RINKTINIAI PROCESŲ TEORIJOS SKYRIAI

E. MANSTAVIČIUS

May 6, 2017

Contents

0.1 Įvadas

Mielas SKAITYTOJAU, Jūs atsivertėte konspektą paskaitų, autoriaus pradėtų skaityti 2006 metų rudenį magistrantams, kurie specializavosi tikimybių teorijoje ir matematinėje statistikoje. Konspektas nuolat buvo papildomas. Medžiaga buvo parinkta neatsitiktinai. Daugiausia įtakos turėjo R. Lyonso paskaitos [1], kurias jis parengė remdamasis populiariais ir, matyt, nepamainomais Sh. Ross [2] ir [3] vadovėliais. Savo ruožtu, mes panaudojome to paties autoriaus knygą [4] bei S. Karlino knygos [5] rusiškąjį vertimą. Manome, kad parinktos temos yra naudingos ir įdomios tiek teoriniu, tiek taikomuoju aspektais. Šiame kurse įrodytos ir suformuluotos teoremos toli gražu neišsemia visų procesų teorijos paslapčių.

Be abejonės, šis konspektas toliau turi būti tobulinamas, be to, tiesiog būtina išravėti esamus darbo skuboje atsiradusius dalykinius ir korektūrinius netikslumus bei lietuvių kalbos šiukšles. Tik didžiulis matematinės literatūros trūkumas verčia autorių rodyti šį nebaigtą variantą fakulteto bendruomenei ir, visų pirma, suinteresuotiems studentams. Autorius tikisi sulaukti ir kritikos, ir geranoriškų pasiūlymų.

Literatūra

[1] Russell Lyons, *Course Notes for Stochastic Processes* (http://mypage.iu.edu/~rdlyons/pdf/StochProc.pdf).

[2] Sheldon M. Ross, *Introduction to Probability Models*, Academic Press, 4th edn, Boston, 1989 (7th edn 2003).

[3] Sheldon M. Ross, *Stocastic Processes*, Academic Press, 2 edn, New York, 1996.

[4] [2] Sheldon M. Ross, *Applied Probability Models with Optimization Applications*, Dower, New York, 1992.

[5] Samuel Karlin, *A First Course in Stochastic Processes*, Academic Press, New York, 1968 (rusų k., Mir, Maskva, 1971).

Chapter 1

Kartojimo medžiaga

1.1 Sąlyginės tikimybės ir vidurkiai

Visi šiame kurse nagrinėjami objektai ,,gyvens" tikimybinėje erdvėje $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$. Sąlyginė tikimybė apibrėžiama lygybe

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \qquad A, B \in \mathcal{F}.$$

Sprendžiant uždavinius dažnai yra patogu pasinaudoti pilnosios tikimybės formule.

Lema 1 *Jei $B_1, \dots, B_k$ yra pilnoji nesutaikomų įvykių sistema, tai*

$$P(A) = \sum_{j=1}^{k} P(A|B_j)\, P(B_j).$$

$\diamond$

Atskiru atveju,

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|\overline{B})P(\overline{B}),$$

čia $\overline{B} = \Omega \setminus B$ yra įvykio B papildinys.

Pradėkime nuo tokio pavyzdžio.

1 *UŽDUOTIS* (Rinkimų problema). *Žinoma, kad rinkimuose pretendentas J gauna n balsų, o už pretendentą K balsuoja m ir $n > m$. Tarkime, kad bet kuri atėjusių balsuoti rinkėjų tvarka yra vienodai galima, ir raskime įvykio*

$$A := A_{n,m} = \{J\, visada\, pirmauja\, pries K\}$$

tikimybę.

Sprendimas. Pažymėkime $P(A) = P_{nm}$. Tegu

$$B = \{J\ gauna\, paskutini\, balsa\}.$$

Tada $\bar{B} = \{K\ gauna\, paskutinį\, balsą\}$ ir

$$P_{nm} = P(A\,|B)P(B) + P(A\,|\bar{B})P(\bar{B}) = P_{n-1,m}\frac{n}{n+m} + P_{n,m-1}\frac{m}{n+m}.$$

Jei $n = m + 1$, natūralu yra susitarti, kad $P_{n-1,m} = 0$.

Dabar naudodami matematinę indukciją $n+m$ atžvilgiu nesunkai išvedame **atsakymą**:

$$P_{nm} = \frac{n-m}{n+m}.$$

2 *UŽDUOTIS. Tegul monetos herbo atsivertimo tikimybė yra* $0 < p < 1$. *Mėtant ją daug kartų yra pirmasis momentas, kada skaičiaus ir herbo atsivertimų kiekiai sutampa. Užrašyti tokių laiko momentų skirstinį.*

Sprendimas. Šis momentas T yra a.d., įgyjantis lygines natūrines reikšmes. Jei $T = 2n$, tai per pirmuosius n metimų herbas atsivertė n kartų. Vadinasi,

$$\begin{aligned} P(T = 2n) \quad &= \quad P(T = 2n\,|\{per\ 2n\ bandymu\ herbas\ atsiverte\ n\ kartų\}) \\ &\quad \times \binom{2n}{n} p^n(1-p)^n =: P_1 \binom{2n}{n} p^n(1-p)^n. \end{aligned}$$

Nagrinėdami sąlyginę tikimybę P_1 pastebime, kad mėtant monetą bet kuris $2n$ galimybių (iš n herbų ir n skaičių) išsidėstymas yra vienodai galimas. Momentas T buvo pirmasis, kai herbų ir skaičių rezultatas išsilygino. Vienu metimu prieš tai visą laiką viena monetos pusė pirmavo prieš kitą. Pavyzdžiui, iškritusių herbų būdavo daugiau negu skaičių ir priešpaskutiniu momentu pirmųjų buvo n, o antrųjų - lygiai $(n-1)$. Vadinasi, tikimybė P_1 lygi pirmoje užduotyje įvestai tikimybei $P_{n,n-1}$. Pritaikę ankstesnį rezultatą gauname **atsakymą:**

$$P(T = 2n) = \frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n} p^n(1-p)^n.$$

Kontroliniam darbui. *Atsitiktinis draudimo kompanijos klientas per metus padaro* X *autoįvykių pasiskirsčiusių pagal Puasono dėsnį su atsitiktiniu vidurkiu* λ*, kuris turi tankį*

$$g(\lambda) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda}, \quad \lambda \geq 0.$$

Rasti $P(X = n)$.

Valentino dienos problema. *Susiruošusi ištekėti mergina žino, kad jai pasipirš* n *jaunikių, kuriuos išvydusi ji moka suranguoti pagal protą, grožį ... ir piniginę. Jaunikikiai peršasi atsitiktinai. Atstumtasis jaunikis nebegrįžta. Kada jaunoji turi pasakyti ,,Taip", kad tikimybė išrinkti geriausią jaunikį būtų didžiausia?*

Sprendimas. Tegul jos strategija yra tokia: atstumti pirmuosius $0 \le k < n$ jaunikių ir ištekėti už pirmo labiau patikusio, negu prieš tai pasipiršę tie k vaikinų. Pažymėkime $P_k(ger)$ tikimybę įvykio ištekėti už geriausio, kai strategija yra realizuojama. Tegul X yra geriausio jaunikio eilė tose piršlybose. Tada

$$
\begin{aligned}
P_k(ger) &= \sum_{i=1}^{n} P_k(ger|\, X = i) P(X = i) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} P_k(ger|\, X = i).
\end{aligned}
$$

Pagal strategiją geriausias jaunikis turi didesnį negu k numerį, todėl $P_k(ger|\, X = i) = 0$, jei $1 \le i \le k$. Bet

$$
\begin{aligned}
P_k(ger|\, X = i) &= P_k((k+1) - asis, \ldots, (i-1) - as\ blog.\ uz\ kazk.\ is\ pirmu\ k) \\
&= P_k(ger.\ is\ (i-1) - o\ yra\ tarp\ pirmu\ k) \\
&= \frac{k}{i-1},
\end{aligned}
$$

jei $k < i \le n$.

Vadinasi,

$$
\begin{aligned}
P_k(ger) &= \frac{1}{n} \sum_{i=k+1}^{n} \frac{k}{i-k} \\
&\approx \frac{k}{n} \int_k^{n-1} \frac{dx}{x} \approx \frac{k}{n} \log \frac{k}{n}.
\end{aligned}
$$

Ištirkime funkciją

$$
g(x) := \frac{x}{n} \log \frac{x}{n}.
$$

Turime

$$
g'(x) := \frac{1}{n} \log \frac{x}{n} - \frac{1}{n}.
$$

Jos maksimumo taškas randamas iš lygties

$$\log(n/x) = 1$$

t.y. jis pasiekiamas, kai $x = n/\mathrm{e}$.

Atsakymas: Geriausia strategija - atstumti $[n/\mathrm{e}]$ jaunikių ir tada čiupti labiausiai patinkantį. Be to, jei n yra pakankamai didelis, $\max_k P_k(ger) \approx g(n/\mathrm{e}) = 1/\mathrm{e}$.

Panašiai galime panaudoti ir sąlyginius vidurkius. Prisiminkime juos.

Jei X ir Y yra diskretūs atsitiktiniai dydžiai (a.d), tai

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}$$

yra dviejų argumentų funkcija. Jei y fiksuotas, tai x funkcijos reikšmės apibrėžia sąlyginį X skirstinį ir tada

$$\sum_x P(X = x|Y = y) = 1$$

su visais y. Suma

$$\sum_x xP(X = x|Y = y) =: \mathbf{E}(X|Y = y)$$

yra sąlyginis vidurkis esant sąlygai $Y = y$. Atsitiktinis dydis

$$\mathbf{E}(X|\,Y) := \sum_y \mathbf{E}(X|\,Y = y)\mathbf{1}(\{\omega :\ Y = y\})$$

vadinams dydžio X sąlyginiu vidurkiu atžvilgiu Y. Čia $\mathbf{1}(A)$ - atsitiktinio įvykio A indikatorius. Skaičiuodami vidurkius gauname labai svarbų teiginį.

Lema 2 *Jei vidurkis $\mathbf{E}(X)$ egzistuoja, tai su bet kokiu diskrečiuoju a.d. Y*

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(X|\,Y)) = \sum_y \mathbf{E}(X|\,Y = n)P(Y = y). \tag{1.1}$$

Įrodymas. Pasinaudoję 1 lema, galime užrašyti

$$\mathbf{E}(X) \;=\; \sum_x xP(X = x)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_x x\Big(\sum_y P(X=x|Y=y)P(Y=y)\Big) \\
&= \sum_y \Big(\sum_x xP(X=x|Y=y)\Big)P(Y=y) \\
&= \sum_y \mathbf{E}(X|\,Y=y)P(Y=y) \\
&= \mathbf{E}\Big(\sum_y \mathbf{E}(X|\,Y=y)\mathbf{1}(\{\omega:\ Y=y\})\Big) \\
&= \mathbf{E}(\mathbf{E}(X|\,Y)).
\end{aligned}
$$

Lema įrodyta. ◇

3 *UŽDUOTIS. Kalinio vienutėje yra trejos durys, pro kurias jis gali išeiti. Pirmosios veda į laisvę, antrosios - į uždarą tunelį, kurį perėjęs po vienos dienos jis sugrįžtų į tą pačią kamerą. Trečiosios durys taip pat veda į tunelį, kurį perėjęs kalinys sugrįžtų į kamerą, bet jau po trijų dienų. Rinkdamasis duris atsitiktinai, kalinys pabėga. Koks jo sugaištų dienų vidurkis*?

Sprendimas. Tegul X yra sugaištų dienų skaičius, o Y – a.d., žymintis durų pasirinkimą. Todėl

$$P(Y=1)=P(Y=2)=P(Y=3)=1/3.$$

Naudojamės (1.1) formule:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(X) &= \mathbf{E}(\mathbf{E}(X\,|Y)) = \frac{1}{3}\mathbf{E}(X\,|Y=1)+\frac{1}{3}\mathbf{E}(X\,|Y=2)+\frac{1}{3}\mathbf{E}(X\,|Y=3) \\
&= \frac{1}{3}\left(0+(1+\mathbf{E}(X))+(3+\mathbf{E}(X))\right).
\end{aligned}
$$

Iš čia išplaukia atsakymas: **4**.

Kontroliniam darbui. *Raskite keletą a.d. X momentų.*

Panašiai ir tolydžiųjų atsitiktinių dydžių atveju. ,,Apšilimui" išveskite formulę

$$P(X<Y)=\int_{\mathbf{R}} F_X(y)f_Y(y)dy.$$

Čia $F_X(y)$ ir $f_Y(y)$ yra a.d. X pasiskirstymo, o $f_Y(y)$ - a.d. Y tankio funkcijos.

Išveskime (1.1) lygybę absoliučiai tolydžiųjų a.d. X ir Y, turinčių tankio funkcijas $f_X(x)$ bei $f_Y(y)$. Tegul $f_{X,Y}(x,y)$ yra a.vektoriaus (X,Y) tankio funkcija. Dabar sąlyginė X tankio funkcija, esant sąlygai $Y = y$, suprantama kaip x funkcija

$$f_{X|Y}(x|y) := f_{X,Y}(x,y)/f_Y(y).$$

Paprastas pagrindimas yra toks. Turime

$$f_X(x)dx \approx P(X \in (x, x+dx)), \quad dx \to 0,$$

ir

$$\begin{aligned} f_{X|Y}(x|y) &= \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \approx \frac{P(X \in (x,x+dx),\, Y \in (y+dy))/dxdy}{P(Y \in (y,y+dy))/dy} \\ &\approx P(X \in (x,x+dx)\,|Y \in (y,y+dy))/dx \\ &=: P(X \in (x,x+dx)\,|Y = y)/dx. \end{aligned}$$

Todėl

$$\mathbf{E}(X\,|Y=y) = \int_{\mathbf{R}} x f_{X|Y}(x|y)dx = \int_{\mathbf{R}} x \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}\,dx.$$

Dabar galime išvesti (1.1) formulę:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{E}(X|Y)) &= \int_{\mathbf{R}} \mathbf{E}(X\,|Y=y)\,dF_Y(y) = \int_{\mathbf{R}} \mathbf{E}(X\,|Y=y)\,f_Y(y)dy \\ &= \int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} x\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}\,dx\;f_Y(y)\,dy \\ &= \int_{\mathbf{R}} x \int_{\mathbf{R}} f_{X,Y}(x,y)\,dydx = \int_{\mathbf{R}} x f_X(x)\,dx = \mathbf{E}(X). \end{aligned}$$

Įsitikinkite, kad integralų sukeitimą vietomis užtikrina sąlyga $\mathbf{E}(|X|) < \infty$!

Pagrįskite lygybes:

$$P(A) = \mathbf{E}(P(A|Y)),$$

$$\mathbf{E}(h(Y)\mathbf{E}(X|Y)) = \mathbf{E}(h(Y)X).$$

Žinoma, kai pastarasis vidurkis egzistuoja.

Kontroliniam darbui. 1. *Tarkime X, Y – nepriklausomi a.d., įgyjantys neneigiamas reikšmes ir turintys tą pačią tankio funkciją $f(x)$. Raskite* $\mathbf{E}(X|\ X+Y=a)$.

2. Tarkime, kad a.vektoriaus (X,Y) tankio funkcija yra

$$f(x,y) = 4y(x-y)\mathrm{e}^{-(x+y)},$$

kai $0 \le y \le x$ ir $0 < x < \infty$ bei $f(x,y) = 0$ kitoje (x,y) plokštumos dalyje. Raskite $\mathbf{E}(X|Y=y)$.

Panagrinėkime dar vieną populiarų pavyzdį, kuriuose naudojama (1.1) formulė.

4 *UŽDUOTIS.* **Kinų restorano problema.** *n džentelmenų būrelis atvyksta pietauti į kinų restoraną. Rūbinėje visi atiduoda savo skrybėles, kurios po pietų grąžinamos atsitiktinai. Nenaudodami atsitiktinių keitinių, raskite klientų, atgavusių savo skrybėles, skaičiaus X vidurkį, dispersiją ir skirstinį.*

Tegul klientai, neatgavę savo skrybėlių, vėl jas grąžina rūbininkui, kuris kartoja skrybėlių grąžinimo procedūrą. Kiek vidutiniškai reiks ją kartoti, kad visi klientai atgautų savos skrybėles?

Antrosios dalies sprendimas. Tegul R_n yra kartojamų procedūrų skaičius, o X – pirmame rate atgavusių savo skrybėles klientų skaičius. Rasime $\mathbf{E}R_n$. Kadangi $R_0 = 0$ ir $R_1 = 1$, tai

$$\begin{aligned}\mathbf{E}R_2 &= \mathbf{E}(\mathbf{E}(R_2\,|X))\\ &= (1+\mathbf{E}R_2)P(X=0) + (1+\mathbf{E}R_1)P(X=1) + 1\cdot P(X=2).\end{aligned}$$

Todėl

$$\mathbf{E}R_2 = (1+\mathbf{E}R_2)(1/2) + (1+1)\cdot 0 + 1/2,$$

$$\mathbf{E}R_2 = 2.$$

Tarę, kad $\mathbf{E}R_i = i$, kai $1 \le i < n-1$, tęsiame:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}R_n &= \sum_{i=0}^{n} \mathbf{E}(R_n|\ X=i)P(X=i)\\ &= \sum_{i=0}^{n} (1+\mathbf{E}R_{n-i})P(X=i)\\ &= 1 + \mathbf{E}R_n P(X=0) + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(R_n|\ X=i)P(X=i)\\ &= 1 + \mathbf{E}R_n P(X=0) + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(R_{n-i})P(X=i)\\ &= 1 + \mathbf{E}R_n P(X=0) + \sum_{i=1}^{n} (n-i)P(X=i)\\ &= 1 + \mathbf{E}R_n P(X=0) + n(1-P(X=0)) - \mathbf{E}X.\end{aligned}$$

Kadangi $\mathbf{E}X = 1$ (Įrodykite!), tai

$$\mathbf{E}R_n = \mathbf{E}R_n P(X=0) + n(1 - P(X=0)).$$

Iš čia išplaukia $\mathbf{E}R_n = n$.

Įrodyta. ◇

Namų darbas. 1. Atlikite pirmąją kinų restorano problemos užduotį.

2. Išnagrinėkite tokį rinkimų problemos variantą:

Žinoma, kad rinkimuose pretendentas J gauna n balsų, o už pretendentą K balsuoja m ir $n \geq m$. Tarę, kad bet kuri atėjusių balsuoti rinkėjų tvarka yra vienodai galima, raskite įvykio

$$\{rinkimu\, eigoje\ J\ visada\, turi\, ne\, maziau\, nei\, K\, balsu\}$$

tikimybę.

1.2 Greitasis rūšiavimo algoritmas

Turime n skirtingų realiųjų skaičių $a_1, \ldots, a_n$. Reikia surūšiuoti juos didėjančia tvarka sugaištant kuo mažiau laiko. *Greitasis rūšiavimo algoritmas* siūlo imti vieną skaičių atsitiktinai, tarkime a_i, ir palyginus jį su likusiais, sudaryti mažesnių už jį ir didesnių už jį skaičių poaibius. Po to pakartoti šį žingsnį su mažesniais poaibiais. Algoritmo vykdymo trukmę nusako skaičių palyginimų kiekis.

Geriausias atvejis būtų, jei kiekvieną kartą mums pavyktų pradėti nuo medianos, t.y. nuo vidurinio pagal didumą skaičiaus. Tada palyginimo operacijų kiekis apytikriai būtų lygus

$$\sim n + \frac{n}{2} \times 2 + \frac{n}{4} \times 4 + \cdots$$

Čia apytikriai turėtume $\log_2 n$ narių, todėl iš viso operacijų būtų apytikriai $n \log_2 n$.

Raskime palyginimų skaičiaus X_n vidurkį greitojo rūšiavimo algoritme. Lyginant didumus, traukiamojo skaičiaus vieta yra atsitiktinė, pvz., tai galėjo būti j-asis pagal didumą skaičius. Tegul ją nusako a.d. Y. Todėl

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X_n) &= \mathbf{E}(\mathbf{E}(X_n\,|Y)) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}(X_n\,|Y=j)P(Y=j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}(n-1+X_{j-1}+X_{n-j})\frac{1}{n} = n-1+\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\mathbf{E}(X_k). \end{aligned}$$

Iš čia išplaukia rekurentinė formulė sekai $M_n := \mathbf{E}(X_n)$ su pirmuoju nariu $M_1 = 0$. Gauname

$$nM_n = n(n-1) + 2\sum_{k=1}^{n-1} M_k.$$

Dėl $n-1$ iš čia turime:

$$(n-1)M_{n-1} = (n-1)(n-2) + 2\sum_{k=1}^{n-2} M_k.$$

Atėmę šias lygybes panariui, gauname

$$nM_n - (n-1)M_{n-1} = 2(n-1) + 2M_{n-1},$$

$$nM_n = (n+1)M_{n-1} + 2(n-1).$$

Perrašę patogesnėje formoje iteruodami išvedame:

$$\begin{aligned}
\frac{M_n}{n+1} &= \frac{M_{n-1}}{n} + \frac{2(n-1)}{n(n+1)} = \frac{M_{n-2}}{n-1} + \frac{2(n-1)}{n(n+1)} + \frac{2(n-2)}{(n-1)n} = \dots \\
&= 2\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k(k+1)} = 2\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{k+1} - \frac{1}{k}\right) \\
&\sim 2(2\log n - \log n) = 2\log n,
\end{aligned}$$

jei $n \to \infty$.

Vadinasi, $\mathbf{E}(X_n) \sim 2n\log n$. Rezultatas kiek blogesnis už anksčiau pastebėtą geriausiai įmanomą.

Panašiai sprendžiama ir žemiau pateikiama namų darbų užduotis.

UŽDUOTIS. Nepriklausomi bandymai, kuriuose įvykis A pasirodo su tikimybe $0 < p < 1$, yra tol atliekami, kol A pasirodo lygiai k kartų iš eilės. Koks yra vidutinis tokių bandymų skaičius?

1.3 Sąrašo modelis

Dirbdamas prie rašomojo stalo, po ranka visada turiu reikiamos tematikos knygų krūvelę. Pasinaudojęs kažkuria iš jų, padedu krūvelės viršuje. Procesas kartojasi. Patogiausia būtų, jei reikalingiausia knyga visada būtų viršuje. Deja, taip nėra... Mano darbui paspartinti reiktų žinoti bent jau reikalingos knygos vidutinę vietą, ją skaičiuojant nuo viršaus. Panašiai elgiasi ir kompiuteris su duomenimis, ką tik panaudotus palieka sąrašo priekyje.

Taigi, turime n elementų seką $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Laiko momentais $1, 2, \ldots$ nepriklausomai nuo praeities ir nuo kitų elementų su tikimybe P_i yra iškviečiamas e_i, po to jis yra perkeliamas į sekos pradžią.

UŽDUOTIS. Rasti kviečiamojo elemento pozicijos sekoje vidurkį.

Sprendimas. Tegul X yra kviečiamojo elemento pozicija sekoje, o a.d. Y išreiškia, kuris iš turimų elementų yra kviečiamas. Formaliai jį galime apibrėžti žinomomis tikimybėmis

$$P(\{kvieciamas\ e_i\}) = P(Y = i) = P_i, \quad 1 \le i \le n.$$

Pagal (1.1) formulę

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(X\,|Y = i)P_i.$$

Jei e_i yra iškviestasis elementas, tai X padėtis sutampa su e_i padėtimi sekoje. Vadinasi, sąlyginis vidurkis po sumos ženklu lygus e_i pozicijos, tarkime, a.d. Z_i vidurkiui ir todėl

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(Z_i)P_i.$$

Įveskime įvykių indikatorius

$$I_j = \begin{cases} 1, & \text{jei} \quad e_j\,\text{sekoje yra pirmiau uz}\, e_i \\ 0 & \text{priesingu atveju.} \end{cases}$$

Tada

$$\mathbf{E}(Z_i) = 1 + \sum_{j \ne i} \mathbf{E}(I_j) = 1 + \sum_{j \ne i} P(\{e_j\,\text{sekoje yra pirmiau uz}\, e_i\}).$$

Elementų tarpusavio padėtys kinta po jų iškvietimo, iškviestasis e_j atsiras prieš e_i, nežiūrint į tai, kuris buvo prieš tai kviestas, e_i arba e_j. Todėl ir sąlyginkime pagal įvykį $\{$ iškviestas e_i arba e_j $\}$, kai $i \ne j$. Jo tikimybė yra $P_i + P_j$, o

$$\begin{aligned} P(\{e_j\,\text{yra pirmiau uz}\, e_i\}) &= P(\text{kviestas}\, e_j\,|\text{kviestas}\, e_i\,\text{arba}\, e_j) \\ &= P_j/(P_i + P_j). \end{aligned}$$

Vadinasi,

$$\mathbf{E}(Z_i) = 1 + \sum_{j \ne i} \frac{P_j}{P_i + P_j}.$$

Įstatę šį dydį į anksčiau gautą formulę randame **atsakymą:**

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} P_i \Big(1 + \sum_{j \neq i} \frac{P_j}{P_i + P_j}\Big) = 1 + \sum_{i=1}^{n} P_i \sum_{j \neq i} \frac{P_j}{P_i + P_j}.$$

1.4 Atsitiktinio skaičiaus dėmenų suma

Tarkime N yra a.d., įgyjantis reikšmes $0, 1, \ldots$, nepriklausomas nuo a.d X_i, $i \geq 1$ rinkinio, kurie taip pat yra nepriklausomi. Įvairiuose modeliuose yra sutinkamos sumos

$$S_n = \sum_{i=1}^{N} X_i.$$

Štai keli taikymo pavyzdžiai. Eilių teorijoje dydis N žymėtų per tam tikrą laiką atvykstančių klientų skaičių, o X_i - i-ojo kliento aptarnavimo laiką. Tada S_n išreikštų visą aptarnavimo laiką. Rizikos teorijoje N jau galėtų būti išmokų skaičius, X_i - i-osios išmokos didumas, o S_n - visa išmokėta suma. Populiacijų teorijoje - N žymėtų augalų skaičių tam tikrame plote, X_i - i-ojo augalo sėklų skaičių, o S_n būtų visų sėklų skaičius.

Raskime šios sumos skaitines charakteristikas, momentus. Trumpumo dėlei peržymėkime $S_n = Y$ ir $X := X_i$, tardami, kad pastarieji yra vienodai pasiskirstę.

1 teorema. *Tegu $X := X_i$ yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę a.d. bei nepriklausomi nuo N. Tarkime kad visi a.d. turi baigtinius vidurkius ir antruosius momentus. Tada*

$$\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(N)\,\mathbf{E}(X),$$

$$\mathbf{V}ar(Y) = \mathbf{E}(N)\,\mathbf{V}ar(X) + \mathbf{V}ar(N)\mathbf{E}(X^2).$$

Įrodymas. Nagrinėkime momentų generuojančią funkciją ir atlikime formalius skaičiavimus:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(e^{tY}) &= \mathbf{E}(\mathbf{E}(e^{tY}\,|N)) = \sum_{n \geq 0} \mathbf{E}(e^{tY}\,|N = n)P(N = n) \\ &= \sum_{n \geq 0} \Big(\mathbf{E}(e^{tX})\Big)^n P(N = n). \end{aligned}$$

Čia pasinaudojome dėmenų nepriklausomumu ir Furjė transformacijų savybe. Vadinasi,

$$\mathbf{E}(e^{tY}) = \mathbf{E}\Big((\mathbf{E}(e^{tX}))^N\Big)$$

Diferencijuodami gauname

$$\frac{d}{dt}\,\mathbf{E}(e^{tY}) = \mathbf{E}(Ye^{tY}) = \mathbf{E}\Big(N\mathbf{E}(e^{tX})^{N-1}\mathbf{E}(Xe^{tX})\Big).$$

ir

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}\,\mathbf{E}(e^{tY}) &= \mathbf{E}(Y^2e^{tY}) \\ &= \mathbf{E}\Big(N(N-1)\mathbf{E}(e^{tX})^{N-2}(\mathbf{E}(Xe^{tX}))^2\Big) \\ &\quad +\mathbf{E}\Big(N\mathbf{E}(e^{tX})^{N-1}\mathbf{E}(X^2e^{tX})\Big).\end{aligned}$$

Kai patenkintos teoremos sąlygos ir $t = 0$, iš čia gauname momentų formules:

$$\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(N)\,\mathbf{E}(X)$$

ir

$$\mathbf{E}(Y^2) = \mathbf{E}(N(N-1))(\mathbf{E}(X))^2 + \mathbf{E}(N)\mathbf{E}(X^2).$$

Vadinasi,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}ar(Y) &= \mathbf{E}(Y^2) - (\mathbf{E}(Y))^2 \\ &= \Big(\mathbf{E}(N^2) - \mathbf{E}(N) - (\mathbf{E}(N))^2\Big)(\mathbf{E}(X))^2 + \mathbf{E}(N)\mathbf{E}(X^2) \\ &= \mathbf{E}(N)\,\mathbf{V}ar(X) + \mathbf{V}ar(N)\mathbf{E}(X^2).\end{aligned}$$

Teorema įrodyta.

Ateityje N dažnai bus Puasono a.d. arba net Puasosno procesas $N = N(t)$, $t \geq 0$.

1.5 Užmaršūs a.d.

Apibrėžimas. Neneigiamas a.d. X vadinamas *neturinčiu atminties* arba *užmaršiu*, jeigu su visais $t \geq 0$ ir $s \geq 0$ yra teisinga lygybė

$$P(X > s + t\,|X > t) = P(X > s).$$

Eksponentinio a.d. skirstinio funkcija lygi 0, kai $x < 0$ ir

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

su $\lambda > 0$, jei $x \geq 0$.

1 teorema. *Užmaršus a.d. be atminties turi eksponentinį skirstinį.*

Įrodymas. Tarkime $F(x) = P(X < x)$ yra a.d. skirstinio funkcija, o $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$. Tada

$$P(X > s + t \,|X > t) = \frac{P(X > s + t, X > t)}{P(X > t)} = P(X > s).$$

Vadinasi,

$$\frac{\bar{F}(s + t)}{\bar{F}(t)} = \bar{F}(s).$$

Beveik visur tolydi funkcija, tenkinanti Koši lygtį yra eksponentinė. Todėl $\bar{F}(x) = e^{-\lambda x}$. Parametro λ ženklas bus teigiamas, nes $\bar{F}(x)$ yra mažėjanti funkcija.

Apibrėžimas. Neneigiamas a.d. X vadinamas *stipriai užmaršiu*, jeigu su visais $s \geq 0$ ir nepriklausomais a.d.s $Y \geq 0$ yra teisinga lygybė

$$P(X > s + Y \,|X > Y) = P(X > s).$$

2 teorema. *Eksponentinis a.d. yra stipriai užmaršus.*

Įrodymas. Įvykio tikimybė yra jo indikatoriaus vidurkis, todėl galime taikyti (1.1) formulę. Diskretaus a.d. Y atveju turime

$$\begin{aligned} P(X > s + Y) &= \mathbf{E}(P(X > s + Y \,|Y)) = \sum_y P(X > s + Y \,|Y = y)P(Y = y) \\ &= \sum_y P(X > s + y \,|Y = y)P(Y = y) \\ &= \sum_y P(X > s + y)P(Y = y) \\ &= \sum_y e^{-\lambda(s+y)} P(Y = y) = \mathbf{E}(e^{-\lambda(s+Y)}). \end{aligned}$$

Kai $s = 0$, iš čia gauname

$$P(X > Y) = \mathbf{E}(e^{-\lambda Y}).$$

Todėl

$$\frac{P(X > s + Y)}{P(X > Y)} = e^{-\lambda s} = P(X > s).$$

Tą ir reikėjo įrodyti. Panašiai patikrintume ir tolydžiųjų a.d. Y atveju.

UŽDUOTIS. *Įėjęs į banką pastebiu, kad yra du tarnautojai aptarnaujantys klientus nepriklausomai vienas nuo kito. Abiejų klientų aptarnavimo laikas yra eksponentinis a.d. su parametru λ. Kokia tikimybė, kad sutvarkęs savo reikalą aš išeisiu po abiejų klientų?*

Sprendimas. Tegu X yra mano laukimo laikas, o Y, Z - klientų aptarnavimo laikas nuo mano įėjimo. Tarkime, kad $Y < Z$. Jei η eksponentinis a. dydis - pirmojo kliento aptarnavimo laikas. Man atėjus jau aptarnavimas vyko, sakysim, atsitiktinį laiko tarpą S (iš čia nelygybė $\eta > S$) ir dar truks t, todėl $\eta > S + t$. Kadangi mano atėjimas nepriklauso nuo pirmojo kliento aptarnavimo, tai S ir η yra nepriklausomi. Vadinasi,

$$P(Y > t) = P(\eta > t + S |\, \eta > S) = P(\eta > t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Čia pirmoji lygybė apibrėžia Y skirstinį, o antroji - eksponentinio a.d. stipriojo užmaršumo savybė. Vadinasi, ir a.d. Y pasiskirstęs pagal eksponentinį dėsnį su tuo pačiu parametru kaip ir η. Panašiai, randamas ir Z skirstinys. Jis irgi toks pat kaip a.d. η.

Dar kartą pakartokime tokius argumentus. Nagrinėkime laiko momentą, kai pirmojo kliento aptarnavimo laikas pasibaigė ir pradėjo aptarnauti mane. Jei U yra laiko tarpas tarp šio momento iki antrojo kliento aptarnavimo pabaigos, tai

$$P(U > u) = P(Z > Y + u|Z > Y) = P(Z > u) = \mathrm{e}^{-\lambda u}.$$

Vadinasi, nuo to momento, kai pradėjo aptarnauti mane, antrojo kliento aptarnavimo laiko likutis irgi turi tą patį skirstinį, kaip ir mano aptarnavimo laikas. Kadangi visada vienodai pasiskirsčiusiems ir nepriklausomiems dydžiams η_1 ir η_2 dėl simetrijos yra teisinga lygybė

$$P(\eta_1 < \eta_2) = 1/2$$

tai toks ir yra uždavinio atsakymas. $\diamond$

UŽDUOTIS. *Tęskime ankstesnės užduoties nagrinėjimą. Dabar reikia rasti mano laukimo laiko vidurkį, jei klerkai dirba skirtingais aptarnavimo greičiais λ_1 ir λ_2.*

Sprendimas. Pagal pilnos tikimybės formulę

$$P(X \in \mathrm{d}x) = P(X \in \mathrm{d}x|\, Y < Z)P(Y < Z) + P(X \in \mathrm{d}x|\, Y \geq Z)P(Y \geq Z),$$

todėl

$$\mathbf{E}X = \mathbf{E}(X|\,Y < Z)P(Y < Z) + \mathbf{E}(X|\,Y \geq Z)P(Y \geq Z)$$

Jei η_j yra eksponentiniai a.d. su vidurkiais λ_i, $i = 1, 2$, tai

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}X &= \mathbf{E}(X|\,Y < Z)\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} + \mathbf{E}(X|\,Y \geq Z)\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} \\
&= \mathbf{E}(Y+\eta_1|\,Y < Z)\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} + \mathbf{E}(Z+\eta_2|\,Y \geq Z)\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} \\
&= (\mathbf{E}(Y|\,Y < Z) + \mathbf{E}\eta_1)\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} + (\mathbf{E}(Z|\,Y \geq Z) + \mathbf{E}\eta_2)\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} \\
&= (\mathbf{E}(\min\{Y,Z\}) + 1/\lambda_1)\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} + (\mathbf{E}(\min\{Y,Z\}) + 1/\lambda_2)\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} \\
&= \Big(\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2} + 1/\lambda_1\Big)\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} + \Big(\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2} + 1/\lambda_2\Big)\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} \\
&= \frac{3}{\lambda_1+\lambda_2}.
\end{aligned}$$

UŽDUOTIS. Ką tik atėjusius klientus pradėjo aptarnauti n darbuotojų ir visų jų aptarnavimo laikas yra eksponentinis ir yra nepriklausomas vienas nuo kito. Rasti laiko tarpo tarp k-o ir $(k+1)$ klientų aptarnavimų pabaigų skirstinio tankį.

1.6 Puasono procesas

Pradėkime nuo tradicinio Puasono proceso apibrėžimo.

Apibrėžimas. Atsitiktinis procesas (a.p.) $\Pi(t)$, $t \geq 0$, vadinamas *Puasono*, jeigu

- $\Pi(0) = 0$;
- $\Pi(t) \in \mathbf{Z}^+$;
- $\Pi(t)$ turi stacionarius ir nepriklausomus prieaugius;
- $P(\Pi(t) \geq 2) = o(t)$, jei $t \to 0$;
- $P(\Pi(t) = 1) = \lambda t + o(t)$, jei $t \to 0$.

Žinoma, pirmieji reikalavimai su vienetine tikimybe. Iš čia išplaukia lygybė

$$P(\Pi(t) = k) = e^{-\lambda t}\,\frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k \in \mathbf{Z}^+.$$

Apibrėžimas. A.p. $N(t)$, $t \geq 0$, vadinamas *skaičiuojančiuoju*, jeigu jis išreiškia įvykių pasirodymo laiko intervale $(0, t]$ skaičių.

Taigi,

- $N(t) \in \mathbf{Z}^+$;
- Jei $s < t$, tai $N(s) \leq N(t)$

Susitarkime, kad proceso trajektorijos $N(t)$ yra tolydžios iš dešinės su vienetine tikimybe.

Naudosimės tokia ribine teorema.

Lema. *Tarkime, kad X_{ni}, $1 \leq i \leq k_n$, yra nepriklausomi a.d., įgyjantys sveikas neneigiamas reikšmes ir tokie, kad tikimybės $p_{ni} := P(X_{ni} = 1)$ ir $\varepsilon_{ni} := P(X_{ni} \geq 2)$ tenkina sąlygas:*

(i) $\max_{i \leq k_n} p_{ni} = o(1)$;

(ii) $\sum_{i \leq k_n} p_{ni} \to \lambda \in [0, \infty]$;

(iii) $\sum_{i \leq k_n} \varepsilon_{ni} = o(1)$,

jei $n \to \infty$. Tada sumos

$$\sum_{i \leq k_n} X_{ni}$$

skirstinys silpnai konverguoja į Puasono skirstinį su parametru λ.

Įrodymas bus pateiktas ribinių teoremų kurse.

Kai $\lambda = 0$, skirstinys išsigimęs nulio taške, o atveju $\lambda = \infty$ ribinis a.d. išsigimęs begalybėje, t.y. jo skirstinio funkcija yra tapačiai lygi nuliui.

Dabar galime skaičiuojančiųjų procesų klasėje išskirti Puasono procesą.

1 teorema. *Jei skaičiuojantis procesas $N(t)$ turi nepriklausomus stacionarius prieaugius, jo šuoliai neviršija vieneto, $N(0) = 0$ ir $N(t) \not\equiv 0$, tai egzistuoja toks $\lambda \in (0, \infty)$, kad $N(t)$ yra Puasono procesas su parametru λ.*

Įrodymas. Tegul $n \geq 1$ ir $t > 0$. Apibrėžkime a.d.

$$X_{ni} = N\Big(\frac{it}{2^n}\Big) - N\Big(\frac{(i-1)t}{2^n}\Big), \quad 1 \leq i \leq 2^n.$$

Įrodysime, kad jie tenkina lemos sąlygas. Išlaikydami jos žymenis, patikriname įvertį

$$\varepsilon_n \equiv \varepsilon_{ni} = P(X_{ni} \geq 2) = o(2^{-n}), \quad 1 \leq i \leq 2^n, \tag{1.2}$$

jei $n \to \infty$. Tarę priešingai, turime kažkokį posekį $n_k \to \infty$ ir $\delta \in (0, \infty]$ su savybe

$$2^{n_k} \varepsilon_{n_k} \to \delta,$$

jei $k \to \infty$. Įveskime binominius a.d.

$$\eta_{ni} = \mathbf{1}\{X_{ni} \geq 2\}, \quad 1 \leq i \leq 2^{n_k}.$$

Tai nepriklausomi vienodai pasiskirstę a.d., be to,

$$P(\eta_{ni} = 1) = \varepsilon_{ni} = \varepsilon_n.$$

Skaičiuojame tikimybę

$$\begin{aligned} P(\exists i \leq 2^{n_k} : X_{ni} \geq 2) &= P\Big(\sum_{i \leq 2^{n_k}} \eta_{ni} \geq 1\Big) = 1 - P\Big(\sum_{i \leq 2^{n_k}} \eta_{ni} = 0\Big) \\ &= 1 - \prod_{i \leq 2^{n_k}} P(\eta_{ni} = 0) = 1 - (1 - \varepsilon_n)^{2^{n_k}} \to 1, \end{aligned}$$

jei $\delta = \infty$. Jei $\delta < \infty$, logaritmuodami gauname

$$\begin{aligned} P(\exists i \leq 2^{n_k} : X_{ni} \geq 2) &= 1 - \exp\{2^{n_k} \log(1 - \varepsilon_{n_k})\} \sim 1 - \exp\{-2^{n_k}\varepsilon_{n_k}\} \\ &\sim 1 - e^{-\delta} > 0, \quad k \to \infty. \end{aligned}$$

Kadangi

$$N(t) = (N(t) - N(t - t2^{-n})) + \cdots + (N(t2^{-n}) - N(0)) = \sum_{i \leq 2^n} X_{ni},$$

paskutinieji įverčiai rodo, kad $N(t)$ turi nemažesnius už du šuolius su teigiama tikimybe. Prieštara teoremos sąlygai rodo (1.2) lygybės teisingumą. Iš jos išplaukia lemos reikalavimas (iii).

Tikimybės $p_n := p_{ni}(t) = P(X_{ni} = 1)$ yra vienodos visiems $1 \leq i \leq 2^n$. Kai $i = 1$, gauname

$$p_n \leq P(N(t/2^n) \geq 1).$$

Vadinasi, naudodamiesi susitarimu, kad trajejktorijos yra tolydžios iš dešinės, gauname

$$\limsup_{n\to\infty} p_n \leq P(N(+0) \geq 1) = P(N(0) \geq 1) = 0.$$

Tai yra lemos sąlyga (i).

Išrinkime tokį neaprėžtai didėjantį indeksų posekį n_k, kad egzistuotų riba

$$\lim_{k\to\infty} 2^{n_k} p_{n_k} =: g(t).$$

Pagal lemą

$$N(t) = \sum_{i \leq 2^{n_k}} X_{ni} \Rightarrow \Pi_{g(t)}$$

skirstinių konvergavimo prasme. Čia $\Pi_{g(t)}$ yra Puasono a.d. su parametru $g(t)$. Kitais žodžiais tariant, $N(t) = \Pi_{g(t)}$. Kadangi

$$\mathbf{E}(N(t)) = \mathbf{E}(\Pi_{g(t)}) = g(t),$$

iš lygybės $N(s+t) = N(s) + N(t)$ išplaukia Koši funkcinė lygtis $g(t+s) = g(t)+g(s)$. Monotoniškai didėjanti funkcija, tenkinanti šią lygtį, turi pavidalą $g(t) = \lambda t$, čia $\lambda > 0$ ir $t \geq 0$.

Teorema įrodyta.

Mus dažnai domina ne a.d. sumos elgesys, bet dėmenų skaičius, kada suma pasiekia tam tikrą sritį. Šį požiūrį nelengva psichologiškai įsisamoninti, todėl panagrinėsime paprastą uždavinį.

Lietuviškas nesėkmės paradoksas. *Tarkime, kad man ir draugams finansinės nesėkmės yra vienodai pasiskirstę tolydiniai a.d.* $X_1, \ldots, X_n, \ldots$. *Sulaukęs nesėkmės, aš noriu žinoti, kiek reiks laukti, kad mano draugas patirs dar didesnių nuostolių. Koks to laukimo laiko vidurkis?*

Tegul mano numeris yra 1. Nagrinėkime seką $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Pažymėkime $N = \min\{k : X_k > X_1\}$. Pastebėkime, kad $N > n$, $n \geq 2$, tada ir tik tada, jei maksimalus šios sekos narys yra pirmasis. Bet šis įvykis yra simetrinis, t.y. maksimalus galėjo būti bet kuris jos narys. Todėl

$$P(N > n) = 1/n.$$

Iš čia

$$P(N = n) = P(N > n-1) - P(N > n) = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)}$$

Vadinasi,

$$\mathbf{E}(N) = \sum_{n=2}^{\infty} n \frac{1}{n(n-1)} = \infty.$$

Man iš tiesų nesiseka, nes vidutiniškai teks laukti begalo daug, kol kam nors nesiseks dar labiau!

Grįžkime prie Puasono proceso. Pastebėsime, kad skaičiuojantysis procesas, tenkinantis 1 teoremos sąlygas, egzistuoja. Sekančiame teiginyje skaičiuosime a.d. sumas, neviršijančias tam tikros ribos.

2 teorema. *Jei X_k, $k \geq 1$, yra nepriklausomi a.d. pasiskirstę pagal tą patį eksponentinį su parametru $\lambda > 0$ dėsnį, tai procesas*

$$N(t) := \sup\Big\{n \geq 0 : \sum_{k \leq n} X_k \leq t\Big\}, \quad t > 0,$$

yra Puasono.

Įrodymas. Akivaizdu, kad $P(N(0) = 0) = P(X_1 > 0) = 1$. Pagal stipriųjį didžiųjų skaičių dėsnį

$$\frac{1}{n}\sum_{k \leq n} X_k \to \mathbf{E}(X_k) = 1/\lambda,$$

su vienetine tikimybe, jei $n \to \infty$. Vadinasi, beveik visada X_k suma yra monotoniškai didėjanti, todėl fiksavus $t \geq 0$, rasime tokį baigtinį numerį $N(t)$, nurodytą jo apibrėžime. Kitais žodžiais tariant, $N(t) < \infty$ su tikimybe vienetas. Šis procesas turi vienetinius šuoliukus, nes $P(X_k = 0) = 0$, ir trajektorijos yra tolydžios iš dešinės. Jo prieaugliai $N(t + s) - N(s)$ išreiškia naujų dėmenų X_k, prisidėjusių prie sumos, skaičių. Jis priklauso tik nuo laiko intervalo ilgio t, todėl jie yra stacionarūs. Iš šių dėmenų nepriklausomumo išplaukia ir paties proceso $N(t)$ prieauglių nepriklausomumas. Pagal 1 teoremą $N(t)$ yra Puasono procesas.

Įrodysime, kad jo greičio parametras $\lambda_1 = \lambda$. Turime $\mathbf{E}(N(t)) = \lambda_1 t$. Kadangi

$$N(t) \geq n \Leftrightarrow S_n := \sum_{k \leq n} X_k \leq t,$$

tai

$$F_{S_n}(t) = P(S_n \leq t) = P(N(t) \geq n).$$

A.d. S_n tankio funkcija yra gama skirstinio tankio funkcija

$$g_n(t) := f_{S_n}(t) = \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad t \geq 0.$$

Iš tiesų, kai $n = 1$, tai išplaukia iš apibrėžimo. Tarę kad ji teisinga dėl n, skaičiuojame $(n+1)$-o dėmens sumos tankio funkciją. Pagal sąsūkos formulę

$$g_{n+1}(t) = \int_0^t g_n(t-x)g_1(x)dx = \frac{\lambda^{n+1}t^{n-1}e^{-\lambda t}}{(n-1)!}\int_0^t x^n\,dx = \frac{\lambda^{n+1}t^n e^{-\lambda t}}{n!},$$

kaip ir buvo manyta. Toliau skaičiuojame vidurkį kitu būdu. Pasinaudojame Abelio sumavimu ir gauname

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(N(t)) &= \sum_{k\geq 1} kP(N(t)=k) = \sum_{k\geq 1} k(P(N(t)\geq k) - P(N(t)\geq k+1)) \\
&= \sum_{m\geq 1} P(N(t)\geq m) = \sum_{m\geq 1} P(S_m \leq t) \\
&= \sum_{m\geq 1} \int_0^t f_{S_m}(u)\, du = \int_0^t \sum_{m\geq 1} f_{S_m}(u)\, du \\
&= \int_0^t \lambda e^{-\lambda u} \sum_{m\geq 1} \frac{(\lambda u)^{m-1}}{(m-1)!}\, du = \int_0^t \lambda e^{-\lambda u}\cdot e^{\lambda u}\, du = \lambda t.
\end{aligned}$$

Vadinasi, iš tiesų $\lambda_1 = \lambda$.

Teorema įrodyta.

Tegul toliau $N(t)$ yra Puasono procesas su parametru $\lambda > 0$. Pažymėkime X_1 pirmojo $N(t)$ šuolio laiko momentą, X_2 - laiko tarpą tarp pirmojo ir antrojo šuolio, X_3 - sekantį laiko tarpą tarp šuolių ir X_n - laiko tarpą tarp $(n-1)$-o ir n-o šuolių. Galima įsivaizduoti, kad Puasono procesas skaičiuoja kažkokių įvykių pasirodymą, įvykiui įvykus jo reikšmė padidėja vienetu. Tokioje interpretacijoje suma

$$S_n = \sum_{k\leq n} X_k$$

reikštų n-o įvykio laiką, o X_k būtų tarpai tarp tų įvykių.

Sekantis teiginys tam tikra prasme yra atvirkštinis 2 teoremai.

3 teorema. *A.d. X_k, $k\geq 1$ yra nepriklausomi ir pasiskirstę pagal eksponentinį dėsnį su parametru λ.*

Įrodymas. Turime

$$P(X_1 > t) = P(N(t)=0) = e^{-\lambda t}.$$

Dabar

$$P(X_2 > t) = \mathbf{E}(P(X_2 > t\,|X_1)).$$

Tačiau dėka prieauglių nepriklausomumo

$$\begin{aligned}
P(X_2 > t\,|X_1 = s) &= P(N(t)\text{nedare suoliu intervale}\,(s, s+t]\,|X_1 = s) \\
&= P(N(t+s) - N(s) = 0) = e^{-\lambda t}.
\end{aligned}$$

Todėl X_1 ir X_2 yra nepriklausomi, be to,

$$P(X_2 > t) = e^{-\lambda t}.$$

Pakartoję samprotavimus su bet kokiu a.d. X_k rinkiniu, (galima būtų pritaikyti matematinę indukciją) baigtume griežtą 3 teoremos įrodymą.

UŽDUOTIS. Tarkime, kad $0 < s \le t$. *Rasti sąlyginę tikimybę*

$$P(X_1 < s \,|N(t) = 1)$$

ir skirstinio

$$P(S_1 < x, S_2 < y \,|N(t) = 2)$$

tankį.

Atsakymai: s/t **ir** $2/t^2$**, kai** $x < y < t$.

Nekantriesiems ir nesugebantiems pateikiame sprendimą !

Sprendimas. Pirmąją ieškomą tikimybę užrašome

$$\frac{P(X_1 < s,\, N(t) = 1)}{P(N(t) = 1)}.$$

Analizuojame vykį, esantį po tikimybe skaitiklyje. Jei $X_1 < s$, tai pirmasis Puasono proceso šuolis buvo iki laiko momento s, vadinasi, $N(s) = 1$. Antrasis įvykis po šia tikimybe rodo, kad laiko intervale $(s, t]$ šuolio nebuvo. Apgręždami šiuos samprotavimus, pastebime net įvykių ekvivalentumą. Gauname

$$\begin{aligned} P(X_1 < s \,|N(t) = 1) &= \frac{P(N(s) = 1,\, N(t) - N(s) = 0)}{P(N(t) = 1)} \\ &= \frac{\lambda s e^{-\lambda s} \cdot e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t}. \end{aligned}$$

Antrame pratime reikia imti mažus $\delta_1, \delta_2 > 0$ ir nagrinėti tikimybę

$$P := \frac{P(x < S_1 \le x + \delta_1, y < S_2 \le y + \delta_2\,, N(t) = 2)}{P(N(t) = 2)}\,.$$

Įvykį po tikimybe skaitiklyje vėl reikia išreikšti Puasono proceso šuoliais. Jei antrasis šuolis įvyko momento y aplinkoje, tai t turi būti didesnis už y. Tad, sumažinę δ_2 (panašiai ir dėl δ_1), galime imti $0 < x + \delta_1 \le y \le t - \delta_2$. Pažymėkime

$$J = (0, t] \setminus ((x, x + \delta_1] \cup (y, y + \delta_2]).$$

Pakeičiame nagrinėjamą įvykį ir išvedame

$$\begin{aligned} P &= \frac{P(N(x+\delta_1)-N(x)=1, N(y+\delta_2)-N(y)=1\,, N(t)=2)}{P(N(t)=2)} \\ &= \frac{P\Big(N(x+\delta_1)-N(x)=1, N(y+\delta_2)-N(y)=1,\ int.\ J\ suoliu\ nera\Big)}{P(N(t)=2)} \\ &= \Big(\lambda\delta_1 e^{-\delta_1\lambda}\,\lambda\delta_2 e^{-\delta_2\lambda}\ e^{-\lambda(t-\delta_1-\delta_2)}\Big)/\Big((\lambda t)^2 e^{-\lambda t}/2\Big) = 2\delta_1\delta_2 t^{-2}. \end{aligned}$$

Jei $\delta_1, \delta_2 \to 0$, gauname,

$$\frac{d^2 P(S_1 < x, S_2 < y\,|N(t)=2)}{dx\,dy} = 2/t^2.$$

Apibendrinę šią lygybę, gauname svarbią Puasono proceso savybę.

4 teorema. *Sąlyginis skirstinys*

$$P(S_i < x_i,\ i \le n\,|N(t)=n)$$

sutampa su n *nepriklausomų tolygiai pasiskirsčiusių intervale* $[0,t]$ *a.d.* $U_1, \dots,$ U_n *sutvarkytosios statistikos* $U_{(1)} < \cdots < U_{(n)}$ *skirstiniu.*

Savarankiškai pakartokite viršuje užrašytus samprotavimus bendru atveju! Primename, kad minimos statistikos tankio funkcija yra

$$f(x_1,\dots,x_n) = n!/t^n,$$

kai $0 \le x_1 < x_2 < \cdots < x_n \le t$ ir $f(x_1,\dots,x_n)=0$ priešingu atveju. Iš tiesų, antrasis atvejis akivaizdus. Kadangi iš visų vektorių $\overline{X} := (U_1,\dots,U_n)$ bet kaip perstačius tolygiai apsiskirsčiusius a.d. U_j gaunama ta pati sutvarkytoji statistika, tai atsiranda daugiklis $n!$. Be to, reikia pastebėti, kad a. vektoriaus $\overline{X}$ tankio funkcija yra lygi t^{-n}, jei $0 \le x_i \le t$, $1 \le i \le n$, ir lygi nuliui likusioje $\mathbf{R}^n$ dalyje.

Užduotis. Keleiviai atvyksta į traukinių stotį pagal Puasono procesą, kurio greitis yra $\lambda > 0$. *Koks yra visų sulaukusiųjų traukinio laiko momentu* $t > 0$ *bendro laukimo laiko vidurkis?*

Sprendimas. Jei $N(t)$ yra Puasono procesas, X_i - laiko tarpai tarp keleivių atvykimų, o $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, tai ieškomasis vidurkis yra

$$\mathbf{E}\Big(\sum_{i=1}^{N(t)}(t-S_i)\Big)$$

Sąlygindami pagal Puasono procesą, turime

$$\mathbf{E}\Big(\sum_{i=1}^{N(t)}(t-S_i)\Big|N(t)=n\Big)=nt-\mathbf{E}\Big(\sum_{i=1}^{n}S_i\Big|N(t)=n\Big).$$

Pagal 4 teoremą paskutinis vidurkis lygus

$$\mathbf{E}\Big(\sum_{i=1}^{n}U_{(i)}\Big)=\mathbf{E}\Big(\sum_{i=1}^{n}U_i\Big)=\frac{nt}{2}.$$

Čia U_i, $i=1,\ldots$, yra nepriklausomi tolygiai intervale $[0,t]$ pasiskirstę a.d, o $U_{(i)}$ - i-asis pagal dydį iš jų. Taigi,

$$\mathbf{E}\Big(\sum_{i=1}^{N(t)}(t-S_i)\Big|N(t)=n\Big)=nt-nt/2=nt/2.$$

Grįžę prie užduoties, gauname

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\Big(\sum_{i=1}^{N(t)}(t-S_i)\Big) &= \sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{E}\Big(\sum_{i=1}^{N(t)}(t-S_i)\Big|N(t)=n\Big)P(N(t)=n)\\ & \sum_{n=0}^{\infty}\frac{nt}{2}P(N(t)=n)=\frac{t}{2}\mathbf{E}N(t)=\frac{\lambda t^2}{2}.\end{aligned}$$

Visada įsidėmėkite: esant sąlygai $N(t)=n$, įvykių, kuriuos skaičiuoja Puasono procesas, pasirodymo momentai yra nesutvarkyti laiko skalėje ir yra nepriklausomi tolygiai intervale $[0,t]$ pasiskirstę a.d. Seka $S_1,\ldots S_n$ jau yra sutvarkytoji. Tuo pasinaudosime kituose skyreliuose.

1.7 Masinio aptarnavimo teorijos uždavinys

Nagrinėsime aptarnavimo sistemą, kurios standartinis žymuo yra $M/G/\infty$. Pirmoji raidė paprastai žymi laiko tarpų tarp klientų atvykimų skirstinį, o M - eksponentinį skirstinį su parametru $\lambda>0$. Antroji raidė - aptarnavimo laiko skirstinį. Skaičius už pasvirojo brūkšnio reiškia serverių skaičių. Taigi, mūsų sistemoje klientai atvyksta pagal Puasono procesą.

Palyginkite su kita vieno serverio sistema $G/M/1$. Joje klientų atvykimas vyksta pagal procesą, kuriame laiko tarpai tarp atvykimų turi skirstinį G, o aptarnavimo laikas yra eksponentinis a.d.

UŽDUOTIS Tarkime, kad klientai atvyksta į aptarnavimo stotį pagal Puasono procesą su greičiu $\lambda > 0$ ir yra iš karto aptarnaujami. Tegul jų aptarnavimo laikai yra vienodai pasiskirstę a.d., nepriklausomi tarpusavyje ir nepriklausomi nuo Puasono proceso bei turi pasiskirstymo funkciją $G(x)$. Rasti klientų, esančių aptarnavimo stotyje momentu t, skaičiaus skirstinį.

Sprendimas. Tegul $X(t)$ yra tiriamasis a.d. Įvesdami sąlygą, gauname

$$P(X(t)=j)=\sum_{n=0}^{\infty}P(X(t)=j\,|N(t)=n)e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!},\quad j=0,1,\ldots.$$

Sąlygine tikimybe aprašomi j klientų, o iš viso jų yra n. Taigi, galime pasinaudoti binominiu dėsniu. Gauname

$$P(X(t)=j\,|N(t)=n)=\begin{cases}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}, & j=0,1\ldots,n\\ 0, & j>n.\end{cases}$$

Čia p yra tikimybė, kad vienas klientas yra aptarnaujamas momentu t. Dabar ir $N(t)=1$. Raskime p. Prisimename, kad esant sąlygai $N(t)=1$, jo atvykimo laikas yra tolygusis a.d. U su pastovia tankio funkcija $f(x)=1/t$, kai $x\in[0,t]$. Todėl

$$\begin{aligned} p &= P(\textit{klientas yra aptarn. laiko momentu } t)\\ &= \mathbf{E}\Big(P(\textit{klientas yra aptarn. laiko momentu } t\,|U)\Big)\\ &= \int_0^t P(\textit{klientas yra aptarn. laiko momentu } t\,|U=x)\frac{dx}{t}.\end{aligned}$$

Pasinaudodami žinomu aptarnavimo laiko skirstiniu, skaičiuojame tikimybę po integralo ženklu. Klientas dar stotyje, vadinasi, jo aptarnavimo laikas buvo ne trumpesnis už $t-x$ ir tokio įvykio tikimybė lygi $1-G(t-x)$. Taigi,

$$p=\int_0^t(1-G(t-x))\frac{dx}{t}.$$

Įstatę šią formulę į auksčiau išvestą lygybę, gauname

$$\begin{aligned} P(X(t)=j) &= \sum_{n=j}^{\infty}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\\ &= e^{-\lambda t}\frac{(\lambda tp)^j}{j!}\sum_{n=j}^{\infty}\frac{(\lambda t(1-p))^{n-j}}{(n-j)!}=e^{-\lambda tp}\frac{(\lambda tp)^j}{j!}.\end{aligned}$$

Čia $j=0,1,\ldots$, o p yra anksčiau apskaičiuota tikimybė.

1.8 Impulsų amplitudės modelis

UŽDUOTIS Tarkime, kad elektros impulsai patenka į skaitiklį pagal Puasono procesą su greičiu $\lambda > 0$*, bet jų amplitudės determinuotai eksponentiškai mažėja, t.y.* A *didumo amplitudė po laiko* τ *bus lygi* $Ae^{-\alpha\tau}$*. Tarkime, kad pradinės amplitudės yra vienodai pasiskirstę a.d., nepriklausomi tarpusavyje ir nepriklausomi nuo Puasono proceso bei turi pasiskirstymo funkciją* $G(x)$*. Rasti visų impulsų amplitudžių momentu* t *sumos skirstinio charakteristinę funkciją ir vidurkį.*

Sprendi mas. Jei S_n yra n-o impulso, kurio amplitudė yra A_n, patekimo momentas, tai tiriama amplitudžių suma lygi

$$A(t) := A(t; S_1, \ldots, S_{N(t)}) = \sum_{n=1}^{N(t)} A_n e^{-\alpha(t-S_n)}.$$

Reikia rasti

$$\Phi(u) := \mathbf{E}(e^{iuA(t)}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}\Big(e^{iuA(t)}\,|N(t) = n\Big) P(N(t) = n).$$

Toliau naudojamės 4 teorema. Jei $U_1, U_2, \ldots, U_n$ yra nepriklausomi a.d., tolygiai pasiskirstę intervale [0,t], o $U_{i_1} \leq \ldots \leq U_{i_n}$ - sutvarkytoji statistika, tai pagal užpraeito skyrelio 4 teoremą

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\Big(e^{iuA(t)}\,|N(t) = n\Big) &= \mathbf{E}(\exp\{iuA(t; U_{i_1}, \ldots, U_{i_n})\}) \\ &= \mathbf{E}(\exp\{iuA(t; U_1, \ldots, U_n)\}). \end{aligned}$$

Paskutinė lygybė teisinga dėl to, kad iš lygybės

$$\sum_{j=1}^{n} U_{i_j} = \sum_{i=1}^{n} U_i$$

išplaukia

$$A(t; U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}) = A(t; U_1, \ldots, U_n)$$

ir vietoje integravimo srityje

$$0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n \leq 1/t$$

pagal matą

$$(n!/t^n)\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$$

galime imti integralą srityje

$$0 \leq x_1 \leq 1/t, \ldots, 0 \leq x_n \leq 1/t$$

pagal matą

$$(1/t^n)\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n.$$

Taigi

$$\mathbf{E}\Big(e^{iuA(t)} \,|N(t) = n\Big) = \mathbf{E}\bigg(\exp\Big\{iu \sum_{j=1}^{n} A_j e^{-\alpha(t-U_j)}\Big\}\bigg).$$

Pažymėkime $Z_j = A_j e^{-\alpha(t-U_j)}$. Šie a.d. yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę, vadinasi,

$$\mathbf{E}\Big(e^{iuA(t)} \,|N(t) = n\Big) = \mathbf{E}\bigg(\exp\Big\{iu \sum_{j=1}^{n} Z_j\Big\}\bigg) = \Big[\mathbf{E}(e^{iuZ_1})\Big]^n.$$

Skaičiuodami čia esančią charakteristinę funkciją vėl vidurkiname:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(e^{iuZ_1}) &= \mathbf{E}\Big(\mathbf{E}(e^{iuZ_1} \,|U_1)\Big) \\
&= \int_0^t \mathbf{E}\bigg(\exp\Big\{iuA_1 e^{-\alpha(t-U_1)}\Big\} \,|U_1 = y\bigg) \frac{dy}{t} \\
&= \int_0^t \mathbf{E}\bigg(\exp\Big\{iuA_1 e^{-\alpha(t-y)}\Big\}\bigg) \frac{dy}{t} \\
&= \frac{1}{t} \int_0^t \phi_A\Big(ue^{-\alpha(t-y)}\Big) dy.
\end{aligned}$$

Čia $\phi_A(v)$ yra a.d. A_1 charakteristinė funkcija. Surinkę gautas lygybes, gauname

$$\begin{aligned}
\Phi(u) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \left[\frac{1}{t} \int_0^t \phi_A\Big(ue^{-\alpha(t-y)}\Big) dy\right]^n \\
&= e^{-\lambda t} \exp\bigg\{\lambda \int_0^t \phi_A\Big(ue^{-\alpha y}\Big) dy\bigg\}.
\end{aligned}$$

Momentai skaičiuojami diferencijuojant. Gauname

$$\mathbf{E}(A(t)) = \Phi'(0)/i = \lambda \int_0^t \frac{\phi_A(0)}{i}\, e^{-\alpha y} dy = \frac{\lambda \mathbf{E}(A_1)}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}).$$

Užduotis atlikta.

1.9 Patikimumo teorijos uždavinys

Sakant, kad procesai $N_1(t), N_2(t), \dots$, $t \in T$, yra nepriklausomi, turima omenyje, kad bet kokiam $k \geq 1$, bet kokiom Borelio aibėms $A_{ij_i} \subset \mathbf{R}$ ir bet kokiems laiko momentams $t_{ij_i} \in T$, $1 \leq j_i \leq J_i$, $1 \leq i \leq k$, įvykių šeima

$$N_1(t_{1j_1}) \in A_{1j_1}, \dots, N_1(t_{1J_1}) \in A_{1J_1}, \dots, N_k(t_{kj_k}) \in A_{kj_k}, \dots, N_k(t_{kJ_k}) \in A_{kJ_k}$$

yra nepriklausoma.

Problema. *Žinoma, kad nekokybiškos detalės aparatūroje laiko intervale $t > 0$ sukelia nemalonius įvykius, pasiskirsčiusius pagal Puasono su greičiais $\lambda_i > 0$ procesus. Tarkime, kad jie yra nepriklausomi. Atlikus testavimą, vis tiek išlieka brokuotų detalių. Ar galima, pagal testo rezultatus įvertinti likusių nekokybiškų detalių tikimybes?*

Kokį dydį reiktų vertinti? Tegul

$$\psi_i(t) = \mathbf{1}\{N_i(t) = 0\}$$

yra indikatorius įvykio, kad po testo i-oji brokuota detalė nesukėlė pasekmių ir neišryškėjo, $i \geq 1$. Tada

$$P(\psi_i(t) = 1) = P(N_i(t) = 0) = \mathrm{e}^{-\lambda_i t} = 1 - P(N_i(t) = 0).$$

Čia $N_i(t)$ - Puasono procesas, kurio greitis yra λ_i. Natūralus žinotinas dydis yra sumos

$$\Lambda(t) = \sum_i \lambda_i \psi_i(t)$$

vidurkis.

Po testo matome tik blogų detalių poveikį. Tarkime, $M_j(t)$ yra skaičius defektuotų detalių, kurios sukėlė j pasekmių iki laiko t, o $X_i(t)$ - indikatorius, kad i brokuota detalė per tą patį laikotarpį sukėlė lygiai vieną įvykį. Tada

$$P(X_i(t) = 1) = P(N_i(t) = 1) = \lambda_i t \mathrm{e}^{-\lambda_i t} = 1 - P(X_i(t) = 0).$$

Turime

$$\mathbf{E}(M_1(t)) = \mathbf{E}\Big(\sum_i X_i(t)\Big) = \sum_i \lambda_i t e^{-\lambda_i t}.$$

Antra vertus,

$$\mathbf{E}(\Lambda(t)) = \mathbf{E}\Big(\sum_i \lambda_i \psi_i(t)\Big) = \sum_i \lambda_i P(N(t) = 0) = \sum_i \lambda_i e^{-\lambda_i t}.$$

Vadinasi,

$$\mathbf{E}\Big(\Lambda(t) - \frac{M_1(t)}{t}\Big) = 0$$

ir dydis $M_1(t)/t$ gali būti nežinomo $\Lambda(t)$ statistika.

Jos kokybė? Vertinkime

$$\mathbf{V}ar\Big(\Lambda(t) - \frac{M_1(t)}{t}\Big).$$

Prisimename, kad

$$\mathbf{V}ar(X-Y) = \mathbf{V}ar(X) + \mathbf{V}ar(Y) - 2\mathbf{C}ov(X,Y),$$

čia

$$\mathbf{C}ov(X,Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$$

yra a.d. kovariacija.

Taikome šias formules. Gauname

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}ar\Big(\Lambda(t) - \frac{M_1(t)}{t}\Big) &= \sum_i \mathbf{V}ar(\lambda_i\psi_i(t) - X_i(t)/t) \\
= \sum_i \Big(\lambda_i^2 \mathbf{V}ar(\psi_i(t)) &+ \frac{1}{t^2}\mathbf{V}ar(X_i(t)) - 2\frac{\lambda_i}{t}\mathbf{C}ov(\psi_i(t), X_i(t))\Big) \\
= \sum_i \Big(\lambda_i^2 e^{-\lambda_i t}(1 - e^{-\lambda_i t}) \\
&+ \frac{1}{t^2}\lambda_i t e^{-\lambda_i t}(1 - \lambda_i t e^{-\lambda_i t}) + 2\frac{\lambda_i}{t}e^{-\lambda_i t}\lambda_i t e^{-\lambda_i t}\Big).
\end{aligned}$$

Čia pasinaudojome lygybe $\psi_i(t)X_i(t) = 0$. Sutvarkę reiškinį gauname

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}ar\Big(\Lambda(t) - \frac{M_1(t)}{t}\Big) &= \sum_i \Big(\lambda_i^2 e^{-\lambda_i t} + \frac{\lambda_i}{t}e^{-\lambda_i t}\Big) \\
= \sum_i \lambda_i^2 e^{-\lambda_i t} + \frac{\mathbf{E}(M_1(t))}{t^2} &= \frac{1}{t^2}\mathbf{E}(2M_2(t) + M_1(t)).
\end{aligned}$$

Čia pasinaudojome lygybėmis

$$M_2(t) = \sum_j \mathbf{1}\{N_j(t) = 2\}$$

ir

$$\mathbf{E}M_2(t) = \sum_j P(N_j(t) = 2) = (1/2)(\lambda_j t)^2 \mathrm{e}^{-\lambda_j t}.$$

Taigi, ir dispersija gali būti įvertinta iš testo rezultatų.

1.10 Puasono procesų sumos

Pirmasis teiginys yra nesunkiai patikrinamas.

1 teorema. *Jei $N_i(t)$, $1 \leq i \leq r$ yra nepriklausomi Puasono procesai su greičiais $\lambda_i > 0$, tai jų suma $N(t) = N_1(t) + \cdots + N_r(t)$ irgi yra Puasono procesas, kurio greitis yra $\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_r$.*

Įrodykite savarankiškai.

Žymiai įdomesnis yra atvirkštinis teiginys.

2 teorema. *Tarkime, kad įvykių, kuriuos skaičiuoja Puasono procesas $N(t)$ su parametru $\lambda > 0$, pasirodymo metu mes galime juos skirstyti į r klasių su tikimybėmis p_i, nepriklausomai nuo kitų įvykių. Jei $N_i(t)$ yra procesas, skaičiuojantis i-os klasės įvykius, tai jis irgi yra Puasono, jo parametras yra $\lambda_i = p_i\lambda$, be to, $N_i(t)$, $1 \leq i \leq r$, - nepriklausoma procesų šeima.*

Įrodymas. Paprastumo dėlei imsime atvejį $r = 2$. Tada $p_1 = p$, o $p_2 = q = 1 - p$. Aišku, kad $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$. Nagrinėjame dvimatį skirstinį

$$\begin{aligned} P(N_1(t) &= k, N_2(t) = m) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N_1(t) = k, N_2(t) = m \,|N(t) = n)P(N(t) = n). \end{aligned}$$

Čia ir toliau $k, m \geq 0$. Pastebėkime, kad šios tikimybės yra nenulinės tik atveju, kai $n = k + m$. Tada

$$\begin{aligned} & P(N_1(t) = k, N_2(t) = m \,|N(t) = k + m)P(N(t) = k + m) \\ = \; & P(N_1(t) = k, N_2(t) = m \,|N(t) = k + m)e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{k+m}}{(k + m)!}. \end{aligned}$$

Esant sąlygai po tikimybės ženklu, iš $k+m$ įvykių k yra pirmo tipo. Pasinaudoję binominiu skirstiniu, gauname

$$P(N_1(t) = k, N_2(t) = m \,|N(t) = k + m) = \binom{k+m}{k} p^k q^m.$$

Taigi,

$$\begin{aligned} & P(N_1(t) = k, N_2(t) = m) = \binom{k+m}{k} p^k q^m e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{k+m}}{(k + m)!} \\ = \; & e^{-\lambda pt}\frac{(\lambda pt)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda qt}\frac{(\lambda qt)^m}{m!}. \end{aligned}$$

Matome, kad nagrinėjami procesai yra nepriklausomi. Susumavę pagal $m \geq 0$, randame pirmojo proceso skirstinį:

$$\begin{aligned} P(N_1(t) = k) &= \sum_{m=0}^{\infty} P(N_1(t) = k, N_2(t) = m) \\ &= e^{-\lambda pt} \frac{(\lambda pt)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Vadinasi, $N_1(t)$ yra Puasono procesas, o jo greitis lygus λp. Taip pat pasielgę su $N_2(t)$, baigiame teoremos įrodymą.

Patikrinkite teoremą, kai r *yra bet koks natūrinis skaičius.*

Taikydami šią teoremą, neskubėkime daryti klaidingų išvadų. Panagrinėkime pavyzdį. Jei į parduotuvę žmonės atvyksta pagal Puasono procesą, o moterų ir vyrų tikimybės yra vienodos, tai iš fakto, kad per pirmas 10 valandų atėjo 100 vyrų, neišplaukia, kad per tą patį laiką turėjo ateiti ir 100 moterų. Netgi atėjusių moterų vidurkis nebus 100.

Paprasta UŽDUOTIS Emigrantai į Airiją atvyksta pagal Puasono procesą, kurio greitis 10 žmonių per savaitę. Lietuviai sudaro 1/12 visų imigrantų, atvykstančių į šią šalį. Kokia tikimybė, kad per keturis sekančius mėnesius neatvyks joks lietuvis?

Masinio aptarnavimo teorijos uždavinyje, esame radę klientų dar esančių stotyje skirstinį. Raskime klientų, kurie jau yra aptarnauti momentu t vidurkį.

Sprendimas. Anksčiau buvome radę dar aptarnaujamų klientų skirstinį. Jo vidurkis buvo λpt, čia

$$p = \frac{1}{t} \int_0^t (1 - G(t - x))dx,$$

o $G(x)$ - aptarnavimo laiko skirstinio funkcija. Atvykę klientai skirstosi į dvi klases, aptarnautus ir dar ne, tai pasinaudoję ką tik išvestu teiginiu, randame, kad ieškomasis vidurkis lygus

$$\lambda t - \lambda pt = \lambda \int_0^t G(t - x)dx = \lambda \int_0^t G(y)dy.$$

Kai kada nagrinėjamą uždavinį yra patogu įvilkti į Puasono proceso rūbą. Tai vadinama puasonizacija.

Kolekcionieriaus problema. *Kolekcionierius nori surinkti* m *tipų monetų kolekciją. Kiekvieną kartą, kai jis randa kokią, su tikimybe* p_i, $1 \leq i \leq m$, *ji yra i-ojo tipo ir tai nepriklauso nuo praeities. Kiek vidutiniškai jam teks nupirkti monetų, kad susidarytų geidžiamas komplektas?*

Sprendimas. Galima įsivaizduoti, kad monetos kolekcionieriui pasiūlomos pagal Puasono procesą $N(t)$ su greičiu 1. Kitokio parametro atveju skaičiavimai būtų tie patys. Tada i-ojo tipo moneta patenka pas jį pagal Puasono procesą $N_i(t)$ su greičiu p_i. Jei $X(i)$ yra pirmos i-o tipo monetos laukimo laikas (jis yra eksponnentinis a.d. su parametru p_i), tai visas laukimo laikas iki pilnos kolekcijos bus

$$X := \max_i X(i).$$

Jei $T_1, T_2, \ldots$ yra laiko tarpai tarp monetų patekimo ir Y yra visas supirktų monetų skaičius, tai

$$X = \sum_{k=1}^{Y} T_k.$$

Modelyje T_k yra vienodai pasiskirstę eksponentiniai dydžiai su vidurkiu 1. Tad, $\mathbf{E}(T_k) = 1$, be to,

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y)\mathbf{E}(T_1) = \mathbf{E}(Y).$$

Kadangi

$$P(X \le t) = P(\max_i X(i) < t) = \prod_{i=1}^{m} \left(1 - e^{-p_i t}\right),$$

tai **atsakymas** yra toks:

$$\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(X) = \int_0^\infty P(X > t)dt = \int_0^\infty \left(1 - \prod_{i=1}^{m} \left(1 - e^{-p_i t}\right)\right) dt.$$

Atskiru atveju, kai $p_i = 1/m$, $1 \le i \le m$, gautume

$$\mathbf{E}(Y) = m \sum_{i \le m} 1/i \sim m \log m, \quad m \to \infty.$$

1.11 Bendresni Puasono procesai

Skaičiuojančiųjų procesų prieaugliai yra nebūtinai stacionarūs. Nepriklausomų prieauglių procesas $N(t)$ su skirstiniu

$$P(N(t) = m) = e^{-g(t)} \frac{g^m(t)}{m!}, \quad m = 0, 1, \ldots, \ t > 0,$$

čia $g : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ yra funkcija, tenkinanti sąlygą $g(0) = 0$, vadinamas *nehomogeniniu Puasono procesu.* Jei $g(t)$ yra tolydi funkcija, tai procesas stochastiškai tolydus. Atsisakius stacionarumo sąlygos, kai šuoliai yra nedideli, iš skaičiuojančiųjų procesų klasės galima išskirti nehomogeninius Puasono procesus.

Teorema. *Tegul $N(t)$ yra skaičiuojantysis procesas su nepriklausomais prieaugliais, o jo šuolių didumas yra 1, $N(0) = 0$ bei kiekvienam fiksuotam $t \geq 0$ šuolio momentu t tikimybė yra nulinė. Tada egzistuoja tokia tolydi funkcija $g(t)$, kad kiekvienam fiksuotam t a.d. $N(t)$ skirstinys yra Puasono su parametru $g(t)$.*

Be įrodymo.

Funkcija $g(t)$ apibrėžia proceso baigtiniamačius skirstinius ir tuo pačiu patį procesą. Jei

$$g(t) = \int_0^t \lambda(s)ds,$$

tai funkcija $\lambda(s)$ vadinama proceso $N(t)$ *intensyvumu.* Homogeninio proceso atveju intensyvumas lygus jo greičiui.

Homogeninį Puasono procesą galima įsivaizduoti kaip atsitiktinį taškų realioje tiesėje rinkinį. Tai bus tiesiog įvykių, kuriuos skaičiuoja tas procesas, pasirodymo momentai. Skaičius taškų intervale $(a, b]$ lygus $N(b) - N(a)$ turi Puasono skirstinį su parametru $\lambda(b-a)$. Taškus galime įsivaizduoti ir erdvėje. Todėl yra įvedama taškinių procesų klasė.

Apibrėžimas. Atsitiktinė aibė taškų Euklido erdvėje $\mathbf{R}^d$ vadinama *taškiniu procesu*, jei taškų, esančių aprėžtoje mačioje aibėje $A \subset \mathbf{R}^d$, skaičius $N(A)$ yra baigtinis su tikimybe vienetas.

Teorema. *Tegul $N(A)$ yra taškinis procesas Euklido erdvėje $\mathbf{R}^d$ ir turi savybes:*

(*) kiekvienam poromis nesikertančių poaibių rinkiniui A_i a.d. šeima $\{N(A_i)\}$ yra nepriklausoma;

(**) a.d. $N(A)$ skirstiniai priklauso tik nuo aibės A tūrio $|A|$.

Tada egzistuoja toks $\lambda \in [0, \infty)$, kad a.d. $N(A)$ turi Puasono skirstinį su parametru $\lambda|A|$.

Be įrodymo.

Apibrėžimas. Jei $N(t)$ yra Puasono procesas su greičiu λ, o X_k - nepriklausomų a.d., turinčių tą patį skirstinį, šeima, nepriklausoma nuo $N(t)$, tai suma

$$X(t) = \sum_{k \leq N(t)} X_k$$

yra vadinama *sudėtiniu Puasono procesu.* Jo parametru laikoma pora $(F(x), \lambda)$. Iš anksčiau turėtų teiginių išplaukia formulės

$$\mathbf{E}(X(t)) = \mathbf{E}(N(t))\,\mathbf{E}(X_1) = \lambda t\mathbf{E}(X_1), \qquad Var(X(t)) = \lambda t\mathbf{E}(X_1^2).$$

Chapter 2

Atstatymo procesai

2.1 Atstatymo proceso skirstinys

Apibendriname Puasono procesą. Tarkime, kad $N(t)$, $t \geq 0$, yra skaičiuojantysis procesas, X_k - laiko intervalai tarp $(k-1)$-o ir k-o įvykių pasirodymo, $k \geq 1$.

Jei X_k yra vienodai pasiskirstę ir nepriklausomi a.d., įgyjantys neneigiamas reikšmes, tai šis procesas $N(t)$ vadinamas *atstatymo procesu*.

Atkreipkime dėmesį, kad dabar nereikalaujama, kad $N(t)$ būtų nepriklausomas nuo a.d. šeimos X_k, $k \geq 1$.

Termino kilmę vaizdžiai iliustruoja toks pavyzdys. Tarkime mes naudojame elektros lemputes, vienai sugedus iškart pakeičiame kita. Jeigu lemputės turi vienodą veikimo trukmę, kuri yra a.d. su skirstiniu $F(x)$ ir vienos lemputės veikimo laikas yra nepriklausomas nuo kitų, tai procesas, aprašantis, kiek lempučių buvo pakeista („atstatyta") iki laiko momento t, bus atstatymo procesas.

Pažymėkime

$$S_0 = 0, S_1 = X_1, \ldots, S_n = \sum_{k \leq n} X_k, \ldots$$

Juos galime vadinti *atstatymo momentais*, nuliniu, pirmuoju, ... , n-uoju. Susitarkime nenagrinėti trivialaus atvejo, kai $P(X_1 = 0) = 1$. Tada egzistuoja teigiamas, gal būt, begalinis vidurkis

$$\mu = \mathbf{E}(X_1).$$

1 teorema. *Teisinga lygybė*

$$N(t) = \max\{n : \ S_n \le t\}.$$

Be to, su tikimybe vienetas

$$N(\infty) = \lim_{t \to \infty} N(t) = \infty.$$

Įrodymas. Pagal stiprųjį didžiųjų skaičių dėsnį

$$S_n/n \to \mu$$

net begalinio vidurkio atveju. Vadinasi, S_n neaprėžtai didėja su tikimybe vienetas. Visada rasime tokį baigtinį indeksą n, kad $S_n \le t < S_{n+1}$. Jis lygus atstatymo momentų iki t skaičiui. Teoremoje nurodyta formule apibrėžtas procesas yra skaičiuojantysis įvykių pasirodymus.

Ieškant $N(t)$ skirstinio pagrindinį vaidmnenį vaidina sąryšis

$$\{N(t) \ge n\} \quad \Leftrightarrow \quad \{S_n \le t\}. \tag{$*$}$$

arba

$$\{N(t) < n\} \quad \Leftrightarrow \quad \{S_n > t\}.$$

Įvykiai monotoniški t atžvilgiu, galime pereiti prie ribos ir gauti

$$\{N(\infty) \le n\} \quad \Leftrightarrow \quad \{S_n \ge \infty\}.$$

Todėl

$$\begin{aligned} P(N(\infty) < \infty) &= P(X_n = \infty \; \textit{bent vienam} \, n) \\ &= P\Big(\bigcup_{k \ge 1} \{X_k = \infty\}\Big) \le \sum_{k \ge 1} P(X_k = \infty) = 0. \end{aligned}$$

Iš čia išplaukia antrasis tvirtinimas.

Teorema įrodyta. ◇

Ateityje žymėsime

$$F_n(x) = F^{*^n}(x),$$

čia * žymi sąsūką. Tai a.d. S_n skirstinio funkcija.

2 teorema. *Kiekvienam $n \in \mathbf{Z}_+$ ir $t \in \mathbf{R}_+$*

$$P(N(t) = n) = F_n(t) - F_{n+1}(t).$$

Įrodymas.
Dabar

$$\begin{aligned} P(N(t) = n) &= P(N(t) \geq n) - P(N(t) \geq n+1) \\ &= P(S_n \leq t) - P(S_{n+1} \leq t) \\ &= F_n(t) - F_{n+1}(t). \end{aligned}$$

Įrodyta. $\diamond$

UŽDUOTIS. Raskite $P(N(t) = n)$, kai X_1 yra geometrinis a.d., t.y.

$$P(X_1 = i) = p^i(1-p), \quad 0 < p < 1, \ i = 0, 1, \ldots.$$

Ateityje mes nagrinėsime įvairius a.d. sekų Y_n, $n \geq 1$, bet su atsitiktiniu indeksu $n = N(t, \omega)$, konvergavimą įvairiais aspektais. Dažnai indeksas didės priklausomai nuo parametro $t \to \infty$.

Lema. *Tegul $\{Y_n\}$, $n \geq 1$, yra a.d. seka, Y - a.d., o $N(t)$ - a.d., įgyjantys natūrines reikšmes. Jei su tikimybe vienetas*

$$Y_n \to Y, \qquad N(t) \to \infty,$$

kai $t \to \infty$, tai

$$Y_{N(t)} \to Y$$

su tikimybe vienetas. Jei su tikimybe vienetas

$$Y_n \to Y,$$

ir $N(t) \to \infty$ pagal tikimybę, tai

$$Y_{N(t)} \to Y$$

pagal tikimybę.

Įrodymas. Pirmajam teiginiui patikrinti pakanka įvesti įvykius

$$A = \{\omega : \ Y_n(\omega) \not\to Y(\omega)\}, \quad B = \{\omega : \ N(t, \omega) \not\to \infty\},$$

$$C = \{\omega : \ Y_{N(t,\omega)} \not\to Y(\omega)\}$$

ir pastebėti, kad

$$C \subset A \cup B.$$

Antrajam teiginiui įrodyti įsitikinsime, kad iš kiekvieno sekos $\{Y_{N(t)}\}$ posekio galime išrinkti pagal tikimybę konverguojantį į Y dalinį posekį. Iš sąlygos turime, kad $N(t_k) \to \infty$ pagal tikimybę su kiekvienu posekiu $t_k \to \infty$. Bet tada egzistuoja toks dalinis didėjantis posekis $\{t_{k_j}\}$, kad $N(t_{k_j}) \to \infty$ beveik visur. Pagal pirmąją lemos dalį,

$$Y_{N(t_{k_j})} \to Y$$

su tikimybe vienetas ir juo labiau pagal tikimybę.

Įrodyta. $\diamond$

3 teorema. *Teisinga lygybė*

$$\lim_{t\to\infty} N(t)/t = 1/\mu \quad b.v.$$

Įrodymas. Formulė išplaukia iš lemos ir nelygybių

$$S_{N(t)} \le t < S_{N(t)+1}$$

ir

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \le \frac{t}{N(t)} < \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)+1}\,\frac{N(t)+1}{N(t)}.$$

$\diamond$

Dydis $1/\mu$ vadinamas *atstatymo greičiu.*

Atstatymo proceso stochastinė elgsena nesikeičia po kiekvieno ,,atsistatymo". Formaliai tą išreiškia tokia teorema.

4 teorema. *Jei $N(t)$ yra atstatymo procesas, o X_1 - pirmasis atstatymo momentas, tai procesas $\tilde N(t) := N(X_1 + t) - 1$, $t \ge 0$ turi tą patį skirstinį kaip ir $N(t)$.*

Įrodymas. Abu procesai $N(t)$ ir $\tilde N(t)$ skaičiuoja. Nagrinėjame jų baigtiniamačius skirstinius. Tegul $0 < t_1 < \cdots < t_n < \infty$ ir $k_1, \dots, k_n \ge 0$. Reikia įrodyti, kad

$$P(N(X_1 + t_i) - 1 = k_i,\ 1 \le i \le n) = P(N(t_i) = k_i,\ 1 \le i \le n).$$

Čia esančius a.d. išreiškiame per S_{k_i} viršuje nurodytu būdu (žr. 2 teoremą). Kai $n = 1$, gauname

$$\begin{aligned} & P(N(X_1+t_1) = k_1+1) = P(S_{k_1+1} \le X_1+t_1) - P(S_{k_1+2} \le X_1+t_1) \\ = \ & P(S_{k_1} \le t_1) - P(S_{k_1+1} \le t_1) = P(N(t_1) = k_1). \end{aligned}$$

Tegu $n = 2$. Dabar naudojame lygybę $N(y) = N(x) + (N(y) - N(x))$, $0 < x < y$, ir gauname

$$\begin{aligned} & P(N(X_1+t_1) = k_1+1, N(X_1+t_2) = k_2+1) \\ = \ & P(N(X_1+t_1) = k_1+1, N(X_1+t_2) - N(X_1+t_1) = k_2-k_1) \\ = \ & P(N(t_1) = k_1)P(N(t_2-t_1) = k_2-k_1) \\ = \ & P(N(t_1) = k_1, N(t_2) = k_2). \end{aligned}$$

Pratęskite samprotavimus bet kokio n atveju.

Įrodyta. $\diamond$

2.2 Atstatymo funkcija

Primename susitarimą, kad $P(X_1 = 0) < 1$. Todėl visada $\mu = \mathbf{E}X_1 > 0$. Tegul $X := X_1$, kai nereiks indekso, pabrėžiančio, kad tai yra pirmojo atstatymo laiko momentas.

Apibrėžimas. Vidurkis $m(t) := \mathbf{E}(N(t))$ vadinamas *atstatymo funkcija.*

Ištirsime ją.

1 teorema. *Visiems* $0 \le t < \infty$ *turime*

$$m(t) < \infty.$$

Įrodymas. Dydis X yra neišsigimęs, todėl egzistuoja toks $\alpha > 0$, kad $P(X \ge \alpha) > 0$. Apibrėžkime nupjautinius dydžius $\{\overline{X}_n\}$ tokiu būdu: $\overline{X}_n = 0$, jei $X_n < \alpha$, ir $\overline{X}_n = \alpha$, jei $X_n \ge \alpha$. Tegul $p := P(X \ge \alpha)$ ir

$$\overline{N}(t) = \sup\{n : \ \overline{S}_n := \overline{X}_1 + \cdots + \overline{X}_n \le t\}$$

yra atitinkamas skaičiuojantis procesas. Jo šuoliai tik momentais $k\alpha$, $k \in \mathbf{Z}_+$. Tada $\overline{S}_n$ yra n-ojo šuoliuko momentas, todėl

$$P(\overline{S}_n = k\alpha) = \binom{k-1}{n-1} p^{n-1}(1-p)^{k-n} \cdot p,$$

kai $k \geq n$, ir $P(\overline{S}_n = k\alpha) = 0$, kai $k < n$. Tai *neigiamas binominis skirstinys.* Be to,

$$P(\overline{N}(k\alpha) = n) = \binom{k}{n} p^n (1-p)^{k-n}.$$

Vadinasi, jei $k\alpha \leq t < (k+1)\alpha$, tai

$$\mathbf{E}(\overline{N}(t)) \leq \mathbf{E}(\overline{N}((k+1)\alpha) = \sum_{n \leq k+1} n \binom{k+1}{n} p^n (1-p)^{k+1-n} < \infty.$$

Iš nelygybės $\overline{X}_1 \leq X_1$ išplaukia $\overline{N}(t) \geq N(t)$, todėl ir $\mathbf{E}N(t) < \infty$. $\diamond$

2 teorema. *Jei a.d. $X_1, \ldots$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę pagal dėsnį $F(x)$, tai atstatymo funkcija tenkina lygtį*

$$m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-x) dF(x).$$

Įrodymas. Vidurkiname panaudodami pirmąjį atstatymo momentą X_1 ir gauname

$$\begin{aligned} m(t) &= \mathbf{E}(N(t)) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(N(t)|\, X_1)) \\ &= \int_0^\infty \mathbf{E}(N(t)|\, X_1 = x) dF(x) = \int_0^t \mathbf{E}(N(t)|\, X_1 = x) dF(x), \end{aligned}$$

nes $N(t) = 0$, iki pirmojo atstatymo momento.

Jei $x \leq t$, remdamiesi 2.1.4 teorema, skaičiuojame vidinį sąlyginį vidurkį. Jei pirmasis šuolis jau įvyko momentu x, tai pagal šią teoremą $N(t)$ tikimybiškai elgiasi taip kaip $N(t-x) + 1$. Vadinasi, vidinis sąlyginis vidurkis lygus $1 + m(t-x)$ ir todėl

$$m(t) = \int_0^t (1 + m(t-x)) dF(x) = F(t) + \int_0^t m(t-x) dF(x).$$

Įrodyta.

Šioje teoremoje išvestas sąryšis vadinamas *atstatymo lygtimi.* Net paprastų skirstinio funkcijų $F(x)$ atveju ją nelengva išspręsti.

Waldo lema. *Tegul X_n, $n \geq 1$, yra a.d. su tuo pačiu vidurkiu μ. Tarkime, kad N -a.d., įgyjantis natūrines reišmes, ir toks, kad kiekvienam $n \in \mathbf{N}$ įvykis $\{N = n\}$ yra nepriklausomas nuo a.d. šeimos $\{X_{n+i},\, i \geq 1\}$. Jei patenkinta bent viena iš sąlygų:*

(i) *visi a.d.* $X_n \geq 0$;
arba
(ii) $\mathbf{E}(N) < \infty$ ir $\sup_n \mathbf{E}(|X_n|) < \infty$,
tai

$$\mathbf{E}\Big(\sum_{n=1}^{N} X_n\Big) = \mu \cdot \mathbf{E}(N).$$

Įrodymas. Tegul

$$I_n = \mathbf{1}\{N \geq n\} = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{1}\{N = i\}.$$

Kadangi X_n ir $\mathbf{1}\{N = i\}$, $0 \leq i \leq n-1$ yra nepriklausomi, tai

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X_n I_n) &= \mathbf{E}\Big(X_n\Big(1 - \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{1}\{N = n\}\Big)\Big) \\ &= \mathbf{E}(X_n) - \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{E}(X_n)\mathbf{E}(\mathbf{1}\{N = n\}) = \mathbf{E}(X_n)\mathbf{E}(I_n). \end{aligned}$$

Panašiai ir absoliutiniai momentai

$$\mathbf{E}(|X_n| I_n) = \mathbf{E}(|X_n|)\mathbf{E}(I_n).$$

Jei yra patenkinta (i) sąlyga, tai

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\Big(\sum_{n=1}^{N} X_n\Big) &= \mathbf{E}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} X_n I_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}(X_n I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}(X_n)\mathbf{E}(I_n) \\ &= \mu \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}(I_n) = \mu \cdot \sum_{n=1}^{\infty} P(N \geq n) = \mu \cdot \mathbf{E}(N). \end{aligned}$$

Jei patenkinta (ii) sąlyga, pradžioje pakartoję samprotavimus, įrodome

$$\mathbf{E}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} |X_n| I_n\Big) \leq \mathbf{E}(N) \cdot \sup_n \mathbf{E}(|X_n|) < \infty.$$

Po to, pritaikę Fubinio teoremą, pagrindžiame vidurkio ir sumavimo noperacijų sukeitimą ir tuo baigiame įrodymą. ◇

Apibrėžimas. *A.d. N, minimas Waldo lemoje, vadinamas a.d. sekos X_k, $k \geq 1$, sustabdymo laiku.*

Iš tiesų, galime įsivaizduoti, kad esant $\{N = n\}$ mes esame „stebėję" pirmuosius n įvykių ir gavę a.d. X_k, $k \le n$, ir stabdome stebėjimus, a.d. X_k, kai $k > n$, eksperimente lieka nežinomi.

3 teorema. *Teisinga lygybė*

$$\mathbf{E}(S_{N(t)+1}) = \mu\,(m(t) + 1).$$

Įrodymas. Pagal apibrėžimą

$$S_{N(t)+1} = \sum_{k=1}^{N(t)+1} X_k.$$

Tai atsitiktinio skaičiaus a.d. suma, tačiau $N(t)$ yra priklausomas nuo šeimos $\{X_k\}$, todėl anksčiau naudota vidurkio skaičiavimo formulė netinka!

Taikome Waldo lemą, kai $N = N(t) + 1$. Kadangi įvykiai $\{N(t) = n - 1\}$ yra nepriklausomi nuo X_k, kai $k \ge n$, o a.d. X_k neneigiami, tą galime daryti.

Įrodyta.

Pastebėkime, kad vienetų teoremoje užrašytoje lygybėje praleisti negalima! Kodėl?

Apibrėžimas. Procesas $S_{N(t)+1}$ vadinamas *pirmnojo kirtimo procesu.*

Labai dažnai jo matematinė analizė yra paprastesnė, negu atstatymo proceso $N(t)$ tyrimas.

4 teorema (Elementarioji atstatymo).

$$\lim_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} = \frac{1}{\mu}.$$

Įrodymas. Kadangi

$$S_{N(t)+1} > t,$$

tai pagal 2.2.2 teoremą gauname

$$\mu(m(t) + 1) > t.$$

Vadinasi,

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} \ge \frac{1}{\mu}.$$

Vertinti viršutinę ribą gerokai sunkiau. Fiksuokime $M > 0$ ir nagrinėkime nupjautinius a.d.

$$\bar{X}_k = \min(X_k, M).$$

Naujieji a.d. yra laiko intervalai tarp kažkokių įvykių. Tegul procesas $\bar{N}(t) \geq N(t)$ juos ir skaičiuoja. Turime nelygybę ir vidurkiams

$$\bar{m}(t) \geq m(t).$$

Pažymėkime $\mathbf{E}(\bar{X}_1) = \mu_M$ ir atitinkamai įveskime jų sumas $\bar{S}_n$. Tada $\mu_M \to \mu$, jei $M \to \infty$. Pagal 2.2.2 teoremą

$$\mu_M(\bar{m}(t)+1) = \mathbf{E}(\bar{S}_{\bar{N}(t)+1}) \leq t + M.$$

Iš čia išplaukia

$$\limsup_{t\to\infty}(m(t)/t) \leq \limsup_{t\to\infty}(\bar{m}(t)/t) \leq 1/\mu_M.$$

Kadangi M buvo bet koks, perėję prie ribos, kai $M \to \infty$, baigiame įrodymą. $\diamond$

Atskirais atvejais atstatymo funkciją galima apskaičiuoti.

UŽDUOTIS. Rasti atstatymo funkciją, kai $F(x)$ yra tolygiojo skirstinio intervale [0,1] funkcija.

Sprendimas. Tegu $0 \leq t \leq 1$. Iš atstatymo lygties išplaukia

$$m(t) = t + \int_0^t m(t-x)dx = t + \int_0^t m(y)dy.$$

Diferencijuodami t atžvilgiu gauname

$$m'(t) = 1 + m(t),$$

Po pakeitimo $b(t) = m(t) + 1$, $b(0) = 1$ lygtis paprastai išsprendžiama:

$$b'(t) = b(t).$$

Taigi,

$$b(t) = e^t,$$

Vadinasi,

$$m(t) = e^t - 1, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Jei $1 < t \leq 2$, galime tęsti:

$$m(t) = 1 + \int_0^1 m(t-x)dx = 1 + \int_{t-1}^t m(y)dy.$$

Dabar diferencialinė lygtis yra tokia:

$$m'(t) = m(t) - m(t-1) = m(t) - e^t + 1.$$

Dabar

$$b'(t) = b(t) - e^t, \quad b(1) = m(1) + 1 = e.$$

Varijuodami konstantas gauname

$$b(t) = c(t)e^t, \quad b'(t) = c'(t)e^t + c(t)e^t = c(t)e^t - e^t.$$

Todėl $c(t) = -t + c_1$, o

$$b(t) = (-t + c_1)e^t, \quad c_1 = 2.$$

Vadinasi,

$$m(t) = (2-t)e^t - 1,$$

jei $1 < t \leq 2$. Ir t.t....

2.3 Atstatymo funkcijos aproksimacija

Atstatymo lygtis funkcijai $m(t)$ skaičiuoti yra nepatogi. Ne ką geresnė ir tiksli formulė

$$m(t) = \mathbf{E}(N(t)) = \sum_{n\geq 1} nP(N(t) = n) = \sum_{n\geq 1} n(F_n(t) - F_{n+1}(t)) = \sum_{n\geq 1} F_n(t),$$

čia $F_n(x)$ yra laiko tarpų tarp atstatymų skirstinio $F(x)$ n-lypė sąsūka. Pastarajai rasti tektų skaičiuoti daugiamačius integralus. 1987 metais Sh. Ross pasiūlė efektyvų tikimybinį apytikslio skaičiavimo metodą, su kuriuo dabar ir susipažinsime.

Metodo idėja: vidurkį $m(t) = \mathbf{E}(N(t))$ pakeisti vidurkiu $\tilde{m}(t) := \mathbf{E}(N(Y))$, čia $Y = Y(t)$ yra a.d., nepriklausomas nuo proceso $N(t)$ ir toks, kad $\mathbf{E}(Y) = t$. Jei a.d. dispersija nedidelė, tai skirtumas $m(t) - \tilde{m}(t)$ turėtų būti mažas.

Prisiminę, kad eksponentinio a.d. Y su parametru λ vidurkis yra $1/\lambda$, galėtume imti $\lambda = 1/t$ ir patenkinti vieną iš reikalavimų. Kaip skaičiuoti $\tilde{m}(t)$ šiuo atveju? Tenka naudoti sąlyginio vidurkio sąlyginimą.

Lema. *Tegul Z yra a.d., $\mathbf{E}|Z| < \infty$ ir B_k, $0 \leq k \leq r$ - pilna įvykių sistema. Jei A - bet koks įvykis, tai*

$$\mathbf{E}(Z|A) = \sum_{k=0}^{r} \mathbf{E}(Z|\, AB_k)P(B_k|A).$$

Čia $AB := A \cap B$.

Įrodymas. Galime nagrinėti sąlygines tikimybes, o po to integruoti pagal jas. Kai $r = 2$, $B_1 =: B$ ir $B_2 = \overline{B}$, turime

$$\begin{aligned} P(D|A) &= \frac{P(DA)}{P(A)} = \frac{P(DAB)}{P(A)} + \frac{P(DA\overline{B})}{P(A)} \\ &= \frac{P(DAB)}{P(AB)}\frac{P(AB)}{P(A)} + \frac{P(DA\overline{B})}{P(A\overline{B})}\frac{P(A\overline{B})}{P(A)} \\ &= P(D|AB)P(B|A) + P(D|A\overline{B})P(\overline{B}|A). \end{aligned}$$

Toliau galima pritaikyti matematinę indukciją.

Įrodyta. $\diamond$

Paprastumo dėlei tegul a.d. X skirstinys turi tankio funkciją $f(x)$. Tada įvesdami papildomą sąlygą, gauname

$$\tilde{m}(t) = \mathbf{E}(N(Y)) = \int_0^\infty \mathbf{E}(N(Y)|\, X_1 = x)f(x)dx.$$

Skaičiuodami čia esantį sąlyginį vidurkį išskirsime du atvejus: $Y > x$ ir $Y \le x$. Naudosimės ką tik įrodyta lema.

Jei pirmojo atstatymo momentas $x > Y$, tai $N(Y) = 0$. Vadinasi,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(N(Y)|\, X_1 = x) &= \mathbf{E}(N(Y)|\, X_1 = x, Y \le x)P(Y \le x|\, X_1 = x) \\ &\quad + \mathbf{E}(N(Y)|\, X_1 = x, Y > x)P(Y > x|\, X_1 = x) \\ &= 0 + \mathbf{E}(N(Y)|\, X_1 = x, Y > x)P(Y > x), \end{aligned}$$

nes X_1 ir Y yra nepriklausomi. Kai $Y > x$, pasinaudosime tuo, kad eksponentinis a.d. neturi atminties. Formaliai tą išreiškia lygybė

$$P(Y - x > u|\, Y > x) = P(Y > u), \quad u \ge 0.$$

Kitais žodžiais tariant, esant sąlygai $Y > x$ sąlyginis skirstinys $Y - x$ gali būti pakeičiamas besąlyginiu a.d. Y skirstiniu. Todėl

$$\mathbf{E}(N(Y)|\, X_1 = x, Y > x) = 1 + \mathbf{E}(N(Y - x)|\, Y > x) = 1 + \mathbf{E}(N(Y)).$$

Įstatę į ankstesnes formules, gauname

$$\mathbf{E}(N(Y)|\, X_1 = x) = (1 + \mathbf{E}(N(Y)))e^{-\lambda x} = (1 + \tilde{m}(t)))e^{-\lambda x}$$

ir toliau

$$\tilde{m}(t) = (1 + \tilde{m}(t))) \int_0^\infty e^{-\lambda x} f(x)dx.$$

Išsprendę randame

$$\tilde{m}(t) = \mathbf{E}(e^{-\lambda X})(1 - \mathbf{E}(e^{-\lambda X})^{-1}.$$

Čia $X := X_1$. Tokią pat formulę gautume ir dyžiams, neturintiems tankio.

Idėją pademonstravome, tačiau iki tikslo dar tolokai. Kai $\lambda = 1/t$, turime $\mathbf{E}(Y) = t$. Deja, tiesiogiai $\tilde{m}(t)$ formule pasinaudoti negalima dėl didelės dispersijos: $\mathbf{V}ar(Y) = t^2$. Todėl reikia atlikti dar vieną žingsnį: panaudoti ne vieną eksponentinį a.d., bet keletą jų. Jei $Y_1, \dots, Y_n$ yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę eksponentiniai a.d su parametru $\lambda = n/t$, tai jų sumos $\bar{S}_n$ vidurkis yra t, bet dispersija lygi $n \cdot t^2/n^2 = t^2/n$. Aprėžtiems t ir dideliems n tai jau priimtina.

Bendra teorija. Tarkime, kad eksponentiniai a.d. $Y_1, \dots, Y_n$ su parametru λ nepriklauso nuo X_k ir nuo proceso $N(t)$. Vėl skaičiuokime atstatymus iki laiko momento $\overline{S}_r := Y_1 + \cdots + Y_r$, jei $0 \le r \le n$. Pažymėkime

$$m_r = \mathbf{E}(N(\overline{S}_r)), \quad r = 1, \dots, n.$$

Čia

$$N(\overline{S}_r) = \max\{n : \sum_{k \le n} X_k \le \overline{S}_r\}.$$

Turime

$$m_r = \int_0^\infty \mathbf{E}(N(\bar{S}_r)|\, X_1 = x) f(x)dx.$$

Dabar skaičiuodami sąlyginį vidurkį įvesime pilną įvykių sistemą

$$A_k = \{\overline{S}_k < x, \overline{S}_{k+1} \ge x\}, \quad 0 \le k < r, \quad A_r = \{S_r < x\}.$$

Gauname

$$m_r = \int_0^\infty \sum_{k=0}^r \mathbf{E}(N(\bar{S}_r)|\, X_1 = x, A_k) P(A_k|\, X_1 = x) f(x)dx, \tag{2.1}$$

jei X_1 turi tankį $f(x)$. Toliau nagrinėjame sąlygines tikimybes po integralo ženklu.

Apibrėžkime papildomą a.d. - skaičių sumų $\overline{S}_j$, $j \le r$, kurios yra mažesnės už x. Pažymėkime

$$C_r(x) = \sum_{j \le r} \mathbf{1}\{\overline{S}_j < x\}.$$

Tai Puasono procesas su greičiu λ, čia x yra laiko kintamasis.

Jei $\overline{S}_r < x$, tai esant sąlygai $X_1 = x$, $N(\overline{S}_r) = 0$. Jei lygiai k iš sumų $\overline{S}_j$, $1 \le j \le r-1$, yra mažesnės už x, tai pagal stipriąją atminties neturėjimo savybę $N(\overline{S}_r - x)$ sąlyginis skirstinys sutaps su a.d. $1 + N(Y_{k+1} + \cdots + Y_r)$ skirstiniu. Dar kartą pasitikrinkime, ar neklystame.

Formalizuojant galima pasinaudoti jau įvestais įvykiais

$$\begin{aligned} A_k &= \{\text{lygiai k is sumu } \overline{\text{S}}_\text{j},\ 1 \le \text{j} \le \text{r} - 1,\ \text{yra mazesnes uz x}\} \\ &= \{\overline{S}_k < x, \overline{S}_{k+1} \ge x\}, \quad 0 \le k \le r. \end{aligned}$$

Čia $A_r = \{S_r < x\}$. Šių įvykių tikimybės

$$P(A_k) = P(C_r(x) = k) = e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^k}{k!}.$$

Tada iš stipriosios užmaršumo savybės išplauktų

$$\mathbf{E}(N(\bar{S}_r)|\, X_1 = x, A_k) = \begin{cases} 0, & \text{jei } k = r \\ 1 + m_{r-k}, & \text{jei } k < r. \end{cases}$$

Ar iš tiesų taip? Apskaičiuokime sąlyginius skirstinius. Jei $k = 0$, situacija beveik ta pati, kaip ir skaičiuojant $\tilde{m}(t)$. Imkime atvejį $k = 1 < r$. Randame sąlyginio skirstinio „uodegą":

$$\begin{aligned} & P(\bar{S}_r > x + u|\ Y_1 < x, Y_1 + Y_2 \ge x) \\ = \ & P(\bar{S}_r > x + u,\ Y_1 < x, Y_1 + Y_2 \ge x)/P(Y_1 < x, Y_1 + Y_2 \ge x). \end{aligned}$$

Skaitiklyje esanti tikimybė lygi

$$\begin{aligned} & \int_0^x P(Y_2 + \cdots + Y_r > x + u - v, Y_2 \ge x - v)\lambda e^{-\lambda v} dv \\ = \ & \int_0^x \int_{x-v}^\infty P(Y_3 + \cdots + Y_r > x + u - v - y)\lambda^2 e^{-\lambda(v+y)} dy dv \\ = \ & \lambda^2 x \int_x^\infty P(Y_3 + \cdots + Y_r > x + u - z) e^{-\lambda z} dz. \end{aligned}$$

paskutiniame žingsnyje pakeitėme $v + y = z$ ir vieną integralą apskaičiavome. Panašiai pasielgiame su vardiklyje esančia tikimybe ir gauname

$$\begin{aligned} & P(Y_1 < x, Y_1 + Y_2 \ge x) = \int_0^x P(Y_2 \ge x - y)\lambda e^{-\lambda y} dy \\ = \ & \int_0^x e^{-\lambda(x-y)}\lambda e^{-\lambda y} dy = \lambda x e^{-\lambda x}. \end{aligned}$$

Vadinasi,

$$
\begin{aligned}
& P(\bar{S}_r > x+u|\, Y_1 < x, Y_1+Y_2 \geq x) \\
= \; & \lambda \int_x^\infty P(Y_3+\cdots+Y_r > x+u-z)e^{-\lambda(z-x)}dz \\
= \; & \lambda \int_0^\infty P(Y_3+\cdots+Y_r > u-y)e^{-\lambda y}dy \\
= \; & P(Y_2+\cdots+Y_r > u).
\end{aligned}
$$

Pratęskite šiuos samprotavimus bet kokio $1 \leq k < r$ atveju! *Panaudojant gamma skirstinio formules išraiškos šiek tiek sutrumpėja.*

Kaip toliau skaičiuojami sąlyginiai vidurkiai? Vėl apsiribojame paprastu atveju:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(N(\bar{S}_r)|\, X_1 = x, A_1) &= 1 + \mathbf{E}(N(\bar{S}_r - x)|\, A_1) \\
&= 1 - \int_{\mathbf{R}} N(u)dP(\overline{S}_r - x > u|\, A_1).
\end{aligned}
$$

Štai čia ir reikia pasinaudoti išvestąją lygybe. Gauname

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(N(\bar{S}_r)|\, X_1 = x, A_1) &= 1 - \int_{\mathbf{R}} N(u)dP(\overline{S}_{r-1} > u) \\
&= 1 + \mathbf{E}(N(\overline{S}_{r-1})) = 1 + m_{r-1}.
\end{aligned}
$$

Pritaikę visas gautąsias sąlyginių vidurkių išraiškas per m_{r-k}, iš anksčiau minėtos sąlyginių vidurkių tapatybės dėl r įvykių ir (2.1) išvedame

$$
m_r = \int_0^\infty \sum_{k=0}^{r-1} (1+m_{r-k})P(A_k|\, X_1 = x)f(x)dx.
$$

Dėl a.d nepriklausomumo taip pat turime

$$
P(A_k|\, X_1 = x) = P(A_k) = P(C_r(x) = k).
$$

Įstatę gauname

$$
m_r = \int_0^\infty \sum_{k=0}^{r-1} (1+m_{r-k})e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^k}{k!}f(x)dx.
$$

Sukeitę sumą su integralu ir atskyrę vieną dėmenį, turime išraišką

$$
m_r = \Big(1 - \mathbf{E}(e^{-\lambda X})\Big)^{-1}\Big(\sum_{k=1}^{r-1}(1+m_{r-k})\mathbf{E}(X^k e^{-\lambda X})\frac{\lambda^k}{k!} + \mathbf{E}(e^{-\lambda X})\Big).
$$

Vidurkis $m_1 = \tilde{m}(t)$ buvo anksčiau apskaičiuotas. Pastaroji rekurenčioji formulė duoda nesudėtingą būdą visai m_r sekai rasti. Tai gana tikslūs atstatymo funkcijos $m(t)$ artiniai.

2.4 Bendresnė atstatymo lygtis

Nagrinėjame lygtį

$$A(t) = a(t) + \int_0^t A(t-x)dF(x), \tag{2.2}$$

čia $a(t)$ yra žinoma tolydinė funkcija, o $F(x)$ - skirstinio funkcija. Ieškokime funkcijos $A(t)$, kuri yra aprėžta kiekviename baigtiniame intervale. Kaip ir anksčiau, tegul atstatymo funkcija

$$m(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t), \quad F_k(t) = F^{*k}(t).$$

Teorema *Egzistuoja vienintelė aprėžta kiekviename baigtiniame intervale funkcija $A(t)$, $t \geq 0$, tenkinanti* (2.2). *Be to,*

$$A(t) = a(t) + \int_0^t a(t-x)dm(x). \tag{2.3}$$

Įrodymas. Funkcija $A(t)$, apibrėžta (2.3), yra aprėžta kiekviename baigtiniame intervale $[0, T]$. Iš tiesų,

$$\begin{aligned} \sup_{t\leq T} |A(t)| &\leq \max_{t\leq T} |a(t)| + \int_0^t \max_{y\leq T} |a(y)| dm(x) \\ &\leq \max_{t\leq T} |a(t)|(1 + m(T)) < \infty. \end{aligned}$$

Įsitikiname, kad funkcija $A(t)$, apibrėžta (2.3), tenkina (2.2). Trumpumo dėlei pastarąją lygtį užrašykime

$$A = a + F * A.$$

Panašiai pasielkime ir su kitomis sąsūkomis. Pasinaudodami sąsūkos ir sudėties distributyvumu, skaičiuojame

$$\begin{aligned} A &= a + m * a = a + \left(\sum_{k=1}^{\infty} F_k\right) * a \\ &= a + F * a + \left(\sum_{k=2}^{\infty} F_k\right) * a \\ &= a + F * a + F * \left(\sum_{k=1}^{\infty} F_k\right) * a. \end{aligned}$$

Čia pasinaudojome lygybe $F_k = F * F_{k-1}$. Vadinasi,

$$A = a + F * \left(a + \left(\sum_{k=1}^{\infty} F_k\right) * a\right) = a + F * A.$$

Tą ir reikėjo patikrinti.

Įrodydami vienatį, naudosimės iteracijomis. Jei $A(t)$ yra bet kuris iš sprendinių, tai kartodami žingsnius, gauname

$$\begin{aligned} A &= a + F * A = a + F * (a + F * A) \\ &= a + F * a + F_2 * A = \cdots \\ &= a + F * a + F_2 * A + \cdots + F_{n-1} * a + F_n * A. \end{aligned}$$

Paskutinį narį, pavadinę liekana, įvertiname

$$\sup_{t \le T} |F_n * A(t)| = \sup_{t \le T} \left| \int_0^{\infty} A(t-x) dF_n(x) \right| \le \sup_{y \le T} |A(y)| F_n(T) \to 0,$$

nes pirmasis daugiklis yra aprėžtas, o kiekvienam T fiksuotam $F_n(T) \to 0$, kai $n \to \infty$.

Perėję prie ribos priešpaskutinėje lygybėje, kai $n \to \infty$, baigiame $A(t)$ išraišką, nurodytą (2.3).

Teorema įrodyta.

Atkreipkime dėmesį, kad vienaties įrodymo metu panaudojome dar vieną algoritmą, kaip apytikriai skaičiuoti (2.2) sprendinį.

UŽDUOTIS. Išveskite lygtį, kurią tenkina pirmojo kirtimo proceso vidurkis $\mathbf{E}S_{N(t)+1}$. *Ją išsprendę (be Waldo lemos!) įrodykite skyrelio 2.2 3 teoremą.*

2.5 Centrinė ribinė teorema

Anksčiau turėjome, kad $N(t) \sim t/\mu$ su tikimybe vienetas ir $\mathbf{E}(N(t)) \sim t/\mu$, kai $t \to \infty$. Galima tikėtis, kad $N(t)$ reikšmių atsilenkimas nuo vidurkio yra reguliarus, kai $t \to \infty$. A.d. Y_n skirstinio konvergavimą į standartinį normalinį dėsnį žymėsime

$$Y_n \Rightarrow N(0,1), \quad n \to \infty.$$

1 teorema. *Tarkime, kad laiko tarpai X_k tarp atstatymo momentų turi vidurkį μ ir baigtinę dispersiją σ^2. Tada*

$$\frac{N(t) - t/\mu}{\sigma\sqrt{t/\mu^3}} \Rightarrow N(0,1),$$

jei $t \to \infty$.

Įrodymas. Tegul $x \in \mathbf{R}$. Pažymėkime

$$r_t = t/\mu + x\sigma\sqrt{t/\mu^3}.$$

Jei $r'_t = \lceil r_t \rceil$ yra pirmasis po r_t einantis sveikasis skaičius („lubos"), tai

$$\begin{aligned}\left\{\frac{N(t) - t/\mu}{\sigma\sqrt{t/\mu^3}} < x\right\} &= \{N(t) < r_t\} = \{N(t) < r'_t\} = \{S_{r'_t} > t\} \\ &= \left\{\frac{S_{r'_t} - r'_t\mu}{\sigma\sqrt{r'_t}} > \frac{t - r'_t\mu}{\sigma\sqrt{r'_t}}\right\} =: \{Y_t > z'_t\}.\end{aligned}$$

Kadangi CRT skirstinių konvergavimas į standartinio normalinio dėsnio funkciją $\Phi(z)$ yra tolygus z atvilgiu, tai

$$P(Y_t > z'_t) = 1 - \Phi(z'_t) + o(1), \quad t \to \infty.$$

Bet

$$z_t := \frac{t - r_t\mu}{\sigma\sqrt{r_t}} = -x\left(1 + \frac{x\sigma}{\sqrt{t\mu}}\right)^{-1/2} \to -x,$$

kai $t \to \infty$. Be to, dėl $|r_t - r'_t| < 1$ ir $r_t \to \infty$ taip pat galioja $z'_t \to -x$. Vadinasi, z'_t galime pakeisti $-x$ ir gauti

$$P(Y_t > z'_t) = 1 - \Phi(-x) + o(1) = \Phi(x) + o(1), \quad t \to \infty.$$

Prisiminę anksčiau turėtą sąryšį, baigiame teoremos įrodymą.

2.6 Atstatymo premijų procesas

Atstatę procesą laiku ir gerai, nusipelnome premijų. Tarkime, kad, kiekvieną kartą, kai vyksta n-as atstatymas mums yra išmokama premija R_n. Tegu šių dydžių seka is yra atsitiktinė ir nepriklausoma, bet gal būt priklausoma nuo laiko tarpų tarp pačių atstatymų. Išnagrinėkime visos gautos premijos dydį iki laiko momento $t \geq 0$, t.y. sumą

$$R(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} R_n.$$

1 teorema. *Tarkime, kad vidurkiai* $\mathbf{E}(R_n) =: \nu$ *ir* $\mathbf{E}(X_n) =: \mu$ *yra baigtiniai. Jei* $t \to \infty$, *tai su tikimybe lygia vienetui*

$$\frac{R(t)}{t} \to \frac{\nu}{\mu}.$$

Be to,

$$\frac{\mathbf{E}(R(t))}{t} \to \frac{\nu}{\mu}.$$

Įrodymas. Užrašykime

$$\frac{R(t)}{t} = \Big(\frac{1}{N(t)} \sum_{n=1}^{N(t)} R_n\Big) \cdot \big(\frac{N(t)}{t}\big)$$

ir pritaikykime stiprųjį didžiųjų skaičių dėsnį bei 2.1.2 teoremą.

Antrajam teiginiui įrodyti pradžioje nagrinėkime atvejį, kai $R_n \geq 0$. Įvykis $\{N(t)+1 = n\}$ yra nepriklausomas nuo $\{R_i\}$, $i > n$. Todėl pagal Waldo lemą

$$\mathbf{E}\Big(\sum_{n=1}^{N(t)+1} R_n\Big) = (m(t)+1)\mathbf{E}(R_n) = (m(t)+1)\nu.$$

Prisimename, kad $m(t)/t \to 1/\mu$, kai $t \to \infty$. Lieka patikrinti, ar

$$\mathbf{E}(R_{N(t)+1})/t \to 0,$$

jei $t \to \infty$. Tai akivaizdu, jei R_n yra aprėžti. Vadinasi, tokių dydžių atveju turime teoremos antrąjį teiginį. Bendru atveju tai pagrįsti tiesiogiai būtų sunkiau, todėl pasinaudojame a.d. nupjovimu.

Tegul $M > 0$ yra fiksuotas, tada

$$\liminf_{t\to\infty} \mathbf{E}(R(t))/t \geq \lim_{t\to\infty} \mathbf{E}\Big(\frac{1}{t}\sum_{n=1}^{N(t)} \min\{R_n, M\}\Big) = \mathbf{E}(\min\{R_n, M\})/\mu.$$

Čia pasinaudojome teiginiu aprėžtiems dydžiams. Neneigiamiems dydžiams galime pereiti prie ribos, kai $M \to \infty$, po vidurkio ženklu. Tad,

$$\liminf_{t\to\infty} \mathbf{E}(R(t))/t \geq \mathbf{E}(R_n)/\mu = \nu/\mu.$$

Antra vertus,

$$\limsup_{t\to\infty} \mathbf{E}(R(t))/t \leq \lim_{t\to\infty} \mathbf{E}\Big(\frac{1}{t}\sum_{n=1}^{N(t)+1} R_n\Big) = \lim_{t\to\infty} \frac{m(t)+1}{t}\mathbf{E}(R_n) = \nu/\mu.$$

Iš apatinio ir viršutinio įverčių išplaukia antrasis teoremos teiginys, kai $R_n \geq 0$. Likusiu atveju pakanka išskaidyti $R_n = R_n^+ - R_n^-$ su $R_n^\pm \geq 0$ ir dviems sumoms atskirai pritaikyti jau įrodytą teiginį.

Įrodyta.

Pastaba. *Abu teoremos teiginiai išlieka teisingi ir procesui $\tilde{R}(t)$, tenkinančiam sąlygą*

$$R(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} R_n \leq \tilde{R}(t) \leq \sum_{n=1}^{N(t)+1} R_n.$$

Dydis $R(t)/t$ gali būti interpretuotas kaip premijos gavimo greitis arba *premijos vidurkis laiko intervale*. Jei laiko inervalus tarp atstatymų vadintume *ciklais*, o μ *ciklo ilgio vidurkiu*, tai ν būtų vidutinė premija, uždirbta viename cikle. Įrodyta teorema teigia, kad premijos vidurkis ilgame laiko intervale yra premijos viename cikle santykis su ciklo ilgiu.

Premijos gali būti mokamos ne tik atstatymo momentais, bet ir tolydžiai kiekviename ciklo taške. Tada suma $R(t)$ apibrėžime keičiasi į integralą. Atsižvelgdami į viršuje padarytą pastabą, galime rasti ir tokių procesų asimptotinę elgseną.

Ne visada už atstatymą mokamos premijos. Dažniau tai būna atlygiai už padarytas žalas.

UŽDUOTIS. Naujasis lietuvis keičia mašinas po pirmos avarijos, gedimo arba, kai jos ištarnauja T metų. Tarkime, kad visų mašinų tarnavimo laikai yra nepriklausomi tolydiniai a.d. su ta pačia tankio funkcija $h(x)$. Tegul C_1 yra naujos mašinos kaina, o C_2 - pastovios išlaidos, susijusios su avarijos ar gedimo padariniais. Paprastumo dėlei likutinę mašinos vertę laikykime nuline. Kokios yra to lietuvio vidutinės išlaidos ilgame laiko intervale? Kada reiktų jam pirkti naują mašiną, jei žinotume, kad $h(x) = 1/10$, kai $x \in [0, 10]$, ir $h(x) = 0$ kitose srityse?

Sprendimas. Pagal paskutinės teoremos rekomendaciją reikia išnagrinėti vieną ciklą - laiko intervalą nuo naujos mašinos pirkimo iki avarijos, bet ne ilgesnį kaip T. Jei Y yra a.d. su tankiu $h(x)$ ir skirstinio funkcija $H(x)$, tai ciklo ilgis nusakomas a.d.

$$X = \begin{cases} Y, & \text{jei} \quad Y \leq T, \\ T & \text{priesingu atveju.} \end{cases}$$

Todėl jo ilgio vidurkis lygus

$$\mathbf{E}(X) = \int_0^T xh(x)dx + T\int_T^\infty h(x)dx = \int_0^T xh(x)dx + T(1 - H(T)).$$

Išlaidos viename cikle lygios

$$R = \begin{cases} C_1, & \text{jei} \quad Y > T, \\ C_1 + C_2, & \text{jei} \quad Y \leq T. \end{cases}$$

Todėl išlaidų vidurkis viename cikle yra

$$\mathbf{E}(R) = C_1 P(Y > T) + (C_1 + C_2)P(Y \leq T) = C_1 + C_2 H(T).$$

Dabar galime atsakyti į pirmąjį klausimą. **Atsakymas**:

$$(C_1 + C_2 H(T))/\Big(\int_0^T xh(x)dx + T(1 - H(T))\Big).$$

Jei skirstinys $H(x)$ yra tolygusis intervale [0,10], kaip pasakyta antrame klausime, tai šį santykį galime rasti. Tegul $T \leq 10$, optimizuosime jo parinkimą. Apskaičiavę santykį gauname

$$(C_1 + C_2T/10)/\Big(T^2/20 + T(1 - T/10)\Big) = \frac{2(10C_1 + C_2T)}{20T - T^2}.$$

Minimumą rasti nesunku. Pavyzdžiui, kai $C_1 = 3$ (tūkstančiai eurų), o $C_2 = 1/2$, stacionarioji lygtis virsta

$$T^2 + 120T - 1200 = 0,$$

o jos sprendiniai yra $T_1 \approx 9.25$ ir $T_2 \approx -130$. Pirma reikšmė priklauso intervalui [0,10] ir tame taške nagrinėjamas santykis yra minimalus.

Atsakymas: Esant nurodytoms kainoms, naujasis lietuvis turėtų mašiną keisti po 9,25 metų ir nelaukti, kol mašina susidėvės būdama 10 metų senumo.

UŽDUOTIS. Tarkime, kad laiko tarpai tarp aukštos klasės viešbutyje gyvenančių klientų kreipimosi nuvežti į miesto centrą paklūsta tikimybiniam dėsniui su vidurkiu $\mu > 0$. *Susirinkus* N *keleivių autobusas išvažiuoja. Klientų aptarnavimo jiems laukiant nuostoliai, esant* n *keleivių, yra* nc *Lt per valandą. Koks vidutinis nuostolis viešbučiui ilgame laiko intervale? Parinkdami* N, *minimizuokite transporto išlaidas, jei žinoma, kad kiekvienas jo reisas kainuoja* K *Lt.*

Sprendimas. Dabar ciklu galima laikyti tarpą tarp gretimų autobuso išvykimų. Vidutinis ciklo ilgis yra $N\mu$. Skaičiuokime nuostolius viename cikle. Jei

$$T_1, T_2, \ldots$$

yra tarpai tarp 1-o ir 2-o, 2-o ir trečio, ... keleivių atvykimų, išreikšti valandomis, tai ieškomasis vidurkis lygus

$$K + \mathbf{E}(cT_1 + 2cT_2 + \cdots + c(N-1)T_{N-1}) = K + c\mu\,\frac{N(N-1)}{2}.$$

Taigi, **atsakymas** į pirmąjį klausimą bus santykis: $c(N-1)/2 + K/(N\mu)$.

Minimizuodami pagal N randame jo **reikšmę:** sveikoji skaičiaus $\sqrt{2K/(c\mu)}$ dalis ar jo lubos.

2.7 Atstatymo amžius ir liekamasis amžius

Tarkime, kad $N(t)$ yra atstatymo procesas, S_n - atstatymo momentai. Skirtumą

$$A(t) = t - S_{N(t)}$$

vadiname atstatymo *amžiumi.* Jis parodo, kiek laiko praėjo po atstatymo ar detalės pakeitimo. Procesas

$$B(t) = S_{N(t)+1} - t$$

gali būti vadinamas atstatymo *liekamuoju amžiumi.* Iš tiesų, galima įsivaizduoti pakeistos detalės veikimo laiką nuo t iki jos susidėvėjimo ir sekančio atstatymo.

1 teorema. *Jei tarpai tarp atstatymų turi antrąjį baigtinį momentą* $\mathbf{E}(X^2)$*, tai*

$$\lim_{s\to\infty}\frac{1}{s}\int_0^s A(t)dt = \frac{\mathbf{E}(X^2)}{2\mathbf{E}(X)} = \lim_{s\to\infty}\frac{1}{s}\int_0^s B(t)dt.$$

Įrodymas. Integralus galima įsivaizduoti kaip išmokas mokamas visą laiką greičiu $A(t)$ arba $E(t)$ atitinkamai. Kitais žodždžiais tariant, per laiko tarpą dt yra išmokama $A(t)dt$ arba $B(t)dt$.

Laiko ašyje atidėkime atstaymo momentus $S_1 = X_1, S_2 = X_1 + X_2, \ldots$. Tada $S_{N(s)} \le s < S_{N(s)+1}$. Suskaidome integalą į sumą

$$\begin{aligned}\int_0^s A(t)dt &= \sum_{n=1}^{N(s)}\int_{S_{n-1}}^{S_n}(t - S_{n-1})dt \\ &\quad + \int_{S_{N(s)}}^{s}(t - S_{N(s)}dt =: \sum_{n=1}^{N(s)} R_n + \Delta.\end{aligned}$$

Pastebėkime, kad

$$R_n = \int_0^{X_n} vdv = X_n^2/2, \qquad \Delta \le X_{N(s)+1}^2.$$

Galime taikyti 2.5.1 teoremą atstatymo premijų procesui su šiais R_n. Ją įrodinėdami pastebėjome, kad dėmuo, mūsų atveju tai Δ nekliudo. Jam turime $\mathbf{E}(\Delta) = o(s)$, kai $s \to \infty$. Iš minėtos teoremos išplaukia geidžiama lygybė:

$$\lim_{s\to\infty}\frac{1}{s}\int_0^s A(t)dt = \frac{\mathbf{E}(X^2)}{2\mathbf{E}(X)}.$$

Kadangi

$$\int_0^s B(t)dt = \sum_{n=1}^{N(s)}\int_{S_{n-1}}^{S_n}(S_n - t)dt + \int_{S_{N(s)}}^{s}(S_{N(s)+1} - t)dt,$$

tai antrasis teoremos tvirtinimas išplaukia pakartojant samprotavimus.

Raskime a.d. $A(t)$, $B(t)$ ir $X_{N(t)+1}$ skirstinius.

2 teorema. *Jei tarpų tarp atstatymų skirstinio funkcija yra* $F(x)$*, o* $m(t)$ *- atstatymo funkcija, tai*

$$P(A(t) < u) = F(t) - \int_0^{t-u}(1 - F(t-x))dm(x),$$

jei $u \leq t$, *ir* $P(A(t) < u) = 1$, *jei* $u > t$.

Be to,

$$P(B(t) < u) = \int_0^t (F(t-x+u) - F(t-x))dm(x).$$

ir

$$P(X_{N(t)+1} < u) = \int_{t-u}^t (F(u) - F(t-x))dm(x).$$

Įrodymas. Pirmąjį raskite **savarankiškai** pakartoję mūsų argumentus arba pasinaudodami ekvivalentumu $\{A(t) > x\} \Leftrightarrow \{B(t-x) > x\}$.

Antrosios formulės išvedimą pradėkime pastaba. Prisimename išraišką

$$m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x), \quad F_n = F^{*^n},$$

rodančią, kad $m(x)$ yra aprėžta nemažėjanti funkcija, todėl galime kalbėti apie Styltjeso integralą jos atžvilgiu. Sunkiau pastebėti įvykių lygybę:

$$\begin{aligned}\{B(t) < u\} &= \{S_{N(t)+1} < t+u\} = \bigcup_{n=0}^{\infty}\{N(t) = n, \, S_{N(t)+1} < t+u\} \\ &= \bigcup_{n=0}^{\infty}\{S_n \leq t < S_{n+1} < t+u\}.\end{aligned}$$

Nagrinėjame vieną šios sąjungos įvykių. Jei $S_n = x \leq t$, tai $S_{n+1} = x + X_{n+1} \in (t, t+u)$ arba $X_{n+1} \in (t-x, t+u-x)$. Dėl X_{n+1} ir S_n nepriklausomumo turime

$$\begin{aligned}P(B(t) < u) &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t P(X_{n+1} \in (t-x, t-x+u))dP(S_n < x) \\ &= \int_0^t (F(t-x+u) - F(t-x))dm(x).\end{aligned}$$

Panašiai

$$\begin{aligned}\{X_{N(t)+1} < u\} &= \{S_{N(t)+1} - S_{N(t)} < u\} = \bigcup_{n=0}^{\infty}\{N(t) = n, \, S_{n+1} - S_n < u\} \\ &= \bigcup_{n=0}^{\infty}\{S_n \leq t < S_n + X_{n+1}, \, X_{n+1} < u\} \\ &= \bigcup_{n=0}^{\infty}\{t-u < S_n \leq t, \, X_{n+1} \in (t-S_n, u)\}.\end{aligned}$$

Iš čia išplaukia trečioji teoremos lygybė.

Įrodyta.

Nenustebkite, kad įvairios knygos pateikia skirtingas formules. Jos yra ekvivalenčios. Patikrinimui siūlome taikyti atstatymo lygtį arba sekančio skyrelio lemą.

UŽDUOTIS. Apskaičiuokite pastarojoje teoremoje gautus skirstinius, kai $N(t)$ yra Puasono procesas.

3 teorema. *Jei atsitiktiniai dydžiai X_k yra negardeliški, tai*

$$\lim_{t\to\infty} P(B(t) < u) = \frac{1}{\mu}\int_0^u (1 - F(s))ds$$

Jei atsitiktiniai dydžiai X_k yra gardeliški su žingsniu d, tai

$$\lim_{n\to\infty} P(B(nd) \le kd) = \frac{d}{\mu}\sum_{j=0}^{k-1}(1 - F(jd)).$$

Įrodymas gana nelengvas. Palikime tai ateičiai.

Dydžių gardeliškumas dažnai keičia formulių pavidalą. Prisimename, kad atstatymo funkcija $m(t)$ tenkina sąsūkos lygtį:

$$m(t) = F(t) + (m \star F)(t) = F(t) + \int_0^t m(t-x)dF(x)$$

Jei $X := X_1$ yra gardeliškas, tai $f_k = P(X_1 = kd)$, čia d yra fiksuotas maksimalus žingsnis, o $k \in \mathbf{Z}^+$. Tada

$$m(nd) = \sum_{m=1}^{\infty} P(S_m \le nd) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{m=1}^{\infty} P(S_m = kd) =: \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Todėl iš atstatymo lygties, skaičiuojant skirstinių prieauglius taške nd, gauname

$$u_n = f_n + \sum_{k=0}^{n} u_{n-k} f_k.$$

Iš tiesų, kai $d = 1$,

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{m=1}^{\infty} P(S_{m-1} + X = n) = \sum_{k=0}^{n} f_k \sum_{m=1}^{\infty} P(S_{m-1} = n-k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f_k u_{n-k} + f_n\Big(1 + \sum_{m=2}^{\infty} P(S_{m-1} = 0)\Big) = \sum_{k=0}^{n} f_k u_{n-k} + f_n. \end{aligned}$$

Čia pasinaudojome S_{m-1} ir $X = X_n$ nepriklausomumu ir faktu, kad tuščia suma lygi nuliui.

2.8 Sąsūkos lygtys ir Laplaso transformacijos

Nagrinėsime funkcijas, kurios lygios nuliui neigiamoje pusašėje. Kaip rodo atstatymo lygtis, funkcijų sąryšiai, kuriuose naudojama sąsūkos operacija, yra labai svarbūs. Nesiekdami didelio bendrumo, dar kartą panagrinėkime atstatymo lygčių sprendimą. Dabar panaudosime Laplaso transformacijas.

Teorema. *Tegul $F(t)$ (skirstinio pusašyje $t \geq 0$ funkcija, F(0)=0) ir funkcija $h(t)$ (aprėžta monotoniška srityje $t \geq 0$) yra žinomos, o $g(t)$ - nežinoma funkcija. Tada lygties*

$$g(t) = h(t) + \int_0^t g(t-x)dF(x), \quad t \geq 0,$$

sprendinys, adityvios konstantos tikslumu, užrašomas taip:

$$g(t) = h(t) + \int_0^t h(t-x)dm(x).$$

Čia

$$m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)$$

yra atstatymo funkcija, o $F_n(t)$ - n-lypė sąsūka.

Įrodymas. Užrašykime lygtį trumpiau

$$g = h + g \star F.$$

Imkime funkcijų Laplaso transformacijas. Funkcijos $G(x)$, apibrėžtos teigiamoje pusašėje, Laplaso transformacija yra

$$\hat{G}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx}dG(x), \quad s \in \mathbf{C},$$

jei šis integralas egzistuoja. Žinoma, kad $\hat{g}(s)$ apibrėžia pačią funkciją $g(x)$ adityvios konstantos tikslumu. Kadangi $\widehat{G \star H} = \hat{G} \cdot \hat{H}$, tai lygtis virsta lygtimi transformacijoms

$$\hat{g} = \hat{h} + \hat{g}\hat{F}.$$

Todėl

$$\hat{g} = \frac{\hat{h}}{1-\hat{F}} = \hat{h} + \hat{h}\frac{\hat{F}}{1-\hat{F}}.$$

Bet
$$\hat{m} = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{F}_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\hat{F})^n = \frac{\hat{F}}{1-\hat{F}}.$$
Įstatę randame sprendinio Laplaso transformaciją
$$\hat{g} = \frac{\hat{h}}{1-\hat{F}} = \hat{h} + \hat{h} \cdot \hat{m}.$$
Grįždami prie pačių funkcijų, pastebėję, kad galima adityvioji konstanta dėl sąlygos reikšmėms nuliniame taške lygi nuliui, baigiame įrodymą.

Taip sprendžiant atsiradusią neapibrėžtą konstantą galima rasti palyginus funkciju reikšmes kokiame nors taške.

Pateiksime vieną taikymo pavyzdį.

Nagrinėkime populiaciją, kylančią iš vieno organizmo, kuris savo gyvenimo pabaigoje palieka $k = 0, 1 \ldots$ *taip pat besielgiančių individų su tikimybėmis* p_k*,*
$$m := \sum_{k=0}^{\infty} k p_k > 1.$$
Tarkime, organizmai elgiasi nepriklausomai vienas nuo kito, o jų gyvenimo trukmės T_i *yra a.d. su tuo pačiu negardelišku skirstiniu* $F(x)$*. Tegul* $X(t)$ *yra gyvų organizmų skaičius laiko momentu* $t \geq 0$*. Rasti* $M(t) := \mathbf{E}(X(t))$*.*

Sprendimas. Skaičiuodami $M(t)$ vidurkiname pagal pirmojo individo amžių. Gauname
$$M(t) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(X(t)|\, T_1) = \int_0^{\infty} \mathbf{E}(X(t)|\, T_1 = s) dF(s).$$
Tegu pirmasis organizmas gyveno $T_1 = s \leq t$ laiko ir paliko atsitiktinį skaičių j palikuonių. Tada gyvų organizmų skaičius momentu t gali būti užrašytas suma $Y_1 + \cdots + Y_j$ nepriklausomų a.d., kurių kiekvieno skirstinys yra tas pats kaip ir $X(t-s)$. Čia Y_i yra skaičius i-o individo generuotos serijos, susidedančios iš vaikų, vaikaičių,.. (o gal tik iš jo vieno), esančių gyvų momentu t. Todėl jei j fiksuotas, šios sumos vidurkis yra $jM(t-s)$. Vidurkinant pagal j, gauname
$$\mathbf{E}(X(t)|\, T_1 = s) = mM(t-s).$$
jei $s \leq t$.

Jei $s > t$, tai
$$\mathbf{E}(X(t)|\, T_1 = s) = 1.$$

Vadinasi,

$$M(t) = 1 - F(t) + m\int_0^t M(t-s)dF(s). \qquad (1)$$

Pasirodęs daugiklis m, neleidžia taikyti lemos, todėl tenka redukuoti lygtį. Įveskime naują funkciją

$$F_\alpha(s) = m\int_0^s e^{-\alpha y}dF(y)$$

Iš čia išplaukia

$$dF_\alpha(s) = me^{-\alpha s}dF(s).$$

Padauginę (1) lygybę iš $e^{\alpha t}$, ją perrašome

$$e^{-\alpha t}M(t) = (1-F(t))e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)}M(t-s)dF_\alpha(s).$$

Mūsų lemoje tokioje lygtyje po diferencialo ženklu turi būti skirstinio funkcija. Todėl parinkime α, tenkinantį tokią sąlygą

$$\hat{F}(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha t}dF(t) = \frac{1}{m}.$$

Kadangi α atžvilgiu integralas yra monotoniškai mažėjanti funkcija, $\hat{F}(0) = 1$, $\hat{F}(\infty) = 0$, o $m > 1$, šis sprendinys yra vienintelis. Dabar $F_\alpha(s)$ yra skirstinio, sukoncentruoto teigiamoje pusašėje, funkcija ir galime taikyti lemą, kai $g(t) = e^{-\alpha t}M(t)$. Gauname **atsakymą:**

$$M(t) = 1 - F(t) + \int_0^t e^{\alpha s}(1-F(t-s))dm_\alpha(s).$$

Čia

$$m_\alpha(s) = \sum_{n=1}^\infty F_\alpha^{*^n}(s)$$

yra atstatymo funkcija tik naujai apibrėžtam skirstiniui.

Įdomiau būtų rasti asimptotinę elgseną, kai $t \to \infty$. Tam padėtų sekančio skyrelio medžiaga.

2.9 Pagrindinės atstatymo teoremos

Suformuluosime jas.

1 (Blackwell'o) teorema. *Jei a.d. X_1 yra negardeliškas, tai*

$$m(t) - m(t-h) \to \frac{h}{\mu}.$$

Jei a.d. X_1 yra gardeliškas su žingsniu d, tai

$$u_n = \sum_{m=1}^{\infty} P(S_m = nd) \to \frac{d}{\mu}.$$

Čia abi ribos lygios nuliui, kai $\mu = \infty$.

Puasono procesui turime

$$m(t) = \lambda t, \qquad \mu = 1/\lambda,$$

tad, pirmasis sąryšis yra netgi tikslus. Dydis u_n yra tikimybė, kad n-as atstatymas vyks momentu nd. Jis tenkina rekurentųjį sąryšį, išvestą 2.7 skyrelyje. Būtent,

$$u_n = f_n + \sum_{k=0}^{n} f_k u_{n-k}, \quad f_k = P(X = k).$$

Pagrindinė atstatymo teorema. *Tegul a.d. X_1 yra negardeliškas. Jei $G(t)$, $t \geq 0$, yra aprėžta neneigiama nedidėjanti funkcija ir integruojama funkcija, tai*

$$\int_0^t G(t-s)dm(s) \to \frac{1}{\mu}\int_0^{\infty} G(s)ds, \quad t \to \infty.$$

Tegul a.d. X_1 yra gardeliškas su žingsniu d. Jei $G(t)$, $t \geq 0$, yra neneigiama funkcija ir

$$\sum_{n=0}^{\infty} G(nd) < \infty,$$

tai

$$\sum_{k=0}^{n} G(nd - kd)u_{kd} \to \frac{d}{\mu}\sum_{k=0}^{\infty} G(kd), \quad n \to \infty.$$

Anksčiau suformuluota teorema apie liekamąją išgyvenimo elgseną yra pagrindinės atstatymo teoremos išvada. Iš tiesų,

$$
\begin{aligned}
P(B(t) > x) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(S_{n-1} \le t, S_n > t + x) \\
&= P(X_1 > t + x) + \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t P(X_n > t + x - s) dF_{n-1}(s) \\
&= 1 - F(t + x) + \int_0^t (1 - F(t + x - s)) dm(s).
\end{aligned}
$$

Lieka pritaikyti pagrindinę teoremą. Perėję prie ribos, kai $t \to \infty$, gauname

$$
P(B(t) > x) \to \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} (1 - F(x + s)) ds = \frac{1}{\mu} \int_x^{\infty} (1 - F(s)) ds,
$$

jei $t \to \infty$.

Viena iš idėjų, kaip rodyti pagrindinę atstatymo teoremą, negardeliškų a.d. atveju, jei Blackwell'o t. jau įrodyta, galėtų būti tokia:.

Turime

$$
\lim_{h \to 0} \lim_{t \to \infty} \frac{m(t + h) - m(t)}{t} = \frac{1}{\mu}.
$$

Jei pagrįstume šių ribų sukeitimą, tai gautume išvestinės elgesį

$$
\lim_{t \to \infty} \frac{d\,m(t)}{dt} = \frac{1}{\mu}.
$$

Lieka motyvuoti, kodėl galime pereiti prie ribos šiame integrale:

$$
\lim_{t \to \infty} \int_0^t G(t - x) dm(x).
$$

2.10 Vėluojantysis atstatymo procesas

Pradėkime nuo apibrėžimo. Skaičiuojantysis procesas, kai pirmojo įvykio pasirodymo laikas X_1 turi skirtingą skirstinį, visi kiti laiko tarpai X_k, $k \ge 2$ yra vienodai pasiskirstę ir visumoje dydžiai X_k, $k \ge 1$ yra nepriklausomi, vadinamas *vėluojančiuoju atstatymo procesu*. Pažymėkime $G(x)$ a.d. X_1 ir, kaip seniau, $F(x)$ - a.d. X_k, $k \ge 2$, skirstinio funkcijas. Tegul μ yra pastarųjų dydžių vidurkis. Kokie vėluojančiųjų atstatymo procesų ypatumai? Pažymėkime jį

$$N_D(t) = max\{n : \ S_n \leq t\}.$$

Dabar

$$P(S_n \leq x) = G \star F^{*^{(n-1)}}(x),$$

$$P(N_D(t) = n) = P(S_n \leq t) - P(S_{n+1} \leq t) = G \star F^{*^{(n-1)}}(t) - G \star F^{*^{n}}(t).$$

ir

$$m_D(t) = \mathbf{E}(N_D(t)) = \sum_{n=1}^{\infty} G \star F^{*^{(n-1)}}(t).$$

Laplaso transformacijoms galioja lygybė

$$\hat{m}_D(s) = \frac{\hat{G}(s)}{1 - \hat{F}(s)}.$$

Atstatymo lygtis irgi išvedama pakartojant argumentus:

$$\begin{aligned} m_D(t) &= \int_0^{\infty} \mathbf{E}(N_D(t) | \, X_1 = x) dG(x) \\ &= \int_0^{t} (1 + m(t - x)) dG(x). \end{aligned}$$

Pastebėkite skirtumą: čia atsirado atstatymo funkcija $m(x)$, apibrėžta per $F(x)$, t.y.

$$m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t).$$

Pagrindinius teiginius suformuluosime vienoje teoremoje.

1 teorema.

(i) *Su tikimybe vienetas*

$$N_D(t)/t \to 1/t, \qquad t \to \infty;$$

(ii) $$m_D(t)/t \to 1/\mu, \qquad t \to \infty;$$

(iii) *Jei F nėra gardeliškas, tai*

$$m_D(t + a) - m_D(t) \to a/t, \qquad t \to \infty;$$

(iv) *Jei F ir G yra gardeliški su žingsniu d, tai atstatymo momentu nd tikimybė*

$$\sum_{m=1}^{\infty} P(S_m = nd) \to d/\mu, \qquad n \to \infty.$$

Svarbus vėluojančių atstatymo procesų atvejis, kai G yra *pusiausvyros skirstinys*, t.y. sutampa su tokia funkcija

$$F_e(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x (1 - F(y))dy.$$

Tada patį procesą vadiname *pusiausvyros atstatymo procesu.* Šią sąvoką paaiškina tokia teorema.

2 teorema. *Pusiaussvyros atstatymo procesui turime*

$$\text{(i)} \qquad\qquad m_D(t) = t/\mu;$$

(ii) *Jei $B_D(t) = S_{N_D(t)+1} - t$ yra liekamasis išgyvenimas, tai visiems $t \geq 0$*

$$P(B_D(t) < x) = F_e(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x (1 - F(y))dy.$$

Įrodymas. Skaičiuojame Laplaso transformacijas. Gauname

$$\begin{aligned}
\hat{F}_e(s) &= \int_0^\infty e^{-sx} dF_e(x) = \int_0^\infty e^{-sx} \frac{1 - F(x)}{\mu} dx \\
&= \frac{1}{\mu s} - \int_0^\infty e^{-sx} \frac{dF(x)}{\mu s} = \frac{1 - \hat{F}(s)}{\mu s}.
\end{aligned}$$

Prisiminę anksčiau išvestą $\hat{m}_D(s)$ formulę, tesiame

$$\hat{m}_D(s) = \frac{1 - \hat{F}(s)}{\mu s(1 - \hat{F}(s))} = \frac{1}{\mu s}.$$

Bet ir funkcijos $h(t) = t\mu$ Laplaso transformacija yra tokia pat. Taške $t = 0$ turime $h(0) = m_D(0) = 0$, ši Laplaso transformacija apibrėžia tą pačią funkciją. Vadinasi,

$$m_D(t) = h(t) = t/\mu.$$

Įrodome antrąjį teiginį. Pradedame nuo lygybės

$$P(B_D(t) > x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(B_D(t) > x,\, N_D(t) = n).$$

Pirmasis dėmuo lygus

$$P(B_D(t) > x,\, N_D(t) = 0) = P(X_1 > x + t) = 1 - G(t + x).$$

Jei $n \geq 1$, gauname

$$\begin{aligned}
& P(B_D(t) > x,\, N_D(t) = n) \\
= & \int_0^{\infty} P(B_D(t) > x,\, N_D(t) = n |\, S_n = y) d(G \star F_{n-1}(y)) \\
= & \int_0^{t} P(X_{n+1} > x + t - y) d(G \star F_{n-1}(y)) \\
= & \int_0^{t} (1 - F(x + t - y)) d(G \star F_{n-1}(y))
\end{aligned}$$

Įstatome gautąsias išraiškas ir gauname

$$\begin{aligned}
P(B_D(t) > x) &= 1 - G(t + x) + \int_0^t (1 - F(x + t - y)) d\Big(\sum_{n=0}^{\infty} G \star F_{n-1}(y)\Big) \\
&= 1 - G(t + x) + \int_0^t (1 - F(x + t - y)) dm_D(y).
\end{aligned}$$

Jei dabar $G = F_e$ yra pusiausvyros skirstinys, tai galime pasinaudoti įrodytu teiginiu (i). Tada $m_D(y) = y/\mu$ ir

$$\begin{aligned}
P(B_D(t) > x) &= 1 - \frac{1}{\mu} \int_0^{t+x} (1 - F(y)) dy \\
&\quad + \int_0^t (1 - F(x + t - y)) d\frac{y}{\mu} \\
&= 1 - \frac{1}{\mu} \int_0^{x} (1 - F(y)) dy.
\end{aligned}$$

Teorema įrodyta. Iš (ii) galima būtų išvesti, kad procesas $N_D(t)$ turi stacionarius prieaugius.

Pateiksime pavyzdį, kaip galima taikyti teoremas atstatymo laiko tarpų vidurkiui nustatyti.

Užduotis. Stebime nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių Bernulio a.d. $\varepsilon 1, \varepsilon_2, \ldots$, *įgyjančių nulines ir vienetines reikšmes, seką. Pvz., jos realizacija galėjo būti tokia:*

$$0011011001101101000101 10...,$$

čia

$$P(\varepsilon_1 = 1) = p, \qquad P(\varepsilon_1 = 0) = q.$$

Vorelė 0110 kartojasi. Ji baigiasi sekoje, kai sekos narių numeriai yra 5, 8, 12,... Tarpai tarp šių numerių yra a.d. X_k. *Rasti jo vidurkį.*

Sprendimas. Jei $I_k := \mathbf{1}\{vorele\ baigiasi\ k - oje\ pozicijoje\}$, tai

$$N(t) = \sum_{k \le t} I_k$$

yra vėluojantis atstatymo procesas. Kol $0 \le t < 4$, tol $N(t) = 0$. Momentuose 4,5,... gali baigtis vorelės, t.y. būti atstatymai. A.d. X_k yra gardeliški su vienetiniu žingsniu, nes tarpai 3,4,... atsiranda su teigiamomis tikimybėmis. Pirmasis tarpas $X_1 \ge 4$; šios savybės nebeturi kiti a.d. $X_k \ge 3$, $k \ge 2$, jie yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę. Taikome pirmos teoremos (iv) dalį. Tiriame tikimybę įvykti atstatymui momentu n. Ji lygi

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{m=1}^{\infty} P(S_m = n) \\ &= P(\varepsilon_{n-3} = \varepsilon_n = 0, \varepsilon_{n-2} = \varepsilon_{n-1} = 1) = p^2 q^2, \quad n \ge 4. \end{aligned}$$

Net be ribinio perėjimo, kai $n \to \infty$, iš šios teoremos (iv) dalies išplaukia **atsakymas:** $\mu = 1/(p^2 q^2)$.

2.11 Alternuojantysis atstatymo procesas

Panagrinėkime *alternuojantįjį* atstatymo procesą. Tai toks procesas, kada tarpai tarp atstatymų susideda iš dviejų atsitiktinių, gal būt priklausomų dalių Z_k ir Y_k, t.y. $X_k = Z_k + Y_k$. Taikomuosiuose uždaviniuose jie aprašo sistemas esančias dviejose iš eilė besikeičiančiose būsenose, pvz., įjungta ir išjungta. Tegul Z ir Y šių a.d. nepriklausomos kopijos, o F_Z ir F_Y - skirstiniai. Įvykis, kad sistema veikia, sutaps su $\{S_n \le t < S_n + Z_{n+1}\}$ kažkokiam $n \ge 0$.

1 teorema. *Jei alternuojantį atstatymo proceso laiko tarpus apibrėžia a.d. poros* (Z_k, Y_k)*,* $k \geq 1$ *yra nepriklausomi a. vektoriai su vienodu negardelišku skirstiniu ir a.d.* $Z + Y$ *turi baigtinį vidurkį, tai*

$$\lim_{t\to\infty} P(\textit{sistema veikia momentu } t) =: \lim_{t\to\infty} P(t) = \frac{\mathbf{E}(Z)}{\mathbf{E}(Z+Y)}.$$

Įrodymas. Tegul $H(x)$ yra sumos $Z + Y$ skirstinio funkcija. Sąlyginame atžvilgiu pirmojo atstatymo momento $Z_1 + Y_1$ ir gauname

$$P(t) = \int_0^\infty P(\textit{sist. veikia momentu } t|\, Z_1 + Y_1 = x) dH(x).$$

Procesas momentu $Z_1 + Y_1$ atsistato, todėl

$$P(\textit{sist. veikia mom. } t|\, Z_1{+}Y_1 = x) = \begin{cases} P(t-x), & \text{jei} \quad x \leq t \\ P(Z_1 > t|\, Z_1 + Y_1 = x), & \text{jei} \quad x > t. \end{cases}$$

Todėl

$$P(t) = \int_0^t P(t-x)dH(x) + \int_t^\infty P(Z_1 > t|\, Z_1 + Y_1 = x)dH(x).$$

Kadangi $Y_1 \geq 0$, tai

$$\int_0^t P(Z_1 > t|\, Z_1 + Y_1 = x)dH(x) = 0,$$

o

$$\int_0^\infty P(Z_1 > t|\, Z_1 + Y_1 = x)dH(x) = P(Z_1 > t) = 1 - F_Z(t).$$

Vadinasi,

$$P(t) = 1 - F_Z(t) + \int_0^t P(t-x)dH(x).$$

Panaudoję 2.7 skyrelio lemą, užrašome sprendinį

$$P(t) = 1 - F_Z(t) + \int_0^t (1 - F_Z(t-x))dm_H(x).$$

Čia $m_H(x)$ yra atstatymo funkcija, apibrėžta per skirstinį $F_{Z+Y}(x)$.

Iš pagindinės atstatymo teoremos išplaukia

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \left(\int_0^\infty x dH(x)\right)^{-1} \int_0^\infty (1 - F_Z(t))dt = \frac{\mathbf{E}(Z)}{\mathbf{E}(Z) + \mathbf{E}(Y)}.$$

Įrodyta.

Chapter 3

Markovo atstatymo procesai

3.1 Markovo grandinės

Tai kartojimo medžiaga, todėl ją perbėgsime greitai. Nagrinėkime stochastinį diskretaus laiko procesą $\{X_n,\ n = 0, 1, \ldots\}$ su reikšmėmis (būsenomis) $i \in \mathbf{Z}^+$. Jis vadinamas *Markovo* grandine, jei bet kokiam būsenų rinkiniui $i_0, \ldots, i_{n-1}; i, j$ yra patenkinta sąlyga

$$P(X_{n+1} = j |\, X_0 = i_0, \ldots X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = P(X_{n+1} = j |\, X_n = i).$$

Jei šios *perėjimo tikimybės* nepriklauso nuo laiko parametro n, grandinė vadinama *homogenine*. Tokiu atveju, pažymėkime

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j |\, X_n = i).$$

Čia per vieną žingsnį pereinama iš būsenos i į būseną j. Šios tikimybės apibrėžia perėjimo tikimybių matricą

$$P = ((p_{ij})),$$

kuri yra begalinė, jei būsenų aibė begalinė. Skaičiuojant perėjimo tikimybes per keletą žingsnių, gaunama Kolmogorovo-Čepmeno formulė.

1 teorema. *Tegul*

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j |\, X_0 = i), \qquad P^{(n)} = ((p_{ij}^{(n)})).$$

Bet kokiam $r \le n$ yra teisinga lygybė

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}^{(r)} p_{kj}^{(n-r)}.$$

Be to,

$$P^{(n)} = P^{(r)}P^{(n-r)}.$$

Įrodymas turėtų būti žinomas.

Pastebėkime, kad mūsų žymėjime $p_{ij}^{(0)} = 0$, jei $i \neq j$ ir $p_{ii}^{(0)} = P(X_0 = i|X_0 = i) = 1$.

Homogeninę Markovo grandinę su būsenų aibe $\mathbf{Z}^+$ apibrėžia matrica P ir pradinis reikšmių skirstinys $\bar{p} = (p_0, \ldots, p_i, \ldots)$. Sandauga

$$\bar{p}P = \left(\sum_{i=0}^{\infty} p_i p_{i0}, \ldots, \sum_{i=0}^{\infty} p_i p_{ij}, \ldots\right) = (P(X_1 = 0), \ldots, P(X_1 = j), \ldots)$$

apibrėžia proceso reikšmės X_1 skirstinį.

Kaip įprasta procesų teorijoje, Markovo grandinė yra *stacionari*, jei kiekvienam $k \geq 0$ vektoriaus $(X_n, \ldots, X_{n+k})$ skirstinys yra tas pats visiems $n \geq 0$. Vadinasi, homogeniškumo sąlyga neužtikrina pastarojo reikalavimo. Kad homogeninė Markovo grandinė būtų stacionari reikia bent jau lygybės

$$p_j = P(X_0 = j) = P(X_1 = j) = \sum_{i=0}^{\infty} P(X_1 = j, X_0 = i) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i p_{ij}.$$

Trumpiau rašant, turi būti stacionarumo sąlyga $\bar{p}P = \bar{p}$. Įsitikinkite, kad ji yra ir pakankama grandinės stacionarumo sąlyga!

Jei kuriam nors $n \geq 0$ turime $p_{ij}^{(n)} > 0$, sakome, kad būsena j yra *pasiekiama* iš i. Jei $p_{ij}^{(m)} > 0$ ir $p_{ji}^{(n)} > 0$ su kažkokiais $n, m \geq 0$, tai i ir j būsenos yra *susisiekiančiosios*. Žymėkime $i \leftrightarrow j$.

Visa būsenų aibė suskaidoma į susisiekiančių būsenų klases. Jos nusako ekvivalentumo sąryšį. Markovo grandinė, turinti tik vieną klasę, vadinama *neredukuojama*.

Būsenos i *periodu* vadiname didžiausią bendrąjį daliklį tokių skaičių n, kuriems $p_{ii}^{(n)} > 0$. Jį žymėsime $d(i)$. Jei $d(i) = 1$, tai i yra *neperiodinė* būsena. Vienoje klasėje esančios būsenos yra arba periodinės, arba neperiodinės.

2 teorema. *Jei $i \leftrightarrow j$, tai $d(i) = d(j)$.*

Įrodymas. Pakanka įrodyti, kad $d(j)|d(i)$, t.y. dalija vienas kitą. Turime $p_{ij}^{(n)} > 0$ ir $p_{ji}^{(m)} > 0$. Iš 1 teoremos išplaukia

$$p_{jj}^{(n+m)} \geq p_{ji}^{(m)} p_{ij}^{(n)} > 0.$$

Vadinasi, $d(j)|(n+m)$. Jei $p_{ii}^{(s)} > 0$, tai $d(i)|s$ ir

$$p_{jj}^{(n+m+s)} \geq p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(s)} p_{ij}^{(n)} > 0.$$

Vadinasi, $d(j)|(n+s+m)$. Iš abiejų dalumo sąryšių gauname $d(j)|s$. Bendrasis daliklis dalija didžiausią iš jų, t.y. $d(j)|d(i)$.

Įrodyta.

Pažymėkime $f_{ij}^{(0)} = 0$ ir $f_{ij}^{(n)}$ tikimybę, kad einant iš būsenos i į būseną j pirmą kartą patenkama n-uoju žingsniu. Aišku, kad $f_{ij}^{(1)} = p_{ij}$. Suma

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$$

reiškia tikimybę iš i po kažkiek žingsnių patekti į būseną j pirmą kartą. Jei $f_{jj} = 1$, tai j vadinama *grįžtamąja būsena* ir - *pereinamąja* priešingu atveju.

Suma

$$G(i,j) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)}$$

vadinama Markovo grandinės *Gryno funkcija.* Kadangi

$$\mathbf{E}(\mathbf{1}\{X_n = j\}|X_0 = i) = p_{ij}^{(n)},$$

tai

$$G(i,j) = \mathbf{E}\Big(\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}\{X_n = j\}\Big)|X_0 = i\Big)$$

yra vizitų į būseną j skaičiaus vidurkis, kai pradžioje grandinė yra i-oje būsenoje.

3 teorema. *Būsena j yra pereinamoji tada ir tik tada, jei*

$$G(j,j) < \infty.$$

Įrodymas. Kaip pastebėjome, teoremos sąlyga reiškia, kad apsilankymų būsenoje j skaičiaus sąlyginis vidurkis, kai $X_0 = j$, yra baigtinis. Vadinasi, ir pats apsilankymų skaičius yra baigtinis su tikimybe vienetas. Kadangi perėjimo tikimybės nepriklauso nuo n, patekusi į šią viršūnę, grandinė toliau elgiasi taip pat. Jei tikimybė $f_{jj} = 1$, būsenoje j grandinė turėtų lankytis be galo daug kartų. Vadinasi, $f_{jj} < 1$ ir būsena yra pereinamoji.

Jei būsena pereinamoji, t.y. $f_{jj} < 1$, o $X_0 = j$, tai apsilankymų skaičius per visą laiką $N(\infty)$ būsenoje j turi skirstinį

$$P(N(\infty) = k) = f_{jj}^{k-1}(1 - f_{jj}), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Daugiklis $1 - f_{jj}$ atsiranda dėl to, kad mes skaičiuojame apsilankymus lygiai k kartų. Iš tiesų, kai $k = 1$, pradžioje grandinei būnant būsenoje j, jau turime apsilankymą, bet ji turi ten nebegrįžti. Todėl ir tikimybė lygi $1 - f_{jj}$. Antrasis apslilankymas turės tikimybę $f_{jj}(1 - f_{jj})$ ir t.t. Todėl vidurkis

$$\mathbf{E}(N(\infty)) = 1/(1 - f_{jj}) = G(j, j) < \infty. \tag{3.1}$$

Teoremos sąlyga yra būtina.

Įrodyta.

Galima būtų įrodyti, kad visos vienos klasės būsenos yra arba grįžtamosios arba pereinamosios. Todėl turi prasmę toks apibrėžimas: neredukuojama Markovo grandinė yra *grįžtamoji*, jei visos jos būsenos yra grįžtamosios, ir - *pereinamoji* priešingu atveju.

UŽDUOTYS:

1. *Išveskite sąryšį*

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{s=1}^{n} f_{ij}^{(s)} p_{jj}^{(n-s)}, \quad n \geq 1.$$

2. *Apibrėžkite tikimybių generuojančias funkcijas*

$$P_{ij}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} z^n, \qquad F_{ij}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ij}^{(n)} z^n, \quad z \in \mathbf{C}, \ |z| \leq 1.$$

ir išveskite sąryšius

$$P_{ij}(z) = P_{jj}(z)F_{ij}(z), \quad i \neq j,$$

$$P_{jj}(z) = 1 + P_{jj}(z)F_{jj}(z).$$

Įrodykite (3.1) panaudodami paskutinę lygybę.

3. *Išnagrinėkite atsitiktinį klaidžiojimą sveikųjų skaičių aibėje, jei perėjimo tikimybės yra tokios:*

$$p_{n,n+1} = p = 1 - p_{n,n-1}, \quad 0 < p < 1, \ n \in \mathbf{Z}.$$

Įsitikinkite, kad ši grandinė yra neredukuojama ir ji yra grįžtamoji tik vienu atveju, kai $p = 1/2$.

3.2 Atstatymo procesai Markovo grandinėje

Tarkime, kad būsena j yra grįžtamoji, o $N_j(t)$ - skaičiuoja grandinės vizitų į būseną j skaičių iki momento $t \geq 0$. Pirmasis apsilankymo momentas, jei $i \neq j$, gali turėti skirtingą skirstinį, negu sekantys tarpai tarp apsilankymų, kurie yra vienodai pasisiskirstę ir nepriklausomi a.d.. Todėl $N_j(t)$ yra vėluojantysis atstatymo procesas. Tokiam procesui su tikimybe vienetas $N_j(\infty) = \infty$, nes būsena yra grįžtamoji.

Kokie laiko intervalų tarp atstatymų skirstiniai? Laiko intervalai yra tarpai tarp grandinės žingsnių, todėl yra diskretūs a.d. Iki pirmojo atstatymo, t.y. patekimo iš i į j būseną, grandinė galėjo sugaišti $n = 1, 2, \dots$ žingsnių. Pakeisdami laiko intervalo tarp įvykių X_k žymenį, buvusį atstatymo procesų teorijoje, į T_k, turime laiko intervalo iki pirmojo atstatymo skirstinį

$$P(T_1 = n) = f_{ij}^{(n)}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Kiti atstatymai (patekimai į j būseną) vyksta vienodai. Laiko intervalai X_k, $k \geq 2$, tarp jų (žingsnių skaičius) turi skirstinį

$$P(T_k = n) = f_{jj}^{(n)}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Šio skirstinio vidurkis

$$\mu_{jj} := \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}^{(n)}$$

gali būti ir begalinis. Jei jis baigtinis, sakoma, kad būsena yra *teigiamai grįžtamoji* ir - *nulgrįžtamoji*, priešingu atveju. Bet kuri iš šių savybių galioja visoms vienos klasės būsenoms vienu metu. Bet apie tai vėliau.

Jei būsena j yra pereinamoji, kaip įrodėme pereitame skyrelyje, vizitų joje skaičiaus vidurkis yra baigtinis ir net pačių vizitų skaičius yra baigtinis su vienetine tikimybe. Vadinasi, atstatymai nutrūksta. Tokiais atvejais yra įvedami atstatymo procesai su atstatymų tarpiniais intervalais, galinčiais įgyti ir begalinę reikšmę su teigiama tikimybe. Mes plačiau jų nenagrinėsime.

Žemiau suformuluota teorema yra teisinga ir pereinamųjų būsenų atveju. Todėl susitarkime, kad $\mu_{jj} = \infty$, jei būsena j yra pereinamoji.

1 teorema. *Jei $i \leftrightarrow j$, tai*

(i) $P\Big(\lim_{t\to\infty} N_j(t)/t = 1/\mu_{jj} | X_0 = i\Big) = 1;$

(ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)} = \frac{1}{\mu_{jj}};$

(iii) jei j yra neperiodinė, tai

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\mu_{jj}};$$

(iv) jei j yra periodinė su periodu $d := d(j) > 1$, tai

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(nd)} = \frac{d}{\mu_{jj}}.$$

Įrodymas. Nagrinėkime tik grįžtamosios būsenos atvejį. Taikome 2.9.1 teoremą vėluojančiam atstatymo procesui $N_j(t)$. Pirmasis teiginys išplaukia iš (i) dalies.

Nagrinėdami Gryno funkciją pastebėjome, kad teiginyje (ii) užrašyta tikimybių suma yra vizitų būsenoje j iki momento n vidurkis. Todėl antrasis teiginys yra minėtos teoremos (ii) teiginio išvada.

Kadangi tikimybė $p_{ij}^{(n)}$ yra atstatymo funkcijos prieauglis, (iii) ir (iv) yra 2.9.1 teoremos paskutiniųjų teiginių išvados.

Įrodyta.

2 teorema. *Jei $i \leftrightarrow j$ ir i yra nulgrįžtamoji, tai ir j yra tokia.*

Įrodymas. Tegul k ir l tenkina sąlygas

$$p_{ij}^{(k)} > 0, \qquad p_{ij}^{(l)} > 0$$

ir $d = d(i) = d(j)$ yra būsenų periodas. Teoremoje 3.1.2 įrodėme, kad jis yra tas pats. Jei i yra nulgrįžtamoji, tai $\mu_{ii} = \infty$. Vadinasi, pagal 1 teoremą

$$0 = \lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd+k+l)} \geq \limsup_{n\to\infty} p_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(nd)} p_{ji}^{(l)} = p_{ij}^{(k)} \frac{d}{\mu_{jj}} p_{ji}^{(l)}.$$

Iš čia išplaukia $\mu_{jj} = \infty$. Įrodyta.

Prisimename skirstinio $\bar{p} = (p_0, \ldots, p_j, \ldots)$ stacionarumo sąlygą

$$p_j = \sum_{i=0}^{\infty} p_i p_{ij}$$

arba $\bar{p}P = \bar{p}$.

3 teorema. *Tarkime, kad $\{X_n, n \geq 0\}$ yra neredukuojama ir neperiodinė Markovo grandinė. Pažymėkime*

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\mu_{jj}}.$$

Šie teiginiai yra ekvivalentūs:

(i) *grandinė yra teigiamai grįžtama;*

(ii) *egzistuoja stacionarus skirstinys;*

(iii) $\bar{\pi} = (\pi_0, \ldots)$ *yra vienintelis stacionarus skirstinys; be to, jei* $x_j > 0$ *kiekvienam* $j \geq 0$, $\bar{x} = (x_0, \ldots)$ *ir* $\bar{x}P = \bar{x}$, *tai* $c := x_0 + x_1 + \cdots < \infty$ *ir* $\bar{x} = c\bar{\pi}$.

Įrodymas. (i)⇒(ii): Kiekvienam j turime $\pi_j > 0$ ir, pagal Kolmogorovo-Čepmeno lygybę,

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}^{(n)} p_{kj}.$$

Iš analizės žinome, kad ribinis perėjimas po eilutės ženklu, kai jos nariai yra neneigiami, gali tik sumažinti šios eilutės reikšmę. Pasikartojant šio teiginio įrodymą, galima imti bet kokį fiksuotą $M \geq 1$ ir vertinti

$$\sum_{k \leq M} \pi_k p_{kj} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j \leq M} p_{ik}^{(n)} p_{kj} \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p_{ik}^{(n)} p_{kj} = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n+1)} = \pi_j.$$

Kadangi M yra bet koks,

$$\pi_j \geq \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k p_{kj}.$$

Panašiai, iš lygybės

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = 1$$

gauname

$$0 < \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \leq 1.$$

Todėl

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \geq \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k p_{kj} = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k \sum_{j=0}^{\infty} p_{kj} = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k.$$

Vadinasi, kiekvienam j

$$\pi_j = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k p_{kj}$$

ir skirstinys $p_j = \pi_j / \sum_k \pi_k$, $j = 0, 1, \ldots$ yra stacionarus.

(ii)⇒(iii): Jei $\bar{p}$ yra stacionarus skirstinys, tai kiekvienam n ir j

$$p_j = \sum_{i=0}^{\infty} p_i p_{ij}^{(n)}.$$

Mažoruojanti eilutė konverguoja, todėl galime pereiti prie ribos po sumos ženklu. Gauname

$$p_j = \sum_{i=0}^{\infty} p_i \pi_j = \pi_j.$$

Vadinasi, $\bar{\pi}$ yra vienintelis stacionarus skirstinys.

(iii)⇒(i): Stacionariam skirstiniui turime $\pi_k > 0$ kažkokiam k. Tegu $\pi_j = 0$. Neredukuojamoje grandinėje kiekvienam $k \geq 0$ rasime tokį n, kad $p_{kj}^{(n)} > 0$. Todėl iš sąryšio

$$0 = \pi_j = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k p_{kj}^{(n)}$$

gauname prieštarą: $0 = \pi_k p_{kj}^{(n)}$.

Pagaliau teigiamai grįžtamai grandinei, turėdami $\bar{x}$ su $x_j > 0$, tenkinantį $\bar{x} = \bar{x}P$, tęsdami gauname ir $\bar{x} = \bar{x}P^n$. Vėl perėję prie ribos elementams išvedame nelygybę $x_j \geq \sum_i x_i \pi_j = c\pi_j$. Taigi, $c < \infty$. Dabar galime mažoruoti eilutę konverguojančia ir išvesti lygybę $x_j = c\pi_j$ kiekvienam $j \geq 0$.

Įrodyta.

Markovo grandinių teorijoje teigiamai grįžtamos neperiodinės grandinės vadinamos *ergodinėmis.*

Neredukuojamos teigiamai grįžtamos periodinės grandinės atveju stacionarųjį skirstinį apibrėžtų tikimybės

$$\pi_j := 1/\mu_{jj} = \lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(nd)}/d.$$

Įsitikinkite!

3.3 Perėjimai iš klasės į klasę

Prisimename Markovo grandinės būsenų aibės skaidinį į susisiekiančių būsenų klases. Joms priklausančios būsenos yra arba grįžtamosios, arba pereinamosios.

1 teorema. *Grįžtamųjų būsenų klasė yra uždara.*

Įrodymas. Tegu G yra grįžtamųjų būsenų klasė, $i \in G$, bet $j \notin G$. Reikia įrodyti, kad $p_{ij} = 0$. Jei būtų priešingai, visiems $n \geq 0$ turėtų galioti nelygybė $p_{ji}^{(n)} = 0$, nes kitaip grandinė galėtų sugrįžti atgal ir j priklausytų klasei G. Jei procesas prasidėtų būsenoje i, su tikimybe nemažesne už $p_{ij} > 0$ mes negalėtume sugrįžti į i. Tai prieštarauja sąlygai $i \in G$.

Įrodyta.

Iš pereinamųjų būsenų klasės grandinė gali patekti į grįžtamųjų klasę. Panagrinėkime šią galimybę. Prisimename tikimybes $f_{ij}^{(n)}$, reiškiančias, kad einant iš būsenos i į būseną j pirmą kartą patenkama n-uoju žingsniu, ir sumą

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)},$$

reiškiančią tikimybę iš i po kažkiek žingsnių patekti į būseną j.

2 teorema. *Tarkime A yra visų pereinamųjų būsenų aibė, o G_j - grįžtamųjų būsenų klasė, kurioje yra j. Tada kiekvienam $i \in T$*

$$f_{ij} = \sum_{k \in A} p_{ik} f_{kj} + \sum_{k \in G_j} p_{ik}.$$

Įrodymas. Prisiminę atstatymo procesą, skaičiuojame

$$\begin{aligned} f_{ij} &= P(N_j(\infty) > 0 | \, X_0 = i) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(N_j(\infty) > 0 | \, X_0 = i, X_1 = k) P(X_1 = k | \, X_0 = i). \end{aligned}$$

Čia pasinaudojome lengvai patikrinama lygybe

$$P(A|B) = \sum_k P(A|BC_k) P(C_k|B),$$

jei $\cup_k C_k$ yra bet koks būtinojo įvykio skaidinys nesutaikomais įvykiais.

Jei $k \in A$, tai pirmoji sąlyginė tikimybė po sumos ženklu yra f_{kj}. Jei $k \in G_j$, tai ji lygi vienetui. Tačiau, kai $k \notin A \cup G_j$ (tai gali būti grįžtamųjų būsenų klasė, kuriai nepriklauso j), ji lygi nuliui. Įstatę šias reikšmes, baigiame įrodymą.

Išnagrinėkime lošėjo uždavinį.

UŽDUOTIS. *Lošėjas, turėdamas $i \geq 1$ litų, dalyvauja lošime, kuriame vieno lito išlošimo tikimybė yra p, o pralošimo $1 - p = q$. Jis nustoja lošti, kai laimikis pasiekia N arba, kai pralošia paskutinį skatiką. Kokia tikimybė, kad jis kada nors išloš norimą sumą?*

Sprendimas. Galime įsivaizduoti, kad lošėjo turima pinigų suma sudaro Markovo grandinę su būsenų aibe $\{0, 1, \dots, N\}$. Joje tik dvi būsenų aibės yra grįžtamosios: $\{0\}$ ir $\{N\}$. Nagrinėjame tikimybes f_{iN} kada nors išlošti turint i Lt. Pastebėkime, kad

$$f_{0N} = 0, \qquad f_{NN} = 1.$$

Taikome ką tik įrodytą teoremą su $p_{ik} = p$, jei $k = i + 1$ ir $i = 1, \dots, N - 1$ bei $p_{ik} = q$, jei $k = i - 1$ ir $i = 1, \dots, N - 1$. Likusiais atvejais $p_{ik} = 0$. Pagal 2 teoremmą turime

$$f_{iN} = \sum_{k=1}^{N-1} p_{ik} f_{kN} + p_{iN} = p f_{i+1,N} + q f_{i-1,N}.$$

Atveju $i = N - 1$ pasinaudojome lygybe $f_{i+1,N} = 1$ ir tuo, kad $p_{N-1,N-1} = 0$.

Trumpumo dėlei praleidę antrąjį indeksą N, gauname rekurenčiąją formulę

$$f_{i+1} - f_i = \frac{q}{p}(f_i - f_{i-1}), \quad i = 1, \dots, N - 1.$$

Vadinasi,

$$f_2 - f_1 = \frac{q}{p} f_1, \; f_3 - f_2 = \frac{q}{p}(f_2 - f_1) = \Big(\frac{q}{p}\Big)^2 f_1 \; \dots,$$

$$f_i - f_{i-1}\Big(\frac{q}{p}\Big)^{i-1} f_1$$

ir

$$1 - f_{N-1} = \Big(\frac{q}{p}\Big)^{N-1} f_1.$$

Sudėdami pirmąsias i lygybių, išvedame

$$f_i - f_1 = f_1\Big(\frac{q}{p} + \Big(\frac{q}{p}\Big)^2 + \cdots \Big(\frac{q}{p}\Big)^{i-1}\Big), \quad i > 1.$$

Todėl $f_i = i f_1$, jei $q/p = 1$, ir

$$f_i = \frac{1 - (q/p)^i}{1 - (q/p)} f_1$$

priešingu atveju.

Pasinaudodami lygybe $f_N = 1$ ir randame f_1. Įstatę jo reikšmę, gauname

$$f_{iN} = \frac{1 - (q/p)^i}{1 - (q/p)^N}, \quad p \neq \frac{1}{2}.$$

Kai $p = 1/2$, turime $f_{iN} = i/N$.

Tarkime N yra begalinis. Kai $p \leq 1/2$, tikimybė išlošti yra nulinė. Tačiau, kai $p > 1/2$, gauname

$$f_{i\infty} = 1 - \Big(\frac{q}{p}\Big)^i.$$

Taigi, turtingesniam, pradedančiam lošimą didesne pinigų suma, ir tikimybės padeda.

3.4 Galtono-Vatsono procesas

Puikus Markovo grandinių pavyzdys, ypač nagrinėjant ribines tikimybes, yra Galtono-Watsono procesas. Dar kartą grįžkime prie 2.7 skyrelyje nagrinėtos populiacijos ir pritaikykime Markovo grandinių teorijos žinias. Priminsime uždavinio sąlygą.

Nagrinėjame populiaciją, kylančią iš vieno organizmo, kuris savo gyvenimo pabaigoje su tikimybėmis p_k, palieka $k = 0, 1 \ldots$ taip pat besielgiančių individų, Tarkime, visi organizmai elgiasi nepriklausomai vienas nuo kito, o jų gyvenimo trukmės T_i yra a.d. su tuo pačiu negardelišku skirstiniu $F(x)$. Tegul $X(t)$ yra gyvų organizmų skaičius laiko momentu $t \geq 0$.

Tada radome sudėtingą atstatymo funkcijos $\mathbf{E}(X(t))$ išraišką. Tolesnė jos analizė rėmėsi atstatymo teoremomis. Galimas ir kitoks požiūris - tirti individų skaičių Z_n n-oje kartoje, $n \geq 0$. Dabar į pragyvenimo trukmę nebeatsižvelgiama. Seka $\{Z_n, n \geq 0\}$ yra Markovo grandinė, ji vadinama *Galtono-Watsono* procesu.

Jei L yra a.d. su skirstiniu $P(L = k) = p_k$, o L_i, $i \geq 1$, - jo nepriklausomos kopijos, tai

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} L_i.$$

1 teorema. *Tegu $s \in \mathbf{C}$. Pažymėkime*

$$f^{(\circ)1} = f(s) = \mathbf{E}(s^L) = \sum_{k\geq 0} s^k p_k, \qquad f^{(\circ)2} = f(f(s)), \ldots,$$

$$f^{(\circ)m} = f(f^{(\circ)(m-1)}), \ldots .$$

Tada kiekvienam $n \geq 0$

$$\mathbf{E}(s^{Z_n}) = f^{(\circ)(n)}(s).$$

Įrodymas. Įvedę papildomą sąlygą, gauname

$$\begin{aligned} \phi_{n+1}(s) \quad &: \quad = \mathbf{E}(s^{Z_{n+1}}) = \mathbf{E}\Big(\mathbf{E}(s^{Z_{n+1}} \,|\, Z_n)\Big) = \mathbf{E}\Big(\mathbf{E}(s^{L_1+\cdots+L_{Z_n}} \,|\, Z_n)\Big) \\ &= \quad \mathbf{E}\Big((\mathbf{E}(s^{L_1}))^{Z_n} \,|\, Z_n\Big) = \mathbf{E}\Big((f(s))^{Z_n}\Big) = \phi_n(f(s)), \end{aligned} \tag{3.2}$$

nes L nepriklauso nuo Z_n. Toliau pakanka pritaikyti matematinę indukciją.

Išvada. *Tegu m ir σ^2 yra a.d. L vidurkis ir dispersija. Tada*

$$\mathbf{E}(Z_n) = m^n,$$

$$\mathbf{V}ar(Z_n) = \begin{cases} \sigma^2 m^{n-1} \frac{m^n - 1}{m-1}, & \text{jei } m \neq 1, \\ n\sigma^2, & \text{jei } m = 1. \end{cases}$$

Sprendimas. Pakanka mokėti skaičiuoti sudėtinės funkcijos $\phi_n(s)$ išvestines taške $s = 1$.

Panagrinėkime populiacijos išmirimo tikimybę

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n = 0) =: \pi_0.$$

Ši riba egzistuoja, nes $P(Z_n = 0) \leq P(Z_{n+1} = 0)$. Kadangi Z_n yra sveikareikšmis a.d., $\pi_0 = 1$ parodo, kad egzistuos kažkokia karta su nuliniu individų skaičiumi.

1 teorema. *Tarkime, kad $0 < p_0$ ir $p_0 + p_1 < 1$. Tada išmirimo tikimybė π_0 yra mažiausia teigiama lygties*

$$f(s) = s$$

šaknis. Be to, $\pi_0 = 1$ tada ir tik tada, jei

$$m = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = f'(1) \leq 1.$$

Įrodymas. Tegul kaip ir anksčiau

$$\phi_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k P(Z_n = k)$$

Jau įrodytą lygybę (3.2) modifikuojame ir gauname

$$P(Z_{n+1} = 0) = \phi_{n+1}(0) = f(\phi_n(0)) = f(P(Z_n = 0)).$$

Pasinaudoję generuojančių funkcijų tolydumu, perėję prie ribos, matome, kad

$$\pi_0 = f(\pi_0) \geq p_0 > 0.$$

Įsitikiname, kad π_0 yra mažiausias teigiamas šios lygties sprendinys. Jei $0 < p = f(p) \leq 1$, tai iš $f(s) = \phi_1(s)$, $s \in [0,1]$, monotoniškumo išplaukia

$$P(Z_1 = 0) = f(0) \leq f(p) = p.$$

Taikome matematinę indukciją. Tarkime, kad $\phi_{n-1}(0) \leq p$. Tada

$$P(Z_n = 0) = \phi_n(0) = f(\phi_{n-1}(0)) \leq f(p) = p.$$

Vadinasi, ši nelygybė yra teisinga kiekvienam $n \in \mathbf{N}$. Perėję prie ribos, kai $n \to \infty$, gauname $\pi_0 \leq p$.

Įrodinėdami antrąjį teiginį, tiriame funkciją $f(s)$, kai $0 \leq s \leq 1$. Iš teoremos sąlygos išplaukia, kad $p_2 + p_3 + \cdots = 1 - p_0 - p_1 > 0$, todėl

$$f''(s) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k s^{k-2} > 0,$$

Vadinasi, ši funkcija yra griežtai iškila (į apačią!). Galimi du atvejai:

1) $f(s) > s$, jei $s \in (0,1)$; geometrinė išvestinės interpretacija rodo, kad dabar $f'(s) \leq 1$;

2) $f(s) = s$ kažkokiam $0 < s < 1$; tada $\pi_0 \leq s < 1$.

Todėl pirmuoju atveju ir tik juo galime gauti lygybę $\pi_0 = 1$. Lieka pastebėti, kad pirmąjį atvejį vienareikšmiškai išskiria sąlyga $f'(1) = m \leq 1$.

Įrodyta.

3.5 Pereinamųjų ir grįžtamųjų būsenų kriterijai

Nagrinėsime tik neredukuojamą Markovo grandinę. Visos jos būsenos yra arba pereinamosios, arba grįžtamosios, todėl pačią grandinę vadinsime šiais vardais. Pereinamoios grandinės kriterijus: $G(j,j) < \infty$ kiekvienam $j \geq 0$, išplaukiantis iš 3.1.3 teoremos, nėra patogus. Rasime kitokių galimybių. Pradžioje pastebėkime paprastą savybę.

1 teorema. *Neredukuojama Markovo grandinė su būsenų aibe* $0, 1, \ldots$ *yra grįžtamoji tada ir tik tada, jei visiems* $i \geq 1$ *tikimybės* $f_{i0} = 1$.

Įrodymas. Išplaukia iš apibrėžimo.

Įveskime sąlygines tikimybes n žingsnių išbūti būsenų aibėje S

$$s_i(n) = P(X_j \in S : j = 1, \ldots, n | \, X_0 = i), \quad i \in S$$

ir jų ribas - tikimybes iš viso nepalikti šios aibės:

$$\lim_{n\to\infty} s_i(n) = s_i.$$

Ribos egzistuoja tikimybių monotoniškumo dėka.

2 teorema. *Jei lygčių sistema*

$$z_i = \sum_{j\in S} p_{ij} z_j \tag{3.3}$$

turi tokį sprendinį $\{z_i, \ i \in S\}$, *kad* $|z_i| \leq 1$, *tai tikimybės* s_i *yra maksimalus šios sistemos sprendinys, t.y.* ($|z_i| \leq s_i$ *kiekvienam* $i \in S$).

Įrodymas. Po vieno žingsnio turime

$$s_i(1) = \sum_{j\in S} p_{ij},$$

o po n žingsnių:

$$s_i(n) = \sum_{j\in S} p_{ij} s_j(n-1).$$

Perėję prie ribos matome, kad $\{s_i, \ i \in S\}$ tenkina nagrinėjamą sistemą, t.y.

$$s_i = \sum_{j\in S} p_{ij} s_j.$$

Jei $\{z_i,\ i \in S\}$ yra kitas sprendinys ir $|z_i| \le 1$, tai

$$|z_i| \le \sum_{j \in S} p_{ij}|z_j| \le \sum_{j \in S} p_{ij} = s_i(1).$$

Tesiame toliau

$$|z_i| \le \sum_{j \in S} p_{ij} s_j(1) = s_i(2).$$

Pagal indukciją visiems n gauname $|z_i| \le s_i(n)$. Kai $n \to \infty$, iš čia išplaukia $|z_i| \le s_i$ visiems $i \in S$.

Įrodyta.

Pastebėkime, kad teoremoje nebūtina reikalauti sprendinio aprėžtumo vienetu. Turėdami sistemos (3.3) sprendinį su $0 < \max_{i \ge 1} |z_i| = C > 0$, galėtume imti sprendinį $(z_1/C, z_2/C, \ldots)$. Akcentuokime priešingą atvejį.

Išvada. *Jei sistema* (3.3) *neturi aprėžtų nenulinių sprendinių, tai* $s_i \equiv 0$.

3 teorema. *Neredukuojama Markovo grandinė su būsenų aibe* $0, 1, \ldots$ *yra pereinamoji tada ir tik tada, jei visiems* $i \ge 1$ *lygčių sistema*

$$z_i = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} z_j \tag{3.4}$$

turi aprėžtą nenulinį sprendinį.

Įrodymas. Taikome 2 teoremą, kai $S = \{1, 2, \ldots\}$ yra būsenų aibė. Esant nenuliniam aprėžtam (3.4) sistemos sprendiniui, ir $s_i > 0$ kažkokiam $i \ge 1$. Tada $f_{i0} = 1 - s_i < 1$. Vadinasi, pagal 1 teoremą grandinė yra pereinamoji.

Jei aprėžto nenulinio sprendinio nėra, tai pagal išvadą $s_i \equiv 0$. Pagal 1 teoremą tokia grandinė yra grįžtamoji, o ne pereinamoji.

Įrodyta.

Panagrinėkime porą pavyzdžių.

Atsitiktinis klaidžiojimas. *Nagrinėjame atsitiktinį klaidžiojimą aibėje* $0, 1, 2, \ldots$ *su perėjimo tikimybėmis*

$$p_{i,i+1} = p_i, \qquad p_{i,i-1} = q_i = 1 - p_i, \quad 0 < p_i < 1, \quad i = 0, 1, \ldots$$

Čia $p_0 = 1$. *Raskime būsenų charakterizacijos kriterijus.*

Sprendimas. Pastebėkime, kad grandinė yra neredukuojama. Sistema (3.4) šiuo atveju yra tokia:

$$z_1 = p_1 z_2,$$

$$z_i = p_i z_{i+1} + q_i z_{i-1}, \quad i = 2, 3, \ldots$$

Todėl

$$z_{i+1} - z_i = \frac{q_i}{p_i}\,(z_i - z_{i-1}), \quad i = 2, 3, \ldots$$

ir

$$z_{i+1} - z_i = \prod_{j=2}^{i} \Big(\frac{q_j}{p_j}\Big)(z_2 - z_1) = z_1 \prod_{j=1}^{i} \frac{q_j}{p_j}, \quad i \geq 1.$$

Pažymėję

$$\rho_0 = 1, \qquad \rho_i = \prod_{j=1}^{i} \frac{q_j}{p_j}, \quad i \geq 1,$$

sudėdami gautąsias lygybes pagal i, išvedame

$$z_{n+1} = z_1 \sum_{i=0}^{n} \rho_i.$$

Vadinasi, ši Markovo grandinė yra pereinamoji tada ir tik tada, jei

$$\sum_{i=0}^{\infty} \rho_i < \infty. \tag{3.5}$$

Jei ši eilutė diverguoja, grandinė yra grįžtamoji. Atskirkime atvejus, kada ji yra teigiamai grįžtamoji, kada - nulgrįžtamoji. Galime pasinaudoti 3.2.3 teorema. Joje buvo lygčių sistema

$$x_j = \sum_{k=0}^{\infty} x_k p_{kj} \quad j \geq 0.$$

Grandinė yra teigiamai grįžtamoji tada ir tik tada, jei pastaroji lygtis turi teigiamą sprendinį su sąlyga $x_0 + x_1 + \cdots = c < \infty$.

Atkreipkime dėmesį, kad nežinomieji čia turi ir nulinę koordinatę. Mūsų atveju sistema yra tokia:

$$x_0 = q_1 x_1,$$

$$x_j = q_{j+1} x_{j+1} + p_{j-1} x_{j-1}, \quad j = 1, 2, \ldots$$

Ankstesni skaičiavimai kiek pasikeičia. Pastebėkime, kad

$$q_{j+1} x_{j+1} - p_j x_j = q_j x_j - p_{j-1} x_{j-1}, \quad j = 1, 2, \ldots$$

Atveju $j = 1$ turime $q_1 x_1 - p_0 x_0 = x_0 - x_0 = 0$. Taigi

$$q_{j+1} x_{j+1} = p_j x_j \quad j = 0, 1, \dots$$

Iš čia išplaukia

$$x_{j+1} = x_0 \prod_{i=0}^{j} \frac{p_i}{q_{i+1}}, \quad j \geq 0.$$

Paėmę $x_0 = 1$ gauname teigiamą sprendinį. Prisiminę dar ir sąlygą jam nusprendžiame: grandinė bus teigiamai grįžtamoji tada ir tik tada, jei eilutė

$$\sum_{j=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{j} \frac{p_i}{q_{i+1}} < \infty.$$

Prisiminę žymenį ρ_j, eilutę perrašome

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{p_j \rho_j} < \infty. \tag{3.6}$$

Iš pastarosios eilutės konvergavimo išplaukia (3.5) divergavimas.

Pagal 3.2.3 teoremą atveju, kai patenkinta (3.6) sąlyga, egzistuos ir stacionarusis skirstinys.

Pastebėkime, kad grandinė yra nulgrįžtamoji tada ir tik tada, jei abi eilutės (3.5) ir (3.6) diverguos.

Eilutės bendru atveju gana komplikuotos. Paėmus, pavyzdžiui, $p_i = p$ ir $q_i = q$ kiekvienam $i \geq 1$, jos suprastėja. Eilutės (3.6) konvergavimo sąlyga taptų reikalavimas $0 < p < 1/2$. Išsprendę lygčių sistemą, gautume ir stacionariojo skirstinio pavidalą:

$$\pi_j = \frac{x_j}{\sum_{k=0}^{\infty} x_k} = \begin{cases} (q-p)/2q, & j = 0 \\ \frac{(q-p)(p/q)^{j-1}}{2q}, & j > 0. \end{cases}$$

Aptarnavimo sistema $M/G/1$. Nagrinėsime aptarnavimo sistemą, minėtą 1.7 skyrelyje. Joje klientai atvyksta pagal Puasono procesą, o aptarnavimo laikas turi skirstinį G ir yra nepriklausomas nuo atvykimo proceso. Tada radome, klientų, esančių stotyje laiko momentu t, skaičiaus skirstinį.

UŽDUOTIS. Tarkime, kad X_n *yra klientų, likusių sistemoje po* n*-ojo aptarnavimo, o* Y_n *- klientų, atvykusių vykstant* $(n+1)$*-ajam aptarnavimui, skaičiai. Aprašykime šių a.d. skirstinius.*

Sprendimas. Pastebėkime sąryšį

$$X_{n+1} = \begin{cases} Y_n, & X_n = 0, \\ X_n - 1 + Y_n, & X_n > 0. \end{cases}$$

Vadinasi, $\{X_n,\, n \geq 0\}$ yra homogeninė Markovo grandinė, $X_0 = 0$. Turime

$$p_{0j} = P(X_1 = j |\, X_0 = 0) = P(X_1 = j) = P(Y_1 = j).$$

A.d. Y_n turi vienodą skirstinį, nes tokie yra klientų aptarnavimai. Be to, jie yra nepriklausomi. Tai išplaukia iš Puasono proceso savybės: prieaugliai nepriklauso muo jų padėties, bet tik nuo ilgio. Todėl, jei Z yra vieno kliento aptarnavimo intervalas, tai

$$\begin{aligned} P(Y_n = j) &= \mathbf{E}(P(Y_n|Z)) = \int_0^\infty P(Y_n = j|Z = x)dG(x) \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^j}{j!} dG(x), \quad j = 0, 1, \ldots \end{aligned}$$

Randame kitas perėjimo tikimybes.

$$\begin{aligned} p_{ij} &= P(X_{n+1} = j |\, X_n = i) = P(j = i - 1 + Y_n) \\ &= \begin{cases} 0, & j < i - 1, \\ P(Y_n = j - i + 1), & j \geq i - 1, \end{cases} \end{aligned}$$

čia $i = 0, 1, \ldots$

Klasifikuokime Markovo grandinės $\{X_n,\, n \geq 0\}$ *būsenas.* Jos yra susisiekiančios, t.y. grandinė yra neredukuojama.

Pradėkime nuo pereinamumo tyrimo. Pažymėję trumpiau $p_{0j} = a_j$, $j \geq 0$ matome, kad $0 < a_j < 1$ ir $p_{1j} = a_j$, o

$$p_{ij} = \begin{cases} 0, & j < i - 1, \\ a_{j-i+1}, & j \geq i - 1, \end{cases}$$

kai $i \geq 2$. Taigi, sistema (3.4) šiuo atveju yra tokia:

$$z_1 = \sum_{j=1}^\infty a_j z_j,$$

$$z_i = \sum_{j=i-1}^\infty a_{j-i+1} z_j = \sum_{j=0}^\infty a_j z_{i+j-1}, \quad i = 2, 3, \ldots$$

Ieškome sprendinio pavidalu $z_i = 1 - u^i$, $i \geq 1$ ir $0 < u < 1$. Įstatę į sistemą gauname

$$1 - u = \sum_{j=1}^{\infty} a_j (1 - u^j),$$

$$1 - u^i = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (1 - u^{i+j-1}), \quad i = 2, 3, \ldots$$

Jei

$$A(s) := \sum_{i=0}^{\infty} a_i s^i,$$

tai abi naujosios sistemos lygtys susiveda į vieną lygtį

$$A(u) = u,$$

čia $0 < u < 1$. Skyrelyje 3.4 apie išsišakojančius procesus matėme, kad ši lygtis turi sprendinį nurodytame intervale tada ir tik tada, jei

$$m = A'(1) > 1.$$

Be to pastebėjome, kad tada intervale $(0, 1)$ sprendinys yra vienintelis.

Darome **išvadą:** *Markovo grandinė* $\{X_n, n \geq 0\}$ *yra pereinamoji tada ir tik tada, jei* $m > 1$.

Grandinė yra teigiamai grįžtamoji, jeigu egzistuoja stacionarusis skirstinys. Jį ieškant, pagal 3.2.3 teoremą turime spręsti lygčių sistemą $\bar{x} = \bar{x}P$, čia P - perėjimo tikimybių matrica, kurios elementus jau žinome. Po to, jeigu $x_j > 0$ ir $c = x_0 + x_1 + \cdots < \infty$, tai $\pi_j := x_j / c$, $j \geq 0$ yra stacionariojo skirstinio tikimybės.

Dabar lygčių sistema yra tokia:

$$x_j = a_j x_0 + \sum_{i=1}^{j+1} a_{j-i+1} x_i, \quad j \geq 0. \tag{3.7}$$

Čia $0 < a_j < 1$. Aišku, kad sistema yra suderinta, nes parinkus $0 < x_0 < 1$ iš lygybės $x_0 = x_0 a_0 + x_1 a_0$, rastume x_1 ir t.t. Bet sprendinio koordinačių eilutė turi ir konverguoti. Todėl tenka toliau tirti tiesinį rekurentųjį sąryšį. Tokiais atvejais visada patogu įvesti generuojančias funkcijas. Tegul $A(s)$ anksčiau apibrėžta, o

$$V(s) := \sum_{j=0}^{\infty} x_j s^j.$$

Abi (3.7) lygybės puses padauginę iš s^j ir sudėję pagal $j \geq 0$, gauname

$$\begin{aligned} V(s) &= x_0 A(s) + \sum_{j=0}^{\infty} s^j \sum_{i=1}^{j+1} a_{j-i+1} x_i \\ &= x_0 A(s) + \sum_{i=1}^{\infty} x_i \sum_{j=i-1}^{\infty} a_{j-i+1} s^j = x_0 A(s) + \sum_{i=1}^{\infty} x_i s^{i-1} A(s) \\ &= x_0 A(s) - \frac{x_0 A(s)}{s} + \frac{A(s)V(s)}{s}. \end{aligned}$$

Iš čia išplaukia

$$V(s) = \frac{x_0 A(s)(s-1)}{s - A(s)}.$$

Kadangi

$$\lim_{s \to 1-} A(s) = A(1) = 1,$$

tai

$$\lim_{s \to 1-} V(s) = x_0 \lim_{s \to 1-} \frac{s-1}{s - A(s)} = x_0 \lim_{s \to 1-} \left(1 - \frac{1 - A(s)}{1 - s}\right)^{-1} = \frac{x_0}{1 - f'(1)}.$$

jei

$$m = f'(1) = \sum_{j \geq 1} j a_j < 1.$$

Taigi, ši nelygybė yra pakankama grandinės teigiamo grįžtamumo sąlyga. Panašiai samprotaujant būtų galima įrodyti, kad sąlyga yra ir būtina.

3.6 Pusiau Markovo procesas

Apibrėždami homogeninę Markovo grandinę, dabar žymimą $\{J_n,\, n \geq 0\}$ su būsenų aibe $0, 1, \ldots$, mes pateikiame pradinį skirstinį $p_j = P(J_0 = j)$, $j \geq 0$ ir perėjimo tikimybes

$$p_{ij} = P(J_{n+1} = j |\, J_n = i) = P(J_1 = j |\, J_0 = i).$$

Kai perėjimai iš būsenos į būseną nėra apibrėžti žingsniais, kai jie priklauso nuo atsitiktinio laiko, per kurį tas perėjimas vyksta, elgiamasi kitaip.

Nagrinėkime Markovo grandinę ir apibrėžkime procesą laiko intervale $[0, \infty]$. Tarkime, kad $Q_{ij}(t)$ yra tikimybė, kad procesui ką tik patekus į būseną i sekantis perėjimas bus į būseną j laiko intervale $[0, t]$, $t \geq 0$. Taigi, $Q_{ij}(\infty) = p_{ij}$,

$$0 \leq Q_{ij}(t) = P(i \mapsto j, per\, laik ą\, t) \leq 1, \quad i, j \geq 0, t \geq 0,$$

ir

$$\sum_{j=0}^{\infty} Q_{ij}(\infty) = 1.$$

Pažymėkime

$$F_{ij}(t) = \frac{Q_{ij}(t)}{p_{ij}} = P(pereiti\, per\, laik ą\, t | i \mapsto j),$$

jei $p_{ij} > 0$. Priešingu atveju, galima susitarti $F_{ij}(t) = 1$, $F_{ij}(t) = 0$ arba bet kaip. Šią funkciją galime laikyti atsitiktinio laiko T_{ij}, reikalingo procesui pakeisti būseną, sąlygine skirstinio funkcija, esant sąlygai, kad ką tik patekus į i po to pereinama į būseną j. Šis laikas ,,yra praleidžiamas" būsenoje i, nes kitų būsenų procesas neturi. Pažymėkime $\mathbf{E}T_{ij} =: \mu_{ij}$.

Tegul J_0 yra proceso pradinė būsena, o J_n, $n \geq 1$, - būsenos, į kurias procesas pateko tik ką atlikus n-ąjį perėjimą. Ši Markovo grandinė vadinama *įdėtąja*. Ji gaunama iš proceso reikšmių nurodytuose laiko momentuose. Pažymėkime $N_j(t)$ patekimų į būseną j skaičių laiko intervale $(0, t]$. Tada

$$N_j(t) = \max\{n : \; T_{ij} + T_{jj} + \cdots + T_{jj} \leq t\},$$

čia yra n dėmenų T_{ij} ir T_{jj}. Taip pat tegul

$$N(t) = \sum_j N_j(t).$$

Tai visų perėjimų laiko intervale $(0, t]$ skaičius. Mus dominantis procesas yra

$$Z(t) = J_{N(t)},$$

būsena laiko momentu t. Jis vadinamas *pusiau Markovo procesu.* Jis nevisada yra Markovo procesas, tačiau $\{J_n\}$, $n \geq 0$, yra Markovo grandinė! Skaičiuojantysis procesas $N(t)$ (dažnai ir jo vektorinė versija $\tilde{N}(t) = (N_0(t), N_1(t), \ldots))$ vadinamas *Markovo atstatymo procesu.*

1 teorema. *Jei i yra pradinė būsena, tai $N_i(t)$ yra atstatymo procesas, o $N_j(t)$, $i \neq j$, yra vėluojantis atstatymo procesas.*

Įrodymas. Laiko tarpai tarp atskirų sugrįžimų į būseną j yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę a.d. su skirstinio funkcija $F_{jj}(t)$. Pirmasis laiko tarpas einant iš i į j turi skirstinio funkciją $F_{ij}(t)$, gal būt, skirtingą nuo $F_{jj}(t)$, jei $i \neq j$. Įrodyta.

Akivaizdu, kad žinant J_0 ir $N(t)$ skirstinius, galima rasti ir proceso $Z(t)$ skirstinį. Atvirkščias tvirtinimas nebūtinai yra teisingas. Norėdami tuo įsitikinti, imkime vienos būsenos $\{0\}$ procesą $Z(t)$. Vistiek $N(t) = N_0(t)$, skaičiuojantis atvykimų iš i į i skaičių, išlieka neapibrėžtas. Papildomai reiktų žinoti $Q_{00}(t)$. Suma

$$H_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} F_{ij}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} Q_{ij}(t)$$

yra atsitiktinio laiko, reikalingo vienam perėjimui iš i, skirstinio funkcija. Kitaip tariant, laiko praleidžiamo būsenoje i, skirstinio funkcija. Tegul jo vidurkis

$$\mu_i := \int_0^{\infty} x dH_i(x).$$

Priimkime tokią sąlygą:

$$H_i(0) < 1.$$

Pirmas iškylantis klausimas, ar perėjimų iš būsenos į būseną skaičius baigtiniame intervale yra baigtinis.

Apibrėžimas. *Būsena i vadinama reguliaria, jei*

$$P(N(t) = \infty |\, J_0 = i) = 0$$

kiekvienam $t < \infty$.

Markovo atstatymo procesas $N(t)$ yra *reguliarus*, jei kiekviena iš būsenų yra reguliari.

2 teorema. *Jei pradinė Markovo grandinė turi baigtinį būsenų skaičių, tai $N(t)$ yra reguliarus.*

Įrodymas. Nagrinėdami atstatymo procesus buvome pastebėję, kad $N_j(t) < \infty$ su vienentine tikimybe. Lieka pritaikyti reguliarumo apibrėžimą.

Jei būsenų aibė $0, 1, \ldots$, reguliarumo gali nebūti. Pavyzdžiui, imkime

$$p_{i,i+1} = 1, \quad i = 0, 1, \ldots$$

ir

$$F_{i,i+1}(t) = \begin{cases} 0, & t < (1/2)^i \\ 1, & t \geq (1/2)^i. \end{cases}$$

Dabar

$$N(2) = \sum_{j=1}^{\infty} N_j(2) = \sum_{j=i+1}^{\infty} 1 = \infty,$$

jei $J_0 = i$. Taigi, visos būsenos yra nereguliarios.

Išveskime Markovo atstatymo proceso reguliarumo sąlygą. Pažymėkime X_{n+1} a. laiko tarpą tarp n-ojo ir $(n+1)$-ojo perėjimų. Jie yra nepriklausomi, bet nebūtinai vienodai pasiskirtę, nes perėjimų trukmė priklauso nuo esamos būsenos. Seka porų (J_n, X_{n+1}), $n \geq 0$ vienareikšmiškai nusako Markovo atstatymo procesą $N(t)$, jei pastarasis yra reguliarus. Tai matyti ir iš lygybės

$$N(t) = \sup\{n \geq 0 : \; X_1 + \cdots + X_n \leq t\}. \tag{3.8}$$

Teorema. *Markovo atstatymo procesas $N(t)$ yra reguliarus, jei yra patenkinta viena iš sąlygų:*

(i) egzistuoja tokie teigiami α ir ε, kad visiems $i \geq 0$ yra teisinga nelygybė

$$1 - H_i(\alpha) > \varepsilon;$$

arba

(ii) iš bet kurios pradinės būsenos $J_0 = i$ įdėtoji Markovo grandinė

$$\{J_n, \, n \geq 0\}$$

su tikimybe vienetas per baigtinį skaičių žingsnių pasieks grįžtamąją būseną.

Įrodymas. Jei yra patenkinta sąlyga (i), tai visoms būsenoms perėjimui iš jų į bet kurią kitą sugaištamas laikas su tikimybe didesne už ε yra nemažesnis už α. Įveskime pagalbinius a.d.:

$$\bar{X}_n = \begin{cases} 0, & X_n \leq \alpha \\ \alpha, & \text{su tikimybe } \varepsilon/(1 - H_j(\alpha)), \text{ jei } X_n > \alpha, \; J_{n-1} \neq j, \\ 0, & \text{su tikimybe } 1 - \varepsilon/(1 - H_j(\alpha)), \text{ jei } X_n > \alpha, \; J_{n-1} = j. \end{cases}$$

Jie yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę. Iš tiesų, atkreipę dėmesį į apibrėžime dalyvaujančią atsitiktinę sąlygą, randame

$$\begin{aligned} P(\bar{X}_n = \alpha) &= \varepsilon/(1 - H_j(\alpha))P(X_n > \alpha, J_{n-1} = j) \\ &= \varepsilon/(1 - H_j(\alpha))(1 - H_j(\alpha)) = \varepsilon = 1 - P(\bar{X}_n = 0). \end{aligned}$$

Visiems $n \geq 0$ tikimyb4s yra vienodos. Todėl

$$\bar{N}(t) := \sup\{n \geq 0 : \ \bar{X}_1 + \cdots + \bar{X}_n \leq t\}$$

yra anksčiau išnagrinėtas atstatymo procesas. Jam turėjome teiginį: $\bar{N}(t) < \infty$ su tikimybe vienetas, jei $t < \infty$. Kadangi $\bar{X}_n \leq X_n$, tai $N(t) \leq \bar{N}(t) < \infty$ su tikimybe vienetas. Tai įrodo šio proceso reguliarumą.

Tegul yra patenkinta sąlyga (ii). Tegul J_n pasiekė grįžtamąją būseną j žingsnyje n_0, o $n_1 < n_2 < \cdots$ - kitų žingsnių, kai vėl atvykstama į j numeriai. Pažymėkime

$$T_0 = X_0 + \cdots + X_{n_0},$$

$$T_k = X_{n_{k-1}+1} + \cdots + X_{n_k}, \quad k \geq 1.$$

Pastarieji a.d. jau yra vienodai pasiskirstę, nes tai laikas, sugaištamas einant iš j į j būseną. Dabar $\{T_k,\ k \geq 0\}$ apibrėžia vėluojantį atstatymo procesą, todėl

$$\infty = \sum_{k \geq 0} T_k = \sum_{n \geq 1} X_n$$

su tikimybe vienetas. Iš sąryšio (3.8) dabar matome, kad $N(t) < \infty$, kai $t < \infty$.

Įrodyta.

PAVYZDYS. Dar kartą grįžkime prie aptarnavimo sistemos $M/G/1$, kai klientai atvyksta pagal Puasono procesą su parametru $\lambda > 0$. Tegul aptarnavimo laikas yra eksponentinis a.d., bet su parametru μ. Tad sistema turėtų žymenį $M/M/1$.

Klientų, esančių sistemoje momentu t, skaičius (tegu dabar $n(t)$) yra pusiau Markovo procesas. Iš tiesų, įdėtoji Markovo grandinė yra klientų skaičius po kiekvieno naujo atvykimo ir po ką tik pasibaigusio aptarnavimo bei kliento išvykimo kartu sudėjus. Laiko tarpų tarp vienų arba kitų skirstiniai yra eksponentiniai. Minėti būsenų pasikeitimo momentai gali būti įvairiai išsidėstę, gretimi gali būti tiek du atvykimai, tiek atvykimas ir aptarnavimo pabaiga arba dvi gretimos aptarnavimo pabaigos.

Tegu T_1 yra laiko tarpas tarp klientų atvykimų, o T_2 - vieno kliento aptarnavimo laikas, jis lygus ir laiko tarpui tarp dviejų gretimų aptarnavimų pabaigų. Todėl

$$P(T_1 > t) = e^{-\lambda t}, \qquad P(T_2 > t) = e^{-\mu t}.$$

Šie a.d. yra nepriklausomi tarpusavyje. Fiksuokime momentą, kai sistema pateko į būseną $i \geq 1$ dėl ką tik pabaigto aptarnavimo. Jei sekantis būsenos pasikeitimas vėl yra dėl išvykusio aptarnauto kliento, tai būsena yra $i-1$ ir turi būti $T_2 < T_1$. Lygybės atveją šiems a.d. galime ignoruoti, nes tai nulinę tikimybę turintis įvykis. Todėl

$$\begin{aligned} p_{i,i-1} &= P(T_2 < T_1) = \int_0^\infty P(T_1 > u) dP(T_2 < u) \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda u} \mu e^{-\mu u} du = \frac{\mu}{\lambda + \mu}. \end{aligned}$$

Jei būsena i buvo pasiekta atvykus naujam klientui, kažkokio kliento aptarnavimas jau galėjo būti pradėtas anksčiau ir vyko $Y < T_2$ laiko. A.d. Y priklauso tik nuo atvykimo momento, bet ne nuo T_1 ir T_2. Prisiminkime stipriąją neturėjimo atminties savybę:

$$P(T_2 < t + Y | \, T_2 \geq Y) = P(T_2 < t).$$

Mūsų atveju, kadangi $P(T_2 \geq Y) = 1$, net

$$\begin{aligned} P(T_2 < t + Y) &= P(T_2 < t + Y, T_2 \geq Y) \\ &= P(T_2 < t + Y | \, T_2 \geq Y) P(T_2 \geq Y) = P(T_2 < t). \end{aligned}$$

Dabar perėjimo į būseną $i-1$ tikimybė yra

$$\begin{aligned} p_{i,i-1} &= P(T_2 - Y < T_1) = \int_0^\infty P(T_2 - Y < u) dP(T_1 < u) \\ &= \int_0^\infty P(T_2 < u) dP(T_1 < u) = \int_0^\infty (1 - e^{-\mu u}) \lambda e^{-\lambda u} du \\ &= \frac{\mu}{\lambda + \mu}. \end{aligned}$$

Taigi, tikimybė nepriklauso nuo to, kaip buvo patekta į būseną i. Panašiai, perėjimas į būseną $i+1$ vyksta su tikimybe

$$p_{i,i+1} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

Aišku, kad $p_{ij} = 0$, jei $j \neq i-1, i+1$ ir $i \geq 1$. Tikimybė $p_{01} = 1$.

Dabar randame $Q_{ij}(t)$. Klientų skaičiaus dinamika vyksta laike. Perėjimo iš 0 į būseną 1 per laiką t tikimybė lygi

$$Q_{01}(t) = P(T_1 < t) = \int_0^t d(1 - e^{-\lambda u}) = 1 - e^{-\lambda t},$$

Tikimybė $Q_{i,i-1}(t)$ aprašo įvykį

$$\begin{aligned} & \{\text{is } i - \text{os busenos procesas pereis i } (i-1) - \text{a per laika } t\} \\ = & \{\text{per } t \text{pasikeis jo busena}\} \\ & \cap \{\text{is } i - \text{os procesas pereis i } (i-1) - \text{a}\}. \end{aligned}$$

Tegul $T = \min\{T_1, T_2\}$. Būsenos pasikeitimas per t laiko yra įvykis $\{T < t\}$. Klientų atvykimas ir aptarnavimas nepriklauso nuo jų skaičiaus sistemoje, t.y. nuo būsenų. Vadinasi,

$$\begin{aligned} Q_{i,i-1}(t) &= P(T < t | \text{ busena } i \mapsto i-1) P(\text{busena } i \mapsto i-1) \\ &= P(T < t) p_{i,i-1}. \end{aligned}$$

Skaičiuojame toliau

$$\begin{aligned} P(T < t) &= 1 - P(T \geq t) = 1 - P(T_1 \geq t, T_2 \geq t) \\ &= 1 - P(T_1 \geq t) P(T_2 \geq t) = 1 - e^{-\lambda t} e^{-\mu t} \\ &= 1 - e^{-(\lambda+\mu)t}. \end{aligned}$$

Taigi,

$$Q_{i,i-1}(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}).$$

Analogiškai,

$$Q_{i,i+1}(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}),$$

jei $i \geq 1$.

UŽDUOTIS. Ar aptarnavimo sistemoje $M/G/1$, kai $G \neq M$, $N(t)$ bus Markovo procesas?

3.7 Būsenų klasifikacija

Kaip ir Markovo grandinių atveju, Markovo atstatymo proceso būsenos yra panašiai klasifikuojamos. Pažymėkime

$$P_{ij}(t) = P(Z(t) = j | Z(0) = i), \qquad G_{ij}(t) = P(N_j(t) > 0 | Z(0) = i).$$

Kadangi $N_j(t)$ skaičiuoja patekimų į būseną j laiko intervale $(0, t]$ skaičių, tai $G_{ij}(t)$ - tikimybė, kad šiame intervale bent kartą procesas pateks į būseną j, kai pradinė būsena buvo i, - lygi tikimybei, kad atsitiktinis pirmojo patekimo į šią būseną laikas (gal būt, net begalinis) yra nedidesnis už t, esant tai pačiai sąlygai. Todėl $G_{ij}(t)$ yra sąlyginė a. laiko skirstinio funkcija. Jos momentai:

$$\mu_{ij} := \begin{cases} \infty, & G_{ij}(\infty) < 1, \\ \int_0^\infty t dG_{ij}(t) & \text{kitu atveju.} \end{cases}$$

Taigi, μ_{ii} yra vidutinis grįžimo į būseną i laikas. Palyginkime su vidurkiu

$$\mu_i := \int_0^\infty t dH_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} \int_0^\infty t dF_{ij}(t),$$

kuris reiškia vidutinį *išbuvimo* šioje būsenoje laiką vieno vizito metu.

Apibrėžimas. *Markovo atstatymo (pusiau Markovo) proceso būsenos i ir j yra susisiekiančios, jeigu*

$$G_{ij}(\infty) G_{ji}(\infty) > 0.$$

Apibrėžimas įveda ekvivalentumo sąryšį būsenų aibėje, kuri skyla į susisiekiančių tarpusavyje būsenų klases. Jei klasė yra viena, sakome, kad procesas yra *neredukuojamas.* Jei $G_{ii}(\infty) = 1$, tai būsena i vadinama *grįžtamąja*, priešingu atveju - *pereinamąja.* Grįžtama būsena i yra *teigiamai grįžtamoji*, jei $\mu_{ii} < \infty$ ir *nulgrįžtamoji* priešingu atveju. Tokios sąvokos buvo apibrėžtos ir įdėtajai Markovo grandinei $\{J_n, n \geq 0\}$. Galima nuspėti esant tarpusavio ryšį.

1 teorema. *Pusiau Markovo proceso būsena i yra susisiekianti su j (grįžtamoji arba pereinamoji) tada ir tik tada, jei ji yra tokia įdėtoje Markovo grandinėje.*

Įrodymas. Pritaikyti lygybę

$$G_{ij}(\infty) = P(J_n = j \text{ kazkuriam } n > 0 | \, J_0 = i).$$

Įrodyta.

Turėtus grandinių būsenų kriterijus galime tiesiogiai susieti su pusiau Markovo procesu.

2 teorema. *Tarkime, kad $\mu_j < \infty$. Pusiau Markovo proceso būsena j yra grįžtamoji tada ir tik tada, jei*

$$\int_0^\infty P_{jj}(t) dt = \infty.$$

Įrodymas. Tegu $J_0 = j$ ir šios sąlygos skaičiavimuose toliau neprirašinėkime. Išsiaiškinkime teoremoje nurodyto integralo prasmę. Pažymėkime

$$A(t) = \mathbf{1}\{Z(t) = j\}.$$

Tada

$$P_{jj}(t) = \mathbf{E}(A(t))$$

ir

$$\int_0^\infty P_{jj}(t)dt = \mathbf{E}\Big(\int_0^\infty A(t)dt\Big) =: \mathbf{E}(A).$$

Matome, kad integralas reiškia viso laiko, praleisto būsenoje j, vidurkį. Jei Y_n yra laikas, praleistas būsenoje j n-ojo vizito metu, ir $N_j(\infty)$ vizitų skaičius, tai

$$A = Y_0 + \sum_{n=1}^{N_j(\infty)} Y_n.$$

Kadangi įvykis $\{N_j(\infty) = n\}$ nepriklauso nuo $Y_{n+1}, Y_{n+2}, \ldots$, pagal Waldo lemą turime

$$\mathbf{E}(A) = \mathbf{E}(Y_0) + \mathbf{E}(Y_1)E(N_j(\infty)) = \mu_j(1 + \mathbf{E}(N_j)).$$

Kadangi $\mu_j < \infty$, tai teoremos sąlyga yra ekvivalenti

$$\mathbf{E}(N_j(\infty)) = \infty.$$

Įdėtąjai grandinei J_n tai ekvivalentu, kad ji su vienetine tikimybe grįš ir grįš į būseną j. Iš tiesų, jei būtų teigiama tikimybė negrįžti į būseną j, tai $N_j(\infty)$ turėtų geometrinį skirstinį su baigtiniu vidurkiu (žr. 3.1.3 teoremos įrodymą). Pritaikę 1 teoremą, baigiame įrodymą.

Pastebėkime, kad pereinamajai pusiau Markovo proceso būsenai j, kai $\mu_j < \infty$ ir $J_0 = j$, turėsime

$$G_{jj}(\infty) < 1, \qquad \mathbf{E}(N_j(\infty)) < \infty$$

ir

$$N_j(\infty) < \infty$$

su tikimybe vienetas. Be to, šis a.d. turi geometrinį skirstinį:

$$P(N_j(\infty) = k) = g_j^{k-1}(1 - g_j), \quad k = 1, 2, \ldots;$$

čia $g_j := G_{jj}(\infty)$.

Atvejų, kada būsenos yra teigiamai ar nulgrįžtamosios, atskyrimas pusiau Markovo procesams nebesutampa su anksčiau išnagrinėtais grandinių teiginiais. Tačiau baigtinio būsenų skaičiaus atveju galime pasinaudoti įdėtosiomis Markovo grandinėmis ir pritaikyti joms išvestus kriterijus.

3.8 Laiko funkcijų sąryšiai

Anksčiau įvestos funkcijos $Q_{ij}(t)$, $F_{ij}(t)$, $H_i(t)$, $P_{ij}(t)$ ir $G_{ij}(t)$ yra tarpusavyje susijusios, jos aprašo atskiras pusiau Markovo proceso $Z(t)$ arba Markovo atstatymo proceso $N_i(t)$ savybes.

1 teorema. *Visoms būsenoms i, j ir $t > 0$ turime*

$$P_{jj}(t) = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t (1 - P_{kj}(t-x))dQ_{jk}(x),$$

$$P_{ij}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t P_{kj}(t-x)dQ_{jk}(x), \quad i \neq j.$$

Įrodymas. Tegul X_1 yra a.laikas, per kurį procesas pateks į sekančią einant iš j būsenos. Jei sekanti būsena yra k, tai X_1 skirstinio funkcija yra $G_{jk}(x)$. Būsenas aprašo įdėtoji Markovo grandinė $\{J_n,\, n \geq 0\}$, $Z(0) = J_0$. Tikimybę $P_{jj}(t)$ vidurkiname atžvilgiu dviejų dydžių J_1 ir X_1. Todėl

$$P_{jj}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} P(Z(t) = j|\, J_0 = j, J_1 = k, X_1 = x)dQ_{jk}(x).$$

Išnagrinėjame sąlyginę tikimybę po integralo ženklu. Jei $x > t$, tai per x laiko perėjimo į kitą būseną nebuvo, vadinasi, tada ši tikimybė yra vienetinė. Jei $x < t$, tai per laiką x proceso būsena tapo k, vadinasi, per likusį laiką $t - x$ ji turės patekti į j. Todėl

$$P(Z(t) = j|\, J_0 = j, J_1 = k, X_1 = x) = P_{kj}(t-x), \quad x < t.$$

ir

$$P_{jj}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t P_{kj}(t-x)dQ_{jk}(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \int_t^{\infty} dQ_{jk}(x).$$

Kadangi

$$\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\infty} dQ_{jk}(x) = 1, \quad j \geq 0,$$

iš čia išplaukia pirmasis teoremos tvirtinimas.

Antrasis teiginys įrodomas taip pat. Dabar

$$P_{ij}(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\infty} P(Z(t) = j|\, J_0 = i, J_1 = k, X_1 = x)dQ_{jk}(x).$$

Jei $x > t$, sąlyginė tikimybė po integralo ženklu lygi nuliui, nes nesant perėjimo dviejose būsenose i ir j būti negalima. Jei $x \leq t$, tai ši sąlyginė tikimybė, kaip ir anksčiau lygi $P_{kj}(t-x)$. Įstatę gautąsias tikimybių reikšmes baigiame įrodymą.

2 teorema. *Visoms būsenoms i, j ir $t > 0$ turime*

$$G_{ij}(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{t} G_{kj}(t-x)dQ_{ik}(x) + \int_0^t (1 - G_{jj}(t-x)dQ_{ij}(x).$$

Įrodymas. Tegul vėl X_1 yra laikas pirmajam perėjimui atlikti. Jei tas perėjimas yra iš i į k, tai vidurkindami gauname

$$G_{ij}(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\infty} P(N_j(t) > 0|\, J_0 = i, J_1 = k, X_1 = x)dQ_{ik}(x).$$

Jei $x > t$, perėjimų laike $(0, t]$ nebuvo, todėl pointegralinė tikimybė lygi nuliui. Jei $x \leq t$ ir $k = j$, tai ji lygi vienam. Ir atveju $x \leq t$ ir $k \neq j$ ji lygi $G_{kj}(t-x)$. Lieka įstatyti rastas tikimybės reikšmes.

Įrodyta.

3 teorema. *Visoms būsenoms i, j ir $t > 0$ turime*

$$P_{jj}(t) = \int_0^t P_{jj}(t-x)dG_{jj}(x) + 1 - H_j(t),$$

$$P_{ij}(t) = \int_0^t P_{jj}(t-x)dG_{ij}(x), \quad i \neq j.$$

Įrodymas. Šį kartą pasinaudojame $G_{ij}(t)$ tikimybine interpretacija. Tegul T yra a. laikas, reikalingas pirmą kartą pasiekti j būseną einant iš i. Tada

$$P(T \leq t) = G_{ij}(t) = P(N_j(t) > 0|\, J_0 = i).$$

Vadinasi, $G_{jj}(t)$ yra vieno vizito būsenoje j laiko skirstinys. Prisimename, kad

$$H_j(t) = \sum_{k \geq 0} Q_{jk}(t)$$

išreiškia tikimybę atlikti perėjimą iš j į kitą būseną. Skaičiuodami $P_{jj}(t)$ manome, kad galėjo iš viso nebūti perėjimo (šio įvykio tikimybė yra $1-H_j(t)$) arba pabuvę joje $x \leq t$ laiko, per likusį laiko tarpą $t-x$, mes nekeisime būsenos. Tą mintį ir išreiškia teoremos pirmoji formulė.

Jei $i \neq j$, tai perėję iš i į j per laiką $T = x$, toliau būsenos nekeisime. Keičiant $x \leq t$ gaunama antroji teoremos formulė.

Įrodyta.

Ką galėtume išvesti naudodami anksčiau išdėstytą atstatymo procesų teoriją. Dabar visada reikia atsižvelgti į pirmąją pusiau Markovo proceso (įdėtosios Markovo grandinės J_n) pradinę būseną. Visos tikimybės yra sąlyginės. Užrašykime teiginius atstatymo procesui $N_j(t)$. Jei pradinė būsena yra $i \neq j$, tai jis yra vėluojantysis atstatymo procesas. Jei i yra pradinė būsena, tai laikas T_1 iki pirmojo atstatymo, patekimo į būseną j, laikas turi skirstinį $G_{ij}(t)$, kiti laiko tarpai T_k tarp sekančių vizitų - funkciją $G_{jj}(t)$. Kadangi

$$\{N_j(t) \geq n\} \Leftrightarrow \Big\{ \sum_{k \leq n} T_k \leq t \Big\},$$

todėl

$$P(N_j(t) = n | \, J_0 = i) = G_{ij} \star (G_{jj})^{\star(n-1)} - G_{ij} \star (G_{jj})^{\star n}.$$

Čia žvaigždutė žymi sąsūką.

Jei j yra grįžtamoji būsena ir $i \leftrightarrow j$, tai $G_{jj}(\infty) = 1$ ir todėl

$$P\Big(\lim_{t \to \infty} \frac{N_j(t)}{t} = \frac{1}{\mu_{jj}} \Big| \, J_0 = i \Big) = 1,$$

Atstatymo funkcijos analogas yra

$$m_{ij}(t) = \mathbf{E}(N_j(t) | \, J_0 = i).$$

Be įrodymo pateikiame porą atstatymo teoremų

$$\frac{m_{ij}(t)}{t} \to \frac{G_{ij}(\infty)}{\mu_{jj}}, \quad t \to \infty.$$

ir

$$m_{ij}(t+a) - m_{ij}(t) \to G_{ij}(\infty) \frac{a}{\mu_{jj}}, \quad t \to \infty.$$

3.9 Atsinaujinantieji procesai

Nagrinėsime stochastinius procesus $X(t)$, $t \geq 0$, kurie būna būsenose $0.1, \ldots$ ir kurie kažkokiu, gal būt, atsitiktiniu laiko momentu $0 < T_1 < \infty$ tikimybiškai atsistato. Tai reiškia, kad proceso $X(T_1+t)$, $t \geq 0$ skirstinys sutampa su proceso $X(t)$, $t \geq 0$ skirstiniu. Juos vadinsime *atsinaujinančiaisiais* (lietuviškiau nei *regeneraciniais*). Iš apibrėžimo išplaukia, kad egzistuoja net begalinė seka tokių atsinaujinimo momentų $T_1 < T_2 < \cdots$. Laiko intervalus $T_k - T_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$, vadinkime ciklais.

Antrame skyriuje nagrinėtas atstatymo procesas yra atsinaujinantis. Jam pirmasis atstatymo momentas yra T_1. Grįžtamasis Markovo atstatymo procesas irgi yra atsinaujinantis, dabar T_1 bus pirmasis grįžimo į pradinę būseną momentas.

Pasinaudoję atstatymo teoremomis, įrodysime svarbią atsinaujinančių procesų savybę.

1 teorema. *Tarkime, kad T_1 skirstinys yra absoliučiai tolydinis ir $\mathbf{E}(T_1) < \infty$. Tada visiems $j \geq 0$*

$$p_j := \lim_{t\to\infty} P(X(t) = j) = \frac{\mathbf{E}(\text{laiko intervalas viename cikle, kai } X(t) = j)}{\mathbf{E}(\text{ciklo ilgis})}.$$

Įrodymas. Pažymėkime $P(X_1 < x) = F(x)$ ir skaičiuokime

$$\begin{aligned} P_j(t) : &= P(X(t) = j) = \int_0^\infty P(X(t) = j|\, T_1 = x)dF(x) \\ &= \int_0^t P_j(t-x)dF(x) + \int_t^\infty P(X(t) = j|\, T_1 = x)dF(x) \\ &=: \int_0^t P_j(t-x)dF(x) + q_j(t). \end{aligned}$$

Pirmasis dėmuo atsiskyrė, kadangi momentu x įvyko atsinaujinimas. Vadinasi, ieškoma tikimybė tenkina atstatymo lygtį. Iš antrojo skyriaus medžiagos žinome kaip užrašomas tokių lygčių sprendinys. Gauname

$$P_j(t) = q_j(t) + \int_0^t q_j(t-s)dm(s),$$

čia

$$m(s) = \sum_{n=1}^\infty F^{*n}(s)$$

yra sąsūkų suma. Ir vėl atstatymo teorema leidžia tvirtinti, kad egzistuoja riba ir

$$p_j = \lim_{t\to\infty} P_j(t) = (\mathbf{E}(T_1))^{-1} \int_0^\infty q_j(t)dt.$$

Pertvarkome čia esantį integralą. Kadangi

$$\begin{aligned} q_j(t) &= \int_t^\infty P(X(t) = j|\, T_1 = x)dF(x) \\ &= \int_0^\infty P(X(t) = j, T_1 > t|\, T_1 = x)dF(x) \\ &= P(X(t) = j, T_1 > t), \end{aligned}$$

tai

$$p_j = (\mathbf{E}(T_1))^{-1} \int_0^\infty P(X(t) = j, T_1 > t)dt.$$

Išsiaiškinkime integralo prasmę. Jei $Y(t)$ yra įvykio $\{X(t) = j, T_1 > t\}$ indikatorius, tai integralas lygus

$$\int_0^\infty \mathbf{E}(Y(t)dt = \mathbf{E}\Big(\int_0^\infty Y(t)dt\Big).$$

Dabar jau matyti, kad jis reiškia vidurkį laiko, kurį procesas prabuvo būsenoje j vieno ciklo metu.

Įrodyta.

Tais atvejais, kai už buvimą būsenoje gaunamos premijos, tenka ištirti funkcionalų nuo atsinaujinančių procesų skirstinius, momentus ir kitas charakteristikas. Panaši situacija ir atsinaujinantiems procesams su diskrečiuoju laiku. Apsiribosime pavyzdžiu.

PAVYZDYS. Bazei pareikalavimai dėl Y_n prekių yra pateikiami n-os dienos vakare. Jie yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę a.d. su diskrečia skirstinio funkcija $F(x)$. Savo ruožtu, pati bazė, užsakydama prekes kiekvieną rytą, vadovaujasi tokia taktika: jei turimas prekių kiekis neviršija s, tai trūkstamų prekių yra užsakoma iki kiekio S. Priešingu atveju, prekės yra neužsakomos. Užsakytos prekės pristatomos iš karto. Rasti prekių, esančių bazėje n-os dienos rytą ką tik gavus užsakytas prekes (jei tą dieną tokų buvo), kiekio skirstinio asimptotiką, kai $n \to \infty$.

Sprendimas. Tegul X_n, $n \geq 1$, yra tiriamasis prekių kiekis bazėje n-os dienos rytą po užsakytų prekių atvežimo. Galime įsivaizduoti, kad pirmą dieną bazė pradeda turėdama $X_1 = S$ prekių. Slenkant dienoms situacija keičiasi, nes ateinantys pareikalavimai tuština lentynas ir tenka prekių skaičių atnaujinti. Kaip tik tos dienos rytą situacija pasikartoja: sandėlyje vėl yra S

prekių. Vadinasi, X_n, $n \geq 1$ yra diskretaus laiko atsinaujinantis procesas. Iš tiesų, galėtume įsivaizduoti net tolydinį procesą, nes laiko tėkmė yra tolydi. Pagal 1 teoremą

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n \geq j) = \frac{\mathbf{E}(\text{laiko intervalas viename cikle, kai } X_n \geq j)}{\mathbf{E}(\text{ciklo ilgis})}.$$

Žinoma, ciklo ilgio vidurkį reikia laikyti baigtiniu. Kaip rasti dešinėje pusėje esančius dydžius?

Dėl bazės taktikos du atvejai yra akivaizdūs: jei $j < s$, tai riba yra 1 ir, jei $j > S$, tai riba yra nulis. Tegu toliau $s \leq j \leq S$.

Kiek dienų (parų) bazėje bus nemažiau j prekių? Tegu šis dienų skaičius yra N. Pastebėkime, kad $N = 1$, jei jau $Y_1 > S - j$, $N = 2$, jei $Y_1 \leq S - j$, bet $Y_1 + Y_2 > S - j$,... Taigi,

$$N = \min\{n : \ Y_1 + \cdots + Y_n > S - j\} = \max\{m : \ Y_1 + \cdots + Y_m \leq S - j\} + 1.$$

Jei T yra ciklo ilgis, tai

$$T = \min\{n : \ Y_1 + \cdots + Y_n > S - s\} = \max\{m : \ Y_1 + \cdots + Y_m \leq S - s\} + 1,$$

nes teko papildyti resursus. Galime įsivaizduoti, kad $Y_1, Y_2, \ldots$ yra tarpai tarp atstatymų, o N ir T ,,skaičiuoja" juos. Tik ,,laiko" intervalai yra $(0, S - j]$ bei $(0, S - s]$ atitinkamai. Atstatymo funkcijas mokėmės skaičiuoti antrame skyriuje. Gauname

$$\mathbf{E}(N) = \sum_{n\geq 1} F^{*n}(S - j) + 1 =: m(S - j) + 1, \qquad \mathbf{E}(T) = \sum_{n\geq 1} F^{*n}(S - s) + 1.$$

Čia žvaigždutė reiškia sąsūkas. Kai $s \leq j \leq S$, gauname **atsakymą:**

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n \geq j) = \frac{m(S - j) + 1}{m(S - s) + 1}.$$

Aptarnavimo sistema $M/M/1$. Joje klientai atvyksta pagal Puasono procesą su parametru $\lambda > 0$, o aptarnaujami - pagal eksponentinį dėsnį su parametru μ. Tegul $\lambda < \mu$. Skyrelyje 3.6 esame pastebėję, kad klientų skaičius $n(t)$ momentu $t \geq 0$ yra pusiau Markovo procesas. Įdėtoji Markovo grandinė ssusidėjo iš klientų atvykimo ir išvykimo momentų. Tai neperiodinė teigiamai grįžtamoji grandinė.

Skyrelyje 3.6 išvedėme jos perėjimo tikimybių formules

$$p_{i,i-1} = \frac{\mu}{\lambda+\mu}, \qquad p_{i,i+1} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu},$$

jei $i \geq 1$. Be to, $p_{01} = 1$.

Apskaičiuokime šiame skyrelyje išnagrinėtas charakteristikas. Prisiminkime ir lygybes:

$$Q_{01}(t) = 1 - e^{-\lambda t},$$

$$Q_{i,i-1}(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}),$$

$$Q_{i,i+1}(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}),$$

jei $i \geq 1$. Taigi, $F_{01}(t) = Q_{01}(t)$,

$$F_{i,i-1}(t) = 1 - e^{-(\lambda+\mu)t}, \qquad F_{i,i+1}(t) = 1 - e^{-(\lambda+\mu)t},$$

jei $i \geq 1$.

Laiko iki klientų skaičiaus pakitimo skirstinio funkcija, žinant, kad dabar yra i klientų,

$$H_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} Q_{ij}(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & \text{jei } i = 0, \\ 1 - e^{-(\lambda+\mu)t}, & \text{jei } i \geq 1. \end{cases}$$

Vadinasi, vidutiniškai iki klientų skaičiaus pakitimo praeis

$$\mu_0 = \lambda^{-1}, \qquad \mu_i = (\lambda+\mu)^{-1}$$

laiko.

Įdėtoji Markovo grandinė turi stacionarųjį skirstinį. Jį randame iš lygčių sistemos

$$\bar{\pi} = \bar{\pi} P = \bar{\pi} \cdot ((p_{ij})).$$

Vadinasi,

$$\pi_0 = \pi_1 \frac{\mu}{\lambda+\mu}, \qquad \pi_1 = \pi_0 + \pi_2 \frac{\mu}{\lambda+\mu},$$

$$\pi_i = \pi_{i-1} \frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \pi_{i+1} \frac{\mu}{\lambda+\mu}, \quad i = 2, 3, \ldots$$

Tarkime, kad π_0 yra žinomas, tada kitas tikimybes išreiškiame per jį:

$$\pi_i = \pi_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{i-1} \frac{\lambda+\mu}{\mu}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Bet $\pi_0 + \pi_1 + \cdots = 1$, todėl $\pi_0 = (\mu - \lambda)/(2\mu)$. Sekančioje lygybėje ši reikšmė išsiprastina.

Pasinaudoję 3 teorema, randame tikimybes

$$P_j = \lim_{t\to\infty} P(n(t) = j) = \frac{\pi_j \mu_j}{\sum_{i\geq 0} \pi_i \mu_i}.$$

Įstatę jau rastus dydžius, gauname

$$P_j = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right), \quad j = 0, 1 \ldots$$

Darome **išvadą:** ilgame laiko intervale klientų skaičius yra pasiskirstęs pagal geometrinį skirstinį.

Chapter 4

Tolydaus laiko Markovo grandinės

4.1 Perėjimo tikimybės

Apibrėždami pusiau Markovo procesą, matėme, kad tik įdėtoji grandinė $\{J_n, n \geq 0\}$ tenkino markoviškumo sąlygą, o pats procesas $Z(t)$ nebūtinai. Tačiau yra vienas atvejis, kai pusiau Markovo procesas yra Markovo.

Nagrinėkime pusiau Markovo procesą, su įdėtąja grandine, turinčia perėjimo tikimybių matricą $P = ((p_{ij}))$, $p_{ii} = 0$, $i = 0, 1, \ldots$. Tarkime, kad atsitiktinio laiko, reikalingo procesui pakeisti būseną, sąlyginė skirstinio funkcija yra eksponentinė

$$F_{ij}(t) = 1 - e^{\lambda_i t}, \quad \lambda_i > 0,\ t \geq 0. \tag{4.1}$$

Šis laikas yra praleidžiamas būsenoje i, o čia minima sąlyga reikalauja, kad iš i bus pereinama į būseną j, Atkreipkime dėmesį į aplinkybę, kad pagal sąlygą šios funkcijos nepriklauso nuo j.

1 teorema. *Jei patenkinta* (4.1) *sąlyga ir* $p_{ii} \equiv 0$, *tai pusiau Markovo procesas tenkina markoviškumo sąlygą*

$$P(Z(t) = j |\, Z(s), s \leq x) = P(Z(t) = j |\, Z(x)).$$

Teoremos neįrodinėsime. Norintiems tą padaryti patarsime, kad tinkamoje vietoje reikia pasinaudoti tuo, kad eksponentiniai dydžiai neturi atminties.

Apibrėžiant šiek tiek bendresnes homogenines tolydaus laiko Markovo grandines su būsenų aibe $0, 1, \ldots$ dažniau einama kitu keliu. Imama perėjimo tikimybių matrica

$$P(t) = ((P_{ij}(t)))$$

su tolydžiomis pusašėje $(0, \infty]$ funkcijomis $P_{ij}(t)$, tenkinančiomis sąlygas:

(h) (**homogeniskumo salyga**):

$$P_{ij}(t) = P(Z(t+s) = j|\, Z(s) = i), \quad i, j \geq 0,\ t > 0;$$

nepriklauso nuo $s \geq 0$;

(i) $P_{ij}(t) \geq 0$, kai $t > 0$;

(ii)

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t) = 1, \quad t > 0;$$

(iii)

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t) P_{kj}(s) = P_{ij}(t+s), \quad i, j, \geq 0,\ s, t > 0.$$

Be to, nulio taške yra reikalaujama, kad

(iv) $\lim_{t\to 0} P_{ij}(t) = \delta_{ij}$; čia δ_{ij} yra Kronekerio simbolis.

Pradėję nuo pusiau Markovo procesų, tenkinančių (4.1) sąlygą, iš 3.8 skyrelio medžiagos galėtume išvesti lygybes:

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to 0} \frac{1 - P_{ii}(t)}{t} = \lambda_i, \\ &\lim_{t\to 0} \frac{P_{ij}(t)}{t} = \lambda_i p_{ij}, \quad i \neq j. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Iš jų matosi, kad (iv) sąlyga yra patenkinta.

Einant antruoju bendresniu keliu pastarųjų ribų egzistavimas nėra akivaizdus. Lygybės reiškia išvestinės iš dešinės nulio taške egzistavimą. Vieną atvejį verta išnagrinėti.

2 teorema. *Jei yra patenkintos (i) − (iv) sąlygos, tai visiems i egzistuoja (gal būt, ir begalinė) riba*

$$P'_{ii}(0) := \lim_{t\to 0+} \frac{1 - P_{ii}(t)}{t}.$$

Įrodymas. Pirmasis pastebėjimas irgi yra įdomus: bet kokiam $t > 0$

$$P_{ii}(t) > 0.$$

Pritaikę (iii) n laiko momentų sumai, turime

$$P_{ij}(t_1 + \cdots + t_n) = \sum_{k_1,\ldots,k_n \geq 0} P_{ik_1}(t_1)P_{k_1k_2}(t_2)\ldots P_{k_{n-1},j}(t_n).$$

Vadinasi, jei $t_1 = \ldots = t_n = t/n$, tai

$$P_{ii}(t) \geq (P_{ii}(t/n))^n.$$

Toliau naudojamės (iv) sąlyga, kuri nurodo, kad nulio aplinkoje, tarkime intervale $(0, \varepsilon]$, $P_{ii}(t)$ yra teigiama. Vadinasi, $P_{ii}(t/n) > 0$, jei $n > t/\varepsilon$. Todėl ir $P_{ii}(t) > 0$.

Vėl pasinaudokime (ii) išvada

$$P_{ii}(t + s) \geq P_{ii}(t)P_{ii}(s), \quad s, t > 0.$$

Pažymėkime $\varphi(t) = -\log P_{ii}(t)$ ir

$$q = \sup_{t>0} \frac{\varphi(t)}{t}.$$

Turime pusiau adityvumo savybę:

$$\varphi(t + s) \leq \varphi(t) + \varphi(s), \quad t, s > 0.$$

Aišku, kad $0 \leq q \leq \infty$. Jei jis baigtinis, tai bet kokiam $\varepsilon > 0$ rasime tokį t_0, kad

$$\frac{\varphi(t_0)}{t_0} \geq q - \varepsilon.$$

Kiekvienam t galime užrašyti

$$t_0 = nt + \delta, \quad n \geq 0,\ 0 \leq \delta < t.$$

Vadinasi,

$$\varphi(t_0) \leq \varphi(nt_0) + \varphi(\delta) \leq n\varphi(t) + \varphi(\delta).$$

Todėl

$$q - \varepsilon \leq \frac{\varphi(t_0)}{t_0} \leq \frac{nt}{t_0} \cdot \frac{\varphi(t)}{t} + \frac{\varphi(\delta)}{t_0}.$$

Imkime apatiniąją ribą, kai $t \to 0+$. Tada $\delta \to 0$, o $nt/t_0 \to 1$. Be to, pagal (iv) $\varphi(\delta) \to 0$. Taigi,

$$q - \varepsilon \leq \liminf_{t \to 0} \left(\frac{\varphi(t_0)}{t_0} \right) = \liminf_{t \to 0} \frac{\varphi(t)}{t}$$

ir

$$q \leq \liminf_{t \to 0} \frac{\varphi(t)}{t}.$$

Antra vertus, pagal q apibrėžimą

$$\limsup_{t \to 0} \frac{\varphi(t)}{t} \leq q.$$

Vadinasi, egzistuoja riba

$$\lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t)}{t} = q.$$

Lieka atvejis, kai $q = \infty$. Galime pakartoti smaprotavimus pakeitę $q - \varepsilon$ bet kokiu dideliu skaičiumi M ir gauti nelygybę

$$M \leq \liminf_{t \to 0} \frac{\varphi(t)}{t},$$

kuri rodo, kad

$$\infty = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t)}{t}.$$

Dabar ir

$$\lim_{t \to 0} \frac{1 - P_{ii}(t)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1 - e^{-\varphi(t)}}{t} = \infty.$$

Įrodyta.

Panašiais argumentais yra paremtas ir kitos teoremos įrodymas, kurį praleisime.

3 teorema. *Jei yra patenkintos $(i) - (iv)$ sąlygos, tai visiems i ir j, $i \neq j$, egzistuoja (gal būt, ir begalinė) riba*

$$P'_{ij}(0) := \lim_{t \to 0+} \frac{P_{ij}(t)}{t}.$$

Trumpumo dėlei, pastarosiose teoremose minimas išvestinių nulio taške reikšmes pažymėkime

$$q_i = P'_{ii}(0) \qquad q_{ij} = P'_{ij}(0), \text{ jei } i \neq j.$$

Ateityje postuluojame:

$$\sum_{k \neq i} q_{ik} = q_i < \infty, \tag{4.3}$$

dažnai vadinamą proceso *konservatyvumo* savybe.

Aišku, ši sąlyga išplaukia iš (4.2).

4 teorema (Kolmogorovo atbuline lygtis). *Jei patenkinta sąlyga* (4.2), *tai visiems* $i, j \geq 0$ *ir* $t > 0$ *turime*

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} q_{ik} P_{kj}(t) - q_i P_{ij}(t).$$

Įrodymas. Pasinaudojame (iii) savybe ir gauname

$$P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} P_{ik}(h) P_{kj}(t) - (1 - P_{ii}(h)) P_{ij}(t).$$

Reikia rasti ribą

$$\lim_{h \to 0} \frac{P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \sum_{k \neq i} \frac{P_{ik}(h)}{h} P_{kj}(t) - \lim_{h \to 0} \frac{1 - P_{ii}(h)}{h} P_{ij}(t).$$

Teoremoje 2 įrodėme antrosios ribos egzistavimą ir galėsime įstatyti q_i. Lieka pagrįsti ribos ir sumavimo sukeitimo galimybę.

Bet kokiam $N \in \mathbf{N}$ turime

$$\begin{aligned} & \liminf_{h \to 0} \sum_{k \neq i} \frac{P_{ik}(h)}{h} P_{kj}(t) \\ \geq \; & \liminf_{h \to 0} \sum_{k \neq i, k \leq N} \frac{P_{ik}(h)}{h} P_{kj}(t) = \sum_{k \neq i, k \leq N} q_{ik} P_{kj}(t). \end{aligned}$$

Antra vertus, panaudodami (ii) sąlygą, gauname

$$\limsup_{h \to 0} \sum_{k \neq i} \frac{P_{ik}(h)}{h} P_{kj}(t)$$

$$
\begin{aligned}
&\le \liminf_{h\to 0}\Big(\sum_{k\ne i, k\le N}\frac{P_{ik}(h)}{h}P_{kj}(t)+\sum_{k\ge N+1}\frac{P_{ik}(h)}{h}\Big)\\
&= \liminf_{h\to 0}\Big(\sum_{k\ne i, k\le N}\frac{P_{ik}(h)}{h}P_{kj}(t)+\frac{1}{h}\Big(1-\sum_{k\le N}P_{ik}(h)\Big)\Big)\\
&= \sum_{k\ne i, k\le N} q_{ik}P_{kj}(t)+\lim_{h\to 0}\frac{1-P_{ii}(h)}{h}-\sum_{k\ne i, k\le N}\lim_{h\to 0}\frac{P_{ik}(h)}{h}\\
&= \sum_{k\ne i, k\le N} q_{ik}P_{kj}(t)+q_i-\sum_{k\ne i, k\le N} q_{ik}.
\end{aligned}
$$

Dabar imdami $N\to\infty$ ir pasinaudodami (4.3), išvedame nelygybę:

$$\limsup_{h\to 0}\sum_{k\ne i}\frac{P_{ik}(h)}{h}P_{kj}(t)\le\sum_{k\ne i}q_{ik}P_{kj}(t).$$

Palyginę su apatiniuoju įverčiu, gauname

$$\lim_{h\to 0}\sum_{k\ne i}\frac{P_{ik}(h)}{h}P_{kj}(t)=\sum_{k\ne i}q_{ik}P_{kj}(t).$$

Įstatę tai į įrodymo pradžioje turėtą formulę, baigiame įrodymą.

Galima būtų manyti, kad toks pat kelias leidžia pagrįsti ribinį perėjimą ir šioje lygybėje:

$$\lim_{h\to 0}\frac{P_{ij}(t+h)-P_{ij}(t)}{h}=\lim_{h\to 0}\sum_{k\ne i}P_{ik}(t)\frac{P_{kj}(h)}{h}-P_{ij}(t)\lim_{h\to 0}\frac{1-P_{ij}(h)}{h}.$$

Deja, be papildomų sąlygų to padaryti negalima.

5 teorema (Kolmogorovo tiesiogine lygtis). *Jei kiekvienam $j\ge 0$ ribos*

$$\lim_{t\to 0+}\frac{P_{ij}(t)}{t}=q_{ij}$$

egzistuoja tolygiai visų i, $i\ne j$, atžvilgiu, ir yra patenkinta sąlyga (4.3)*, tai visiems $i,j\ge 0$ ir $t>0$ turime*

$$P'_{ij}(t)=\sum_{k\ne j}q_{kj}P_{ik}(t)-q_jP_{ij}(t).$$

Be įrodymo.

Apibrėžkime matricą $A = ((a_{ij}))$ su $a_{ij} = q_{ij}$, jei $i \neq j$, ir $a_{ii} = -q_1$ likusiu atveju. Čia kaip ir anksčiau, $i, j \geq 0$. Jei $P(t) = ((P_{ij}(t)$ yra perėjimo tikimybių matrica, tai Kolmogorovo atbulinės lygtys užrašomos matricinėje formoje

$$P'(t) = AP(t),$$

o tiesioginės lygtys -

$$P'(t) = P(t)A.$$

Matrica A yra vadinama *infinitezimaliąja* Markovo grandinės su tolydžiu laiku matrica.

Gali kilti klausimas, kada infinitezimaliąjai matricai A (jos elementai tenkina (4.3)) egzistuoja perėjimo tikimybių funkcijos $P_{ij}(t)$. Be papildomų sąlygų tai yra toli gražu netriviali problema.

Sunkumai atsiranda jau nagrinėjant išbuvimo būsenoje i laiko T_i skirstinį

$$P(Z(s) = i,\, 0 \leq s \leq t) = P(T_i \geq t).$$

Griežtam teoremos suformulavimui reiktų žinoti papildomos medžiagos. Kokios? Tą pajusime iš žemiau atliekamų samprotavimų.

Visų pirma, pimoji išraiška rodo, kad skaičiuojame kontinumo galios įvykių sandaugos tikimybę. Norėtųsi panaudoti tikimybės monotoniškumo savybę ir lygybę

$$P(Z(t) = i, 0 \leq s \leq t) = \lim_{n\to\infty} P(Z(s) = i,\, s = 0, t/n, 2t/n, \ldots, nt/n).$$

Bet kur yra garantija, kad ši riba nepriklauso nuo intervalo $[0, t]$ padalijimo būdo. Minimą ribinį perėjimą užtikrintų, pvz., sąlyga

$$\lim_{s\to t} P(|Z(t) - Z(s)| \geq \varepsilon) = 0$$

visiems $\varepsilon >$ ir visiems $t > 0$. Vadinasi, iš anksto reikia žinoti trajektorijų savybes arba mokėti jas tinkamu būdu konstruoti turint perėjimo tikimybių matricą.

Jei šią kliūtį įveikėme, ir $q_i < \infty$, galime eiti toliau. Iš markoviškumo savybės išplaukia

$$P(Z(s) = i,\, s = 0, t/n, 2t/n, \ldots, nt/n) = \Big(P_{ii}(t/n)\Big)^n.$$

Toliau pagal 2 teoremą

$$\begin{aligned}\Big(P_{ii}(t/n)\Big)^n &= \Big(1-\frac{t}{n}q_i+o\Big(\frac{t}{n}\Big)\Big)^n\\ &= \exp\Big\{n\log\Big(1-\frac{t}{n}q_i+o\Big(\frac{t}{n}\Big)\Big)\Big\} = \exp\{-q_it\}+o(1),\quad n\to\infty.\end{aligned}$$

Taigi, gerai apibrėžus trajektorijas, yra gaunama lygybė

$$P(Z(t)=i, 0\le s\le t)=\exp\{-q_it\}.$$

Kitas sunkumas iškyla nagrinėjant a.dydį

$$\tau_i=\inf\{s>0:\ Z(s)=i\},$$

kuris yra pirmojo perėjimo į būseną i momentas. Jei į būseną i iš viso yra nepatenkama, tai šis dydis prilyginamass begalybei.

Gali būti apibrėžiama ir daugiau atsitiktinių laiko momentų. Norimas markoviškumo savybės pratęsimas

$$P(Z(\tau+\sigma)=j|\,Z(\sigma)=i)=P(Z(\tau=j|\,Z(0)=i)$$

ne visada yra teisingas. Tai galima tik *Markovo momentams* (*proceso sustabdymo momentams*) σ. Aukščiau įvestas τ_i yra sustabdymo momentas.

Tegu τ_{ij} yra pirmasis patekimo į būseną j momentas, kai buvo pradėta iš būsenos i. Jis irgi yra sustabdymo momentas. Pažymėkime

$$G_{ij}(x)=P(\tau_{ij}\le x).$$

Dabar galime skaičiuoti

$$\begin{aligned}P_{ij}(t) &= P(Z(t)=j|\,Z(0)=i)\\ &= \int_0^\infty P(Z(t)=j|\,Z(0)=i,\tau_{ij}=x)dG_{ij}(x)\\ &= \int_0^t P(Z(t-x)=j|\,Z(0)=j)dG_{ij}(x)\\ &= \int_0^t P_{jj}(t-x)dG_{ij}(x).\end{aligned}$$

Palyginkite su 3.8 skyrelio argumentais ir pastebėkite, kad tenai galėjome pasiremti įdėtąja Markovo grandine ir jos būsenų aibės suskaičiuojamumo savybe.

Griežta ir išsami tolydaus laiko Markovo grandinių teorija yra išdėstyta E.Dynkino rusiškoje knygoje bei K.L.Chung'o *Markov Chains with Stationary Transition Probabilities*, Springer, 1960.

4.2 Gimimo ir mirties procesai

Tolydaus laiko homogeninė Markovo grandinė yra vadinama *gimimo ir mirties* procesu, jei perėjimo tikimybės tenkina sąlygas:

(i) $P_{i,i+1}(h) = \lambda_i h + o(h), \quad h \to 0 \; i \geq 0;$

(ii) $P_{i,i-1}(h) = \mu_i h + o(h), \quad h \to 0, \; i \geq 1;$

(iii) $P_{ii}(h) = 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h), \quad h \to 0, \; i \geq 0;$

(iv) $P_{ij}(0) = \delta_{ij};$

(v) $\mu_0 = 0, \; \lambda_0 > 0 \; \lambda_i, \mu_i \geq 0, i \geq 1.$

Tada infinitezimalios matricos pirmos keturios eilutės ir keturi stulpelai atrodytų taip:

$$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 \\ 0 & 0 & \mu_3 & -(\lambda_3 + \mu_3) \end{pmatrix}$$

Kai kuriuos atvejus mes jau išnagrinėjome.

Aptarnavimo sistemoje $M/M/1$ esančių klientų skaičius buvo toks procesas, kai $\lambda_i = \lambda$, o $\mu_i = \mu$ visiems $i \geq 1$.

Tiesinis gimimo ir mirimo augimas modeliuojamas imant

$$\lambda_i = i\lambda + a, \; a > 0, \qquad \mu_i = i\mu.$$

Narį $a \geq 0$ galime susieti su imigracija.

Grynasis gimimo procesas aprašomas atveju, kai $\mu_i = 0$. Dabar galime išspręsti tiesiogines Kolmogorovo lygtis:

$$P'_{ii}(t) = -\lambda_i P_{ii}(t),$$

$$P'_{ij}(t) = \lambda_{j-1} P_{i,j-1}(t) - \lambda_j P_{ij}(t).$$

Iš pirmosios lygties gauname

$$P_{ii}(t) = e^{-\lambda_i t}, \quad i \geq 0.$$

Spręsdami antrąją, pradžioje pasinaudokime lygybe

$$P'_{ij}(t) + \lambda_j P_{ij}(t) = \lambda_{j-1} P_{i,j-1}(t),$$

padauginta iš $e^{\lambda_j t}$. Turime

$$e^{\lambda_j t}(P'_{ij}(t) + \lambda_j P_{ij}(t)) = \lambda_{j-1} e^{\lambda_j t} P_{i,j-1}(t),$$

todėl
$$\frac{d}{dt}\Big(e^{\lambda_j t}P_{ij}(t)\Big) = \lambda_{j-1}e^{\lambda_j t}P_{i,j-1}(t).$$
Vadinasi, pasinaudoję pradine sąlyga $P_{ij}(0) = 0$, gauname atsakymą
$$P_{ij}(t) = \lambda_{j-1}e^{-\lambda_j t}\int_0^t e^{\lambda_j s}P_{i,j-1}(s)ds, \quad j \geq i+1. \tag{4.4}$$

Pastebėkime, kad grynasis gimimo procesas su $\lambda_i = \lambda$, $i \geq 0$, yra Puasono procesas.

Jei gimimo greitis yra tiesinis, procesas vadinamss *Julo* (Yule) vardu. Dabar iš (4.4) gauname
$$P_{ij}(t) = \binom{j-1}{j-i} e^{-\lambda i t}(1-e^{-\lambda t})^{j-i}, \quad j \geq i \geq 1.$$

Išspręskime 22 ir 24 uždavinius iš Sh.Ross [], 117 psl.

22. *Rasti tiesinio gimimo ir mirties proceso su migracija vidurkį. Pradinį populiacijos narių skaičių laikyti nuliniu.*

Sprendimas. Turime $Z(0) = 0$ ir
$$\lambda_i = i\lambda + a, \qquad \mu_i = i\mu, \quad i \geq 0.$$
Pradžioje išvedame diferencialinę lygtį vidurkio funkcijai
$$\begin{aligned} M(t) &= \mathbf{E}(Z(t)) = \sum_{n\geq 1} P(Z(t) \geq n) \\ &= \sum_{n\geq 1}\sum_{j\geq n} P(Z(t) = j|\, Z(0) = 0)1 = \sum_{n\geq 1}\sum_{j\geq n} P_{0j}(t). \end{aligned}$$
Naudojame tiesiogines Kolmogorovo diferencialines lygtis. Mūsų atveju,
$$\begin{aligned} P'_{0j}(t) &= ((j-1)\lambda + a)P_{0,j-1}(t) + (j+1)\mu P_{0,j+1}(t) \\ &\quad -(j(\lambda+\mu) + a)P_{0j}(t). \end{aligned}$$
Todėl
$$\begin{aligned} M'(t) &= \sum_{n\geq 1}\sum_{j\geq n}\Big(((j-1)\lambda + a)P_{0,j-1}(t) + (j+1)\mu P_{0,j+1}(t)\Big) \\ &- \sum_{n\geq 1}\sum_{j\geq n}\Bigg((j(\lambda+\mu) + a)P_{0j}(t)\Big). \end{aligned}$$

Pastebėkime, kad pakeitus sumavimo indeksus $j-1 \mapsto j$ ir $j+1 \mapsto j$ dalis dėmenų iš pirmųjų dviejų sumų susitraukia su paskutinės sumos atitinkamais dėmenimis. Lieka lygybė

$$\begin{aligned} M'(t) &= \sum_{n\geq 1}\Big(((n-1)\lambda + a)P_{0,n-1}(t) - n\mu P_{0n}(t)\Big) \\ &= (\lambda-\mu)\sum_{n\geq 1} nP_{0n}(t) + a\sum_{n\geq 1} P_{0n}(t) = (\lambda-\mu)M(t) + a. \end{aligned}$$

Išsprendžiame šią diferencialinę lygtį, kai yra patenkinta pradinė sąlyga $Z(0) = 0$, ir gauname

$$M(t) = at,$$

jei $\lambda = \mu$. Priešingu atveju

$$M(t) = \frac{a}{\lambda-\mu}(e^{(\lambda-\mu)t} - 1).$$

Patirtis rodo, kad dažnai Kolmogorovo lygčių sistema yra sudėtinga, tačiau iš jų išvestos diferencialinės lygtys vidurkiams gerokai suprastėja.

Chapter 5

Egzamino bilieto pavyzdys

Egzaminas iš dviejų dalių: du klausimai atsakomi raštu be konspekto ir 1 klausimas atsakomas raštu, kai leidžiama naudotis konspektu ir kita literatūra.

I dalis (be konspekto):

1 (4 balai). Ką žinote apie aptarnavimo sistemą $M/M/1$?

2 (3 balai) Tegul $P_{ij}(t)$, $i, j \geq 0$, $t \geq 0$, yra tolydinio laiko Markovo proceso perėjimo tikimybės. Tarkime, kad jau įrodėme, kad egzistuoja

$$q_i = P'_{ii}(0) \qquad q_{ij} = P'_{ij}(0), \text{ jei } i \neq j.$$

ir postuluokime *konservatyvumo* savybę:

$$\sum_{k \neq i} q_{ik} = q_i < \infty.$$

Išveskite Kolmogorovo atbulinę lygtį:

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} q_{ik} P_{kj}(t) - q_i P_{ij}(t).$$

II dalis (su konspektu, 3 balai): Pateikite praleistus įrodymus ir argumentus kiekvienai nepaaiškintai lygybei šiuose konspekto 00–aa puslapiuose.