityvusis (**RST**).

Pavyzdžiai:

Matome, trumpiausias kelias iš 1 į 4 yra $1 \to 3 \to 4$. Iš tikrųjų, jeigu kelią sudaro daugiau nei viena briauna, matrica P parodo trumpiausio kelio priešpaskutinę viršūnę.

Ekvivalentumo sąryšiai

Ap. Binarusis sąryšis yra vadinamas <u>ekvivalentumo sąryšiu</u>, jeigu jis yra refleksyvusis, simetrinis ir tranzityvusis (**RST**).

Pavyzdžiai:

a. Lygybės sąryšis virš bet kurios aibės.

Matome, trumpiausias kelias iš 1 į 4 yra $1 \to 3 \to 4$. Iš tikrųjų, jeigu kelią sudaro daugiau nei viena briauna, matrica P parodo trumpiausio kelio priešpaskutinę viršūnę.

Ekvivalentumo sąryšiai

Ap. Binarusis sąryšis yra vadinamas ekvivalentumo sąryšiu, jeigu jis yra refleksyvusis, simetrinis ir tranzityvusis (**RST**).

Pavyzdžiai:

a. Lygybės sąryšis virš bet kurios aibės.
b. $x \sim y \Leftrightarrow |x| = |y|$ virš $\{a, b, c\}^*$.

Matome, trumpiausias kelias iš 1 į 4 yra $1 \to 3 \to 4$. Iš tikrųjų, jeigu kelią sudaro daugiau nei viena briauna, matrica P parodo trumpiausio kelio priešpaskutinę viršūnę.

Ekvivalentumo sąryšiai

Ap. Binarusis sąryšis yra vadinamas <u>ekvivalentumo sąryšiu</u>, jeigu jis yra refleksyvusis, simetrinis ir tranzityvusis (**RST**).

Pavyzdžiai:

a. Lygybės sąryšis virš bet kurios aibės.
b. $x \sim y \Leftrightarrow |x| = |y|$ virš $\{a, b, c\}^*$.
c. $x \sim y \Leftrightarrow x$ ir y gimę tą pačią dieną virš žmonių aibės.

Matome, trumpiausias kelias iš 1 į 4 yra $1 \to 3 \to 4$. Iš tikrųjų, jeigu kelią sudaro daugiau nei viena briauna, matrica P parodo trumpiausio kelio priešpaskutinę viršūnę.

Ekvivalentumo sąryšiai

Ap. Binarusis sąryšis yra vadinamas ekvivalentumo sąryšiu, jeigu jis yra refleksyvusis, simetrinis ir tranzityvusis (**RST**).

Pavyzdžiai:

a. Lygybės sąryšis virš bet kurios aibės.
b. $x \sim y \Leftrightarrow |x| = |y|$ virš $\{a, b, c\}^*$.
c. $x \sim y \Leftrightarrow x$ ir y gimę tą pačią dieną virš žmonių aibės.
d. Tarkime, turime bet kokią aritmetinių reiškinių aibę E. Tegul e_1, e_2 yra bet kurie elementai iš E ir $e_1 \sim e_2$ t.t.t., kai e_1 ir e_2 įgyja tą pačią reikšmę su bet kuriomis argumentų reikšmėmis. Pvz., $4x + 2 \sim 2(2x + 1)$. Tada $\sim$ yra **RST**.

Klausimas. Kuris iš sąryšių yra **RST**?

Klausimas. Kuris iš sąryšių yra **RST**?

a. $xRy \Leftrightarrow x \leq y$ arba $x > y$ virš $\mathbb{Z}$.

Klausimas. Kuris iš sąryšių yra **RST**?

a. $xRy \Leftrightarrow x \leq y$ arba $x > y$ virš $\mathbb{Z}$.

b. $xRy \Leftrightarrow |x - y| \leq 2$ virš $\mathbb{Z}$.

Klausimas. Kuris iš sąryšių yra **RST**?

a. $xRy \Leftrightarrow x \leq y$ arba $x > y$ virš $\mathbb{Z}$.

b. $xRy \Leftrightarrow |x - y| \leq 2$ virš $\mathbb{Z}$.

c. $xRy \Leftrightarrow x$ ir y yra lyginiai sk. virš $\mathbb{Z}$.

Klausimas. Kuris iš sąryšių yra **RST**?

a. $xRy \Leftrightarrow x \leq y$ arba $x > y$ virš $\mathbb{Z}$.

b. $xRy \Leftrightarrow |x - y| \leq 2$ virš $\mathbb{Z}$.

c. $xRy \Leftrightarrow x$ ir y yra lyginiai sk. virš $\mathbb{Z}$.

Atsakymai: Taip, ne, ne.

Klausimas. Kuris iš sąryšių yra **RST**?

a. $xRy \Leftrightarrow x \leq y$ arba $x > y$ virš $\mathbb{Z}$.
b. $xRy \Leftrightarrow |x - y| \leq 2$ virš $\mathbb{Z}$.
c. $xRy \Leftrightarrow x$ ir y yra lyginiai sk. virš $\mathbb{Z}$.

Atsakymai: Taip, ne, ne.

Sankirtos savybė. Jeigu E ir F yra **RST** virš A, tai $E \cap F$ yra **RST** virš A.

Klausimas. Kuris iš sąryšių yra **RST**?

a. $xRy \Leftrightarrow x \leq y$ arba $x > y$ virš $\mathbb{Z}$.
b. $xRy \Leftrightarrow |x - y| \leq 2$ virš $\mathbb{Z}$.
c. $xRy \Leftrightarrow x$ ir y yra lyginiai sk. virš $\mathbb{Z}$.

Atsakymai: Taip, ne, ne.

Sankirtos savybė. Jeigu E ir F yra **RST** virš A, tai $E \cap F$ yra **RST** virš A.

Pavyzdys. Tegul $x \sim y$ t.t.t., kai x ir y turi tas pačias gimimo datas ir vienodą pavardę. Tada $\sim$ yra **RST**, nes jis yra dviejų **RST** sąryšių sankirta.

Branduoliniai sąryšiai

Ap. Tegul f yra funkcija, kurios apibrėžimo sritis A. Sąryšis $\sim$, apibrėžtas tokiu būdu

$$x \sim y \ \Leftrightarrow \ f(x) = f(y),$$

yra ekvivalentiškasis sąryšis virš A ir yra vadinamas f branduoliniu sąryšiu.

Pavyzdys. Tegul

$$x \sim y \ \Leftrightarrow \ x \mod n = y \mod n$$

virš bet kurios aibės $S \subset \mathbb{N}$. Tada $\sim$ yra **RST**, nes jis yra funkcijos

$$f : S \to \mathbb{N} \quad \text{ir} \quad f(x) = x \mod n$$

branduolinis sąryšis.

Pavyzdys. Tegul

$$x \sim y \;\Leftrightarrow\; x + y = 2k$$

virš $\mathbb{Z}$. Tada $\sim$ yra **RST**, nes

$$x + y = 2k \;\Leftrightarrow\; x \mod 2 = y \mod 2.$$

Matome, $\sim$ yra funkcijos f, apibrėžtos kaip

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \quad \text{ir} \quad f(x) = x \mod 2,$$

branduolinis sąryšis.

Ekvivalentumo klasės

Ap. Jeigu R yra **RST** virš A, tai bet kurio elemento $a \in A$ ekvivalentumo klase vadiname aibę

$$[a] = \{x \mid xRa\} \subset A.$$

Savybė: Paėmę bet kurią elementų porą $a, b \in A$, turime

$$[a] = [b] \quad \text{arba} \quad [a] \cap [b] = \emptyset.$$

Pavyzdys. Tarkime,

$$x \sim y \;\Leftrightarrow\; x \mod 3 = y \mod 3$$

virš $\mathbb{N}$, tada $\sim$ ekvivalentumo klasės yra tokios:

$$[0] = \{0, 3, 6, \ldots\} = \{3k \mid k \in \mathbb{N}\},$$
$$[1] = \{1, 4, 7, \ldots\} = \{3k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\},$$
$$[2] = \{2, 5, 8, \ldots\} = \{3k + 2 \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

Galime pastebėti, kad:

$$[0] = [3] = [6],$$

$$[1] \cap [2] = \emptyset,$$

$$[0] \cap [2] = \emptyset,$$

$$[0] \cap [1] = \emptyset.$$

Ap. Aibės A skaidiniu vadiname jos netuščių poaibių aibę, kurios elementai – A poaibiai – paporiui neturi bendrų elementų ir kurių sąjunga lygi A.

Pavyzdžiui, aibė

$$\{[0], [1], [2]\}$$

yra aibės $\mathbb{N}$ skaidinys, nes:

$$\mathbb{N} = [0] \cup [1] \cup [2],$$

$$[0] \cap [1] = \emptyset,$$

$$[0] \cap [2] = \emptyset,$$

$$[1] \cap [2] = \emptyset.$$

Teorema

Teorema

1. **RST** sąryšio virš A ekvivalentumo klasės sudaro aibės A skaidinį.

Teorema

1. **RST** sąryšio virš A ekvivalentumo klasės sudaro aibės A skaidinį.
2. Bet kuris aibės A skaidinys generuoja tokį **RST** virš A, kad skaidinio poaibiai yra šio **RST** ekvivalentumo klasės.

Teorema

1. **RST** sąryšio virš A ekvivalentumo klasės sudaro aibės A skaidinį.
2. Bet kuris aibės A skaidinys generuoja tokį **RST** virš A, kad skaidinio poaibiai yra šio **RST** ekvivalentumo klasės.

Pavyzdys. Tegul

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad x \mod 2 = y \mod 2$$

virš $\mathbb{Z}$. Tada $\sim$ yra **RST**, kurio ekvivalentumo klasės

$$[0] \quad \text{ir} \quad [1].$$

Todėl aibė

$$\{[0], [1]\}$$

yra $\mathbb{Z}$ skaidinys.

Pavyzdys. Turime $\mathbb{R}$ skaidinį

$$\{(n, n+1] \mid n \in \mathbb{Z}\},$$

todėl galime sudaryti **RST** sąryšį $\sim$ virš $\mathbb{R}$ tokį, kad

$$x \sim y \iff x, y \in (n, n+1],\ n \in \mathbb{Z}.$$

Šį sąryšį galima apibrėžti ir tokiu būdu

$$x \sim y \iff \lceil x \rceil = \lceil y \rceil.$$

Skaidinio smulkinys

Ap. Tarkime, P ir Q yra tos pačios aibės skaidiniai. P vadiname skaidinio Q smulkiniu (patikslinimas; angl. *refinement*), jeigu kiekvienai aibei $A \in P$ egzistuoja aibė $B \in Q$ tokia, kad $A \subset B$.

Skaidinio smulkinys

Ap. Tarkime, P ir Q yra tos pačios aibės skaidiniai. P vadiname skaidinio Q smulkiniu (patikslinimas; angl. *refinement*), jeigu kiekvienai aibei $A \in P$ egzistuoja aibė $B \in Q$ tokia, kad $A \subset B$.

Pavyzdys.

Skaidinio smulkinys

Ap. Tarkime, P ir Q yra tos pačios aibės skaidiniai. P vadiname skaidinio Q smulkiniu (patikslinimas; angl. *refinement*), jeigu kiekvienai aibei $A \in P$ egzistuoja aibė $B \in Q$ tokia, kad $A \subset B$.

Pavyzdys.

Tegul $\sim_3$ ir $\sim_6$ yra toliau nurodyti **RST** sąryšiai virš $\mathbb{N}$.

Skaidinio smulkinys

Ap. Tarkime, P ir Q yra tos pačios aibės skaidiniai. P vadiname skaidinio Q smulkiniu (patikslinimas; angl. *refinement*), jeigu kiekvienai aibei $A \in P$ egzistuoja aibė $B \in Q$ tokia, kad $A \subset B$.

Pavyzdys.

Tegul $\sim_3$ ir $\sim_6$ yra toliau nurodyti **RST** sąryšiai virš $\mathbb{N}$.

- $x \sim_3 y \iff x \mod 3 = y \mod 3$

Skaidinio smulkinys

Ap. Tarkime, P ir Q yra tos pačios aibės skaidiniai. P vadiname skaidinio Q smulkiniu (patikslinimas; angl. *refinement*), jeigu kiekvienai aibei $A \in P$ egzistuoja aibė $B \in Q$ tokia, kad $A \subset B$.

Pavyzdys.

Tegul $\sim_3$ ir $\sim_6$ yra toliau nurodyti **RST** sąryšiai virš $\mathbb{N}$.

- $x \sim_3 y \iff x \mod 3 = y \mod 3$
- $x \sim_6 y \iff x \mod 6 = y \mod 6$

Skaidinio smulkinys

Ap. Tarkime, P ir Q yra tos pačios aibės skaidiniai. P vadiname skaidinio Q smulkiniu (patikslinimas; angl. *refinement*), jeigu kiekvienai aibei $A \in P$ egzistuoja aibė $B \in Q$ tokia, kad $A \subset B$.

Pavyzdys.

Tegul $\sim_3$ ir $\sim_6$ yra toliau nurodyti **RST** sąryšiai virš $\mathbb{N}$.

- $x \sim_3 y \iff x \mod 3 = y \mod 3$
- $x \sim_6 y \iff x \mod 6 = y \mod 6$

Matome, $\sim_3$ turi tris ekvivalentumo klases

$$[n]_3 = \{3k + n \mid k \in \mathbb{N}\}, \text{ čia } n \in \{0, 1, 2\},$$

Skaidinio smulkinys

Ap. Tarkime, P ir Q yra tos pačios aibės skaidiniai. P vadiname skaidinio Q smulkiniu (patikslinimas; angl. *refinement*), jeigu kiekvienai aibei $A \in P$ egzistuoja aibė $B \in Q$ tokia, kad $A \subset B$.

Pavyzdys.

Tegul $\sim_3$ ir $\sim_6$ yra toliau nurodyti **RST** sąryšiai virš $\mathbb{N}$.

- $x \sim_3 y \iff x \mod 3 = y \mod 3$
- $x \sim_6 y \iff x \mod 6 = y \mod 6$

Matome, $\sim_3$ turi tris ekvivalentumo klases

$$[n]_3 = \{3k + n \mid k \in \mathbb{N}\}, \text{ čia } n \in \{0, 1, 2\},$$

o $\sim_6$ turi šešias ekvivalentumo klases

$$[n]_6 = \{6k + n \mid k \in \mathbb{N}\}, \text{ čia } n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Aišku, kad skaidinys

$$\{[0]_6, [1]_6, [2]_6, [3]_6, [4]_6, [5]_6\}$$

yra skaidinio

$$\{[0]_3, [1]_3, [2]_3\}$$

smulkinys.

Klausimas. Ar kuris iš sąryšių $\sim_3$ ir $\sim_2$ yra kito smulkinys?

Atsakymas. Ne, kadangi $[0]_2$ ir $[1]_2$ yra atitinkamai lyginių ir nelyginių skaičių aibės, o į aibes $[0]_3$, $[1]_3$ ir $[2]_3$ patenka ir lyginiai, ir nelyginiai skaičiai.

Teorema (dviejų **RST** sąryšių sankirtos savybė)

Jeigu E ir F yra **RST** sąryšiai virš A, tai $E \cap F$ ekvivalentumo klasės yra

$$[x]_{E \cap F} = [x]_E \cap [x]_F, \quad x \in A.$$

Teorema (dviejų **RST** sąryšių sankirtos savybė)

Jeigu E ir F yra **RST** sąryšiai virš A, tai $E \cap F$ ekvivalentumo klasės yra

$$[x]_{E \cap F} = [x]_E \cap [x]_F, \quad x \in A.$$

Pavyzdys.

Tegul $\sim_1$ ir $\sim_2$ yra toliau nurodyti **RST** sąryšiai virš $\mathbb{N}$.

Teorema (dviejų **RST** sąryšių sankirtos savybė)

Jeigu E ir F yra **RST** sąryšiai virš A, tai $E \cap F$ ekvivalentumo klasės yra

$$[x]_{E\cap F} = [x]_E \cap [x]_F, \quad x \in A.$$

Pavyzdys.

Tegul $\sim_1$ ir $\sim_2$ yra toliau nurodyti **RST** sąryšiai virš $\mathbb{N}$.

- $x \sim_1 y \Longleftrightarrow \lfloor x/4 \rfloor = \lfloor y/4 \rfloor$

Teorema (dviejų **RST** sąryšių sankirtos savybė)

Jeigu E ir F yra **RST** sąryšiai virš A, tai $E \cap F$ ekvivalentumo klasės yra

$$[x]_{E \cap F} = [x]_E \cap [x]_F, \quad x \in A.$$

Pavyzdys.

Tegul $\sim_1$ ir $\sim_2$ yra toliau nurodyti **RST** sąryšiai virš $\mathbb{N}$.

- $x \sim_1 y \iff \lfloor x/4 \rfloor = \lfloor y/4 \rfloor$
- $x \sim_2 y \iff \lfloor x/6 \rfloor = \lfloor y/6 \rfloor$

Teorema (dviejų **RST** sąryšių sankirtos savybė)

Jeigu E ir F yra **RST** sąryšiai virš A, tai $E \cap F$ ekvivalentumo klasės yra

$$[x]_{E\cap F} = [x]_E \cap [x]_F, \quad x \in A.$$

Pavyzdys.

Tegul $\sim_1$ ir $\sim_2$ yra toliau nurodyti **RST** sąryšiai virš $\mathbb{N}$.

- $x \sim_1 y \iff \lfloor x/4 \rfloor = \lfloor y/4 \rfloor$
- $x \sim_2 y \iff \lfloor x/6 \rfloor = \lfloor y/6 \rfloor$

Galime įžvelgti, kad $\sim_1$ ekvivalentumo klasės yra tokios:

$$[4n]_1 = \{4n, 4n+1, 4n+2, 4n+3\}, \ n \in \mathbb{N},$$

Teorema (dviejų **RST** sąryšių sankirtos savybė)

Jeigu E ir F yra **RST** sąryšiai virš A, tai $E \cap F$ ekvivalentumo klasės yra

$$[x]_{E\cap F} = [x]_E \cap [x]_F, \quad x \in A.$$

Pavyzdys.

Tegul $\sim_1$ ir $\sim_2$ yra toliau nurodyti **RST** sąryšiai virš $\mathbb{N}$.

- $x \sim_1 y \iff \lfloor x/4 \rfloor = \lfloor y/4 \rfloor$
- $x \sim_2 y \iff \lfloor x/6 \rfloor = \lfloor y/6 \rfloor$

Galime įžvelgti, kad $\sim_1$ ekvivalentumo klasės yra tokios:

$$[4n]_1 = \{4n, 4n+1, 4n+2, 4n+3\},\ n \in \mathbb{N},$$

o $\sim_2$ ekvivalentumo klasės –

$$[6n]_2 = \{6n, 6n+1, \ldots, 6n+5\},\ n \in \mathbb{N}.$$

Tegul $\sim = \sim_1 \cap \sim_2$. Išrašysime keletą $\sim$ ekvivalentumo klasių:

$$[0]_\sim = [0]_1 \cap [0]_2 = \{0,1,2,3\} \cap \{0,1,2,3,4,5\} = \{0,1,2,3\},$$
$$[4]_\sim = [4]_1 \cap [4]_2 = \{4,5,6,7\} \cap \{0,1,2,3,4,5\} = \{4,5\},$$
$$[6]_\sim = [6]_1 \cap [6]_2 = \{4,5,6,7\} \cap \{6,7,8,9,10,11\} = \{6,7\},$$
$$[8]_\sim = [8]_1 \cap [8]_2 = \{8,9,10,11\} \cap \{6,7,8,9,10,11\} = \{8,9,10,11\}.$$

Klausimas. Ar įžvelgiate dėsningumą likusioms ekvivalentumo klasėms iš $\sim$ aprašyti?

Atsakymas:

$$[12n]_\sim = \{12n, 12n+1, 12n+2, 12n+3\},$$
$$[12n+4]_\sim = \{12n+4, 12n+5\},$$
$$[12n+6]_\sim = \{12n+6, 12n+7\},$$
$$[12n+8]_\sim = \{12n+8, 12n+9, 12n+10, 12n+11\}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Ekvivalentumo sąryšių generavimas

Ap. Mažiausias ekvivalentumo sąryšis, kuriam priklauso sąryšis R, yra vadinamas R ekvivalentumo uždariniu ir sutampa su $tsr(R)$.

Seka tsr yra svarbi. Pavyzdžiui, turime

$$R = \{(a, b), (a, c)\}$$

virš $\{a, b, c\}$. Tada

$$tsr(R) = \{a, b, c\} \times \{a, b, c\}$$

yra ekvivalentumo sąryšis, bet

$$str(R) = \{a, b, c\} \times \{a, b, c\} - \{(b, c), (c, b)\}$$

nėra ekvivalentumo, nes jis nėra tranzityvusis.

Kruskalo algoritmas

Šis algoritmas yra skirtas rasti grafo minimalųjį dengiantįjį medį.

1. Sudarome grafo briaunų sąrašą L, kuriame briaunos išsidėsčiusios svorių didėjimo tvarka.
2. Minimalųjį dengiantįjį medį pažymime T. Iš pradžių $T := \emptyset$.
3. Kiekvienai viršūnei sukuriame ekvivalentumo klasę

$$[v] = \{v\}.$$

4. Vykdome algoritmą:

while turime dvi ar daugiau ekvivalentumo klasių **do**
    $\{x, y\} := head(L)$;
    $L := tail(L)$;
  if $[x] \neq [y]$ **then**
    $T := T \cup \{\{x, y\}\}$;
    pakeičiame $[x]$ ir $[y]$ į $[x] \cup [y]$
  fi od

Gauta aibė T yra mūsų ieškomas medis.

Pavyzdys. Sudarome grafo briaunų sąrašą: $L :=$
$\langle\{a,b\},\{b,c\},\{d,f\},\{e,f\},\{a,d\},\{c,e\},\{f,g\},\{b,g\},\{c,d\},\{b,e\}\rangle$.
Tegul biaunų ilgiai yra atitinkamai: 1,1,1,1,2,2,2,2,3,3.
Algoritmo realizacija:

T	ekvivalentumo klasės
$\{\}$	$\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{e\},\{f\},\{g\}$
$T\cup\{\{a,b\}\}$	$\{a,b\},\{c\},\{d\},\{e\},\{f\},\{g\}$
$T\cup\{\{b,c\}\}$	$\{a,b,c\},\{d\},\{e\},\{f\},\{g\}$
$T\cup\{\{d,f\}\}$	$\{a,b,c\},\{d,f\},\{e\},\{g\}$
$T\cup\{\{e,f\}\}$	$\{a,b,c\},\{d,e,f\},\{g\}$
$T\cup\{\{a,d\}\}$	$\{a,b,c,d,e,f\},\{g\}$
T	$\{a,b,c,d,e,f\},\{g\}$
$T\cup\{\{f,g\}\}$	$\{a,b,c,d,e,f,g\}$

Priešpaskutiniu žingsniu ėmėme briauną $\{c,e\}$, bet $[c]=[e]$, todėl pakitimų neįvyko. Gavome

$$T=\{\{a,b\},\{b,c\},\{d,f\},\{e,f\},\{a,d\},\{f,g\}\},$$

Įsitikinkite, nubrėžkite pradinį grafą ir T.

Tvarka yra sąryšis

Ap. Binarusis sąryšis yra vadinamas <u>daline tvarka</u>, jeigu jis yra tranzityvusis, antisimetrinis ir refleksyvusis arba antirefleksyvusis.

Aibę, virš kurios apibrėžiame dalinę tvarką, vadiname <u>dalinai sutvarkytąja aibe</u> (angl. sutrumpintai, – *poset*).

Jeigu norime pabrėžti, kad S yra dalinai sutvarkyta aibė, sąryšio R atžvilgiu, tada rašome

$$\langle S, R \rangle$$

ir šį sąrašą vadiname dalinai sutvarkytąja aibe.

Penki dalinai sutvarkytų aibių pavyzdžiai:

- $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$;
- $\langle \mathbb{N}, < \rangle$;
- $\langle \mathbb{N}, \mathsf{divides} \rangle$;
- $\langle \mathsf{power}(\{a, b, c\}), \subset \rangle$;
- $\langle$Instrukcijos žingsniai, $R\rangle$, čia $iRj \Leftrightarrow i$ atliekam prieš j.

Palyginamumas

Tegul $\langle S, R \rangle$ yra dalinai sutvarkyta aibė. Vartojami apibrėžimai:

Ap. Elementai $x, y \in S$ yra vadinami palyginamais, jeigu $(x, y) \in R$ arba $(y, x) \in R$.

Ap. Jeigu visos elementų iš S poros yra palyginamos, tada R vadiname pilnąja arba tiesine tvarka.

Ap. Aibę elementų, kurie tarpusavyje yra palyginami, vadiname grandine.

Žymenys

Dalinėms tvarkoms žymėti naudosime simbolius

$$\prec \quad \text{ir} \quad \preceq \, ,$$

(Dažnai ir $<$ arba $\leq$, nors jie turės kitą prasmę nei aritmetikoje).
Jeigu

$$x \prec y,$$

tai reiškia, kad

$$x \text{ eina prieš } y,$$

t.y., y eina po x, bet nebūtinai x yra didesnis už y.

Pavyzdžiui. Gali būti atvejis, kai $2 \prec 1$, jeigu tik $(2, 1) \in R$.

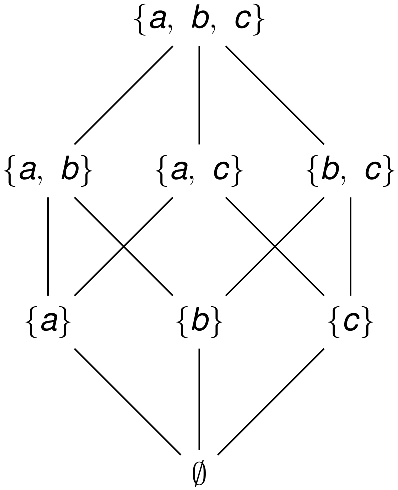
Ap. Elementą x vadiname y pirmtaku, o y vadiname x palikuoniu (tiesioginiu), jeigu

$$\{z \mid x \prec z \prec y\} = \emptyset.$$

Dalinai sutvarkytos aibiės diagrama (Hasės diagrama (angl. *Hasse diagram*))

Ap. Tai grafas, vaizduojantis dalinai sutvarkytą aibę, kurį sudaro tik briaunos, jungiančios pirmtakus su palikuoniais. Briaunos diagramoje brėžiamos iš apačios į viršų, tokiu būdu, kad pirmtakų viršūnės visada yra žemiau už jų palikuonių viršūnes.

Pavyzdžiui. Dalinai sutvarkytos aibės $\langle \mathsf{power}(\{a, b, c\}), \subset\rangle$ Hasės diagrama:



Minimumas, maksimumas ir rėžiai

Tegul $S \subset P$, P – dalinai sutvarkta aibė.

Ap. Elementas $x \in S$ yra vadinamas minimaliuoju S elementu, jeigu jis neturi pirmtakų aibėje S.

Ap. Minimalus elementas $x \in S$ yra vadinamas mažiausiuoju S elementu, jeigu $x \preceq y$ su visais $y \in S$.

Ap. Elementas $x \in P$ yra vadinamas apatiniuoju aibės S rėžiu, jeigu $x \preceq y$ su visais $y \in S$.

Ap. Aibės S apatinis rėžis $x \in P$ yra vadinamas tiksliuoju apatiniu rėžiu (mes žymėsime $\mathsf{t.a.r.}(S)$), jeigu visi S apatiniai rėžiai $y \in P$ yra tokie, kad $y \preceq x$.

Sąvokos: maksimalusis S elementas, didžiausiasis S elementas, viršutinysis S rėžis, tikslusis S viršutinis rėžis – $\mathsf{t.v.r.}(S)$ apibrėžiamos analogiškai.

Tegul

$$P = \mathsf{power}(\{a, b, c\}) \quad \text{ir} \quad S = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}.$$

Tada, jau turėtoje P diagramoje, matome:

$\{a\}$ – vienintelis minimalus S elementas, todėl jis yra mažiausias S elementas ir tikslus S apatinis rėžis.

$\{a\}$ ir $\emptyset$ – S apatiniai rėžiai.

$\{a, b\}$ ir $\{a, c\}$ – maksimalūs S elementai, todėl S neturi didžiausio elemento.

$\{a, b, c\}$ – vienintelis S viršutinis rėžis, todėl jis yra tikslus S viršutinis rėžis, t.y., $\mathsf{t.v.r.}(S) = \{a, b, c\}$.

Užduotis. Tegul skaičiai lyginami pagal jų dydį, t.y., $(m, n) = mRn$, jeigu $m < n$.
Raskite aibės

$$S = \{6, 7, 8\}$$

minimumą, maksimumą ir rėžius, kai $S \subset P$, $\langle P, R \rangle$; čia

$$P = \{1, 2, \ldots, 9\},$$

$$R = \{(1, 4), (2, 4), (3, 5), (5, 7), (4, 6), (4, 7), (6, 8), (7, 8), (8, 9)\}.$$

Sprendimas. Nusibrėžiame Hasės diagramą. Matome, minimalūs S elementai yra du, 6 ir 7, todėl S neturi mažiausio elemento. Apatiniai S rėžiai yra 1, 2, 4, o $\mathrm{tar}(S) = 4$. S turi vienintelį maksimalų elementą 8, todėl 8 yra didžiausias S elementas ir jos tikslus viršutinis rėžis. Viršutiniai S rėžiai yra 8 ir 9.

Gardelės

Ap. Gardele vadiname dalinai sutvarkytą aibę, kurios kiekviena pora elementų turi tikslius apatinį ir viršutinį rėžius.

Pavyzdys. Kokią tik paimtume aibę S, dalinai sutvarkyta aibė $\langle \mathsf{power}(S), \subset \rangle$ yra gardelė, nes paėmę bet kuriuos elementus $A, B \in \mathsf{power}(S)$, turime

$$\mathsf{t.a.r.}(A, B) = A \cap B \quad \text{ir} \quad t.v.r.(A, B) = A \cup B.$$

1 klausimas. Ar $\langle \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \mid \rangle$ yra gardelė?

Atsakymas. Ne. Nes, pavyzdžiui, elementai 2 ir 5 neturi $\mathsf{t.v.r.}$.

2 klausimas. Ar $\langle \{1, 2, 3, 6, 12\}, \mid \rangle$ yra gardelė?

Atsakymas. Taip.

Topologinis rūšiavimas (dalinai sutvarkytos aibės diagramą pakeičia seka)

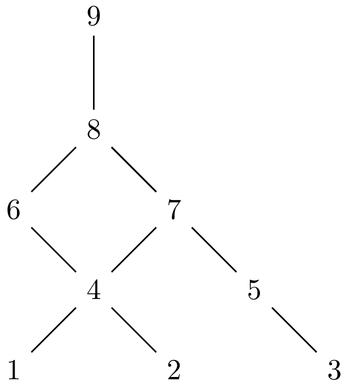
Idėja – paimti minimalųjį elementą, pašalinti jį iš dalinai sutvarkytos aibės ir toliau taip pat elgtis su gauta dalinai sutvarkyta aibe. Gauta elementų seka visada pasižymi tokia savybe: x yra kairiau už y, jeigu tik $x \prec y$.

Algoritmas

$p(x)$ – x tiesioginių pirmtakų skaičius;
$s(x)$ – aibė x tiesioginių palikuonių;
$\textit{Šaltiniai} = \{x \mid p(x) = 0\}$ (sudaro elementai, neturintys pirmtakų).

while $\textit{Šaltiniai} \neq \emptyset$ **do**
Atspausdinam x ir pašalinam iš $\textit{Šaltiniai}$;
Kiekvienam $y \in s(x)$ sumažiname vienetu $p(y)$ ir atnaujiname $\textit{Šaltiniai}$.
od

Pavyzdys. Tegul $\langle S, P \rangle$ yra jau minėta dalinai sutvarkyta aibė, kurios Hasės diagrama yra



Du galimi šios aibės elementų topologiniai surūšiavimai:

$$3, 5, 2, 1, 4, 7, 6, 8, 9 \quad \text{ir} \quad 1, 2, 4, 6, 3, 5, 7, 8, 9.$$

Gerai sudarytos aibių tvarkos (aibės)

Ap. Sakome, kad d.s. aibė yra gerai sudaryta, jeigu kiekvienas jos netuščias poaibis turi minimalų elementą arba kiekviena jos grandinė, kurios elementus galime išrašyti tokiu būdu $x_1 \succ x_2 \succ \ldots$, yra baigtinė.

Norint suprasti, apibrėžime esančių teiginių ekvivalentiškumą, reikia pastebėti, kad kiekvienoje baigtinėje mažėjančių elementų grandinėje paskutinis elementas yra minimalus. Ir, jeigu visi netušti poaibiai turi minimalius elementus, negalėsime sudaryti begalinės mažėjančių elementų grandinės, kadangi tai prieštarautų pastarajai sąlygai.

Pavyzdys. Dalinai sutvarkytos aibės $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ ir $\langle \mathsf{power}(\text{baigtinė aibė}), \subset \rangle$ yra gerai sudarytos.

Pavyzdys. Dalinai sutvarkytos aibės $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$ ir $\langle \mathsf{power}(\text{begalinė aibė}), \subset \rangle$ nėra gerai sudarytos. Nes, pavyzdžiui, aibei

$$\mathsf{power}(\mathbb{N})$$

priklauso begalinė mažėjanti grandinė

$$\mathbb{N} \supset \mathbb{N} - \{0\} \supset \mathbb{N} - \{0, 1\} \supset \mathbb{N} - \{0, 1, \ldots, n\} \supset \ldots .$$

Leksikografinė aibės $\mathbb{N}^n$ tvarka

Leksikografinė n gretinių tvarka apibrėžiama tokiu būdu:

$$(x_1, \ldots, x_n) \prec (y_1, \ldots, y_n) \;\Leftrightarrow\; x_1 \prec y_1$$

arba

$$x_i = y_i,$$

kai $1 \leq i < j$, ir

$$x_j \prec y_j.$$

Ši tvarka yra gerai sudaryta. Pastebėkime, ji yra tiesinė.

Pavyzdys. Išsiaiškinkime, kodėl aibės $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ leksikografinė tvarka yra gerai sudaryta. Iš pradžių pastebėkime, kad mažėjanti grandinė

$$(x, y_1) \succ (x, y_2) \succ \dots$$

turi būti baigtinė, nes

$$y_1 > y_2 > \dots$$

yra baigtinė $\mathbb{N}$ grandinė. Be to, norint pratęsti grandinę

$$(x, y_1) \succ (x, y_2) \succ \dots,$$

reikia sumažinti paskutinės poros pirmąjį argumentą x, bet tokių pratęsimų yra baigtinis skaičius, nes

$$x_1 > x_2 > \dots$$

yra baigtinė $\mathbb{N}$ grandinė. Todėl aibės $\mathbb{N}^2$ leksikografinė tvarka yra gerai sudaryta.

Leksikografinė aibės A^* tvarka

Tegul A yra abėcėlė ir dalinai sutvarkyta aibė. Jeigu x ir y yra žodžiai virš A, tada

$$x \prec y \;\Leftrightarrow\; x \text{ yra } y \text{ priešdėlis}$$

(t.y. $y = xz$ ir $z \neq \Lambda$)
arba
x ir y turi bendrą (ilgiausią) priešdėlį u:

$$x = uw \text{ ir } y = uz,$$

ir $head(w) \prec head(z)$ dalinai sutvarkytoje aibėje A.

PASTABA: Tai yra žodynuose įprasta tvarka ir ji nėra gerai sudaryta, bet ji yra tiesinė tvarka.

Pavyzdys. Turime abėcėlę $\{a, b\}$ ir $a \prec b$. Grandinė

$$b \succ ab \succ aab \succ aaab \succ \dots$$

yra begalinė ir leksikografinės aibės A^* tvarkos poaibis, todėl A^* leksikografinė tvarka nėra gerai sudaryta.

Užduotis. Surašykite eilės tvarka visus ilgio 3 žodžius virš $\{a, b\}$, kai $a \prec b$.

Atsakymas:

$$aaa \prec aab \prec aba \prec abb \prec baa \prec bab \prec bba \prec bbb.$$

Standartinė aibės A^* tvarka

Tai yra gerai sudaryta tvarka, kuri išrikiuoja žodžius pagal jų ilgį, to paties ilgio žodžiams taikydama leksikografinę tvarką.

Pavyzdys. Parašysime ilgiausią, mažėjančią $\{a, b\}^*$ grandinę, prasidedančią nuo aaa, kai $a \prec b$:

$$aaa \succ bb \succ ba \succ ab \succ aa \succ b \succ a \succ \Lambda.$$

Gerai sudaryta tvarka gaunama panaudojant funkcijas

Bet kuri f-ja $f : S \to \mathbb{N}$ apibrėžia gerai sudarytą tvarką virš S tokiu būdu:

$$x \prec y \Leftrightarrow f(x) < f(y).$$

Pavyzdžiai:

- Tvarka virš sąrašų aibės yra gerai sudaryta pagal ilgį.
- Tvarka virš binariųjų medžių aibės yra gerai sudaryta pagal medžių gylį arba pagal jų viršūnių skaičių, arba pagal jų lapų skaičių.
- Tvarką virš $\mathbb{Z}$ galime gerai sudaryti, paėmę skaičiaus modulį.

Atkreipkime dėmesį, šios tvarkos nėra tiesinės.

Pavyzdys. Tegul $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ ir

$$f(x) = \textbf{if } x \geq 0 \textbf{ then } 2x \textbf{ else } -2x - 1.$$

Tvarka virš $\mathbb{Z}$

$$x \prec y \Leftrightarrow f(x) < f(y).$$

Ši tvarka yra gerai sudaryta ir tiesinė, nes

$$0 \prec -1 \prec 1 \prec -2 \prec 2 \prec \ldots .$$

Gerai sudarytos tvarkos virš indukciškai apibrėžtų aibių

Jeigu S yra indukciškai apibrėžta aibė ir jokie du jos elementai nėra apibrėžti vienas per kitą, tai gerai sudarytoms tvarkoms virš S gauti galime naudoti tokius du būdus.

1 būdas. Tegul $f : S \to \mathbb{N}$ ir $f(b) = 0$, kai b yra bazės elementas. Jeigu x yra apibrėžtas per

$$y_1, \ldots, y_n,$$

tada

$$f(x) = 1 + \max\{f(y_1), \ldots, f(y_n)\}.$$

Gerai sudaryta tvarka $\prec$ yra apibrėžta, jei

$$x \prec y \Leftrightarrow f(x) < f(y).$$

Gerai sudarytos tvarkos virš indukciškai apibrėžtų aibių

Jeigu S yra indukciškai apibrėžta aibė ir jokie du jos elementai nėra apibrėžti vienas per kitą, tai gerai sudarytoms tvarkoms virš S gauti galime naudoti tokius du būdus.

1 būdas. Tegul $f : S \to \mathbb{N}$ ir $f(b) = 0$, kai b yra bazės elementas. Jeigu x yra apibrėžtas per

$$y_1, \dots, y_n,$$

tada

$$f(x) = 1 + \max\{f(y_1), \dots, f(y_n)\}.$$

Gerai sudaryta tvarka $\prec$ yra apibrėžta, jei

$$x \prec y \Leftrightarrow f(x) < f(y).$$

Išlyga reikalinga: Pvz., $\mathbb{Z}$ apibrėžus: $0 \in \mathbb{Z}$ ir tęsiant: $x \in \mathbb{Z}$ turime $x \pm 1 \in \mathbb{Z}$. Tada, $f(0) =?$ nebeaišku, 0 ar $1 + \max\{f(1), f(-1)\}$.

2 būdas. Bazės elementus laikome minimaliais S elementais. Jeigu x yra apibrėžiamas per $y_1, \ldots, y_n$, tariame, kad

$$y_i \prec x$$

kiekvienam i. Be to, paimame šios tvarkos tranzityvųjį uždarinį. Taip gauname gerai sudarytą tvarką.

Tas pats pavyzdys. $\mathbb{Z}$ indukciškai galime apibrėžti tokiu būdu:

Bazė: $0 \in \mathbb{Z}$
Indukcija: Jei $x \in \mathbb{Z}$, tai $x + 1, x - 1 \in \mathbb{Z}$.

Pastebėkime, kad 1 ir -1 yra sukonstruojami iš 0, o pastarasis yra sukonstruojamas iš -1, todėl, nei pirmu, nei antru būdu, negalime sudaryti d.s. aibės.

Pavyzdys. $\mathbb{N}^2$ indukciškai galime apibrėžti tokiu būdu:

Bazė: $(0,0) \in \mathbb{N}^2$.
Indukcija: Jei $(x,y) \in \mathbb{N}^2$, tai $(x,y+1),(x+1,y) \in \mathbb{N}^2$.

Tvarkoje, sudarytoje pirmuoju metodu, kai funkcija
$f((x,y)) = x + y$,
bet kuri pora (x,y), $x+y=n$, turi $n+2$ palikuonius $(x',y'$,
nes turi būti

$$f((x',y')) = x' + y' = n+1.$$

Pavyzdžiui, elemento $(0,1)$ palikuoniai yra $(0,2)$, $(1,1)$ ir $(2,0)$.

Pavyzdys. $\mathbb{N}^2$ indukciškai galime apibrėžti tokiu būdu:

Bazė: $(0, 0) \in \mathbb{N}^2$.
Indukcija: Jei $(x, y) \in \mathbb{N}^2$, tai $(x, y + 1), (x + 1, y) \in \mathbb{N}^2$.

Tvarkoje, sudarytoje pirmuoju metodu, kai funkcija
$f((x, y)) = x + y$,
bet kuri pora (x, y), $x + y = n$, turi $n + 2$ palikuonius $(x', y'$,
nes turi būti

$$f((x', y')) = x' + y' = n + 1.$$

Pavyzdžiui, elemento $(0, 1)$ palikuoniai yra $(0, 2)$, $(1, 1)$ ir $(2, 0)$.

Tvarkoje, sudarytoje antruoju būdu, bet kuri pora (x, y) turi du palikuonius. Pavyzdžiui, elemento $(0, 1)$ palikuoniai yra $(0, 2)$ ir $(1, 1)$.

4.4 Įrodymas matematinės indukcijos metodu

Toliau naudosime trumpinį MIP (matematinės indukcijos principas).

Pirma pastebėkime, kad bet kuris $\mathbb{N}$ poaibis turi mažiausią elementą, nes $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ yra gerai sudaryta tvarka.

MIP aibėje $\langle \mathbb{N}, < \rangle$

Tegul $S \subset \mathbb{N}$ ir $0 \in S$. Jeigu turime, kad

$$k \in S \ \Rightarrow \ k+1 \in S,$$

tada

$$S = \mathbb{N}.$$

Įrodymas prieštaros būdu: Jei $\mathbb{N} - S \neq \emptyset$, tai joje egzistuoja mažiausias elementas x. Formaliai $x \in \mathbb{N}$, bet $x \notin S$, bet $x - 1 \in S$. Bet tada $(x-1)+1 \in S$. Prieštara. $\square$

Įrodymas remiantis matematine indukcija

Tegul $P(n)$ yra teiginys su kiekvienu $n \in \mathbb{N}$. Norint įrodyti $P(n)$ teisingumą kiekvienam $n \in \mathbb{N}$, pakanka atlikti šiuos žingsnius:

1. Parodyti, kad $P(0)$ yra tiesa.
2. Parodyti, jeigu $P(k)$ yra tiesa, tai ir $P(k+1)$ yra tiesa.

Įrodymas. Panaudoti ką tik įrodytą teiginį su

$$S = \{n \mid P(n) \text{ yra tiesa}\}.$$

$\square$

Įrodymas remiantis matematine indukcija

Tegul $P(n)$ yra teiginys su kiekvienu $n \in \mathbb{N}$. Norint įrodyti $P(n)$ teisingumą kiekvienam $n \in \mathbb{N}$, pakanka atlikti šiuos žingsnius:

1. Parodyti, kad $P(0)$ yra tiesa.
2. Parodyti, jeigu $P(k)$ yra tiesa, tai ir $P(k+1)$ yra tiesa.

Įrodymas. Panaudoti ką tik įrodytą teiginį su

$$S = \{n \mid P(n) \text{ yra tiesa}\}.$$

$\square$

Pastaba. MIP taip pat veikia ir teiginiams $P(n)$, kai $n \in \{m, m+1, \ldots\}$, $m \in \mathbb{Z}$. Tokiu atveju mažiausias elementas yra m, todėl skirtumas tik tas, kad pirmu žingsniu tikriname ar $P(m)$ yra tiesa.

1 pavyzdys. Įrodysime, kad

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

su visais $n \in \mathbb{N}$.

Įrodymas. Nagrinėjamą lygybę vadinkime teiginiu $P(n)$.

1. $P(0)$ yra tiesa, nes

$$0 = \frac{0(0+1)}{2}.$$

2. Parodome, kad jeigu $P(k)$ yra tiesa, tai ir $P(k+1)$ yra tiesa:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + k + (k+1) &= (1 + 2 + \ldots + k) + (k+1) \\ &= k(k+1)/2 + (k+1) \\ &= (k+1)((k+1)+1)/2. \end{aligned}$$

2 pavyzdys. Įrodysime, kad

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$$

su visais $n \in \mathbb{N}$.

Įrodymas. Nagrinėjamą lygybę pažymime $P(n)$. Taikome MIP.

1. $P(0)$ yra tiesa, nes $0^3 = 0^2$.
2. Įrodome, jeigu $P(k)$ yra tiesa, tai ir $P(k+1)$ tiesa:

$$\begin{aligned}
1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 &= (1^3 + 2^3 + \ldots + k^3) + (k+1)^3 \\
&= (1 + 2 + \ldots + k)^2 + (k+1)^3 \\
&= (k(k+1)/2)^2 + (k+1)^3 \\
&= (k^2 + 4k + 4)(k+1)^2/4 \\
&= ((k+1)(k+2)/2)^2 \\
&= (1 + 2 + \ldots + (k+1))^2.
\end{aligned}$$

3 pavyzdys. Tegul $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ir

$$f(n) = \textbf{if } n = 0 \textbf{ then } 0 \textbf{ else } f(n-1) + n^2.$$

Tada

$$f(n) = n(n+1)(2n+1)/6$$

su visais $n \in \mathbb{N}$.

Įrodymas. Paskutinę lygybę pažymime $P(n)$. Taikome MIP.

1. $P(0)$ yra tiesa, nes $f(0) = 0 = 0(0+1)(2 \cdot 0 + 1)/6$.
2. Įrodome, jeigu $P(k)$ yra tiesa, tai ir $P(k+1)$ yra tiesa:

$$\begin{aligned} f(k+1) &= f(k) + (k+1)^2 \\ &= k(k+1)(2k+1)/6 + (k+1)^2 \\ &= (k+1)(2k^2 + 7k + 6)/6 \\ &= (k+1)(k+2)(2k+3)/6 \\ &= (k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)/6. \end{aligned}$$

$\square$

MIP apibendrinimas gerai sudarytose aibėse

Samprotavimai panašūs kaip ir MIP virš $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ atveju.

MIP gerai sudarytoje aibėje

Tegul W yra gerai sudaryta aibė ir S yra toks W poaibis, kad S priklauso visi minimalūs W elementai. Be to, jeigu $x \in W$ ir visi prieš x einantys elementai priklauso S, tai $x \in S$. Tada $S = W$.

Įrodymas. Knygos 259 puslapyje. □

MIP gerai sudarytoje aibėje

W – gerai sudaryta aibė;

$P(x)$ – teiginys su bet kuriuo $x \in W$.

Norint įrodyti teiginio $P(x)$ teisingumą su visais $x \in W$, pakanka atlikti du žingsnius:

1. Įrodyti, kad $P(m)$ yra tiesa su kiekvienu minimaliu W elementu m.
2. Įrodyti, jeigu $P(y)$ yra tiesa su visais $y \prec x$, čia x fiksuotas, tai $P(x)$ yra tiesa; $y, x \in W$.

Įrodymas. Knygos 260 puslapyje. □

4 pavyzdys (MIP gerai sudarytoje aibėje).

Tegul $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

$$f(0) = f(1) = 0 \quad \text{ir} \quad f(n) = f(n-2) + 1, \quad \text{kai} \quad n \geq 2.$$

Įrodysime, kad

$$f(n) = \text{floor}\left(\frac{n}{2}\right)$$

su visais $n \in \mathbb{N}$.

Įrodymas. Paskutinę lygybę pažymime $P(n)$. Taikome MIP. Pastebėkime, šiuo atveju, minimalūs $\mathbb{N}$ elementai yra du, 0 ir 1.

1. $P(0)$ ir $P(1)$ yra tiesa, nes

   $$\text{floor}\,(0/2) = \text{floor}\,(1/2) = 0$$

   ir, pagal apibrėžimą,

   $$f(0) = f(1) = 0.$$

2. Tegul $k \geq 2$. Darome prielaidą, kad $P(i)$ yra tiesa, kai $i < k$, ir įrodome, kad tada $P(k)$ yra tiesa:

$$\begin{aligned} f(k) &= f(k-2) + 1 \\ &= \mathrm{floor}\,((k-2)/2) + 1 \\ &= \mathrm{floor}\,((k/2) - 1) + 1 \\ &= \mathrm{floor}\,(k/2) - 1 + 1 \\ &= \mathrm{floor}\,(k/2)\,. \end{aligned}$$

Remiantis MIP, įrodėme, kad $P(n)$ yra tiesa su visais $n \in \mathbb{N}$. $\square$

5 pavyzdys. Įrodysime, kad kiekvienas natūralusis skaičius $n \geq 2$ yra pirminis arba pirminių skaičių suma.

Įrodymas. Tegul $P(n)$ reiškia, kad n yra pirminis arba pirminių skaičių suma. Turime parodyti, kad $P(n)$ yra tiesa, kai $n \geq 2$.

1. $P(2)$ yra tiesa, nes 2 yra pirminis skaičius.
2. Tegul $k > 2$. Darome prielaidą, kad $P(m)$ yra tiesa, kai $m < k$, ir parodome, kad tokiu atveju ir $P(k)$ yra tiesa (žr. kitą skaidrę).

Jeigu k yra pirminis skaičius, tai $P(k)$ yra tiesa. Kitu atveju

$$k = ij$$

ir, remiantis prielaida,

$$P(i) \text{ ir } P(j)$$

yra teisingi teiginiai. Reiškia,

$$k = ij = j + j + \ldots + j$$

yra pirminių suma, nes j arba pirminis skaičius, arba gali būti užrašytas kaip pirminių skaičių suma. $\square$

MIP gali būti panaudotas įvairiems teiginiams matematikoje pagrįsti. Tai patvirtina ir šis pavyzdys:

6 pavyzdys. Tegul

$$L = \{a^m c^n b^m \mid m, n \in \mathbb{N}\}.$$

Matematinės indukcijos metodu galima įrodyti, kad kalbos L gramatika yra

$$\{S \to aSb, S \to T, T \to cT, T \to \Lambda\}.$$

Įrodymas sudėtingas.

Rekomenduojamos literatūros sąrašas

- James L. Hein, "Discrete Structures, Logic, and Computability"
- + StudentStudyGuide.pdf