TIKIMYBIŲ TEORIJA IR MATEMATINĖ STATISTIKA
Magistrantūra, I kursas.
2016 m. PAVASARIO semestras

Parengė: **Eugenijus Manstavičius**

Pirmoji dalis. **BAIGTINĖS TIKIMYBINĖS ERDVĖS**

1. Įvadas

Čia „Tikimybių teorijos ir matematinės statistikos" dalyko, skaityto magistrantūros studijose 2016 m. pavasario semestre, konspektas. Medžiaga paimta iš A.N. Shiryaev'o knygos [3] bei V. Bagdonavičiaus ir J.Kruopio [1] vadovėlio 1 dalies. Kai kurie pavyzdžiai paimti iš Sheldon M. Ross knygos [4]. Pamiršusiems bakalauro studijas rekomenduoju J. Kubiliaus [2] vadovėlį arba puikų pradžiamokslį, kurį parengė kolega V. Stakėnas *Tikimybių teorijos paskaitos* (http://www.mif.vu.lt/katedros/matinf/asm/vs/pask/ttinf/tt-paskaitos.pdf)
.

2. Tikimybinė erdvė

Visus eksperimento rezultatus galima aprašyti aibėmis. Monetos metimo rezultatas bus vienas iš dviejų - H arba M, o visos baigtys sudaro aibę $\Omega = \{H, M\}$. Šešiasienio kauliuko su skaičiais metimo rezultatas bus vienas iš aibės $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ skaičių. Kartu metant ir monetą, ir kauliuką jau turėtume

$$\Omega = \{(H, 1), \dots, (H, 6), (M, 1), \dots, (M, 6)\}.$$

Atlikę iš eilės $n \geq 1$ monetos metimų, visus galimus rezultatus galime pateikti vektorių aibe (sutvarkytųjų rinkinių arba žodžių iš raidžių H ir M aibe)

$$\Omega = \Big\{\omega := (\omega_1, \dots, \omega_n),\ \omega_i \in \{H, M\},\ 1 \leq i \leq n\Big\}.$$

Visų galimų eksperimento rezultatų vadinsime *elementariųjų įvykių aibe*, o pačius elementus *elementariaisiais įvykiais*.

Peržvelkime dvi populiarias eksperimentų schemas.

I. *Rutulių traukimas iš urnos.* Skirtingų (numeruotų) rutulių traukimas iš urnos. Tegul urnoje yra m tokių rutulių, o iš eilės traukiame n. Galima traukti *su* *grąžinimu* arba *be grąžinimo*, o rezultatus pateikti kaip *sutvarkytąjį rinkinį* arba *nesutvarkytąjį rinkinį*. Keturiose eksperimento schemose aibė Ω apibrėžiama skirtingai ir jos galios skiriasi:

1. Eksperimento rezultatas yra sutvarkytasis rinkinys, imamas su grąžinimu. Tada

$$\Omega = \Big\{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n),\ \omega_i \in \{1, \dots, m\},\ 1 \le i \le n\Big\}, \quad |\Omega| = m^n.$$

Čia ω_i yra paimto i-uoju rutulio numeris, o ω - gretinys su pasikartojančiais elementais.

2. Eksperimento rezultatas yra nesutvarkytasis rinkinys, imamas su grąžinimu. Tada

$$\Omega = \Big\{\omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\},\ \omega_i \in \{1, \dots, m\},\ 1 \le i \le n\Big\}, \quad |\Omega| = \binom{n+m-1}{n}.$$

Dabar ω - paimtų rutulių numerių multiaibė.

3. Eksperimento rezultatas yra sutvarkytasis rinkinys, imamas be grąžinimo. Tada

$$\Omega = \Big\{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n),\ \omega_i \in \{1, \dots, m\},\ \omega_i \neq \omega_j, 1 \le i < j \le n\Big\}, \quad |\Omega| = A_m^n.$$

Dabar ω - paimtų rutulių skirtingų numerių gretinys.

4. Eksperimento rezultatas yra nesutvarkytasis rinkinys, imamas be grąžinimo. Tada

$$\Omega = \Big\{\omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\},\ \omega_i \in \{1, \dots, m\},\ \omega_i \neq \omega_j, 1 \le i < j \le n\Big\}, \quad |\Omega| = \binom{m}{n}.$$

Dabar ω - paimtų rutulių numerių poaibis.

Rutuliai yra tik įvaizdis. Nagrinėdami n studentų grupės gimimo dienas, mes traukiame su grąžinimu: studentas pasako savo gimtadienį (vieną iš 365 dienų), kitas gali tą patį irgi pakartoti... Apklausą vykdome pagal sąrašą - rezultatas yra sutvarkytasis gimtadienių rinkinys. Kaip ir 1. atveju, gauname

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n),\ \omega_i \in \{1, \dots, 365\},\ 1 \le i \le n\}.$$

Čia $|\Omega| = 365^n$.

Loterijoje su bilietų aibe $\mathcal{M}$, $|\mathcal{M}| = M$, perkame $n \le M$. Aišku, dabar traukiame „rutulius" be grąžinimo. Dabar

$$\Omega = \Big\{\omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\} \subset \mathcal{M},\ \omega_i \neq \omega_j,\ 1 \le i < j \le n\Big\},$$

o $|\Omega| = \binom{M}{n}$.

II. *Rutulių dėjimas į numeruotas dėžes.* Tai ypač mėgstama fizikų eksperimento schema. Jų modeliuose elektronai, protonai ar kitos elementariosios dalelės dėliojamos į energetinius lygmenis ar pan. Tegul į m sunumeruotų dėžių iš eilės dedama n rutulių, kurie gali būti *skirtingi* (turėti savo numerius, skirtingas spalvas ar mases) arba *vienodi*. Galime rutulių skaičiaus dėžėse *neriboti* arba *riboti*, t.y. leisti dėti ne daugiau vieno rutulio į dėžę. Vėl turime keturias sudėjimo schemas.

1. Dedami skirtingi rutuliai, o rutulių skaičius dėžėje neribojamas (Maxwell-Bolzmann). Tada visos baigtys aprašomos aibe

$$\Omega = \Big\{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n),\ \omega_i \in \{1, \dots, m\},\ 1 \le i \le n\Big\}, \quad |\Omega| = m^n.$$

Čia ω_i yra dėžės, į kurią pateko i-asis rutulys, numeris, o ω - gretinys su pasikartojančiais elementais.

2. Dedami vienodi rutuliai, o rutulių skaičius dėžėje neribojamas (Bose-Einstein). Tada visos eksperimento baigtys aprašomos aibe

$$\Omega = \Big\{\omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\},\ \omega_i \in \{1, \dots, m\},\ 1 \le i \le n\Big\}, \quad |\Omega| = \binom{n+m-1}{n}.$$

Dabar ω - dėžių, į kurias pateko rutuliai, numerių multiaibė.

3. Dedami skirtingi rutuliai ir rutulių skaičius dėžėje ribojamas vienu. Tada visos eksperimento baigtys aprašomos aibe

$$\Omega = \Big\{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n),\ \omega_i \in \{1, \dots, m\}, \omega_i \ne \omega_j, 1 \le i < j \le n\Big\}, \quad |\Omega| = A_m^n.$$

Dabar ω_i, dėžės, į kurią pateko i-asis rutulys, numeris, o ω - šių numerių gretinys.

4. Dedami vienodi rutuliai ir rutulių skaičius dėžėje ribojamas vienu (Fermi-Dirac).

$$\Omega = \Big\{\omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\},\ \omega_i \in \{1, \dots, m\}, \omega_i \ne \omega_j, 1 \le i < j \le n\Big\}, \quad |\Omega| = \binom{m}{n}.$$

Dabar ω - dėžių, į kurias pateko rutuliai, numerių poaibis.

Akivaizdu, kad eksperimentų schemos I ir II turi daug panašumų.

Visada tiksliai užsirašykite elementariųjų įvykių aibę Ω. Jos poaibiai bus *įvykiai*, tačiau nebūtinai visi. Tegul $\mathcal{F}$ yra dominančių įvykių sistema. Kokių sąlygų reikia, turiningai matematinei teorijai kurti? Aptarkime tai.

Pirma, pastebėkime, kad koks nors taškas iš aibės Ω tikrai pasirodys eksperimente. Todėl ji turėtų būti įvykių sistemoje, t.y.

$$\Omega \in \mathcal{F}. \tag{2.1}$$

Pastarąjį įvykį vadinsime *būtinuoju*.

Antra, jei $A \in \mathcal{F}$, t.y. yra įvykis, tai natūralu ir jo papildinį laikyti įvykiu:

$$\overline{A} := \Omega \setminus A \in \mathcal{F}. \tag{2.2}$$

Pastarąjį įvykį vadinsime *priešinguoju* įvykiui A.

Trečia, jei $A, B \in \mathcal{F}$ buvo įvykiai, tai pasakymas „įvyko A arba B" aiškiai apibrėžia naują įvykį. Todėl įveskime tokį reikalavimą (aksiomą):

$$A, B \in \mathcal{F} \quad \Rightarrow \quad A \cup B \in \mathcal{F} \tag{2.3}$$

Jei įvykių be galo daug to nepakanka, reikalaujama, kad

$$A_n \in \mathcal{F}, n = 1, 2, \ldots, \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{F}. \tag{2.4}$$

Įvykių sistema $\mathcal{F}$ vadinama *algebra*, jei tenkina (2.1-(2.3), ir vadinama σ *algebra*, jei tenkina (2.1-(2.4). Pastebėkime, kad ir įvykių sankirta yra įvykis. Iš tiesų,

$$A, B \in \mathcal{F} \quad \Rightarrow \quad \overline{A}, \overline{B} \in \mathcal{F}.$$

Vadinasi,

$$A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \in \mathcal{F}.$$

Toks teiginys galioja ir dėl skaičios begalinės įvykių sistemos t.y. jų sankirta yra įvykis.

Įvykiai, tenkinantys sąlygą $A \cup B = \emptyset$ vadinami *nesutaikomaisiais*, o elementarusis įvykis $\omega \in \Omega \cap A$, vadinamas *palankiu* įvykiui $A \in \mathcal{F}$.

Trečiasis banginis, ant kurio laikosi tikimybių teorija, - *tikimybė*. Tai funkcija

$$P : \mathcal{F} \to [0, 1], \qquad P(\Omega) = 1,$$

tenkinanti vadinamąją σ adityvumo sąlygą:

Jei $\mathcal{F}$ yra σ algebra ir

$$A_n \in \mathcal{F}, n = 1, 2, \ldots, \; A_i \cap A_j = \emptyset, \tag{2.5}$$

tai

$$P\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \sum_{n \geq 1} P(A_n).$$

Jei visi elementarieji įvykiai $\omega \in \Omega$ turi vienodas tikimybes ir $|\Omega| < \infty$, tai turime klasikinį tikimybės apibrėžimą:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Tada suskaičiuojame, kiek yra palankių elementariųjų įvykių ir dalijame iš visų tokių įvykių skaičiaus. Kodėl esant $|\Omega| = \infty$ visi elementarieji vykiai negali turėti vienodų tikimybių?

Trejetas $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vadinamas tikimybine erdve.

Lema 1. *Jei $A_1, \ldots, A_n$ yra įvykiai, tai*

$$\begin{aligned} P\Big(\bigcup_{j\le n} A_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j) - \sum_{1\le i<j\le n} P(A_i \cap A_j) + \cdots \\ + (-1)^{k-1} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} P(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}) \\ + (-1)^{n-1} P(A_1\cap\cdots\cap A_n). \end{aligned}$$

Įrodymas. Jei įvykius A_j, $1\le j\le n$, sudaro baigtinis skaičius elementariųjų įvykių $\omega\in\Omega$ ir jų pasirodymo tikimybės vienodos, tinka klasikinis tikimybės apibrėžimas. Šiuo atveju formulė buvo įrodyta, nes visos lygybėje užrašytos tikimybės yra gautos palankių įvykių skaičius dalijant iš $|\Omega|$. Palankių įvykių skaičiui pakanka pritaikyti kombinatorikoje įrodytą aibių sąjungos galios skaičiavimo formulę.

Panašus įrodymas tiktų ir bendresniu atveju.

Apibrėžimas. *Jei*

$$P(A\cap B) = P(A)P(B),$$

tai įvykiai $A\in\mathcal{F}$ ir $B\in\mathcal{F}$ vadinami nepriklausomaisiais.

Išplėskime apibrėžimą įvykių šeimai $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Ji vadinama *nepriklausomąja*, jeigu bet kokiam jos daliniam pošeimiui $\{A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}\}$, $1\le i_1 < \cdots < i_k \le n$, $1\le k\le n$, galioja

$$P\Big(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}\Big) = P\Big(A_{i_1}\Big)\cdots P\Big(A_{i_k}\Big).$$

Šeima įvykių, kuri yra poromis nepriklausoma, nebūtinai yra nepriklausoma: Tegul

$$A = \text{"}\textit{Jonas ir Petras gimė tą pačią dieną}\text{"},$$
$$B = \text{"}\textit{Jonas ir Ona gimė tą pačią dieną}\text{"}$$
$$C = \text{"}\textit{Petras ir Ona gimė tą pačią dieną}\text{"}.$$

Tada $P(A) = P(B) = P(C) = 365/(365)^2 = 1/365$ ir

$$P(A\cap B) = P(A\cap C) = P(B\cap C) = P(A\cap B\cap C) = 365/(365)^3 = 1/(365)^2.$$

Taigi, poromis nepriklausomi. Tačiau

$$P(A\cap B\cap C) = 1/(365)^2 \ne P(A)P(B)P(C) = 1/(365)^3.$$

Sąlyginė tikimybė apibrėžiama lygybe

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}, \qquad A, B\in\mathcal{F}.$$

Sprendžiant uždavinius dažnai yra patogu pasinaudoti pilnosios tikimybės formule. Naudosime aibės Ω skaidinius

$$\Omega = B_1\cup\cdots\cup B_k.$$

Įvykius $B_j, j \le k$ vadiname *pilnąja įvykių sistema.*

Lema 2. *Jei $B_1, \dots, B_k$ yra pilnoji įvykių sistema , tai*

$$P(A) = \sum_{j=1}^{k} P(A|B_j)\, P(B_j).$$

Įrodymas išplaukia iš lygybės

$$A = \cup_{j=1}^{k} A \cap B_j$$

ir tikimybės adityvumo savybės.

Atskiru atveju,

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|\overline{B})P(\overline{B}),$$

čia $\overline{B} = \Omega \setminus B$ yra įvykio B papildinys.

Panagrinėkime magistrų lygį atitinkančių uždavinių.

1 *UŽDUOTIS* (Rinkimų problema). *Žinoma, kad rinkimuose pretendentas J gauna n balsų, o už pretendentą K balsuoja m ir $n > m$. Tarkime, kad bet kuri atėjusių balsuoti rinkėjų tvarka yra vienodai galima, ir raskime įvykio*

$$A := A_{n,m} = \text{"}J \ \ visada \ \ pirmauja \ \ prieš\, K\text{"}$$

tikimybę.

Sprendimas. Pažymėkime $P(A) = P_{nm}$. Tegu

$$B = \text{"}J \ gauna \ \ paskutinį \ \ balsą\text{"}.$$

Tada $\bar{B} =$ "*K gauna paskutinį balsą*" ir

$$P_{nm} = P(A\,|B)P(B) + P(A\,|\bar{B})P(\bar{B}) = P_{n-1,m}\frac{n}{n+m} + P_{n,m-1}\frac{m}{n+m}.$$

Jei $n = m + 1$, natūralu yra susitarti, kad $P_{n-1,m} = 0$.

Dabar naudodami matematinę indukciją $n + m$ atžvilgiu nesunkai išvedame **atsakymą**:

$$P_{nm} = \frac{n-m}{n+m}.$$

2 *UŽDUOTIS* (Lošėjo bankrotas). *Mėtoma taisyklinga moneta. Lošėjas, pradžioje turėdamas i litų, gauna iš lošėjo B, startuojančio su $N - i$ litų, 1 litą, jeigu atsiverčia herbas, ir atiduoda jam 1 litą priešingu atveju. Rasti tikimybę P_i įvykio, kai visi N litų suplaukia pas A.*

Sprendimas. Galime laikyti, kad $P_0 = 0$, o $P_N = 1$. Tegul D yra nagrinėjamas įvykis, o H - herbo atsivertimas. Pritaikome pilnosios tikimybės formulę:

$$P_i = P(D) = P(D|H)P(H) + P(D|\overline{H})P(\overline{H}) = \frac{1}{2}\Big(P(D|H) + P(D|\overline{H})\Big).$$

Dabar pagrindinė idėja: pirmoji sąlyginė tikimybė lygi P_{i+1}, o antroji yra P_{i-1}. Taigi,

$$P_i = \frac{1}{2}\Big(P_{i+1} + P_{i-1}\Big).$$

Kitaip tariant, gauname tiesinę homogeninę rekurenčiąją lygtį

$$2P_i = P_{i+1} + P_{i-1}, \quad i \geq 1,$$

kurią mokame spręsti. Šį kartą tai tik aritmetinė progresija, todėl trumpiau būtų elgtis šitaip:

$$P_{i+1} - P_i = P_i - P_{i-1} = P_1 - P_0 = P_1, \quad 0 \leq i \leq N.$$

Vadinasi,

$$P_i = iP_1.$$

Kai $i = N$, gauname $1 = NP_1$. Taigi, $P_1 = 1/N$, o $P_i = i/N$. tai ir yra atsakymas.

Išspręskite šį uždavinį, kai herbo atsivertimo tikimybė $p \neq 1/2$.

3. Diskretieji atsitiktiniai dydžiai

Tegul $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ yra tikimybinė erdvė. Funkciją $X : \Omega \to \mathbb{R}$, vadinsime atsitiktiniu dydžiu, (panašiai $Y : \Omega \to \mathbb{R}^d$ – d-mačiu atsitiktiniu vektoriumi), jeigu

$$\{\omega : \ X(\omega) \in (a, b]\} \in \mathcal{F}$$

bet kokiam intervalui $(a, b] \subset \mathbb{R}$ (atitinkamai d-mačiui intervalui).

Diskrečios tikimybinės erdvės atveju $\Omega = \{\omega^i : \ i = 1, 2, ...\}$ pakanka žinoti tikimybes

$$P(X = \alpha) := P(\{\omega^i : \ X(\omega^i) = \alpha\}) = \sum_{i, X(\omega^i)=\alpha} P(\omega^i), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Jei $\alpha \in \mathbb{R}$ perbėga visas X-o reikšmes, tai šių tikimybių rinkinys vadinamas X -o *skirstiniu*.

Panašiai apibrėžiamas ir vektoriaus skirstinys.

1. *Bernulio atsitiktinis dydis* **Be(p)**:

$$P(X = 1) = 1 - P(X = 0) = p,$$

čia $0 < p < 1$ - „sėkmės" tikimybė. Taigi, $X \in \{0, 1\}$ dvireikšmis a.d. Žinoma, skaičius 0 ir 1 galime pakeisti ir raidėmis, pvz., jei mėtoma moneta patogiau rašyti H, M pagal herbo ir monetos atsivertimą.

2. *Binominis atsitiktinis dydis* **Bi(n,p)**:

Tegul $0, 1$ yra eksperimento rezultatai, bet jis kartojamas n kartų nepriklausomai nuo ankstesnių pasiekimų,

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) : \ \omega_i \in \{0, 1\}\},$$

Jei p, $0 \leq p \leq 1$, yra vieneto tikimybė viename iš eksperimentų ir $p + q = 1$. Kiekvienam $\omega \in \Omega$ priskirkime tikimybę

$$P(\omega) = p^k q^{n-k},$$

čia $k \geq 0$ yra kiekis koordinačių ω_i, lygių 1, $1 \leq i \leq n$. Tada

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n;$$

yra sėkmių (1-etų skaičiaus), vykdant Bernulio eksperimentus n kartų, tikimybės. Jos apibrėžia binominį skirstinį **Bi(n,p)**. A. dydis S_n vadinamas *binominiu a.d.*

Galėtume įsivaizduoti ir a.vektorių $Y := (S_n, N_n)$, čia N_n – nesėkmių kiekis arba 0-ių skaičius po n eksperimentų. Jo skirstiniu būtų tos pačios tikimybės

$$P\Big(Y = (k, n-k)\Big) = P\Big((S_n, N_n) = (k, n-k)\Big) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k = 0, \ldots, n.$$

1 *UŽDUOTIS. Tegul monetos herbo atsivertimo tikimybė yra $0 < p < 1$. Mėtant ją daug kartų yra pirmasis momentas, kada skaičiaus ir herbo atsivertimų kiekiai sutampa. Užrašyti tokių laiko momentų skirstinį.*

Sprendimas. Šis momentas T yra a.d., įgyjantis lygines natūraliąsias reikšmes. Jei $T = 2n$, tai per pirmuosius $2n$ metimų herbas atsivertė n kartų. Vadinasi,

$A := \{T = 2n\} \subset B :=$ "*per pirmuosius $2n$ metimų herbas atsivertė n kartų*"

ir

$$P(A) = P(A \cap B) = P(A|B)P(B).$$

Todėl

$$\begin{aligned} P(T = 2n) &= P(T = 2n\,|B) \cdot \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n \\ &=: \widehat{P} \cdot \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n. \end{aligned}$$

Nagrinėdami sąlyginę tikimybę $\widehat{P}$ pastebime, kad mėtant monetą bet kuris $2n$ galimybių (iš n herbų ir n skaičių) išsidėstymas yra vienodai galimas. Momentas T buvo pirmasis, kai herbų ir skaičių rezultatas išsilygino. Vienu metimu prieš tai visą laiką viena monetos pusė pirmavo prieš kitą. Pavyzdžiui, iškritusių herbų būdavo daugiau negu skaičių ir priešpaskutiniu momentu pirmųjų buvo n, o antrųjų - lygiai $(n-1)$. Vadinasi, tikimybė $\widehat{P}$ lygi 2 skyrelio pirmoje užduotyje įvestai tikimybei $P_{n,n-1}$. Pritaikę ankstesnį rezultatą

$$P_{nm} = \frac{n-m}{n+m},$$

kai $m = n - 1$, gauname **atsakymą:**

$$P(T = 2n) = \frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n} p^n (1-p)^n.$$

3. Dabar binominių eksperimentų schemą galime apibendrinti. Vietoje dvimačio vektoriaus nagrinėti didesnių matmenų atsitiktinius vektorius ir apibrėžti vadinamąjų *multinominį skirstinį*. Jis priklausys ne tik nuo n, bet ir tikimybių rinkinio $(p_1, \ldots, p_d)$, tenkinančio sąlygą $p_1 + \cdots + p_d = 1$.

Pradėkime nuo tikimybinės erdvės. Tegul $a_1, \ldots a_d$ bet kokie skirtingi skaičiai, $d \geq 1$.

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) : \ \omega_i \in \{a_1, \ldots, a_d\}\},$$

Įsivaizduokime n eksperimentų seką, kurioje kiekvienas rezultatas yra vienas iš skaičių $a_1, \ldots, a_d$, įgyjamas su tikimybėmis $p_1, \ldots, p_d$. Jos tenkins sąlygą $p_1 + \cdots + p_d = 1$. Kiekvienam $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega$ priskiriama tikimybė

$$P(\omega) = p_1^{k_1} \cdots p_d^{k_d},$$

jeigu $k_i \geq 0$ iš koordinačių ω_j buvo lygios a_i, čia $1 \leq i \leq d$. Tokių $\omega \in \Omega$ yra

$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_d} = \frac{n!}{k_1! \cdots k_d!}, \quad k_1 + \cdots + k_d = n.$$

Vadinasi tikimybės, kad po n eksperimentų a_1 bus pasirodęs k_1 kartų, ..., a_d bus pasirodęs k_d kartų, aprašo d-matį atsitiktinį vektorių Y_n:

$$P\Big(Y_n = (k_1, \ldots, k_d)\Big) = \frac{n!}{k_1! \cdots k_d!} p_1^{k_1} \cdots p_d^{k_d}, \quad k_1 + \cdots + k_d = n.$$

Pastarosios lygybės apibrėžia d-matį skirstinį, vadinamą *multinominiu* (polinominiu). Nurodant jo parametrus, galima žymėti $\mathbf{M}(\mathbf{n}; \mathbf{p_1}, \ldots, \mathbf{p_d})$, čia $p_1 + \cdots + p_d = 1$, $d, n \geq 1$.

Išsklaidydami abejones, kad tai tikrai skirstinys, pastebėkime, jog

$$\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_d=n \\ k_1,\ldots,k_d \geq 0}} P\Big(Y_n = (k_1, \ldots, k_d)\Big) = \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_d=n \\ k_1,\ldots,k_d \geq 0}} \frac{n!}{k_1! \cdots k_d!} p_1^{k_1} \cdots p_d^{k_d}$$
$$= \quad (p_1 + \cdots + p_d)^n = 1^n = 1.$$

4. *Geometrinis skirstinys* $\mathbf{Ge(p)}$. Vykdykime Bernulio eksperimentus iki pirmosios sėkmės, pvz., pirmojo herbo atsivertimo. Tegul $P(H) = p \in (0, 1)$, o X yra bandymų skaičius. Aišku, jo įgyjamos reikšmės yra natūralieji skaičiai. O kokios atitinkamos tikimybės arba skirstinys? Palankius įvykius rasime aibėje

$$\{H, MH, MMH, \ldots, M \cdots MH, \ldots\}.$$

Tada

$$P(X = n) = P\Big(\{\underbrace{M \cdots M}H\}\Big) = (1-p)^{n-1} p, \quad n \geq 1.$$

Čia suskliausta $(n-1)$-a raidė M. Tai ir yra geometrinio atsitiktinio dydžio skirstinys.

5. *Neigiamasis binominis skirstinys* $\mathbf{NeBi(r,p)}$. Vykdykime Bernulio eksperimentus iki r-osios, $r \geq 1$, sėkmės, pvz., pirmojo herbo atsivertimo. Tegul, kaip ir anksčiau, $P(\{H\}) = p \in (0,1)$, bet X yra bandymų skaičius iki r-os sėkmės. Aišku, jo įgyjamos reikšmės yra natūralieji skaičiai, nemažesni už r. O kokios atitinkamos tikimybės arba skirstinys? Kokie elementarieji įvykiai yra palankūs įvykiui $A = \{\omega : X = n\}$?

Tai įvykiai:

$$\omega := \{\underbrace{M \cdots H \cdots M}H, \},$$

kuriuose pabrauktoje dalyje yra lygiai $r-1$ raidė H, o iš viso raidžių yra n. Tada

$$P(X = n) = \sum_{\omega} P(\omega).$$

Čia sumuojama pagal visas baigtis su savybe: kuriose nors iš suskliaustų vietų buvo lygiai $(r-1)$-a raidė H, o kitas užpildė M. Tokių baigčių yra $\binom{n-1}{r-1}$. Todėl atsitiktinio dydžio X skirstinys yra

$$P(X = n) = \binom{n-1}{r-1}(1-p)^{n-r}p^r, \quad n \geq r.$$

Jis vadinamas *neigiamuoju binominiu.*

6. *Puasono skirstinys* $\mathbf{Po}(\lambda)$. Kai n yra didelis, binominio skirstinio tikimybėse

$$P(S_n = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$$

esančius faktorialus apskaičiuoti sunku, netgi su kalkuliatoriumi. Atskirais atvejais galima pasinaudoti tikimybių ribomis, kai $n \to \infty$, nes jos yra artimos pačioms tikimybėms. Paliesime tik vieną labai svarbų atvejį.

Poisson'o teorema. *Tegul vykdant Bernulio eksperimentus sėkmės tikimybės p tenkina sąlygą*

$$p = p_n = \frac{\lambda}{n}\Big(1 + \mathrm{o}(1)\Big), \quad n \to \infty.$$

Čia $\lambda > 0$ yra konstanta. Tada

$$\lim_{n\to\infty} P(S_n = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Įrodymas. Tai ribos skaičiavimo pratimas. Jei nykstamai mažo dydžio $o(1)$ sąlygoje nebūtų, t.y. jei $p = \lambda/n$, tada turėtume

$$\begin{aligned} P(S_n = k) &= \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \Big(\frac{\lambda}{n}\Big)^k \Big(1 - \frac{\lambda}{n}\Big)^{n-k} \\ &= 1\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\cdots\Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big)\frac{\lambda^k}{k!}\Big(1 - \frac{\lambda}{n}\Big)^{-k}\Big(1 - \frac{\lambda}{n}\Big)^n. \end{aligned}$$

Baigtinis skaičius daugiklių artėjančių prie 1 nesudaro sunkumų, o paskutinio daugiklio konvergavimo įrodymas - tipinis ribos skaičiavimo uždavinys. Jo riba yra $\mathrm{e}^{-\lambda}$. Taigi,

$$\lim_{n\to\infty} P(S_n = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

su kiekvienu $k = 0, 1, \ldots$.

Kaip nagrinėti bendresnį atvejį, kai p_n sąlygoje yra nykstanti liekana? Pabandykite savarankiškai.

Teoremoje gautos ribinės tikimybės apibrėžia *Puasono a.d. ir skirstinį.*

7. *Hipergeometrinis skirstinys.* Iš urnos, kurioje yra m baltų ir $N - m$ juodų rutulių,$1 \le m \le N-1$, be grąžinimo traukiama $n \le N$ rutulių. Kokia tikimybė, kad imtyje yra lygiai k baltųjų? Tegul tas skaičius yra X. Raskime jo skirstinį. Galime įsivaizduoti, kad rutuliai yra numeruoti, o imtis - nesutvarkytoji, t.y.

$$\Omega = \{\omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\},\ \omega_i \in \{B_1, \ldots, B_m, J_1, \ldots, J_{N-m}\},\ 1 \le i \le n\}.$$

Čia B_i - baltųjų rutulių numeriai, o J_r - juodųjų. Iš viso yra N rutulių, todėl $|\Omega| = \binom{N}{n}$. Įvykiui $\{X = k\}$ palankūs yra tie ω, kuriuose yra lygiai k baltųjų ir $n - k$ juodųjų. Tokių iš viso yra

$$\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}.$$

Vadinasi,

$$P(X = k) = \binom{N}{n}^{-1}\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}.$$

Čia $0 \le k \le \min\{m, n\} =: m \wedge n$.

Pastarasis skirstinys vadinamas *hipergeometriniu.* Galima nagrinėti ir imtis traukiant iš dėžės su daugiau nei dviem spalvom nudažytais rutuliais.

Daugiamatis hipergeometrinis skirstinys:

$$P\Big((X_1 = k_1, \ldots, X_r = k_r\Big) = \binom{N}{n}^{-1}\binom{m_1}{k_1}\cdots\binom{m_r}{k_r}, \quad k_1 + \cdots + k_r = n.$$

Čia $0 \le k_i \le m_i$, $1 \le i \le r$, o $m_i \ge 1$ reikštų i-osios spalvos rutulių, esančių urnoje, skaičių.

4. Atsitiktinio dydžio vidurkis

Apibrėžimas. *Jei a.d. X reikšmės yra $a_1, \dots a_n, \dots$, tai eilutė*

$$\sum_n a_n P(X = a_n),$$

jei ji konverguoja absoliučiai, vadinama jo vidurkiu ir žymima $\mathbf{E}X$.

Pastebėkime, kad čia reikalaujama ir

$$\mathbf{E}|X| = \sum_n |a_n| P(X = a_n) < \infty.$$

Jei reikšmių tik baigtinis skaičius, vidurkis visada egzistuoja.

Teorema 1. *Tegul atsitiktiniai dydžiai X ir Y turi baigtinius vidurkius* $\mathbf{E}X$ *ir* $\mathbf{E}Y$*. Tada*

$$\mathbf{E}(X + Y) = \mathbf{E}X + \mathbf{E}Y.$$

Įrodymas. Tegul jie apibrėžti skirstiniais

$$P(X = \alpha_i) = p_i, \quad i = 1, 2, \dots$$

ir

$$P(Y = \beta_j) = q_j, \quad j = 1, 2, \dots$$

Tada

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X + Y) &= \sum_{i,j} (\alpha_i + \beta_j) P(X = \alpha_i, Y = \beta_j) \\ &= \sum_i \alpha_i \sum_j P(X = \alpha_i, Y = \beta_j) \\ &\quad + \sum_j \beta_j \sum_i P(X = \alpha_i, Y = \beta_j). \end{aligned}$$

Bet

$$\sum_j P(X = \alpha_i, Y = \beta_j) = P(X = \alpha_i), \qquad \sum_i P(X = \alpha_i, Y = \beta_j) = P(Y = \beta_j),$$

todėl

$$\mathbf{E}(X + Y) = \sum_i \alpha_i P(X = \alpha_i) + \sum_j \beta_j P(Y = \beta_j) = \mathbf{E}X + \mathbf{E}Y.$$

Įrodyta.

Teorema 2. *Tegul nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai X ir Y turi baigtinius vidurkius* $\mathbf{E}X$ *ir* $\mathbf{E}Y$*. Tada*

$$\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}X\mathbf{E}Y.$$

Įrodymas. Tegul a.d. apibrėžti skirstiniais

$$P(X = \alpha_i) = p_i, \quad i = 1, 2, \ldots$$

ir

$$P(Y = \beta_j) = q_j, \quad j = 1, 2, \ldots$$

Toliau reikia pasinaudoti nepriklausomumu ir tęsti kaip ankstesnės teoremos įrodyme. paliekame savarankiškam darbui.

Išmokti rasti visų minėtų atsitiktinių dydžių vidurkius!

Sunkesnis pavyzdys. Rasime hipergeometrinio a.d. X vidurkį. Skaičiuojame

$$\mathbf{E}X = \binom{N}{n}^{-1} \sum_{k=1}^{n \wedge m} k \binom{m}{k} \binom{N-m}{n-k}.$$

Pasinaudokime lygybe

$$k\binom{m}{k} = m\binom{m-1}{k-1}$$

Gauname

$$\begin{aligned} \mathbf{E}X &= \binom{N}{n}^{-1} m \sum_{k=1}^{n \wedge m} \binom{m-1}{k-1} \binom{N-m}{n-k} \\ &= \binom{N}{n}^{-1} m \sum_{k=0}^{(n-1)\wedge(m-1)} \binom{m-1}{k} \binom{(N-1)-(m-1)}{n-1-k}. \end{aligned}$$

Paskutiniame žingsnyje pakeitėme sumavimo kintamąjį. Dabar galime pasinaudoti savybe, kad būtinojo įvykio tikimybė yra vienetas. Mūsų atveju, tai lygybė

$$\binom{N-1}{n-1}^{-1} \sum_{k=0}^{(n-1)\wedge(m-1)} \binom{m-1}{k} \binom{(N-1)-(m-1)}{n-1-k} = 1,$$

reiškianti, kad hipergeometrinis dydis, kurio parametrai per vieną mažesni negu nagrinėjamojo, įgyja visas įmanomas reikšmes. Įstatę sumos reikšmę į priešpaskutinę lygybę, gauname

$$\mathbf{E}X = \binom{n}{n}^{-1} m \binom{N-1}{n-1} = \frac{mn}{N}.$$

Lema 3. *Jei a.d. X reikšmės yra $a_1, \ldots a_n, \ldots$, o $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yra funkcija, tai $Y = g(X)$ yra a.dydis; be to,*

$$P(Y = \beta) = \sum_{n, g(a_n)=\beta} P(X = a_n).$$

Vadinasi, galime kalbėti apie vidurkius $\mathbf{E}g(X)$. Vidurkis $\mathbf{E}X^k$ vadinamas k-osios eilės a.d. X *momentu*, o $\mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^k$ vadinamas k-osios eilės a.d. X *centruotuoju momentu*. Žinoma, juos naudojant turi būti $\mathbf{E}|X|^k < \infty$ ir $\mathbf{E}|X - \mathbf{E}X|^k < \infty$ atitinkamai.

Apibrėžimas. *Atsitiktinio dydžio X dispersija vadinamas vidurkis*

$$VarX := \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^2.$$

Ją skaičiuoti papraščiau remiantis tokiu teiginiu.

Teorema 3.

$$VarX := \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2.$$

Įrodymas....

Teorema 4. *Tegul nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai X ir Y turi baigtines dispersijas. Tada*

$$Var(X + Y) = VarX + VarY.$$

Įrodymas....

5. Skirstinio generuojančioji eilutė

Apibrėžimas. *Jei a_k, $k \geq 0$, yra a.d. X reikšmės, tai*

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} P(X = a_k)x^{a_k}$$

yra vadinama jo generuojančiąja eilute arba funkcija.

Kaip funkcija ji apibrėžta intervale $[-1, 1]$. Raskime visų įvestųjų skirstinių generuojančias funkcijas.

1. $\mathbf{Be(p)}$ atvejis:

$$\sum_{k=0}^{1} P(X = k)x^k = 1 - p + px.$$

2. $\mathbf{Bi(n; p)}$ atvejis. Tegul $q = 1 - p$, tada

$$\sum_{k=0}^{n} P(S_n = k)x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} x^k = (q + px)^n.$$

Štai iš kur kilo skirstinio pavadinimas *binominis.*

3. $\mathbf{Ge(p)}$ atvejis. Tegul $q = 1 - p$, tada

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X = k)x^k = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - p)^{k-1} px^k = px(1 - qx)^{-1}.$$

Pasinaudojome begalinės geometrinės progresijos sumos formule. Ir vėl skirstinio pavadinimas *geometrinis* susijęs su generuojančia funkcija.

5. **NeBi(r, p)** atvejis. Turime

$$\begin{aligned}\sum_{k=r}^{\infty} P(X=k)x^k &= \sum_{k=r}^{\infty} \binom{k-1}{r-1}(1-p)^{k-r}p^r x^k \\ &= (px)^r \sum_{k=r}^{\infty} \binom{k-1}{r-1}(qx)^{k-r} \\ &= (px)^r \sum_{m=o}^{\infty} \binom{m+r-1}{r-1}(qx)^m \\ &= (px)^r(1-qx)^{-r}.\end{aligned}$$

Priešpaskutiniame žingsnyje pakeitėme sumavimo indeksą, o pabaigoje - pritaikėme dvinario kėlimo neigiamuoju laipsniu formulę. Pastaroji suteikė skirstiniui pavadinimą.

6. **Puasono skirstinio** atvejis. Tegul $\lambda > 0$, tada

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}x^k = \exp\{\lambda(x-1)\}.$$

Pasinaudojome eksponentinės funkcijos skleidinio formule.

Lema 4. *Jei vidurkis* $\mathbf{E}|X|$ *yra baigtinis, o* $f(x)$ *yra a.d.* X *generuojanti funkcija, tai*

$$\mathbf{E}X = f'(x)\Big|_{x=1}.$$

Įrodymas. Turime

$$f(x) = \sum_n P(X=a_n)x^{a_n}, \qquad f'(x) = \sum_n P(X=a_n)a_n x^{a_n-1}.$$

Diferencijuoti buvo galima ir formaliai, bet šį kartą, mums reikalinga išvestinės reikšmė taške $x = 1$. Ji turi būti apibrėžta. Tam mes turime sąlygą $\mathbf{E}|X| < \infty$. išvestinių eilutė konverguoja absoliučiai intervale $[-1, 1]$. Įstatę $x = 1$, gauname norimą lygybę. $\diamond$

Naudodamiesi lema raskite visų išvestųjų a.d. vidurkius. Pavyzdžiui, jei S_n yra binominis a.d. su parametrais n ir p, tai

$$\mathbf{E}S_n = \Big((1-p+px)^n\Big)'\Big|_{x=1} = np(1-p+px)^{n-1}\Big|_{x=1} = np.$$

Kontrolinis uždavinys: tegul X yra geometrinis a.d. su parametru $p \in (0, 1)$, o $Y = \frac{1}{X+1}$. Rasti Y skirstinį ir $\mathbf{E}Y$.

Kokią prasmę turi kitų eilių generuojančios funkcijos išvestinių reikšmės taške $x = 1$? Atsakę į šį klausimą, galėsite lengvai rasti aukščiau išvardintų atsitiktinių dydžių aukštesnių eilių momentus.

Tikiuosi, kad iš statistikų folkloro paimtas *Gimtadienio paradoksas* tinka vietoje epilogo.

Aprašykime n studentų gimimo dienas, tarę, kad metuose yra 365 dienos. Tegul

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) : \ 1 \le \omega_i \le M = 365, \, i \le n\}$$
$$A = \{\omega \in \Omega : \ \omega_i \ne \omega_j \ 1 \le i < j \le n\}.$$

Tada

$$P(A) = A_M^n / M^n = \Big(1 - \frac{1}{M}\Big)\Big(1 - \frac{2}{M}\Big) \cdots \Big(1 - \frac{n-1}{M}\Big).$$

Tikimybė, kad du žmonės iš n yra gimę tą pačią dieną lygi $1 - P(A) =: Q_n$. Taigi,

$$Q_{22} = 0,476, \qquad Q_{23} = 0,507, \dots.$$

Vadinasi, profesorius pradėdamas tikimybių teorijos paskaitas žodžiais *Kertu lažybų iš 100 eurų, kad Jūsų tarpe yra bent du gimę tą pačią metų dieną*, jas dažniau laimėtų, jei kurse yra bent 23 studentai.

6. Sąlyginės tikimybės ir vidurkiai

1. Sąlyginė tikimybė. Tegul $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ yra baigtinė tikimybinė erdvė, o

$$\Omega = D_1 \cup \dots \cup D_k$$

(arba $\mathcal{D} := \{D_1, \dots, D_k\}$) - erdvės skaidinys, tenkinantis sąlygą $P(D_j) > 0$ kiekvienam $1 \le j \le k$.

Iš tiesų, tai pilnoji įvykių sistema, todėl teisinga pilnosios tikimybės formulė

$$P(A) = \sum_{j=1}^{k} P(A|D_j)P(D_j), \quad A \subset \Omega. \tag{6.1}$$

Jei $k = 1$, turime trivialųjį skaidinį, kurį žymėsime tiesiog $\mathcal{D} =: \Omega$.

Apibrėžkime atsitiktinį dydį(!)

$$\pi(\omega) = \sum_{j=1}^{k} P(A|D_j)\mathbf{1}_{D_j}(\omega).$$

Čia $\mathbf{1}_D(\omega)$ yra įvykio indikatorius. Taigi, $\pi(\omega)$ lygus $P(A|D_j)$ tada ir tik tada, jei $\omega \in D_j$. Vadinasi,

$$P(\pi = P(A|D_j)) = P(D_j), \quad j = 1, \dots, k.$$

Pabrėždami, ryšį su skaidiniu $\mathcal{D}$, toliau žymėsime ne $\pi = \pi(\omega)$, bet $P(A|\mathcal{D})$ arba $P(A|\mathcal{D})(\omega)$. **Įsidėmėkime:**

$$P(A|\mathcal{D})(\omega) = \sum_{j=1}^{k} P(A|D_j)\mathbf{1}_{D_j}(\omega).$$

ir toliau vadinkime *sąlygine įvykio A tikimybe atžvilgiu skaidinio $\mathcal{D}$*. Visas jos savybes surašykime teoremos pavidalu.

Teorema 5. *(i)* $P(A|\Omega) = P(A)$.

(ii) Jei A ir B nesutaikomi įvykiai, tai visiems $\omega \in \Omega$

$$P(A \cup B|\mathcal{D}) = P(A|\mathcal{D}) + P(B|\mathcal{D}).$$

(iii)

$$\mathbf{E}P(A|\mathcal{D}) = P(A).$$

Proof. Gal tik paskutinė lygybė nėra akivaizdi. Pasinaudoję vidurkio adityvumu, gauname

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\Big(\sum_{j=1}^{k} P(A|D_j)\mathbf{1}_{D_j}(\omega)\Big) &= \sum_{j=1}^{k} P(A|D_j)\mathbf{E}\Big(\mathbf{1}_{D_j}(\omega)\Big) \\ &\sum_{j=1}^{k} P(A|D_j)P(D_j) = \sum_{j=1}^{k} P(A \cap D_j) \\ &= P(A).\end{aligned}$$

□

Išplėskime ką tik įvestą apibrėžimą. Tegul η yra a.d., įgyjantis reikšmes $y_1, \dots, y_k$. Pastebėkime lygybę

$$\eta = \sum_{j=1}^{k} y_j \mathbf{1}_{D_j}(\omega).$$

Čia $D_j = \{\omega : \eta(\omega) = y_j\}$, o $1 \le j \le k$.

Turime ir Ω skaidinį

$$\Omega = D_1 \cup \dots \cup D_k$$

ir tuo pačiu įvykio A sąlyginę tikimybę jo atžvilgiu. Dabar natūraliau sakyti „a.d. η atžvilgiu". Susitarkime ją žymėti $P(A|\eta)$, t.y.

$$P(A|\eta) = \sum_{j=1}^{k} P(A|D_j)\mathbf{1}_{D_j}(\omega), \quad D_j = \{\omega : \eta(\omega) = y_j\}. \tag{6.2}$$

Galime tęsti. Imkime m a.dydžių $\eta_1, \dots, \eta_m$ su reikšmėmis y_{ij}, $1 \le i \le m$ ir $1 \le j \le k_i$. Jie apibrėžia skaidinį

$$\Omega = \cup_{i=1}^{m} \cup_{j=1}^{k_i} \{\omega : \eta_i(\omega) = y_{ij}\} =: \cup_{i=1}^{m} \cup_{j=1}^{k_i} D_{ij}.$$

Dabar sąlyginė įvykio A tikimybė atžvilgiu a.d. $\eta_1, \dots, \eta_m$ rinkinio yra

$$P(A|\eta_1, \dots, \eta_m) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k_i} P(A|D_{ij})\mathbf{1}_{D_{ij}}(\omega).$$

UŽDUOTIS. Tegul ξ *ir* η *yra nepriklausomi* $\mathbf{Be}(p)$, $0 < p < 1$, *a.d., o* $k = 0, 1, 2$. *Rasti*

$$P(\xi + \eta = k|\eta).$$

Sprendimas. Ieškoma sąlyginė įvykio $A = \{\omega : \xi + \eta = k\}$ tikimybė atžvilgiu a.d. η yra a.d. $P(A|\eta)$. Todėl reikia užrašyti $P(A|\eta)$ reikšmes ir atitinkamas tikimybes. Patikriname lygybę

$$P(\xi + \eta = k|\eta = y) = P(\xi + y = k), \quad y \in \{0, 1\},\ k \in \{0, 1, 2\}.$$

Svarbu, kad ξ ir η yra nepriklausomi. Skaičiuojame

$$\begin{aligned} P(\xi + \eta = k|\eta = y) &= \frac{P(\xi + \eta = k, \eta = y)}{P(\eta = y)} \\ &= \frac{P(\xi + y = k, \eta = y)}{P(\eta = y)} \\ &= \frac{P(\xi + y = k)P(\eta = y)}{P(\eta = y)} \\ &= P(\xi + y = k). \end{aligned}$$

Vadinasi,

$$\begin{aligned} P(\xi + \eta = k|\eta) &= P(\xi + \eta = k|\eta = 0)\mathbf{1}_{\{\eta=0\}}(\omega) \\ &\quad + P(\xi + \eta = k|\eta = 1)\mathbf{1}_{\{\eta=1\}}(\omega) \\ &= P(\xi = k)\mathbf{1}_{\{\eta=0\}}(\omega) \\ &\quad + P(\xi = k - 1)\mathbf{1}_{\{\eta=1\}}(\omega). \end{aligned}$$

Gauname atsakymą:

$$P(\xi + \eta = 0|\eta) = q\mathbf{1}_{\{\eta=0\}}(\omega);$$
$$P(\xi + \eta = 1|\eta) = p\mathbf{1}_{\{\eta=0\}}(\omega) + q\mathbf{1}_{\{\eta=1\}}(\omega)$$

ir

$$P(\xi + \eta = 2|\eta) = p\mathbf{1}_{\{\eta=1\}}(\omega).$$

Galima ekvivalenti atsakymo forma, pasinaudojus lygybėmis $1-\eta = \mathbf{1}_{\{\eta=0\}}(\omega)$ bei $\eta = \mathbf{1}_{\{\eta=1\}}(\omega)$.

2. Sąlyginis vdurkis. Pradžioje prisiminkime sąlyginį a.d.-io ξ su reikšmėmis $\{x_1, \ldots, x_l\}$ (tai *paprasčausias* a.d.) vidurkį atžvilgiu įvykio D. Tegu $A_j = \{\omega : \ \xi = x_j\}$, čia $1 \le j \le l$, tada

$$\mathbf{E}(\xi|D) := \sum_{j=1}^{l} x_j P(A_j|D).$$

Turėdami skaidinį $\mathcal{D} = \{D_1, \ldots, D_k\}$, turime visą rinkinį

$$\mathbf{E}(\xi|D_i) = \sum_{j=1}^{l} x_j P(A_j|D_i), \quad 1 \le i \le k. \tag{6.3}$$

Analogija galime pasinaudoti apibrėždami *sąlyginį vidurkį a.d. ξ su reikšmėmis $\{x_1, \ldots, x_l\}$ atžvilgiu skaidinio $\mathcal{D}$.*

Apibrėžimas.

$$\mathbf{E}(\xi|\mathcal{D}) = \sum_{j=1}^{l} x_j P(A_j|\mathcal{D}).$$

Teorema 6. *Jei $\mathcal{D}$ yra ω skaidinys, tai*

$$\mathbf{E}(\xi|\mathcal{D}) = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{E}(\xi|D_i)\mathbf{1}_{D_i}(\omega). \tag{6.4}$$

Be to,

$$\mathbf{E}\Big(\mathbf{E}(\xi|\mathcal{D})\Big) = \mathbf{E}\xi. \tag{6.5}$$

Proof. Prisiminkime, kad

$$P(A_j|\mathcal{D}) = \sum_{i=1}^{k} P(A_j|D_i)\mathbf{1}_{D_i}(\omega).$$

Taikome apibrėžimą ir skaičiuojame

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\xi|\mathcal{D}) &= \sum_{j=1}^{l} x_j P(A_j|\mathcal{D}) \\
&= \sum_{j=1}^{l} x_j \sum_{i=1}^{k} P(A_j|D_i)\mathbf{1}_{D_i}(\omega) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \mathbf{1}_{D_i}(\omega) \sum_{j=1}^{l} x_j P(A_j|D_i) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \mathbf{E}(\xi|D_i)\mathbf{1}_{D_i}(\omega).
\end{aligned}$$

Pirmasis teiginys patikrintas. Toliau naudojamės vidurkio (čia nesąlyginio) tiesiškumo savybe ir gauname

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\Big(\mathbf{E}(\xi|\mathcal{D})\Big) &= \sum_{i=1}^{k} \mathbf{E}(\xi|D_i)\mathbf{E}\Big(\mathbf{1}_{D_i}(\omega)\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \mathbf{E}(\xi|D_i)P(D_i) \\
&= \mathbf{E}\xi.
\end{aligned}$$

□

Kontrolinis klausimas: Ar teisinga lygybė

$$\Big(\mathbf{E}(\xi|\mathcal{D})\Big)^2 = \mathbf{E}(\xi^2|\mathcal{D}) \ ?$$

Išraiška (6.4) parodo, kad $\mathbf{E}(\xi|\mathcal{D})$ yra paprastasis (= įgyjantis baigtinį skaičių reikšmių), a.d., įgyjantis reikšmes $\mathbf{E}(\xi|D_i)$ su tikimybėmis $P(D_i)$, čia $1 \le i \le k$. Ir sąlyginis vidurkis turi tiesiškumo savybę.

Teorema 7. *Jei a, b yra konstantos, tai*

$$\mathbf{E}(a\xi + b\eta|\mathcal{D}) = a\mathbf{E}(\xi|\mathcal{D}) + b\mathbf{E}(\eta|\mathcal{D}).$$

Be to,

$$\mathbf{E}\Big(a|\mathcal{D}) = a.$$

Proof. Patikrinkite savarankiškai. □

Apibrėžimas. *Nagrinėkime du skaidinius $\mathcal{D}'$ ir $\mathcal{D}''$. Sakysime, kad $\mathcal{D}''$ yra platesnis (smulkesnis) už $\mathcal{D}'$, jei bet kurį $D \in \mathcal{D}'$ galime užrašyti baigtine sąjunga*

$$D = D_1'' \cup \cdots \cup D_r'', \quad D_s'' \in \mathcal{D}'',\ 1 \le s \le r.$$

Tai žymėsime $\mathcal{D}' \preceq \mathcal{D}''$.

Apibrėžimas. *A.d. η yra matus $\mathcal{D}$ atžvilgiu (trumpiau $\mathcal{D}$-matus), jei $\mathcal{D}_\eta \preceq \mathcal{D}$.*

Pastarasis teiginys ekvivalentus: *η yra konstanta kiekviename iš skaidinio $\mathcal{D}$ poaibių.* Vadinasi, $\mathbf{E}(\xi|\mathcal{D})$ yra $\mathcal{D}$-matus.

Teorema 8. *Tegul η yra $\mathcal{D}$-matus. Tada*

$$\mathbf{E}(\xi\eta|\mathcal{D}) = \eta\mathbf{E}(\xi|\mathcal{D}). \tag{6.6}$$

Atskiru atveju,

$$\mathbf{E}(\eta|\mathcal{D}) = \eta, \qquad \mathbf{E}(\eta|\mathcal{D}_\eta) = \eta.$$

Proof. Tiek kairėje, tiek dešinėje (6.6) lygybės pusėse esantys a.d. yra $\mathcal{D}$-matūs. Vadinasi, pakanka patikrinti jų sutapimą betkokiame $D \in \mathcal{D}$. Abu a.d. ten yra konstantos. Bet konstantą galime iškelti prieš vidurkio ženklą. Taigi, jei $\omega \in D$, tai $\eta = c$ ir

$$\mathbf{E}(\xi\eta|\mathcal{D}) = c\mathbf{E}(\xi|\mathcal{D}),$$

t.y. tas pats dydis abiejose pusėse. □

Detalizuokite pateiktą įrodymą, naudodami tik sąlyginių vidurkių apibrėžimus.

Kita teorema sutaupys nemažai laiko atliekant skaičiavimus.

Teorema 9. *Jei skaidiniai tenkina sąryšį $\mathcal{D}_1 \preceq \mathcal{D}_2$, tai*

$$\mathbf{E}\Big[\mathbf{E}(\xi|\mathcal{D}_2)\Big|\mathcal{D}_1\Big] = \mathbf{E}(\xi|\mathcal{D}_1). \tag{6.7}$$

Proof. Pažymėkime $\mathcal{D}_1 = \{D_{11} \ldots, D_{1m}\}$, $\mathcal{D}_2 = \{D_{21} \ldots, D_{2n}\}$ ir

$$\xi = \sum_{j=1}^{l} x_j \mathbf{1}_{A_j}(\omega), \quad A_j = \{\omega : \ \xi = x_j\}.$$

Žinome, kad

$$D_{1p} = \cup_q' D_{2q}.$$

Čia sąjunga čia imama pagal kažkokius $1 \le q \le n$, priklausančius nuo p. Pagal apibrėžimą

$$\mathbf{E}(\xi|\mathcal{D}_2) = \sum_{j=1}^{l} x_j P(A_j|\mathcal{D}_2)$$

ir

$$P(A_j|\mathcal{D}_2) = \sum_{q=1}^{n} P(A_j|D_{2q}) \mathbf{1}_{D_{2q}}(\omega).$$

Pasinaudokime sąlyginio vidurkio tiesiškumu ir perrašykime

$$\mathbf{E}\Big[\mathbf{E}(\xi|\mathcal{D}_2)\Big|\mathcal{D}_1\Big] = \mathbf{E}\Big[\Big(\sum_{j=1}^{l} x_j P(A_j|\mathcal{D}_2)\Big)\Big|\mathcal{D}_1\Big] = \sum_{j=1}^{l} x_j \mathbf{E}\Big[P(A_j|\mathcal{D}_2)\Big|\mathcal{D}_1\Big]. \tag{6.8}$$

Ir vėl skaičiuojame pritaikydami tiesiškumo savybę

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\Big[P(A_j|\mathcal{D}_2)\Big|\mathcal{D}_1\Big] &= \sum_{q=1}^{n} P(A_j|D_{2q}) \mathbf{E}\Big[\mathbf{1}_{D_{2q}}(\omega)\Big|\mathcal{D}_1)\Big] \\
&= \sum_{q=1}^{n} P(A_j|D_{2q}) \Big[\sum_{p=1}^{m} P(D_{2q}|D_{1p}) \mathbf{1}_{D_{1p}}(\omega)\Big] \\
&= \sum_{p=1}^{m} \mathbf{1}_{D_{1p}}(\omega) \Big[\sum_{q=1}^{n} P(A_j|D_{2q}) P(D_{2q}|D_{1p})\Big] \\
&= \sum_{p=1}^{m} \mathbf{1}_{D_{1p}}(\omega) \Big[\sum_{q}{}' P(A_j|D_{2q}) P(D_{2q}|D_{1p})\Big],
\end{aligned}$$

nes kitos sankirtos $D_{2q}D_{1p} = \emptyset$. Likusiems q turime $D_{2q}D_{1p} = D_{2q}$ ir todėl

$$\begin{aligned}
P(A_j|D_{2q}) P(D_{2q}|D_{1p}) &= \frac{P(A_j D_{2q}) P(D_{2q} D_{1p})}{P(D_{2q}) P(D_{1p})} \\
&= \frac{P(A_j D_{2q}) P(D_{2q})}{P(D_{2q}) P(D_{1p})} = \frac{P(A_j D_{2q})}{P(D_{1p})} \\
&= P(A_j D_{2q}|D_{1p}).
\end{aligned}$$

Įstatome į ankstesnę lygybę ir gauname

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\Big[P(A_j|\mathcal{D}_2)\Big|\mathcal{D}_1\Big] &= \sum_{p=1}^{m} \mathbf{1}_{D_{1p}}(\omega)\Big[\sum_{q}^{\prime} P(A_j D_{2q}|D_{1p})\Big] \\ &= \sum_{p=1}^{m} \mathbf{1}_{D_{1p}}(\omega)\Big[P(A_j|D_{1p})\Big] \\ &= P(A_j|\mathcal{D}_1).\end{aligned}$$

Grįžtame prie (6.8) ir, įstatę ką tik išvestą lygybę, gauname

$$\mathbf{E}\Big[\mathbf{E}(\xi|\mathcal{D}_2)\Big|\mathcal{D}_1\Big] = \sum_{j=1}^{l} x_j P(A_j|\mathcal{D}_1) = \mathbf{E}(\xi|\mathcal{D}_1).$$

Tai ir reikėjo įrodyti. □

Išvada 1. *Bet kokiems paprastiesiems a.d.* ξ, η_1, η_2 *turime*

$$\mathbf{E}\Big[\mathbf{E}(\xi|\eta_1,\eta_2)\eta_1\Big] = \mathbf{E}(\xi|\eta_1).$$

Teorema 10. *Jei a.d.* ξ *ir* η *yra nepriklausomi arba* ξ *nepriklausomas su skaidinio* $\mathcal{D}$ *įvykių šeima, tai*

$$\mathbf{E}(\xi|\eta) = \mathbf{E}(\xi), \qquad \mathbf{E}(\xi|\mathcal{D}) = \mathbf{E}(\xi).$$

Be to,

$$\mathbf{E}(\eta|\eta) = \eta.$$

Proof. Įrodykite savarankiškai. □

Užduotis. Tegul ξ ir η yra paprasčiausi nepriklausomi vienodai pasiskirstę a.d. Įrodyti, kad

$$\mathbf{E}(\xi|\xi+\eta) = \frac{\xi+\eta}{2}.$$

Atlikite savarankiškai. Užuomina: Pasinaudokite lygybe

$$\mathbf{E}(\xi+\eta|\xi+\eta) = \xi+\eta.$$

Jei Ω yra baigtinė aibė, tai skaidinys $\mathcal{D}$ generuoja įvykių algebrą, kurią žymėsime $\alpha(\mathcal{D})$. Jei $\mathcal{B}$ yra algebra, tai yra ir baigtinis Ω skaidinys. Veiksmai su įvykiais, apibrėžti algebroje, praverčia tikrinant, kad

$$\mathcal{D}_{\xi_1,\ldots,\xi_k} = \mathcal{D}_{S_1,\ldots,S_k},$$

čia $S_j = \xi_1 + \cdots + \xi_j$, o $1 \le j \le k$. Pabandykite!

Vadinasi, galime visus apibrėžimus ir teoremas perkelti algebroms (!) Palikime ir žymenis:

$$P(A|\mathcal{B}), \qquad \mathbf{E}(\xi|\mathcal{B}).$$

Čia $\mathcal{B}$ yra algebra. A.d. $P(A|\eta) = P(A|\mathcal{D}_\eta)$ ir $\mathbf{E}(\xi|\eta) = \mathbf{E}(\xi|\mathcal{D}_\eta)$ gali būti suprantami, kaip „atžvilgiu a.d. η generuotos algebros".

7. Uždaviniai

Išspręskime Shiriaev'o vadovėlio 83 psl. esančius uždavinius. Ketvirtasis iš jų yra įsidėmėtinas. Jis atsako į tokį klausimą. Tegul ξ ir η yra du a.d., apibrėžti erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$; pagal η stebėjimo duomenis reikia įvertinti ξ. Kaip parinkti funkciją $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kad $g(\eta)$ būtų artimas ξ kvadratinio atsilenkimo prasme? Kol kas galime imti tik paprasčiausius a.d.

Teorema 11. *Teisinga lygybė*

$$\inf_g \mathbf{E}\Big(\xi - g(\eta)\Big)^2 = \mathbf{E}\Big(\xi - g^*(\eta)\Big)^2, \quad g^*(\eta) = \mathbf{E}(\xi|\eta).$$

Proof. Taikysime iki šiol išmoktas formules. Pradedame pridėdami ir atimdami minėtą sąlyginį vidurkį:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\Big(\xi - g(\eta)\Big)^2 &= \mathbf{E}\Big(\Big(\xi - \mathbf{E}(\xi|\eta)\Big) + \Big(\mathbf{E}(\xi|\eta) - g(\eta)\Big)\Big)^2 \\
&= \mathbf{E}\Big(\xi - \mathbf{E}(\xi|\eta)\Big)^2 + \mathbf{E}\Big(\mathbf{E}(\xi|\eta) - g(\eta)\Big)^2 \\
&\quad + 2\mathbf{E}\Big[\Big(\xi - \mathbf{E}(\xi|\eta)\Big)\Big(\mathbf{E}(\xi|\eta) - g(\eta)\Big)\Big] \\
&= \mathbf{E}\Big(\xi - \mathbf{E}(\xi|\eta)\Big)^2 + \mathbf{E}\Big(\mathbf{E}(\xi|\eta) - g(\eta)\Big)^2 + 2\mathbf{E}S.
\end{aligned}$$

Apsistokime ties paskutiniuoju dėmeniu $2\mathbf{E}S$. Sąlyginkime pagal η, t.y. imkime

$$\mathbf{E}S = \mathbf{E}\Big[\mathbf{E}(S|\eta)\Big].$$

Daugiklis $\Big(\mathbf{E}(\xi|\eta) - g(\eta)\Big)$ yra a.d. ir matus $\mathcal{D}_\eta$ atžvilgiu; vadinasi, jį galime iškelti prieš vieną vidurkį ir tęsti

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}S = \mathbf{E}\Big[\mathbf{E}(S|\eta)\Big] &= \mathbf{E}\Big[\mathbf{E}\Big(\Big(\xi - \mathbf{E}(\xi|\eta)\Big)\Big(\mathbf{E}(\xi|\eta) - g(\eta)\Big)\Big|\eta\Big)\Big] \\
&= \mathbf{E}\Big[\Big(\mathbf{E}(\xi|\eta) - g(\eta)\Big)\mathbf{E}\Big(\Big(\xi - \mathbf{E}(\xi|\eta)\Big)\Big|\eta\Big)\Big] \\
&= \mathbf{E}\Big[\Big(\mathbf{E}(\xi|\eta) - g(\eta)\Big)\Big(\mathbf{E}(\xi|\eta) - \mathbf{E}(\xi|\eta)\Big)\Big] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Grįžę prie ankstesnės lygybės ir praleidę neneigiamą dėmenį, gauname

$$\mathbf{E}\Big(\xi - g(\eta)\Big)^2 \geq \mathbf{E}\Big(\xi - \mathbf{E}(\xi|\eta)\Big)^2.$$

□

Apibrėžimas. *A.dydžius $g(\eta)$, naudojamus aproksimuoti ξ vadiname „įverčiniais".*

Suradome geriausią įvertinį kvadratinio atsilenkimo (vidurkio) prasme. Jis turi dar vieną gerą savybę:

$$\mathbf{E}(\mathbf{E}(\xi|\eta)) = \mathbf{E}\xi,$$

t.y. įvertinio vidurkis sutampa su tiriamojo dydžio ξ vidurkiu. Įvertinius su pastarąja savybe vadinsime *nepaslinktaisiais.*

Grįžkime prie kitų užduočių.

3. Bet kokiems papračiausiems a.d.ξ ir η bei funkcijai $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ teisinga formulė

$$\mathbf{E}\Big[f(\eta)\mathbf{E}(\xi|\eta)\Big] = \mathbf{E}\Big(\xi f(\eta)\Big).$$

Sprendimas. Pirmas pastebėjimas: $f(\eta)$ yra $\mathcal{D}_\eta$-mati. Todėl pagal 6.6 teoremą

$$f(\eta)\mathbf{E}(\xi|\eta) = \mathbf{E}\Big(\xi f(\eta)|\eta\Big).$$

Toliau taikome 6.5 lygybę ir gauname

$$\mathbf{E}\Big[f(\eta)\mathbf{E}(\xi|\eta)\Big] = \mathbf{E}\Big[\mathbf{E}(f(\eta)\xi|\eta)\Big] = \mathbf{E}\Big(\xi f(\eta)\Big).$$

Įrodyta.

2. Tegul $\mathbf{V}\xi$ yra a.d. ξ dispersija. Apibrėžkime sąlyginę dispersiją atžvilgiu $\mathcal{D}$:

$$\mathbf{V}(\xi|\mathcal{D}) := \mathbf{E}\Big[\Big(\xi - \mathbf{E}(\xi|\mathcal{D})\Big)^2\Big|\mathcal{D}\Big].$$

Įrodyti, kad

$$\mathbf{V}\xi = \mathbf{E}\mathbf{V}(\xi|\mathcal{D}) + \mathbf{V}\mathbf{E}(\xi|\mathcal{D}).$$

Sprendimas. ..

5. Tegul $\xi_1, \ldots, \xi_n$ ir τ yra nepriklausomi a.d., ξ_k, $1 \le k \le n$, - vienodai pasiskirstę ir $\tau \in \{1, \ldots, n\}$. Pažymėkime

$$S_\tau = \xi_1 + \cdots + \xi_\tau.$$

Įrodyti, kad

$$\mathbf{E}(S_\tau|\tau) = \tau\mathbf{E}\xi_1, \qquad \mathbf{V}(S_\tau|\tau) = \tau\mathbf{V}\xi_1.$$

Be to,

$$\mathbf{E}S_\tau = \mathbf{E}\tau \cdot \mathbf{E}\xi_1, \qquad \mathbf{V}S_\tau = \mathbf{E}\tau \cdot \mathbf{V}\xi_1 + \mathbf{V}\tau \cdot (\mathbf{E}\xi_1)^2.$$

Sprendimas.

8. Martingalai

Dabar nagrinėsime priklausomų paprasčiausių a.d. sekas $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. Tai galėtų būti sumų seka

$$S_0 = 0,\ S_1 = \eta_1,\ \dots, S_k = \eta_1 + \dots + \eta_k, \dots, S_n;$$

čia $\eta_j \in \{-1, 1\}$ ir $P(\eta_j = 1) = p = 1 - P(\eta_j = -1) = 1 - q$, dažniau vadinama klajojimu iš nulinio taško aibėje $\mathbb{Z}$.

Apibrėžimas. *Tegul $\mathcal{D}_1 \preceq \mathcal{D}_2 \preceq \dots \preceq \mathcal{D}_n$ yra smulkėjančių skaidinių seka. A.d. seka $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ vadinama martingalu, jeigu yra tenkinamos dvi sąlygos*:
(i) *ξ_k yra matus $\mathcal{D}_k$ atžvilgiu, $k \le n$;*
(ii) $\mathbf{E}(\xi_{k+1}|\mathcal{D}_k) = \xi_k$, $1 \le k \le n-1$.

Pora „a.d. seka" ir skaidinių seka apibrėžime neatsiejami, todėl martingalą žymėsime

$$\zeta = \Big(\xi_k, \mathcal{D}_k\Big)_{1 \le k \le n}.$$

Žinoma, tokius indeksus vėliau praleisime. Jei $\mathcal{D}_k = \mathcal{D}_{\xi_1,\dots,\xi_k}$, tai martingalo žymenyje nėra reikalo dukart minėti ξ_i. Tada tiesiog rašysime $\zeta = (\xi_k)_{k \le n}$. Pastaruoju atveju apibrėžimo sąlyga (i) visada yra tenkinama, tikrinti tektų tik (ii). Aišku, kad nepriklausomų dėmenų η_j, $1 \le j \le n$, su nuliniais vidurkiais atveju, $(\eta_1 + \dots + \eta_k)_{k \le n} = (S_k)_{k \le n}$ yra martingalas. Iš tiesų,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\Big(S_{k+1}|\mathcal{D}_{S_1,\dots,S_k}\Big) &= \mathbf{E}\Big(S_{k+1}|\mathcal{D}_{\eta_1,\dots,\eta_k}\Big) \\
&= \mathbf{E}\Big(S_k + \eta_{k+1}|\mathcal{D}_{\eta_1,\dots,\eta_k}\Big) \\
&= \mathbf{E}\Big(S_k|\mathcal{D}_{\eta_1,\dots,\eta_k}\Big) + \mathbf{E}\Big(\eta_{k+1}|\mathcal{D}_{\eta_1,\dots,\eta_k}\Big) \\
&= S_k + \mathbf{E}\eta_{k+1} = S_k.
\end{aligned}$$

Skaičiuodami pasinaudojome sąlyginio vidurkio tiesiškumu, dydžių η_j, $1 \le j \le n$, nepriklausomumu ir jų nuliniais vidurkiais.

Paieškokime netrivialių pavyzdžių.

1. Tegul $\eta_j \in \{-1, 1\}$ ir $P(\eta_j = 1) = p = 1 - P(\eta_j = -1) = 1 - q$, $1 \le j \le n$, yra nepriklausomi Bernulio a.d. (modifikuoti), o $S_k := \eta_1 + \dots + \eta_k$ jų sumos. Pažymėkime

$$\eta_k := \Big(\frac{q}{p}\Big)^{S_k}, \qquad \gamma_k := S_k - k(p-q).$$

Sekos $(\eta_k)_{k \le n}$ ir $(\gamma_k)_{k \le n}$ yra martingalai. Abiem atvejais apibrėžimo (i) sąlyga yra patenkinta. Iš tiesų, pastebėkime, kad

$$\mathcal{D}_k := \mathcal{D}_{\eta_1,\dots,\eta_k} = \mathcal{D}_{\eta_1,\dots,\eta_k} = \mathcal{D}_{\gamma_1,\dots,\gamma_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Tadėl tikriname tik (ii) sąlygą:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\eta_{k+1}|\mathcal{D}_k) &= \mathbf{E}\bigg(\eta_k\Big(\frac{q}{p}\Big)^{\eta_{k+1}}|\mathcal{D}_k\bigg)\\ &= \eta_k\mathbf{E}\bigg(\Big(\frac{q}{p}\Big)^{\eta_{k+1}}|\mathcal{D}_k\bigg)\\ &= \eta_k\cdot 1 = \eta_k.\end{aligned}$$

Antrasis atvejis paprastesnis.

Klausimas: Kokiems dar a.dydžiams seka

$$\Big(\mathbf{E}(\eta_k|\mathcal{D}_k), \mathcal{D}_k\Big)_{k\le n}$$

yra martingalas?

Teorema 12. *Tegul $\mathcal{D}_1 \preceq \mathcal{D}_2 \preceq \cdots \preceq \mathcal{D}_n$ yra smulkėjančių skaidinių seka ir η - a.d. Jei*

$$\xi_k := \mathbf{E}(\eta|\mathcal{D}_k), \quad k = 1, \ldots, n,$$

tai

$$\zeta := (\xi_k, \mathcal{D}_k)_{k\le n}$$

yra martingalas.

Atvirkščiai, jei $\zeta := (\xi_k, \mathcal{D}_k)_{k\le n}$ yra martingalas, tai a.d. ξ_k yra vieno a.d. sąlyginiai vidurkiai:

$$\xi_k = \mathbf{E}(\xi_n|\mathcal{D}_k), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Proof. Pirmajasis teiginys išplaukia iš apibrėžimų. Nagrinėkime antrąjį.

Pradžioje patikriname lygybes

$$\xi_k = \mathbf{E}(\xi_{k+1}|\mathcal{D}_k) = \mathbf{E}\Big(\mathbf{E}(\xi_{k+2}|\mathcal{D}_{k+1})\Big|\mathcal{D}_k\Big) = \mathbf{E}(\xi_{k+2}|\mathcal{D}_k).$$

Paskutinė iš jų išplaukia iš 6.7 teoremos. Panaudoję toliau indukciją, indeksą $k+2$ galime nuosekliai didinti iki n. □

Pastaba. Teoremoje svarbu, kad martingalas būtų baigtinė seka! Akcentuokime beveik akivaizdžią tiesą.

Teorema 13. *Jei $\zeta = (\xi_k, \mathcal{D}_k)$, $1 \le k \le n$, yra martingalas, tai vidurkiai*

$$\mathbf{E}\xi_k = \mathbf{E}\xi_1, \quad 1 \le k \le n.$$

Proof. Pagal 12 teoremą

$$\xi_k = \mathbf{E}(\xi_n|\mathcal{D}_k).$$

Todėl

$$\mathbf{E}\xi_k = \mathbf{E}\Big(\mathbf{E}(\xi_n|\mathcal{D}_k)\Big) = \mathbf{E}\xi_n$$

su visais $k \le n$. □

Dar pora pavyzdžių.

4. Tegul $\eta_1, \dots, \eta_n$ yra seka paprasčiausių nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių a.d., $S_k = \eta_1 + \cdots + \eta_k$, jei $k \le n$. Apibrėžkime

$$\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_{S_n}, \quad \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_{S_n, S_{n-1}}, \quad \dots \quad \mathcal{D}_n = \mathcal{D}_{S_n, S_{n-1}, \dots S_1}$$

ir

$$\xi_1 = \frac{S_n}{n}, \quad \xi_2 = \frac{S_{n-1}}{n-1}, \quad \dots \quad \xi_k = \frac{S_{n+1-k}}{n+1-k}, \quad \xi_n = S_1.$$

Įsitikinkime, kad $\zeta = (\xi_k, \mathcal{D}_k)_{k \le n}$ yra martingalas.

Sprendimas. Kadangi

$$\mathcal{D}_k = \mathcal{D}_{S_n, \dots, S_{n-(k-1)}},$$

tai matumo sąlyga (i) yra tenkinama.

Toliau galime pasinaudoti ką tik įrodyta 12 teorema, o ne tikrinti sąlygą (ii). Tam pakaks ξ_k išreikšti sąlyginiu kokio nors a.d. vidurkiu atžvilgiu $\mathcal{D}_k$.

A.d. η_j yra vienodai pasiskirstę, tad

$$\mathbf{E}(\eta_j | \mathcal{D}_k) = \mathbf{E}(\eta_1 | \mathcal{D}_k), \quad 1 \le j \le n - k + 1.$$

Sudėję pagal nurodytus j, gauname

$$(n - k + 1)\mathbf{E}(\eta_1 | \mathcal{D}_k) = \sum_{j=1}^{n-k+1} \mathbf{E}(\eta_j | \mathcal{D}_k) = \mathbf{E}(S_{n-k+1} | \mathcal{D}_k) = S_{n-k+1}.$$

Taigi

$$\xi_k = \frac{S_{n-k+1}}{n-k+1} = \mathbf{E}(\eta_1 | \mathcal{D}_k), \quad 1 \le k \le n.$$

Įrodyta.

Pavyzdyje apibrėžta seka (S_k/k), kai $k = n, n-1, \dots, 1$ vadinama *apgręžtuoju martingalu.*

Matematinei statistikai svarbų uždavinį iš Shiriaev'o vadovėlio (8-asis, psl. 110) „pakelkime" į teoremos lygį.

Teorema 14. *Tegul $\eta_1, \dots, \eta_n$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę a.d. su reikšmėmis y baigtinėje aibėje Y, o $\{p_0(y) = P(\eta_1 = y);\ y \in Y\}$ yra bet kurio iš jų skirstinys. Jei $f : Y \to \mathbb{R}_+$ yra bet kokia funkcija,*

$$\sum_{y \in Y} f(y) = 1$$

ir $\mathcal{D}_k = \mathcal{D}_{\eta_1, \dots, \eta_k}$, tai seka $(\xi_k, \mathcal{D}_k)_{k \le n}$ su

$$\xi_k := \frac{f(\eta_1) \cdots f(\eta_k)}{p(\eta_1) \cdots p(\eta_k)} \tag{8.1}$$

yra martingalas.

Proof. Akivaizdu, kad ξ_k yra $\mathcal{D}_k$-matus. Skaičiuojame

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\xi_{k+1}|\mathcal{D}_k) &= \mathbf{E}\Big(\xi_k\frac{f(\eta_{k+1})}{p(\eta_{k+1})}\Big|\mathcal{D}_k\Big)\\ &= \xi_k\mathbf{E}\Big(\frac{f(\eta_{k+1})}{p(\eta_{k+1})}\Big|\mathcal{D}_k\Big)\\ &= \xi_k\mathbf{E}\Big(\frac{f(\eta_{k+1})}{p(\eta_{k+1})}\Big)\end{aligned}$$

dėl $\mathcal{D}_k$-matumo ir nepriklausomumo atitinkamai. Be to,

$$\mathbf{E}\Big(\frac{f(\eta_{k+1})}{p(\eta_{k+1})}\Big) = \sum_y \frac{f(y)}{p(y)}P(\eta_{k+1}=y) = \sum_y f(y) = 1.$$

Taigi

$$\mathbf{E}(\xi_{k+1}|\mathcal{D}_k) = \xi_k, \quad k \le n.$$

Teorema įrodyta. □

A.d. ξ_k, $k \le n$, apibrėžti (8.1), vadinami *tikėtinumo santykiais.*

Uždaviniai namų darbams.

1. *Tegul*

$$\mathcal{D}_0 \preceq \mathcal{D}_1 \preceq \cdots \mathcal{D}_n, \quad \mathcal{D}_0 = \{\Omega\},$$

yra skaidinių seka, o η_k *yra* $\mathcal{D}_k$*-matūs a.d., čia* $1 \le k \le n$*. Pažymėkime*

$$\xi_k = \sum_{l=1}^{k}\Big[\eta_l - \mathbf{E}(\eta_l|\mathcal{D}_{l-1})\Big].$$

Įrodyti, kad $(\xi_k, \mathcal{D}_k)_{k\le n}$ *yra martingalas.*

2. *Tegul* $\eta_1, \dots, \eta_n$ *yra a.d., tenkinantys sąlygą*

$$\mathbf{E}\Big(\eta_k|\eta_1,\dots,\eta_{k-1}\Big) = 0, \quad k \le n.$$

Apibrėžkime seką $\xi_1 = \eta_1$*, ...,*

$$\xi_{k+1} = \sum_{i=1}^{k}\eta_{i+1}f_i(\eta_1,\dots,\eta_i), \dots, \xi_n.$$

Čia $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *yra funkcijos. Įrodyti, kad* $(\xi_k)_{k\le n}$ *yra martingalas.*

3. *Tegul* $(\xi_k, \mathcal{D}_k)_{k\le n}$ *yra martingalas ir* $1 \le a < b < c < d \le n$ *- natūralieji skaičiai. Įrodyti, kad*

$$\operatorname{cov}(\xi_b - \xi_a, \xi_b - \xi_a) = 0.$$

Primename, kad $\operatorname{cov}(X,Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}X\mathbf{E}Y$*.*

4. *Tegul* $(\xi_k, \mathcal{D}_k)_{k\le n}$ *ir* $(\eta_k, \mathcal{D}_k)_{k\le n}$ *yra martingalai bei* $\xi_1 = \eta_1 = 0$*. Įrodyti, kad*

$$\mathbf{E}\xi_n\eta_n = \sum_{k=2}^{n}\mathbf{E}(\xi_k - \xi_{k-1})\mathbf{E}(\eta_k - \eta_{k-1}).$$

Atskiru atveju,

$$\mathbf{E}\xi_n^2 = \sum_{k=2}^{n} \mathbf{E}(\xi_k - \xi_{k-1})^2.$$

9. Stabdymo momentas

Kaip matėme, martingalų atskiras atvejis yra dalelės klajojimas $\mathbb{Z}$. Pastariesiems galime klausti, kada pirmą kartą dalelė pateks į $A \subset \mathbb{Z}$ arba išeis iš šio poaibio. Apibendrinkime tokius uždavinius martingalams.

Apibrėžimas. *A.d.* $\tau = \tau(\omega) \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *vadinamas stabdymo momentu atžvilgiu smulkėjančių skaidinių* $(\mathcal{D})_{k\le n} = (\mathcal{D}_1 \preceq \cdots \preceq \mathcal{D}_n)$, *jeigu indikatorius*

$$\mathbf{1}_{\{\tau=k\}}(\omega)$$

yra $\mathcal{D}_k$*-matus.*

Kitaip tariant, šis indikatorius yra konstanta (0 arba 1), su visais $\omega \in D$; čia $D \in \mathcal{D}_k$. Jei stebimi a.d. buvo $\eta_1, \ldots, \eta_n$ ir $\mathcal{D}_k = \mathcal{D}_{\eta_1,\ldots,\eta_k}$, čia $1 \le k \le n$. Pagal pirmuosius k a.d. sustabdžius seką, apibrėžiamas $\mathcal{D}_k$-matus įvykis $\{\omega : \tau = k\}$ -stabdymo momentas. Jis nepriklauso nuo to kaip elgsis ateitis, t.y. dydžiai $\eta_{k+1}, \ldots, \eta_n$). Dabar natūralu sakyti, kad τ yra šios sekos stabdymo momentas. Pavyzdžiui, jei $A \subset \mathbb{R}$, tai

$$\tau^A := \min\{1 \le k \le n : \ \xi_k \in A\}$$

yra sekos $(\xi_k)_{k\le n}$ stabdymo momentas. Aišku, kad turima omenyje natūralioji skaidinių seka $\mathcal{D}_{\xi_1,\ldots,\xi_k}$. Jei $\zeta = (\xi_k, \mathcal{D}_k)_{k\le n}$ yra martingalas, tai jo stabdymo momentas yra sekos ξ_k stabdymo momentas atžvilgiu $\mathcal{D}_k$.

Jei $\mathcal{B}_k = \alpha(\mathcal{D}_k)$ yra skaidinio generuota algebra, tai τ matumas $\mathcal{D}_k$ atžvilgiu yra ekvivalentus $\{\omega : \ \tau(\omega) = k\} \in \mathcal{B}_k$.

Teorema 15. *Tegul* τ *yra martingalo* $\zeta = (\xi_k, \mathcal{D}_k)_{1\le k\le n}$ *stabdymo momentas. Tada*

$$\mathbf{E}\Big(\xi_\tau|\mathcal{D}_1\Big) = \xi_1,$$

čia

$$\xi_\tau = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \mathbf{1}_{\{\tau=k\}}(\omega).$$

Proof. Įrodymo idėja yra panaudoti martingalo savybę

$$\xi_1 = \mathbf{E}(\xi_n|\mathcal{D}_1).$$

Pagal apibrėžimą

$$\mathbf{E}\Big(\xi_\tau|\mathcal{D}_1\Big) = \sum_{D\in\mathcal{D}_1} \mathbf{E}\Big(\xi_\tau|D\Big)\mathbf{1}_D(\omega).$$

Todėl pakanka įsitikinti, kad

$$\mathbf{E}\Big(\xi_\tau|D\Big) = \mathbf{E}\Big(\xi_n|D\Big). \tag{9.1}$$

Pritaikome ξ_τ išraišką ir gauname

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\Big(\xi_\tau|D\Big) &= \frac{1}{P(D)}\mathbf{E}\Big(\xi_\tau\mathbf{1}_D(\omega)\Big)\\ &= \frac{1}{P(D)}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\Big(\xi_k\mathbf{1}_{\{\tau=k\}}(\omega)\mathbf{1}_D(\omega)\Big)\\ &= \frac{1}{P(D)}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\Big(\mathbf{E}(\xi_n|\mathcal{D}_k)\mathbf{1}_{\{\tau=k\}}(\omega)\mathbf{1}_D(\omega)\Big).\end{aligned}$$

Čia pakeitėme $\xi_k = \mathbf{E}(\xi_n|\mathcal{D}_k)$. Pritaikę abiejų indikatorių matumą platesnio skaidinio atžvigiu, toliau gauname

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\Big(\xi_\tau|D\Big) &= \frac{1}{P(D)}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\Big(\mathbf{E}\Big(\xi_n\mathbf{1}_{\{\tau=k\}}(\omega)\mathbf{1}_D(\omega)\Big)|\mathcal{D}_k\Big)\\ &= \frac{1}{P(D)}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\Big(\xi_n\mathbf{1}_{\{\tau=k\}}(\omega)\mathbf{1}_D(\omega)\Big)\\ &= \frac{1}{P(D)}\mathbf{E}\Big(\xi_n\mathbf{1}_D(\omega)\Big)\\ &= \mathbf{E}(\xi_n|D).\end{aligned}$$

Lygybė (9.1), ir tuo pačiu teorema, yra įrodyta. □

Išvada 2. (*Wald'o lygybės*). *Jei $S_k = \eta_1 + \cdots + \eta_k$, $1 \le k \le n$, atsitiktinis klajojimas su nepriklausomais Bernulio a.d. $P(\eta_j = 1) = 1/2 = 1 - P(\eta_j = -1)$, $1 \le j \le n$, tai*

$$\mathbf{E}S_\tau = 0, \qquad \mathbf{E}S_\tau^2 = \mathbf{E}\tau.$$

Tokias lygybes matėme 24 puslapyje, 5 uždavinyje. Esminis skirtumas - a.d. τ dabar yra priklausomas nuo sumos S_k dėmenų. Antra vertus, jis yra stabdymo momentas. Kokios nors sąlygos vis tiek reikėtų, o pastaroji yra lengva taikyti ir turi įsidėmėtiną prasmę.

Panagrinėkime dar kartą Rinkimų problemą. Klausiama, kokia yra sąlyginė tikimybė, kad visoje rinkimų eigoje pretendentas pirmavo prieš kitą, jeigu žinomas visuose rinkimuose už jį ir jo priešininką balsavusių skaičius. Pasinaudoję progą įrodysime bendresnę teoremą, jos išvada bus jau mums žinomas rinkimų problemos rezultatas.

Teorema 16. *Tegul $\eta_1, \ldots, \eta_n$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę a.d., įgyjantys sveikąsias neneigiamas reikšmes. Pažymėkime $S_k = \eta_1 + \cdots + \eta_k$ ir $a^+ = \max\{a, 0\}$. Tada*

$$P\Big(S_k < k :\ \forall\, k,\ 1 \le k \le n|S_n\Big) = \Big(1 - \frac{S_n}{n}\Big)^+.$$

Proof. Poaibyje $\{\omega : \ S_n(\omega) \geq n\} \subset \Omega$ lygybė virsta $0 = 0$. Nagrinėsime tik jo papildinį, t.y. tik atvejį, kai $S_n < n$.

Imkime apgręžtąjį martingalą

$$\zeta := \left(\xi_k := \frac{S_{n+1-k}}{n+1-k}\right)_{1 \leq k \leq n}$$

ir jo stabdymo momentą

$$\tau := \min\Big\{1 \leq k \leq n : \ \xi_k \geq 1\Big\}.$$

Aibėje $\Omega_0 := \Big\{\omega : \ \xi_k(\omega) < 1 \ \forall k, \ k \leq n\Big\}$ apibrėžimą tenka papildyti. Tada $\tau := \tau(\omega) := n$, jei $\omega \in \Omega_0$. Pastebėkime, kad iš $\omega \in \Omega_0$ išplaukia

$$\xi_\tau(\omega) = \xi_\tau = \xi_n = S_1 < 1.$$

Prisiminę, kad $\eta \in \mathbb{Z}_+$, gauname $\xi_\tau = 0$ šioje aibėje. Vadinasi,

$$\Omega_0 \subset \{\omega : \ \xi_\tau = 0\}. \tag{9.2}$$

Kaip elgiasi ξ_τ aibėje

$$\Omega_1 := \Big\{\omega : \ \max_{1 \leq l \leq n} \frac{S_l}{l} \geq l, \ S_n < n\Big\} \ ?$$

Pakeiskime stabdymo momentą a. dydžiu

$$\sigma := n + 1 - \tau = \max\Big\{1 \leq k \leq n : \ S_k \geq k\Big\}.$$

Jei $\omega \in \Omega_1$, tai

$$\sigma(\omega) < n, \qquad S_\sigma \geq \sigma, \qquad S_{\sigma+1} < \sigma + 1.$$

Vadinasi,

$$\eta_{\sigma+1} = S_{\sigma+1} - S_\sigma < \sigma + 1 - \sigma = 1$$

ir $\eta_{\sigma+1} = 0$. Reziumuodami gauname

$$\sigma \leq S_\sigma = S_{\sigma+1} < \sigma + 1,$$

t.y. $S_\sigma = \sigma$. Todėl

$$\xi_\tau = \frac{S_\sigma}{\sigma} = 1,$$

kai $\omega \in \Omega_1$.

Pastebėkime ir lygybę

$$\Omega_0 \cup \Omega_1 = \{S_n < n\}.$$

Sujungę šį pastebėjimą su (9.2), gauname

$$\Big\{\max_{1 \leq l \leq n} \frac{S_l}{l} \geq 1, \ S_n < n\Big\} = \{\xi_\tau = 1\} \cup \{S_n < n\}.$$

Vadinasi, jei $\omega \in \{S_n < n\}$, tai

$$P\Big(\max_{1\le l\le n} \frac{S_l}{l} \ge 1 \Big| S_n\Big) = P\Big(\xi_\tau = 1 | S_n\Big)$$
$$= \mathbf{E}\Big(\xi_\tau | S_n\Big) = \mathbf{E}\Big(\xi_\tau | \mathcal{D}_1\Big) = \xi_1 = \frac{S_n}{n}.$$

Pasinaudojome tuo, kad $\tau \in \{0, 1\}$, ir jau įrodytą 15 teorema. Tiems patiems ω priešingo įvykio tikimybė

$$P\Big(\max_{1\le l\le n} \frac{S_l}{l} < 1 \Big| S_n\Big) = 1 - \frac{S_n}{n}.$$

Teorema įrodyta. $\square$

Susiekime su Rinkimų problema. Imkime nepriklausomus Bernulio a.d. $\xi_k \in \{1, -1\}$, $k \le n$, ir $P(\xi_k = 1) = 1/2$ bei $S_k = \xi_1 + \cdots + \xi_k$. Vieno pretendento pirmavimą prieš kitą visoje rinkimų eigoje aprašo įvykis

$$S_1 > 0, \qquad S_2 > 0, \ldots S_n > 0.$$

Jei rinkėjų yra n, iš kurių a pasisakys už pirmąjį pretendentą, o $b = n - a$ - už antrąjį, tai sąlyga po rinkimų yra $S_n = a - b > 0$. Todėl reikia išvesti lygybę

$$P := P\Big(S_1 > 0,\ S_2 > 0,\ \ldots, S_n > 0 \Big| S_n = a - b\Big) = \frac{a-b}{a+b},$$

kurią jau buvome patvirtinę kitu būdu. Ši besąlyginė tikimybė yra paskutinės teoremos atskiras atvejis. Iš tiesų, dėl simetrijos pakeitę visas nelygybes ir naudodami žymenis $\eta_k = \xi_k + 1$ bei $\widetilde{S}_k = S_k + k$, galime tęsti:

$$P = P\Big(S_1 < 0,\ S_2 < 0,\ \ldots, S_n < 0 \Big| S_n = -(a-b)\Big)$$
$$= P\Big(S_1 + 1 < 1,\ S_2 + 2 < 2,\ \ldots, S_n + n < n \Big| S_n + n = n - (a-b)\Big)$$
$$= P\Big(\widetilde{S}_1 < 1,\ \widetilde{S}_2 < 2,\ \ldots, \widetilde{S}_n < n \Big| \widetilde{S}_n = n - (a-b)\Big).$$

A.d. $\eta_k \ge 0$, todėl sumoms $\widetilde{S}_k$ galime pritaikyti teoremą ir gauti

$$P = \Big(1 - \frac{n-(a-b)}{n}\Big)^+ = \frac{a-b}{a+b}.$$

Tą ir reikėjo patikrinti.

Antroji dalis. **BEGALINĖS TIKIMYBINĖS ERDVĖS**

10. Begalinė tikimybinė erdvė

Baigtinė elementariųjų įvykių aibė Ω (tada $|\Omega| < \infty$) yra per skurdi apibrėžti pirmoje dalyje minėtus geometrinį $\mathbf{Ge}(\mathbf{p})$, neigiamą binominį $\mathbf{NeBi}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ ir Puasono $\mathbf{Po}(\lambda)$ atsitiktinius dydžius. Bet tą galima padaryti skaičioje aibėje Ω, atitinkamai galėtume imti $\mathbb{N}$, $\{n \in \mathbb{N} : n \geq r\}$ ir $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Didelės šių a.d. reikšmės pasirodo įvykdžius tik nemažesnį skaičių Bernulio eksperimentų, o Puasono dydžių, apibrėžiamų ribiniu perėjimu, atveju – eksperimentų turėtų būti be galo daug. Atrodytų, kad vykdant begalinį skaičių Bernulio eksperimentų, problemos išsisprendžia imant visų sekų aibę, t.y.

$$\Omega = \Big\{\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots) : \ \omega_j \in \{0, 1\}\Big\}.$$

Pastebėkime, kad ji yra kontinumo galios. Iš tiesų, atvaizdis

$$\omega \mapsto x = \omega_1/2 + \omega_2/2^2 + \cdots + \omega_n/2^n + \cdots$$

yra bijekcija tarp Ω ir $[0, 1]$. Situacija darosi komplikuota, nes *negalima imti* $\omega \in \Omega$ *su vienodomis tikimybėmis*! Tada nenulinių tikimybių suma jau skaičiame begaliniame poaibyje būtų begalinė. Jei tos tikimybės nulinės, neaišku, kaip traktuoti jų sumą pagal visą kontinumo galios aibę. Todėl buvo prieita prie išvados – tikimybes reikia priskirti ne individualiems ω, bet poaibiams iš Ω. Toliau buvo rasta išeitis – nagrinėti jos poaibių, kuriuos vadiname įvykiais, *algebras* ir σ *algebras* (tariame, kad sąvokos dar nepamirštos:)). Sukūrus erdvę $(\Omega, \mathcal{F})$, toliau reikia joje apibrėžti tikimybinį matą, kuris priskiria tikimybes visiems $A \in \mathcal{F}$. Be kitų savybių matas turi būti σ adityvus. Kai $|\Omega| = \infty$, mato įvedimas yra ne visai paprasta procedūra. Pabandykime eiti tuo keliu.

Priminsime vieną iš dažniausiai taikomų teoremų.

Teorema 17. *Tegul $\mathcal{A}$ yra aibės Ω poaibių algebra ir $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$, $P(\Omega) = 1$, baigtinai adityvi funkcija. Šie teiginiai yra ekvivalentūs:*

- *P yra σ-adityvus;*
- *P yra tolydus iš apačios, t.y., jei $A_n \in \mathcal{A}$ ir $A_n \subset A_{n+1}$, kai $n \in \mathbb{N}$, ir $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, tai*

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big);$$

- *P yra tolydus iš viršaus, t.y.,*
jei $A_n \in \mathcal{A}$ ir $A_{n+1} \subset A_n$, kai $n \in \mathbb{N}$ ir $\cap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, tai

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big).$$

- *P yra tolydus tuščios aibės aplinkoje, t.y.,* *jei* $A_n \in \mathcal{A}$ *ir* $A_{n+1} \subset A_n$, *kai* $n \in \mathbb{N}$ *ir* $\cap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, *tai*

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0.$$

Teorema įrodoma bakalauro studijose. Įsidėmėkime, kad paskutiniame punkte minimas tolydumas labai palengvina σ-adityvumo tikrinimą.

Kaip ir Lebego mato atveju, tikimybinių matų įvedimas prasideda nuo jo reikšmių apibrėžimo paprastesnėse aibėse, o vėliau apibrėžimas yra pratęsiamas. Šiame procese yra taikomos žemiau pateikiamos lemos.

Lema 5. *Tegul* $\mathcal{D}$ *poaibių iš* Ω *sistema, tai egzistuoja jos generuota mažiausia algebra (toliau žymima* $\alpha(\mathcal{D})$*) ir mažiausia* σ *algebra (toliau žymima* $\sigma(\mathcal{D})$*).*

Proof. Algebrų (atitinkamai σ algebrų) sankirta yra algebra (σ algebra). □

Monotoninė poaibių klasė $\mathcal{M}$ turi savybę:

$$A_n \in \mathcal{M},\ A_n \uparrow A,\ n = 1, 2 \cdots \Rightarrow A \in \mathcal{M}$$

ir

$$A_n \in \mathcal{M},\ A_n \downarrow A,\ n = 1, 2 \cdots \Rightarrow A \in \mathcal{M}.$$

Lema 6. *Algebra* $\mathcal{A}$ *yra* σ *algebra tada ir tik tada, jei* $\mathcal{A}$ *yra monotoninė klasė.*

Proof. Jei patenkinta pirmoji iš sąlygų monotoninės klasės apibrėžime, tai pasinaudoję sąjungų monotonišku augimu, gauname

$$\mathcal{A} \ni \cup_{k=1}^{n} A_k \uparrow \cup_{k=1}^{\infty} A_k =: A \Rightarrow A \in \mathcal{A}.$$

Atvirkščiai, begalinė sąjunga yra baigtinių sąjungų, kurios monotoniškai plečiasi, riba. Vadinasi, ir ji turi priklausyti monotoninei klasei. Todėl pastaroji yra σ algebra. □

• Konstruojant tikimybinę erdvę galima pradėti nuo algebros ir po to, pasinaudojus monotoniškumu, gauti σ algebras.

Tegul toliau $\mu(\mathcal{A})$ minimali monotoniška aibių šeima, generuota $\mathcal{A}$. Ją galime įsivaizduoti kaip pačią $\mathcal{A}$, papildytą jos monotoninių poaibių sekų ribomis. Pastarosios yra gana specialaus pavidalo sąjungos. Kitos teoremos teiginys, tikriausiai, girdėtas, tačiau įrodymo metodiką verta prisiminti.

Teorema 18. *Tegul* $\mathcal{A}$ *yra algebra. Tada*

$$\mu(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A}).$$

Proof. Pagal 6 lemą $\mu(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{A})$, nes $\sigma(\mathcal{A})$ yra monotoninė klasė, o $\mu(\mathcal{A})$ yra minimali. Atrodytų, kad lygybės tarp šių šeimų būti negali. Antra vertus, $\sigma(\mathcal{A})$ yra minimali σ algebra, generuota $\mathcal{A}$! Įrodžius, kad $\mu(\mathcal{A})$ yra σ algebra, gautume norimą nagrinėjamų šeimų sutapimą.

Įrodykime kuklesnį teiginį: $\mu(\mathcal{A})$ yra algebra, t.y. jos uždarumą papildymo iki Ω ir poaibių kirtimosi atžvilgiu (vadinasi, ir jų jungimo atžvilgiu).

Trumpumo dėlei pažymėkime $\mathcal{M} = \mu(\mathcal{A})$ ir apibrėžkime mums rūpimą aibę (čia prasideda įsidėmėtina idėja!)

$$\widetilde{\mathcal{M}} = \Big\{B: \ B \in \mathcal{M}, \ \overline{B} \in \mathcal{M}\Big\}.$$

Aišku, kad $\mathcal{A} \subset \widetilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{M}$. Įrodykime, kad $\widetilde{\mathcal{M}}$ irgi yra monotoninė klasė. Dėl $\mathcal{M}$ minimalumo savybės ji turės sutapti su $\mathcal{M}$. Tegul $B_n \in \widetilde{\mathcal{M}}$ ir yra monotoniškai didėjanti (apibrėžtumo dėlei), tada

$$B_n \in \mathcal{M}, \qquad \overline{B}_n \in \mathcal{M}, \quad B_n \uparrow B^+ = \cup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{M}, \quad \overline{B}_n \downarrow B^- = \cap_{n=1}^{\infty} \overline{B}_n \in \mathcal{M},$$

be to, $B^+ = \overline{B}^-$. Pagal $\widetilde{\mathcal{M}}$ apibrėžimą, $B^+, \overline{B}^- \in \widetilde{\mathcal{M}}$. Taigi pastaroji šeima yra ne tik monotoninė, bet ir uždara poaibių papildymo atžvilgiu.

Patogiau toliau nagrinėti ne sąjungas, bet sankirtas. Tegul dabar $A \in \mathcal{M}$ ir

$$\widehat{\mathcal{M}} := \widehat{\mathcal{M}}_A = \Big\{B: \ B \in \mathcal{M}, \ A \cap B \in \mathcal{M}\Big\}.$$

Vėl tas pats įrodymo principas – jei ne visos sankirtos priklauso $\mathcal{M}$, tai pradėkime nuo susiaurintos klasės, kurioje ši savybė galioja. Pasirodo, ji irgi yra monotoninė klasė. Iš tiesų, paėmus monotoninę seką $B_n \in \widehat{\mathcal{M}}$, jos riba $\lim_{n\to\infty} B_n$ turi priklausyti $\mathcal{M}$. Be to, $B_n \cap A$ irgi yra monotoninė, todėl jos riba

$$\lim_{n\to\infty} B_n \cap A = \Big(\lim_{n\to\infty} B_n\Big) \cap A \in \mathcal{M}.$$

Iš čia išplaukia, kad $\lim_{n\to\infty} B_n \in \widehat{\mathcal{M}}$.

Jei $A, B \in \mathcal{A}$, tai $A, B, A \cap B \in \mathcal{M}$. Todėl $\mathcal{A} \subset \widehat{\mathcal{M}}_A \subset \mathcal{M}$ su bet kokia $A \in \mathcal{A}$. Bet $\mathcal{M}$ buvo minimali monotoninė klasė, generuota $\mathcal{A}$. Prieštaros nėra, jei $\widehat{\mathcal{M}}_A = \mathcal{M}$. Čia $A \in \mathcal{A}$ galėjo būti bet kokia. Todėl ir $\mathcal{M}$ yra uždara bet kokių dviejų aibių kirtimosi atžvilgiu.

Monotoninė klasė $\mathcal{M}$, būdama algebra, pagal 6 lemą, yra ir σ algebra.

Teorema įrodyta. □

Vietoje monotoninių aibių klasės galima vartoti ir kitokias sąlygas tenkinančias Ω poaibių sistemas. Shiriaev'o vadovėlyje apibrėžiama d sistema ir įrodomas paskutinės teoremos analogas.

11. Mačių erdvių pavyzdžiai

Išnagrinėsime pagrindines erdves, kuriose bus apibrėžiami tikimybiniai matai.

1. $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$**.** Imkime realiųjų skaičių aibės intervalų

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}: \ a < x \leq b\}$$

sistemą

$$\mathcal{I} := \Big\{(a, b]: \ -\infty \leq a < b < \infty\Big\}.$$

Jos generuotos algebros $\alpha(\mathcal{I})$ elementas bus baigtinė nesikertančių intervalų sąjunga, o σ algebra bus $\sigma(\mathcal{I}) = \sigma(\alpha(\mathcal{I}))$. Pastarąją žymėsime $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ir vadinsime *Borelio σ algebra.*

Atkreipkime dėmesį, kad $\{x\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Iš tiesų,

$$\{x\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big(x - \frac{1}{n}, x\Big].$$

Vadinasi, ir $[a, b], [a, b), (a, b) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Kontrolinis klausimas: Ar gautume tą pačią σ algebrą pradėdami nuo sistemos visų intervalų, apibrėžtų metrika

$$\rho(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$$

t.y., pradėję poaibiais (vienamačiais atvirais rutuliais) $\{x \in \mathbb{R} : \ \rho(a, x) < r\}$? Čia $0 \leq r < 1$ ir $a \in \mathbb{R}$.

2. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$**.** Dabar ir visada $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ yra n realiųjų tiesių Dekarto sandauga. Turime pasirinkimą apibrėždami jos poaibių σ algebras. Pradėkime nuo visų stačiakampių

$$I_1 \times \cdots \times I_n, \quad I_k = (a_k, b_k], \ k = 1, \ldots, n,$$

kai $-\infty \leq a_k < b_k < \infty$ bet kokie skaičiai. Jie generuoja σ algebrą, vadinamą *Borelio* vardu. Paprastai, pastaroji žymima $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Galime intervalus I_k pakeisti jau apibrėžtomis vienamatėmis Borelio aibėmis $B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Visos šeimos

$$\Big\{B_1 \times \cdots \times B_n, \quad B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \ k = 1, \ldots, n\Big\}$$

generuota σ algebra dažnai vadina tiesiogine sandauga ir žymima

$$\mathcal{B}_1 \bigotimes \cdots \bigotimes \mathcal{B}_n.$$

Čia $\mathcal{B}_k = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ženklas $\otimes$ pabrėžia, kad tai nėra tik Dekarto sandauga, bet gerokai platesnė poaibių šeima. Galima įrodyti, kad ji lygi $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Įrodymas gana pamokantis, todėl pabandykime.

Lema 7. *Tegul $\mathcal{E}$ yra aibės Ω poaibių šeima ir $B \subset \Omega$ – bet kokia aibė. Tada*

$$\sigma(\mathcal{E} \cap B) = \sigma(\mathcal{E}) \cap B.$$

Proof. Pastebėkime, kad ir dešinėje pusėje esanti aibių sistema

$$\sigma(\mathcal{E}) \cap B = \Big\{A \cap B : \ A \in \sigma(\mathcal{E})\Big\}$$

yra σ algebra. Pagal apibrėžimą

$$\mathcal{E} \cap B \subset \sigma(\mathcal{E}) \cap B,$$

todėl

$$\sigma\Big(\mathcal{E} \cap B\Big) \subset \sigma(\mathcal{E}) \cap B.$$

Ar ši implikacija yra apgręžiama? pakartokime jau girdėtą argumentą: jei ne visos σ algebros $\sigma(\mathcal{E})$ aibės, sukirstos su B, patenka į kairėje pusėje užrašytą σ algebrą, tai bent jų dalis patenka. Nuo jos ir pradėkime. Tegul

$$\mathcal{G}_B := \Big\{A \in \sigma(\mathcal{E}) : \ A \cap B \in \sigma(\mathcal{E} \cap B)\Big\}.$$

Tai vėl σ algebra, be to,

$$\mathcal{E} \subset \mathcal{G}_B \subset \sigma(\mathcal{E}).$$

Atlikdami veiksmus su aibėmis iš $\mathcal{E}$ iš σ algebros nepabėgsime. Vadinasi,

$$\sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{G}_B \subset \sigma(\mathcal{E})$$

ir $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{G}_B$. Kitaip tariant, su bet kokia aibe $A \in \sigma(\mathcal{E})$ turime $A \cap B \in \sigma(\mathcal{E} \cap B)$. Todėl

$$\sigma(\mathcal{E}) \cap B \subset \sigma\Big(\mathcal{E} \cap B\Big).$$

Lema įrodyta. □

Teorema 19. *Su bet kokiu $n \in \mathbb{N}$ turime*

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}_1 \bigotimes \cdots \bigotimes \mathcal{B}_n.$$

Proof. Nagrinėsime tik atvejį $n = 2$. Tegul $B_1 \times B_2$ yra bet koks Borelio stačiakampis, t.y., $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$. Akivaizdu, kad

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{B}_1 \bigotimes \mathcal{B}_2,$$

todėl pakaks įrodyti, kad $B_1 \times B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_1 \times \mathbb{R}_2)$. Čia tik sunumeravome realiąsias tieses. Apibrėžkime

$$\widetilde{\mathcal{B}}_1 = \mathcal{B} \times \mathbb{R}_2, \qquad \widetilde{\mathcal{B}}_2 = \mathbb{R}_1 \times \mathcal{B}.$$

Tai vertikalių ir horizontalių juostų, kurių vienas iš pagrindų yra vienamatė Borelio aibė, šeimos. Panašiai įvedame ir juostų, kurių vienas iš pagrindų yra intervalas, šeimas. Jas pažymėkime

$$\widetilde{\mathcal{I}}_1 = \mathcal{I} \times \mathbb{R}_2, \qquad \widetilde{\mathcal{I}}_2 = \mathbb{R}_1 \times \mathcal{I}.$$

Tegul $\widetilde{B}_i \in \widetilde{\mathcal{B}}_i$ bei $\widetilde{I}_i \in \widetilde{\mathcal{I}}_i$ yra atitinkamos juostos.

Dabar pasinaudoję tuo, kad vienamatės Borelio aibės yra generuotos intervalų, o stačiakampis yra juostų sankirta, turime

$$\begin{aligned} B_1 \times B_2 = \widetilde{B}_1 \cap \widetilde{B}_2 &\in \sigma(\widetilde{\mathcal{I}}_1) \cap \widetilde{B}_2 \\ &= \sigma(\widetilde{\mathcal{I}}_1 \cap \widetilde{B}_2) \subset \sigma(\widetilde{\mathcal{I}}_1 \cap \widetilde{\mathcal{I}}_2). \end{aligned}$$

Priešpaskutinis žingsnis yra lemos išvada. Pagaliau pastebėję, kad

$$\sigma(\widetilde{\mathcal{I}}_1 \cap \widetilde{\mathcal{I}}_2) = \sigma(\mathcal{I}_1 \times \mathcal{I}_2),$$

gauname

$$B_1 \times B_2 \in \sigma(\mathcal{I}_1 \times \mathcal{I}_2).$$

Teorema įrodyta. □

Apibrėžimas. *Aibes $B^n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ vadinsime n-matėmis Borelio aibėmis.*

Kontrolinis klausimas: Ar gautume tą pačią σ algebrą $\sigma(\mathbb{R}^n)$ pradėdami nuo sistemos visų atvirų rutulių

$$\Big\{x \in \mathbb{R}^n : \ \rho_n(a, x) < r\Big\}, \quad a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \ r > 0 \ ?$$

Čia

$$\rho_n(a, x) := \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} \rho_1(a_k, x_k), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

o $\rho_1(\cdot, \cdot)$ yra metrika realiojoje tiesėje $\mathbb{R}$.

3. $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty))$**.** Tai begalinių sekų erdvė. Vadovėlyje vartojamas žymuo $\mathbb{R}^\infty$ nelabai dera su vėliau apibrėžtų erdvių žymenimis. Galima būtų žymėti $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Tegul

$$x = (x_1, \dots, x_n, \dots), \quad x_i \in \mathbb{R}, \ i \geq 1,$$

yra $\mathbb{R}^\infty$ erdvės elementai. Apibendrindami pereitame skyrelyje vartotas juostas, įveskime *cilindrines aibes* arba *cilindrus* pagrindu $A \subset \mathbb{R}^n$, t.y.,

$$C(A) := \Big\{x \in \mathbb{R}^\infty : (x_1, \dots, x_n) \in A\Big\}.$$

Pastebėkime keletą jų savybių. Jei A, A_i, $i = 1, 2, \dots$ yra n-matės erdvės $\mathbb{R}^n$ poaibiai, tai

(i)

$$C(\overline{A}) = \Big\{x \in \mathbb{R}^\infty : (x_1, \dots, x_n) \in \overline{A}\Big\}$$

irgi yra cilindras, kurį vadinsime papildančiuoju;

(ii)

$$C\Big(\cup_i A_i\Big) = \cup_i C(A_i);$$

(iii)

$$C\Big(\cap_i A_i\Big) = \cap_i C(A_i).$$

Čia A_i yra bet koks poaibių iš $\mathbb{R}^n$ rinkinys.

Pasirodo, kad visai nesvarbu, kokios dimensijos yra pagrindas, nes

$$C(B_1 \times \cdots \times B_n \times \mathbb{R}) = C(B_1 \times \cdots \times B_n).$$

Tokiu būdu padidinus dimensiją, pereitume prie vienos ir galėtume atlikti nurodytas operacijas. Taigi, galėsime kalbėti apie cilindrų generuotas algebras. Iš esmės, čia mes susitariame dėl įdėties: aibes, apibrėžtas mažesnės dimensijos erdvėse, įdedame į platesnę erdvę. Tą esame darę nagrinėdami erdvę $\mathbb{R}^n$. Primename, kad vienamatis intervalas $I \subset \mathbb{R}_1$ būdavo pakeičiamas juostų (dabar jos bus vadinamos cilindrais) sankirta:

$$I = (I \times R_2) \cap (\mathbb{R}_1 \times \{0\}).$$

Apibrėžiame tokias cilindrines aibes:

$$C(I_1 \times \cdots \times I_n) := \Big\{x \in \mathbb{R}^\infty : x_1 \in I_1, \ldots, x_n \in I_n\Big\}, \tag{11.1}$$

čia $I_k := (a_k, b_k]$, $1 \le k \le n$ yra intervalai; bei

$$C(B_1 \times \cdots \times B_n) := \Big\{x \in \mathbb{R}^\infty : x_1 \in B_1, \ldots, x_n \in B_n\Big\}, \tag{11.2}$$

čia $B_k :\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $1 \le k \le n$ yra Borelio aibės. Pirmųjų cilindrų pagrindai yra n-mačiai stačiakampiai, antrųjų – irgi stačiakampiai, bet kiekviena pagrindo koordinatė kinta atitinkamoje vienamatėje Borelio aibėje.

Galima pradėti ir nuo cilindrų aibės

$$C(B^n) := \Big\{x \in \mathbb{R}^\infty : (x_1, \ldots, x_n) \in B^n\Big\}, \tag{11.3}$$

čia $B^n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ yra n-matė Borelio aibė.

Visi cilindrai (su įvairiais pagrindais ir įvairiais $n \in \mathbb{N}$, sudaro atitinkamas cilindrinių aibių klases. Jos generuoja σ algebras. Tegul

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty), \qquad \mathcal{B}_1(\mathbb{R}^\infty), \quad \mathcal{B}_2(\mathbb{R}^\infty),$$

yra generuotos atitinkamų cilindrų klasių (11.1), (11.2 ir (11.3).

Teorema 20. *Teisingos lygybės*

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty) = \mathcal{B}_1(\mathbb{R}^\infty) = \mathcal{B}_2(\mathbb{R}^\infty).$$

Proof. Aišku, kad

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty) \subset \mathcal{B}_1(\mathbb{R}^\infty) \subset \mathcal{B}_2(\mathbb{R}^\infty). \tag{11.4}$$

Norėdami apgręžti implikaciją, išsiaiškinkime, kokie yra pagrindai cilindrų, patenkančių į siauriausią σ algebrą. Apibrėžkime tų pagrindų klasę

$$\mathcal{G}_n := \Big\{A \subset \mathbb{R}^n : \ C(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)\Big\}.$$

Kaip jau įrodyta įvedant n-matę erdvę, Borelio aibė $B^n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ (pereitame skyrelyje ją žymėjome ir $\mathcal{B}_2(\mathbb{R}^n)$) yra gaunama iš stačiakampių, todėl

$$B^n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \ \Rightarrow \ B^n \in \mathcal{G}_n.$$

Nesunku patikrinti, kad $\mathcal{G}_n$ pati yra σ algebra, todėl generuodami σ algebras su visomis B_n, gauname

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \sigma(\mathcal{G}_n) = \mathcal{G}_n \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty),$$

čia $n \in \mathbb{N}$ yra bet koks skaičius. Todėl panaudodami galimybę įdėti aibes į didesnės dimensijos erdves ir atlikinėti papildymo, sąjungos bei sankirtos veiksmus, iš visų kairėje pusėje esančių aibių generavę σ algebrą, gausime $\mathcal{B}_2(\mathbb{R}^\infty)$, kuri nebus platesnė už siauriausią $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$. Formaliai užrašašius,

$$\mathcal{B}_2(\mathbb{R}^\infty) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty).$$

Teorema įrodyta. □

Nuo šiol aibes teoremoje minimas σ algebras vadinsime *Borelio* vardu, o pačias aibes – erdvės $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$ *Borelio aibėmis.*

Pavyzdžiai.
1. Aibė

$$A := \Big\{x \in \mathbb{R}^\infty : \sup_n x_n > a\Big\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty).$$

Iš tiesų,

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big\{x \in \mathbb{R}^\infty : x_n > a\Big\} =: \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n((a,\infty))$$

yra cilindrų sąjunga. Čia n nurodo, kad cilindro pagrindas yra n-ojoje ašyje.
2. Aibė

$$B := \Big\{x \in \mathbb{R}^\infty : \limsup_{n\to\infty} x_n \le a\Big\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty).$$

Prisiminkime *limes inferio*, lietuviškai – *viršutiniosios ribos* apibrėžimą:

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\ge 1} \sup_{m\ge n} x_m.$$

Vadinasi,

$$\begin{aligned} B &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} \Big\{x \in \mathbb{R}^\infty : x_n \le a\Big\} \\ &=: \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} C_n((-\infty, a]) \end{aligned}$$

yra generuota cilindrų.

4. $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}(\mathbb{R}^T))$**.** Paprastumo dėlei imsime $T = [0,\infty)$, nes atvejis $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n, \dots\}$ iš esmės sutampa su $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$. Tai, kad T turi kontinumo galią, sukelia daugiau keblumų.

Tegul $0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ yra bet kokia seka. Vėl įveskime cilindrines aibes

$$C_{t_1,\dots,t_n}(I_1 \times \cdots \times I_n) := \Big\{x \in \mathbb{R}^T : x_{t_1} \in I_1, \dots, x_{t_n} \in I_n\Big\}, \tag{11.5}$$

čia $I_k := (a_k, b_k]$, $1 \le k \le n$ yra intervalai;
ir

$$C_{t_1,\dots,t_n}(B_1 \times \cdots \times B_n) := \Big\{x \in \mathbb{R}^T : x_{t_1} \in B_1, \dots, x_{t_n} \in B_n\Big\}, \tag{11.6}$$

čia $B_k :\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $1 \le k \le n$, yra vienamatės Borelio aibės.

Abiem atvejais galime sakyti, kad tai funkcijų x_t, apibrėžtų pusašyje T ir kurių reikšmės $x_{t_k} \in I_k$ arba $x_{t_k} \in B_k$, su visais $k = 1, \dots, n$, aibės.

Panašiai, tegul

$$C_{t_1,\dots,t_n}(B^n) := \Big\{x \in \mathbb{R}^T : (x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) \in B^n\Big\}, \tag{11.7}$$

čia $B^n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ yra n-matė Borelio aibė.

Visas cilindrų klases, kai $n \in \mathbb{N}$ ir sekos $t_1 < \cdots < t_n$ yra bet kokios, generuoja mažiausias σ algebras, kurias atitinkamai pažymėkime

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^T), \qquad \mathcal{B}_1(\mathbb{R}^T), \qquad \mathcal{B}_2(\mathbb{R}^T).$$

Teorema 21. *Tegul* $T = [0, \infty)$. *Tada*

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^T) = \mathcal{B}_1(\mathbb{R}^T) = \mathcal{B}_2(\mathbb{R}^T).$$

Be to, jei $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$, *tai egzistuoja skaiti seka* $0 \le t_1 < t_2 < \cdots$ *ir tokia Borelio aibė* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$, *kad*

$$A = \Big\{x \in \mathbb{R}^T : \ (x_{t_1}, x_{t_2}, \dots) \in B\Big\}. \tag{11.8}$$

Proof. Nagrinėkime visas (11.8) pavidalo aibes, kai sekos (t_i), $i \ge 1$ (*kontroliniai taškai*) ir B yra įvairios. Seką $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots$ apibrėžia

$$T^{(k)} = \Big\{t_1^k < t_2^k < \dots\Big\}, \qquad B^{(k)} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty),$$

čia $k \in \mathbb{N}$. Galima pereiti prie bendros kontrolinių taškų sekos

$$T^{(\infty)} = \bigcup_{k=1}^{\infty} T^{(k)} =: \Big\{\tau_1 < \tau_2 < \cdots\Big\}.$$

Tai irgi skaiti aibė. Tada

$$A_k = \Big\{x \in \mathbb{R}^T : \ (x_{\tau_1}, x_{\tau_2}, \dots) \in B_k\Big\},$$

o B_k, $k \ge 1$, priklausys vienai ir tai pačiai $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$. Joje koordinatės indeksuojamos taškais τ_i. Jei kurio nors taško τ_i aibės A_k apibrėžime nebuvo tarp ankstesnių t_j, atitinkama sritį B_k nusakanti i-oji koordinatė $\tau_i \in \mathbb{R}$. Galime apibrėžti $\overline{A}_k$, $\cup_k A_k$ ir $\cap_k A_k$. Vadinasi, visuma aibių A, nurodytų (11.8) jau yra σ algebra, kurią pažymėkime $\mathcal{E}$. Ji apima visas viršuje išvardintas aibes, vadinasi, ir jų generuotas σ algebras. Todėl

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^T) \subset \mathcal{B}_1(\mathbb{R}^T) \subset \mathcal{B}_2(\mathbb{R}^T) \subset \mathcal{E}.$$

Dabar imkime aibę $A \in \mathcal{E}$, turinčią pavidalą (11.8). Gauname seką (t_i), $i \ge 1$, ir $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$, kuri kaip Borelio aibė gali būti generuojama pradedant intervalais. Vadinasi ir A priklauso aibių (11.5) generuotai σ algebrai $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$. Atlikdami veiksmus su visomis A neišeisime iš $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$. Todėl

$$\mathcal{E} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^T).$$

Teorema įrodyta. □

Aibes iš $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$ vadinsime Borelio aibėmis. Svarbi savybė: *jos apibrėžiamos per skaičias kontrolinių taškų sekas ir erdvės* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$ *Borelio aibes* B. Jei T kontinumo galios, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$ neapima daug poaibių.

Pavyzdys. Tegul $T = [0, 1]$ ir

$$A := \Big\{x \in \mathbb{R}^T : \ \sup_{0 \le t \le 1} x_t \le a\Big\}.$$

Tada $A \notin \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$, kitaip tariant, nėra Borelio aibė.

Iš tiesų, priešingu atveju egzistuotų tokia taškų seka $T' := \{t_1 < t_2 < \cdots\}$, kad

$$A := \Big\{x \in \mathbb{R}^T : \sup_{0 \le t \le 1} x_t \le a\Big\} = \Big\{x \in \mathbb{R}^T : \sup_{k \in \mathbb{N}} x_{t_k} \le a\Big\}.$$

Kaip rodo funkcijos $X_t = (a-1)\mathbf{1}\{t \in T'\} + (a+1)\mathbf{1}\{t \notin T'\}$ pavyzdys, to būti negali.

Visų funkcijų erdvė yra per plati. Nuojauta sako, kad Borelio aibes galima būtų apibrėžti funkcijų, kurių savybes nusako skaitus jų reikšmių rinkinys. Tokios yra *separabilios erdvės*, bet ne visų funkcijų erdvė

$$\Big\{x : [0,1] \to \mathbb{R} : \ ||x|| := \sup_{0 \le t \le 1} |x_t|\Big\}.$$

5. Tolydžiųjų funkcijų erdvė $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$. Tegul $T = [0,1]$, o $x = x_t$ yra tolydi funkcija apibrėžta vienetiniame intervale. Dabar drąsiau galime pradėti nuo anksčiau minėtų cilindrinių aibių klasių. Jos generuoja tą pačią σ algebrą, kurią pažymėkime $\mathcal{B}(\mathbb{C})$. Kitą σ algebrą generuosime praplėsdami *atvirųjų aibių* klasę, kurios bazė yra rutuliai

$$Rut(y,r) := \Big\{x \in \mathbb{C} : \ \rho(y,x) < r\Big\}, \quad y \in \mathbb{C}, \ r > 0.$$

Čia $\rho(x,y) = \max_{0 \le t \le 1} |x_t - y_t|$. Antrąją σ algebrą žymėsime $\mathcal{B}_0(\mathbb{C})$.

Teorema 22. *Teisinga lygybė* $\mathcal{B}(\mathbb{C}) = \mathcal{B}_0(\mathbb{C})$.

Proof. Funkcinė analizė sako, kad atvirųjų aibių klasę sudaro $\emptyset, \mathbb{C}$, visos rutulių sąjungos (net neskaičios) ir baigtinės rutulių sankirtos. Pavyzdžio dėlei, pastebėsime, kad cilindrinė aibė

$$\{x \in \mathbb{C} : \ x_t < a\} = \bigcup_{\varepsilon > 0, y \in Y_\varepsilon} R(y, \varepsilon)$$

yra atviroji aibė. Čia $Y_\varepsilon := \{y \in \mathbb{C} : \ a - y_t \ge 2\varepsilon\}$. Panašiai, ir visos cilindrinės aibės

$$\Big\{x \in \mathbb{C} : x_{t_1} \in I_1, \ldots, x_{t_n} \in I_n\Big\},$$

čia I_k, $1 \le k \le n$, yra intervalai, irgi yra atvirosios aibės. Todėl

$$\mathcal{B}(\mathbb{C}) \subset \mathcal{B}_0(\mathbb{C}).$$

Atvirkščiai, paėmę rutulį su centru y ir spinduliu r ir pasinaudoję funkcijų tolydumu, pastebime, kad

$$Rut(y,r) := \Big\{x \in \mathbb{C} : \rho(y,x) < r\Big\} = \bigcap_{t_k \in \mathbb{Q}} \Big\{x \in \mathbb{C} : |y_{t_k} - x_{t_k}| < r\Big\} \in \mathcal{B}(\mathbb{C}).$$

Čia $\mathbb{Q}$ yra racionaliųjų skaičių aibė. Dėl σ algebrų uždarumo aibių papildymo, skaičių sąjungų ir sankirtų atžvilgiu darome išvadą:

$$\mathcal{B}_0(\mathbb{C}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{C}).$$

Teorema įrodyta. □

6. Skorochodo erdvė $(\mathbb{D}, \mathcal{B}(\mathbb{D}))$**.** Nagrinėkime erdvę funkcijų, kurios yra apibrėžtos intervale $[0,1]$ ir yra tolydžios iš dešinės ir egzistuoja ribos iš kairės, t.y. kai $0 \le t < 1$, riba iš dešinės $x_{t+} = \lim_{s\to t+} x_s = x_t$ ir egzistuoja riba $x_{t-} = \lim_{s\to t-} x_s$, kai $t > 0$. Su supremumo metrika ši erdvė yra gautume neseparabili. Tačiau padėtį galima išgelbėti.

Tegul Λ yra aibė tolydžių griežtai didėjančių funkcijų $\lambda : [0,1] \to [0,1]$, kurioms $\lambda(0) = 0$ ir $\lambda(1) = 1$. Pažymėkime

$$d(x,y) = \inf\Big\{\varepsilon : \ \exists\lambda \in \Lambda, \ \sup_t |\lambda(t) - t| \le \varepsilon, \ \sup_t |x_t - y_{\lambda_t}| \le \varepsilon\Big\}.$$

Iš funkcinės analizės kurso (žr. V.Paulausko ir A.Račkausko vadovėlį) žinome, kad $(\mathbb{D}, d)$ yra separabili, nors ir ne pilna metrinė erdvė.

Kaip ir tolydžiųjų funkcijų ervės atveju, apibrėžę $\mathcal{B}(\mathbb{D})$ per cilindrines aibes ir $\mathcal{B}_0(\mathbb{D})$ per atvirąsias aibes (įvestos metrikos d atžvilgiu) gautume jų sutapimą.

Teorema 23. *Turime* $\mathcal{B}_0(\mathbb{D}) = \mathcal{B}(\mathbb{D})$*.*

Proof. Pakanka pakartoti prieš tai nagrinėtos teoremos įrodymą. □

Ateityje aibes iš teoremoje minimų σ algebrų vadinsime Borelio vardu. Galimas ir kitoks metrikos variantas, kada erdvė $(\mathbb{D}, \mathcal{B}_0(\mathbb{D}))$ būtų separabili ir pilna.

Erdvių pavyzdžius galima būtų tęsti.

12. Tikimybiniai matai baigtinės dimensijos erdvėse

Apbrėžiant matus įvestose erdvėse, labai pravarti Karateodorio (Carathéodory'io) teorema.

Teorema 24. *Tegul* Ω *yra aibė ir* $\mathcal{A}$ *jos poaibių algebra, o* $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A})$ *– jos generuota* σ *algebra. Jei* μ_0 *yra* σ *adityvus matas erdvėje* $(\Omega, \mathcal{A})$*, tai egzistuoja vienintelis matas* μ *erdvėje* $(\Omega, \mathcal{B})$*, kuris tenkina sąlygą*

$$\mu(A) = \mu_0(A)$$

su kiekviena $a \in \mathcal{A}$*.*

Proof. Įrodoma bakalauro studijose nagrinėjant Lebego integralą. Žinoma, jis remiasi minėtu faktu, kad σ algebra yra monotoniškumo klasė, todėl mato pratęsimas atliekamas ribiniu perėjimu. □

Toliau nagrinėsime tikimybinių matų įvedimą atskirose erdvėse.

1. $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$**.** Galimi du metodologiniai keliai teorijai kurti. Pirmasis buvo išbandytas bakalauro studijose. Jei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ yra tikimybinė erdvė, t.y. tikimybinis matas jau apibrėžtas, galime nagrinėti a.dydžius. Tegul tai $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$; jis turi būti *matus*:

$$\Big\{\omega : \xi \in B\Big\} \in \mathcal{F}$$

su kiekviena $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Toliau vienareikšmiai apibrėžiama pasiskirstymo funkcija

$$F(x) = P(\{\omega \in \Omega : \ \xi \leq x\}) = P(\xi \leq x), \tag{12.1}$$

kuri tenkina sąlygas:

(i) $F(x)$ yra nemažėjanti,
(ii) $F(-\infty) := \lim_{x \downarrow -\infty} F(x) = 0$,
(iii) $F(\infty) := \lim_{x \uparrow \infty} F(x) = 1$,
(iv) $F(x)$ kiekviename taške $x \in \mathbb{R}$ yra tolydi iš dešinės ir turi ribą iš kairės.

Tęsiant, per $F(x)$ galima apibrėžti visas a.d. charakteristikas (momentus, charakteristinę funkciją,...) vartojant Rymano-Styltjeso integralą. Tai buvo girdėta.

Pradėdami eiti kitu keliu, nesusiekime sąvęs su a.dydžiais. Funkciją, apibrėžtą $\mathbb{R}$ ir tenkinančią (i-iv) sąlygas, vadinsime *pasiskirstymo funkcija* (p.f.). A.d. pasitarnavo perkeliant įvykio $\{\omega \in \Omega : \ \xi \leq x\} \in \mathcal{F}$ matą intervalui $(-\infty, x] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Pamirškime ξ, nes tą patį atlieka ir p.f. $F(x)$. Kiek pakeitę žymenis, turime

$$P((-\infty, x]) := F(x).$$

Tuo pačiu matome, kad ir kitiems intervalams $P((a, b]) = F(b) - F(a)$, $\infty \leq a < b < \infty$. Pasirodo, toliau einant galime apibrėžti t.matą visoms $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Teorema 25. *Jei $F(x)$, $x \in \mathbb{R}$, yra pasiskirstymo funkcija, tai erdvėje* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *egistuoja vienintelis tikimybinis matas, tenkinantis sąlygą*

$$P((a, b]) = F(b) - F(a), \quad -\infty \leq a < b < \infty.$$

Proof. Tegul $(a_k, b_k]$ yra intervalai. Nagrinėkime aibių klasę $\mathcal{A}$, kurios aibės A yra poromis nesikertančių intervalų sąjungos, t.y.

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} (a_k, b_k].$$

Savarnankiškai įsitikinkite, kad $\mathcal{A}$ yra algebra.

Apibrėžkime matą klasėje $\mathcal{A}$, priskirdami

$$P_0(A) = \sum_{k=1}^{n} P((a_k, b_k]) = \sum_{k=1}^{n} \Big(F(b_k) - F(a_k) \Big)$$

kiekvienai $A \in \mathcal{A}$. Mato P_0 adityvumas akivaizdus. Ar jis σ adityvus? Pagal 17 teoremą pakanka patikrinti tolydumą tuščiosios aibės aplinkoje, t.y. sąlygą

$$P_0(A_n) \downarrow 0, \quad A_n \downarrow \emptyset, \quad A_n \in \mathcal{A}.$$

Tegu visos susitraukiančios aibės A_n yra intervalo $[-N, N]$ poaibiai, čia $N > 0$ baigtinis skaičius.

Kiekviena iš A_n yra baigtinė sąjunga intervalų, tai įbrėžę juose dalinius intervalus (pointervalius), mes galime gauti seką aibių $B_n \in \mathcal{A}$, kurių uždariniai $[B_n]$ irgi yra poaibiai, t.y.

$$B_n \subset [B_n] \subset A_n.$$

Be to, dešiniuosius kraštus aibėse B_n ir A_n galime laikyti vienodais, o kairiuosius B_n kraštus taip parinkti, kad

$$P_0(A_n) - P_0(B_n) \leq \varepsilon 2^{-n}.$$

Čia $\varepsilon \in (0,1)$ yra bet koks fiksuotas skaičius ir pasinaudojome $F(x)$ tolydumu iš kairės.

Iš apibrėžimo išplaukia, kad $[B_n] \downarrow \emptyset$. Uždaroms aibėms taip gali būti, jeigu egzistuoja baigtinis numeris n_0, kad $B_{n_0} = \emptyset$. Iš tiesų, turime atvirąją uždaro intervalo dangą

$$[-N,N] = \bigcup_{n=1}^{\infty} ([-N,N] \setminus [B_n]).$$

Pasirėmę Heinės-Borelio teorema ir išrinkę baigtinę podangą, turėtume

$$[-N,N] = \bigcup_{n=1}^{n_0} ([-N,N] \setminus [B_n]).$$

Todėl $B_n = \emptyset$, jei $n > n_0$. Dabar, nepamiršdami, kad $A_{n_0} \subset \cdots \subset A_1$,

$$\begin{aligned} P_0(A_{n_0}) &= P\biggl(A_{n_0} \setminus \bigcap_{k=1}^{n_0} B_k\biggr) + P\biggl(\bigcap_{k=1}^{n_0} B_k\biggr) \\ &= P_0\biggl(A_{n_0} \setminus \bigcap_{k=1}^{n_0} B_k\biggr) \\ &\leq P_0\biggl(\bigcup_{k=1}^{n_0} \Bigl(A_k \setminus B_k\Bigr)\biggr) \leq \sum_{k=1}^{n_0} P\Bigl(A_k \setminus B_k\Bigr) \leq \varepsilon \sum_{k=1}^{n_0} 2^{-k} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Tarpiniame žingsnyje pasinaudojome baigtiniu P_0 adityvumu ir iš to išplaukiančia nelygybe susikertančių aibių matui įvertinti per matų sumą.

Aiškumo dėlei, šią vietą dar paaiškinsime paimdami itin atkirą atvejį, kai $A_k = (a_k, b]$ ir $B_k = (b_k, b]$, o $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots < a_{n_0} < b_{n_0} = b$. Dabar akivaizdu, kad

$$(a_{n_0}, b] \subset (a_{n_0}, b_{n_0}] \cup \cdots \cup (a_k, b_k] \cup \cdots \cup (a_1, b_1].$$

Taigi, $P(A_n) \downarrow 0$, kai $n \to \infty$ ir visos A_n yra intervalo $[-N,N]$ poaibiai.

Jei tokio N, kad visos A_n būtų intervalo $[-N,N]$ poaibiai, nėra, paimkime ε ir tokį N didelį, kad

$$P_0\bigl([-N,N]\bigr) \geq 1 - \varepsilon/2.$$

Išskaidykime aibę tokiu būdu

$$A_n = \Bigl(A_n \cap [-N,N]\Bigr) \bigcap \Bigl(A_n \cap \overline{[-N,N]}\Bigr).$$

Todėl pritaikę įrodytą dalį aibėms $\Big\{A_n \cap [-N,N]\Big\}$, $n \geq 1$, gauname

$$\begin{aligned} P_0(A_n) &= P_0\Big(A_n \cap [-N,N]\Big) + P_0\Big(A_n \cap \overline{[-N,N]}\Big) \\ &\leq P_0\Big(A_n \cap [-N,N]\Big) + \varepsilon/2 \\ &\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \end{aligned}$$

jei n yra pakankamai didelis. Vadinasi, $P_0(A_n) \downarrow 0$, kai $n \to \infty$.

Teorema įrodyta. □

Teoremoje per $F(x)$ apibrėžtas matas vadinamas *Lebego-Styltjeso* matu. Jis yra *normuotasis*, nes $P(\mathbb{R}) = 1$. Erdvė $\Big([0,1], \mathcal{B}([0,1])\Big)$, su

$$\mathcal{B}([0,1]) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \cap [0,1] = \mathcal{B}(\mathbb{R} \cap [0,1])$$

nusipelno ypatingo dėmesio. Joje tolygiojo skirstinio funkcija $F(x) = x$, kai $0 \leq x \leq 1$, apibrėžia Lebego matą interval $[0,1]$ Borelio aibėms. Tegul jis bus žymimas λ.

Klasikinis Lebego mato įvedimas naudojantis vidinio ir išorinio mato sąvokomis apibrėžia Lebego matą $\bar{\lambda}$ šiek tiek platesnėje σ algebroje, kurią pažymėsime $\overline{\mathcal{B}}([0,1])$. Jai priklausantys poaibiai vadinami *mačiais Lebego prasme.* Koks yra skirtumas nuo Borelio poaibių? Be pastarųjų, jiems priklauso ir aibės Λ, kurioms egzistuoja tokios Borelio aibės $A, B \in \mathcal{B}([0,1])$, kad

$$A \subset \Lambda \subset B, \quad \lambda(B \setminus A) = 0.$$

Praplečiant λ iki $\bar{\lambda}$, imamos ne tik reikšmės $\bar{\lambda}(A) = \lambda(A)$, bet ir $\bar{\lambda}(\Lambda) = \lambda(A)$. Taigi, Lebego matas apibrėžiamas erdvėje

$$\Big([0,1], \overline{\mathcal{B}}([0,1])\Big).$$

Tai irgi tikimybinis matas, o trejetas

$$\Big([0,1], \overline{\mathcal{B}}([0,1]), \bar{\lambda}\Big)$$

yra tikimybinė erdvė. Ji yra *pilnoji.*

Panašiai, ir visas jau išnagrinėtas erdves galėsime pralėsti papildant apibrėžtas Borelio σ algebras atitinkamais poaibiais.

Laiptinės pasiskirstymo funkcijos apibrėžia *diskrečiuosius* tikimybinius matus. Primename, kad pasiskirstymo funkcija gali turėti tik skaičią aibę šuoliukų, tegul tai aibė $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$. Dabar matas sukoncentruotas šiuose taškuose ir $P(\{x_n\}) =: p_n$, $n \geq 1$. Rinkinį tikimybių $\{p_n,\ n \geq 1\}$ vadiname *diskrečiuoju skirstiniu.* Pavyzdžių jau turėjome.

Kiekviena neneigiama Lebego prasme integruojama funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ su savybe

$$\int_{\mathbb{R}} f(u)du = 1$$

apibrėžia pasiskirstymo funkciją

$$F(x) = \int_0^x f(u)du.$$

Gauname tikimybinį matą

$$P(A) = \int_A f(u)du, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

(arba $A \in \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$), kuris yra *absoliučiai tolydus Lebego mato atžvilgiu.* Funkcija $f(u)$ yra jo *tankis* arba *tankio funkcija.*

Gali būti ir gabalais absoliučiai tolydi pasiskirstymo funkcija, kai atskiruose taškuose yra sukoncentruota ne visa *tikimybinė masė*, o intervaluose tarp trūkių funkcija yra išreiškiama per tankį. Tiksliau kalbant, galimas skaidinys

$$F(x) = c_1 F_d(x) + c_2 F_{at}(x), \quad 0 \le c_1, c_2 \le 1, \ c_1 + c_2 = 1.$$

Bet ir tai neišsemia visų atvejų. Yra pavyzdžių, kai skirstinys yra *singuliarusis.* Jo pasiskirstymo funkcija $F(x)$ yra tolydi visoje $\mathbb{R}$, bet jos augimo taškų aibė turi nulinį Lebego matą, todėl tankis neegzistuoja. Konstrukcija panaudojant Kantoro aibes, pateikta Shiriajev'o vadovėlyje.

Galima būtų įrodyti, kad kiekvieną pasiskirstymo funkciją galima užrašyti

$$F(x) = c_1 F_d(x) + c_2 F_{at}(x) + c_3 F_s(x), \quad 0 \le c_1, c_2, c_3 \le 1, \ c_1 + c_2 + c_3 = 1.$$

Čia $F_d(x), F_{at}(x), F_s(x)$ yra diskreti, absoliučiai tolydi ir singuliari pasiskirstymo funkcijos.

Tokia pat σ adityviųjų matų (pagal apibrėžimą, bet kokio baigtinio intervalo matas yra baigtinis) konstrukcija erdvėje $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ galima ir pradedant bet kokia nemažėjančia tolydžia iš dešinės funkcija $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pradedama nuo intervalų

$$\mu([a, b]) := G(b) - G(a)$$

ir tęsiama panaudojant Karateodorio teoremos apibendrinimą, kol gaunamas matas $\mu(A)$ kiekvienai $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Praplėtus $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ iki $\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$ aibėmis $\Lambda \subset \mathbb{R}$, kurioms $A \subset \Lambda \subset B$, $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ir $\mu(B \setminus A) = 0$ ir pratęsus matą iki $\bar{\mu}$, t.y. sulyginant $\bar{\mu}(\Lambda) = \mu(A)$, gaunamas *Lebego-Styltjeso matas* erdvėje $\Big(\mathbb{R}, \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R})\Big)$. Kai $G(x) = x$, taip gautume *Lebego matą.*

Žr. absoliučiai tolydžiųjų skirstinių tankių lentelę, Shiriaev, 156 psl.

Koks χ^2 *skirstinio sąryšis su normaliaisiais a.d.*?

2. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$**.** Jei jau turime tikimybinį matą P ir a.d. ξ, tai pasiskirstymo funkcija, aišku, yra

$$P\Big(\xi_1 \in (-\infty, x_1], \ldots, \xi_n \in (-\infty, x_n]\Big) =: F_n(x_1, \ldots, x_n).$$

Kokios n kintamųjų funkcijos savybės išskiria jas iš jų visų? Įveskime tiesinį skirtuminį operatorių i-ajam argumentui:

$$\Delta_{a_i, b_i} F_n(x_1, \ldots, x_n) = F_n(x_1, \ldots, b_i, \ldots, x_n) - F_n(x_1, \ldots, a_i, \ldots, x_n).$$

ir jų kompozicijas

$$\Delta_{a_1,b_1} \cdots \Delta_{a_n,b_n} F_n(x_1, \ldots, x_n).$$

Pavyzdžiui,

$$\begin{aligned}\Delta_{a_1,b_1} \Delta_{a_2,b_2} F_2(x_1, x_2) &= \Delta_{a_1,b_1} \Big[F_2(x_1, b_2) - F_2(x_1, a_2) \Big] \\ &= F_2(b_1, b_2) - F_2(a_1, b_2) - F_2(b_1, a_2) + F_2(a_1, a_2).\end{aligned}$$

Taip gi skaičiuojama tikimybė priskiriama plokštumos $\mathbb{R}^2$ stačiakampiui $(a_1, b_1] \times (a_2, b_2]$.

Trumpumo dėlei pažymėkime $x = (x_1, \ldots, x_n)$,

$$(a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n] = (a, b],$$

čia $a := (a_1, \ldots, a_n)$ ir $ab := (b_1, \ldots, b_n)$.

Apibrėžimas. Funkciją $F_n : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ vadinsime *pasiskirstymo funkcija*, jeigu

(i)

$$\Delta_{a_1,b_1} \cdots \Delta_{a_n,b_n} F_n(x_1, \ldots, x_n) \geq 0;$$

(ii) $F_n(x)$ yra tolydi iš dešinės visų argumentų atžvilgiu, t.y.

$$F_n(x^k) \downarrow F_n(x),$$

kai $x_i^k \downarrow x_i$ su kiekvienu $1 \leq i \leq n$, kai $k \to \infty$;

(iii)

$$F_n(\infty, \ldots, \infty) = 1;$$

(iv)

$$\lim_{x \downarrow y} F_n(x) = F_n(y) = 0,$$

jei bent viena iš vektoriaus y koordinačių $y_i = -\infty$.

Teorema 26. *Jei $F_n(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, yra pasiskirstymo funkcija, tai erdvėje $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ egistuoja vienintelis tikimybinis matas, tenkinantis sąlygą*

$$P\Big((a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n]\Big) = \Delta_{a_1,b_1} \cdots \Delta_{a_n,b_n} F_n(x_1, \ldots, x_n)$$

su bet kokiais $-\infty \leq a_i < b_i < \infty$, $1 \leq i \leq n$.

Proof. Pakanka pakartoti 25 teoremos įrodymą. □

Pavyzdžiai. 1. $F_n(x_1, \ldots, x_n) = F^1(x_1) \cdots F^n(x_n)$, čia $F^i(x)$, $1 \leq i \leq n$, yra pasiskirstymo funkcijos erdvėje $\mathbb{R}$.

2. Bet kokia neneigiama Lebego prasme (erdvėje $\mathbb{R}^n$) integruojama funkcija $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, tenkinanti sąlygą

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_n(u) du = 1,$$

apibrėžia pasiskirstymo funkciją

$$F_n(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_n(u_1, \ldots, u_n) du_1 \cdots du_n.$$

P.f-os tankio funkcija bus pati $f_n(x)$.

3. Panagrinėkime daugiamačius normaliuosius skirstinius. Pradžioje tik integravimo pratimas.

Kontrolinis klausimas. Ar

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \exp\{-\frac{1}{2}(x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2)\}$$

yra tankio funkcija erdvėje $\mathbb{R}^2$?

Panagrinėkime bendresnę situaciją. Tegul $A = (a_{ij})$, $1 \le i, j \le n$, yra simetrinė teigiamai apibrėžta matrica, $m := (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{R}^n$ ir

$$(12.2) \quad f(x) := f(x_1, \dots, x_n) = \frac{\sqrt{|A|}}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i,j \le n} a_{ij}(x_i - m_i)(x_j - m_j) \right\}.$$

Įsitikinkime, kad $f(x)$ yra tankio funkcija erdvėje $\mathbb{R}^n$. Funkcija yra teigiama, todėl pakanka įsitikinti, kad

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = 1.$$

Tiesiniu keitiniu $x - m = y$ suvestume į integralą, kuriame nebebūtų m. Todėl tarkime, kad m yra nulinis vektorius. Toliau taikome kvadratinių formų teoriją. Suma eksponentėje yra kaip tik tokia ir ją galima užrašyti matricine forma

$$\sum_{i,j \le n} a_{ij} x_i x_j = xAx',$$

čia brūkšnelis reiškia matricos transpomavimą. Matricą A galime diagonalizuoti ir ne bet kaip, o pritaikius ortogonaliąją matricą Q, t.y. rasti ją ir gauti

$$Q'AQ = D,$$

čia D yra diagonali matrica. Be to, $|A| = |D| = \lambda_1 \cdots \lambda_n$, čia $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ - matricos A (arba D) tikrinės reikšmės. Atlikime integrale keitinį

$$x = yQ',$$

kurio jakobianas

$$\left| \frac{\partial x}{\partial y} \right| = |Q'| = 1,$$

nes ortogonalios matricos determinantas lygus vienam. Po integravimo kintamųjų pakeitimo gauname

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx &= \frac{(\lambda_1\cdots\lambda_n)^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\exp\Big\{-\frac{1}{2}(yQ')A(Qy')\Big\}dy\\ &= \frac{(\lambda_1\cdots\lambda_n)^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\exp\Big\{-\frac{1}{2}(yDy')\Big\}dy\\ &= \frac{(\lambda_1\cdots\lambda_n)^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp\Big\{-\frac{1}{2}\big[\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2\big]\Big\}dy_1\cdots dy_n\\ &= \frac{(\lambda_1)^{1/2}}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\Big\{-\frac{1}{2}\lambda_1y_1^2\Big\}dy_1\cdots\frac{(\lambda_n)^{1/2}}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\Big\{-\frac{1}{2}\lambda_ny_n^2\Big\}dy_n\\ &= 1.\end{aligned}$$

Pavyzdys.

$$f(x_1,x_2,x_3) = \frac{\sqrt{28}}{(2\pi)^{3/2}}\exp\Big\{-\frac{1}{2}(3x_1^2+4x_1x_2+4x_2^2-4x_2x_3+5x_3^2)\Big\}$$

yra normaliojo dėsnio tankis, nes kavadratinės formos matricos

$$\begin{pmatrix}3&2&0\\2&4&-2\\0&-2&5\end{pmatrix}$$

determinantas lygus 28, o tikrinės reikšmės yra 1,4 ir 7. Iš tiesų, charakteristinis polinomas, t.y. matricos

$$\begin{pmatrix}3-\lambda&2&0\\2&4-\lambda&-2\\0&-2&5-\lambda\end{pmatrix}$$

determinantas yra $-\lambda^3+12\lambda^2-39\lambda+28=-(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda-7)$. Attinkami tikriniai vektoriai randami iš sistemų

$$\begin{cases}2x_1+2x_2 &=0\\2x_1+3x_2-2x_3 &=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}-x_1+2x_2 &=0\\2x_1\quad -2x_3 &=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}-4x_1+2x_2 &=0\\2x_1-3x_2-2x_3 &=0.\end{cases}$$

Paėmę po normuotąjį spprendinį gauname naująją ortonormuotąją erdvės $\mathbb{R}^3$ bazę

$$e_1=(-2/3,2/3,1/3),\qquad e_2=(2/3,1/3,2/3),\qquad e_3=(1/3,2/3,-2/3).$$

Jei šių vektorių koordinatės sudaro matricą Q (ji yra bazės keitimo matrica, ji ortogonalioji; tai kad ji simetrinė ($Q = Q'$), tik sutapimas), tai ieškomasis keitinys yra

$$(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3)Q = (y_1, y_2, y_3) \begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

Vadinasi, pasukus trimatės erdvės ašis (kitaip tariant, pritaikius ortogonalųjį keitinį $x = yQ$, čia ortogonalioji matrica), gautume tokią tankio išraišką.

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= g(y_1, y_2, y_3) := \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big\{ -\frac{y_1^2}{2} \Big\} \cdot \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big\{ -2y_2^2 \Big\} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big\{ -\frac{7y_3^2}{2} \Big\}. \end{aligned}$$

Tegul $< t, x >=< (t_1, t_2, t_3), (x_1, x_2, x_3) >= tx'$ yra skaliarinė daugyba. Tada funkcija

$$g(t_1, t_2, t_3) := \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{e}^{i<t,x>} f(x)dx$$

yra nurodyto normaliojo dėsnio *charakteristinė funkcija.* Raskite ją.

Apibrėžimas. Tankio funkcijas ir atitinkamus matus erdvėje $\mathbb{R}^n$, apibrėžtus formule (12.2), vadiname *Gauss'o* arba *normaliaisiais* tankiais ir matais. Pabrėžiant, kad $|A| > 0$ pridedamas žodis *neišsigimusiais.* Matrica A^{-1} vadinama *kovariacijų matrica.*

Kontrolinis klausimas. Kodėl?

13. Tikimybiniai matai begalinės dimensijos erdvėse

Pasiskirstymo funkcijos sąvokos begalinės dimensijos erdvėse neturėjome. Kaip apibrėžti matus jose? Kelius nurodė A.N.Kolmogorovas. Juos galime nujausti prisiminę, kaip mes apibrėžėme σ algebras.

Erdvė $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty))$. Tarkime, kad jau turime tikimybinį matą P šioje erdvėje, t.y. tikimybes $P(A)$ kiekvienai $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$. Tada cilindrinėms aibėms

$$\widehat{B} := \Big\{ x \in \mathbb{R}^\infty : \ (x_1, \dots, x_n) \in B \Big\},$$

čia $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, turėsime

$$P\Big(\widehat{B}\Big) =: P_n(B)$$

ir pastarosios tikimybės apibrėžia matą baigtinės dimensijos erdvėje $\mathbb{R}^n$. Ši matų seka, kai $n = 1, 2, \dots$, yra *suderinta*:

$$P_{n+1}(B \times \mathbb{R}) = P_n(B). \tag{13.1}$$

Todėl einant atgal, t.y. nuo matų mažesnės dimensijos erdvėse prie matų didesnės dimensijos erdvėse, reikia išlaikyti šią suderinamumo sąlygą su visais n. Pasirodo, jos pakanka apibrėžiant matus $\mathbb{R}^\infty$.

Teorema 27. *Tegul P_n yra tikimybinis matas erdvėje* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ *ir* $n = 1, 2, \ldots$. *Jei tenkinama* (13.1) *sąlyga su kievienu n, tai egzistuoja toks vienintelis tikimybinis matas erdvėje* $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty))$, *kad*

$$P\left(\widehat{B}\right) = P_n(B), \quad B \in \mathbb{R}^n.$$

Proof. Aibėms iš $\mathbb{R}^n$ prirašysime viršutinį indeksą n. Apibrėžiant P, yra natūralu cilindrams $\widehat{B^n}$ su pagrindu $B^n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ priskirti tikimybę

$$P\left(\widehat{B^n}\right) := P_n(B^n).$$

Bet cilindras galėjo turėti kelias išraiškas, pavyzdžiui, $\widehat{B^n} = \widehat{B^{n+k}}$, kai $k \geq 1$ pagrindo kraštinių buvo lygių $\mathbb{R}$. Ar nuo to nepriklausys tikimybės apibrėžimas? Ne, nes tada iš (13.1) gauname

$$P_n(B^n) = P_{n+k}(B^{n+k})$$

ir todėl

$$P\left(\widehat{B^n}\right) = P\left(\widehat{B^{n+k}}\right).$$

Jei $\alpha(\mathbb{R}^\infty)$ yra visų cilindrų aibė (ji bus algebra, nes naudojamas tik baigtinis skaičius aibinių operacijų), tai seką

$$\widehat{B_1}, \widehat{B_2}, \ldots, \widehat{B_k} \ \in \alpha(\mathbb{R}^\infty)$$

galima įsivaizduoti kaip cilindrus su pakankamai didelės dimensijos (tegul n) pagrindu, t.y.

$$\widehat{B_i} := \widehat{B_i^n}.$$

Jei $\widehat{B_i} \cap \widehat{B_j} = \emptyset$, $1 \leq i < j \leq k$, tai ir jų pagrindai B_i^n turėjo poromis nesikirsti. Todėl

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^k \widehat{B_i}\right) &= P\left(\bigcup_{i=1}^k \widehat{B_i^n}\right) \\ &= P_n\left(\bigcup_{i=1}^k B_i^n\right) = \sum_{i=1}^k P_n(B_i^n) \\ &= \sum_{i=1}^k P\left(\widehat{B_i}\right). \end{aligned}$$

Taigi, algebroje $\alpha(\mathbb{R}^\infty)$ turime adityvųjį tikimybinį matą. Ar jis tolydus tuščios aibės aplinkoje? Tegul $\widehat{B_n} \downarrow \emptyset$, jei $n \to \infty$ ir tarkime priešingai, kad

$$\lim P\left(\widehat{B_n}\right) \geq \delta > 0$$

kokiam tai posekiui $n \to \infty$. Papildomo posekio indeksą praleidžiame. Nesiaurindami bendrumo, vėl galime įsivaizduoti, kad $\widehat{B_k}$, $1 \leq k \leq n$, yra cilindrai, kurių pagrindai yra N dimensijos erdvėje (**VADOVĖLYJE $N = n$, kas trukdo supratimui!**). Reikia net įsivaizduoti, kad $N = N(n)$ nemažėja, kai $n \to \infty$. Mūsų žymenimis turime

$$\widehat{B_n} = \Big\{x \in \mathbb{R}^\infty : \ (x_1, \ldots, x_N) \in B_n\Big\}, \quad B_n = B_n^N \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N).$$

Kaip ir erdvės $\mathbb{R}$ atveju, į aibės B_n vidų įbrėžkime tokias kompaktines aibes $K_n \subset B_n$, kad

$$P_N(B_n \setminus K_n) \leq \delta 2^{-n-1}.$$

Čia $\delta > 0$ yra bet kokia maža konstanta. Atitinkamiems cilindrams

$$\widehat{K_n} = \Big\{x \in \mathbb{R}^\infty : \ (x_1, \ldots, x_N) \in K_n\Big\}$$

turėsime

$$P\Big(\widehat{B_n} \setminus \widehat{K_n}\Big) = P_N(B_n \setminus K_n) \leq \delta 2^{-n-1}.$$

Imkime cilindrų sankirtą

$$\widehat{C_n} := \cap_{k=1}^n \widehat{K_k}.$$

Tada

$$\widehat{C_n} = \Big\{x \in \mathbb{R}^\infty : \ (x_1, \ldots, x_N) \in C_n\Big\}, \quad C_n = \cap_{k=1}^n K_k.$$

Aišku, kad $C_n = C_n^N$ yra kompaktinė aibė pilnoje erdvėje $\mathbb{R}^N$.

Bet kokioms aibėms $D_1, \ldots, D_l, Q$ ir $l \in \mathbb{N}$ yra teisinga implikacija

$$Q \setminus \cap_{i=1}^l D_i \subset \cup_{i=1}^l (Q \setminus D_i)$$

(Įsitikinkite pritaikydami matematinę indukciją). Todėl pasinaudoję $B_n \subset B_k$, gauname

$$\begin{aligned} P(\widehat{B_n} \setminus \widehat{C_n}) &\leq \sum_{k=1}^n P(\hat{B}_n \setminus \widehat{K_k}) \\ &\leq \sum_{k=1}^n P(\widehat{B_k} \setminus \widehat{K_k}) \leq \delta \sum_{k=1}^n 2^{-k-1} \leq \delta/2. \end{aligned}$$

Vadinasi,

$$\lim_n P(\widehat{C_n}) = \lim_n P(\widehat{B_n}) - \lim_n P(\widehat{B_n} \setminus \widehat{C_n}) \geq \delta/2 > 0.$$

Čia visos imamos ribos egzistuoja dėl paaibių sekų monotoniškumo.

Antra vertus, netuščių cilindrų su kompaktiniais pagrindais seka $\widehat{C_n} \downarrow \emptyset$. Iš čia gausime prieštarą, rinkdami posekius jų pagrinduose $C_n \neq \emptyset$.

Tegul

$$(x_1^n, \ldots, x_N^n) \in C_n.$$

Kiekvienam $i = 1, \ldots, N$ koordinatės x_i^n priklauso vienamatėms kompaktinėms aibėms, todėl galima išrinkti konverguojančius posekius. Pradžioje gauti $x_1^{n_1} \to x_1^0$, vėliau, nesugadinant jau gautojo sąryšio, iš n_1 išrinkti dalinį posekį n_2 ir gauti $(x_1^{n_2}, x_2^{n_2}) \to (x_1^0, x_2^0)$ t.t. Po k žinksnių turėsime

$$\Big(x_1^{n_k}, \ldots, x_k^{n_k}, x_{k+1}^{n_{k+1}}, \ldots, x_N^{n_k}\Big) \in C_{n_k}$$

ir

$$(x_1^{n_k},\dots,x_k^{n_k}) \to (x_1^0,\dots,x_k^0).$$

Pakartoję dar kartą rinkimą ir pasinaudoję indukcijos principu, gauname korektiškai apibrėžtą seką $x_1^0,\dots,x_k^0,\dots$, be to,

$$x^0 := (x_1^0,\dots,x_k^0,\dots) \in \lim_n \widehat{C_n}$$

Tai prieštarauja faktui, kad $\widehat{C_n} \downarrow \emptyset$.

Tolydus tuščios aibės aplinkoje adityvus matas yra σ adityvus. Jis pagal Karateodorio teoremą iš algebros $\alpha(\mathbb{R}^\infty)$ pratęsiamas iki vienintelio σ adityvaus mato σ algebroje $\sigma(\mathbb{R}^\infty) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$.

Teorema įrodyta. □

Tokia pati matų konstrukcija tinka ir pilnų separabilių erdvių $(\Omega_k, \mathcal{B}(\Omega_k))$ tiesioginei sandaugai

$$\Big(\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots,\ \mathcal{B}(\Omega_1) \otimes \mathcal{B}(\Omega_2) \otimes \cdots\Big).$$

Pilnumas ir separabilumas yra tikrai reikalingi. Žr. vadovėlyje pateiktus pavyzdžius.

Erdvė $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}(\mathbb{R}^T))$. Apsiribokime atveju, kai $T = [0,\infty)$. Kiekvienam taškui $t \in T$ priskiriamą realiųjų skaičių tiesę indeksuosime tuo t, t.y. rašysime $\mathbb{R}_t$. Konstruojant Borelio σ algebrą $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$ naudojome kontrolinių taškų rinkinius ir juos apjungdavome į bendrą skaičią aibę, kurioje pirmasis vieno rinkinio taškas galėjo tapti gerokai tolesniu tašku. Kitais žodžiais tariant, kokia nors tvarka iš anksto negalima. Todėl baigtinamačių skirstinių suderinamumo reikalavimą, kuris buvo pereitoje teoremoje tenka sustiprinti.

Apibrėžimas. *Tegul $\tau = \{t_1,\dots,t_n\}$ yra nesutvarkytasis taškų iš T rinkinys, $n \geq 1$, $\mathbb{R}^\tau := \mathbb{R}_{t_1} \times \cdots \times \mathbb{R}_{t_n}$ ir $(\mathbb{R}^\tau, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\tau))$ – mati erdvė. Joje apibrėžtų tikimybinių matų šeima $\{P_\tau\}$, kai τ perbėga visas galimybes, yra suderinta, jeigu kiekvienam poaibiui $\gamma = \{s_1,\dots,s_k\} \subset \tau$ yra teisingos lygybės*

$$\begin{aligned} P_\gamma(B) &= P_\gamma\Big(\Big\{(x_{s_1},\dots,x_{s_k}):\ (x_{s_1},\dots,x_{s_k}) \in B\Big\}\Big) \\ &= P_\tau\Big(\Big\{(x_{t_1},\dots,x_{t_n}):\ (x_{s_1},\dots,x_{s_k}) \in B\Big\}\Big) \end{aligned}$$

su bet kokia $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\gamma)$.

Galima būtų pradėti ir nuo sutvarkytųjų kontrolinių taškų $\tau = (t_1,\dots,t_n)$ rinkinių, bet tada apibrėžime esantį reikalavimą daliniams rinkiniams reiktų papildyti sąlyga

$$P_{(t_1,\dots,t_n)}\Big(A_{t_1} \times \cdots \times A_{t_n}\Big) = P_{(t_{j_1},\dots,t_{j_n})}\Big(A_{t_{j_1}} \times \cdots \times A_{t_{j_n}}\Big)$$

bet kokiam keitiniui

$$\begin{pmatrix} t_1,\dots,t_n \\ t_{j_1},\dots,t_{j_n} \end{pmatrix}.$$

Teorema 28. *Tegul P_τ yra suderinta tikimybinių matų šeima erdvėje $(\mathbb{R}^\tau, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\tau))$, kai τ perbėga visas galimybes įskaitant ir n kitimą. Egzistuoja toks vienintelis tikimybinis matas erdvėje $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}(\mathbb{R}^T))$, kad*

$$P\Big(C_\tau(B)\Big) = P_\tau(B), \quad B \in \mathbb{R}^\tau,$$

visiems nesutvarkytiems skirtingų taškų rinkiniams $\tau = \{t_1, \ldots, t_n\}$. Čia

$$C_\tau(B) = \Big\{x \in \mathbb{R}^T : \, (x_{t_1}, \ldots, x_{t_n}) \in B\Big\}.$$

Proof. Be įrodymo. □

Wiener'io matas. Įvesime ypatingai svarbų matą funkcijų erdvėje $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}(\mathbb{R}^T))$, kai $T = [0, \infty)$, kontrolinių taškų rinkiniui $\tau := (0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n)$ ir stačiakampiui $I_1 \times \cdots I_n = B$ priskirdami tikimybes

$$P_\tau(B) = \int_{I_1} \cdots \int_{I_n} \varphi_{t_1}(x_1|0)\varphi_{t_2-t_1}(x_2|x_1)\cdots\varphi_{t_n-t_{n-1}}(x_n|x_{n-1})dx_1\cdots dx_n.$$

Čia

$$\varphi_t(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{-(y-x)^2/(2t)}, \quad 0 \le x < y.$$

Tai suderinta matų šeima, todėl pagal Kolmogorovo paskutinę teoremą ji pratęsiama iki mato visoms Borelio aibėms iš $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$. Ateityje jį vadinsime Vynerio matu. Kaip būtų jį galima interpretuoti? Įsivaizduokime dalelę, kuri iš nulinio taško per laiko intervalą t_1 pateko į atsitiktinį tašką x_1, po to nepriklausomai nuo praeities klajojo toliau - iš x_1 į x_2 per laiko tarpą nuo t_1 iki t_2 ir t.t. Gavome atsitiktinę trajektoriją $x_1 \to x_2 \to \cdots \to x_n$ su fiksuotais kontroliniais momentais laiko skalėje.

14. Atsitiktiniai dydžiai, vektoriai, elementai

Pradėjome nuo mačių erdvių $(X, \mathcal{B}(X))$, čia $X = \mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^\infty, \mathbb{R}^T$, o $\mathcal{B}(X)$ yra atitinkamos Borelio σ algebros, apibrėžėme tikimybinius matus P jose, t.y. σ adityvias funkcijas $P : \mathcal{B}(X) \to [0,1]$, tenkinančias normuotumo sąlygą $P(X) = 1$ ir turinčias kitas savybes. Bakalauro studijose klausytas tikimybių teorijos kursas prasidėjo nuo abstrakčios tikimybinės erdvės $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ir funkcijų $\xi : \Omega \to X$, tenkinančių *matumo* (arba $\mathcal{F}$ *matumo*) sąlygą

$$\xi^{-1}(B) := \{\omega \in \Omega : \, \xi(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}, \quad \forall B \in \mathcal{B}(X)\,?$$

Tokias funkcijas vadinome atsitiktiais *dydžiais, vektoriais, elementais (procesais)* atitinkamai erdvėse $X = \mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^\infty$ ir $\mathbb{R}^T$.

Apskritai funkcijas funkcijas $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, čia $n, m \in \mathbb{N}$, vadina *Borelio funkcijomis*, jeigu

$$\varphi^{-1}(B) := \{x \in \mathbb{R}^m : \, \varphi(x) \in B\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m), \quad \forall B \in \mathcal{B}(R^n).$$

Pastaroji sąlyga yra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ matumas.

Ar kiekvieną matą, apibrėžtą $(X, \mathcal{B}(X))$, galima taip susieti su kokiu nors ξ (todėl jį žymėkime P_ξ), kad galiotų sąryšis

$$P(\xi^{-1}(B)) = P_\xi(B), \quad \forall B \in \mathcal{B}(X)\,?$$

Apibrėžimas. Matą P_ξ ar tikimybių šeimą $\{P_\xi(B) :\ B \in \mathcal{B}(X)\}$ vadinkime ξ *skirstiniu.*

Iškeltas klausimas, iš tiesų yra trivialus, nes pakaktų paimti $(\Omega, \mathcal{F}) = (X, \mathcal{B}(X))$ ir $\xi(x) = x$ su kiekvienu $x \in X$. Problemos atsiranda, kai jau turime tikimybinę erdvę $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ir atvaizdį $\xi : \Omega \to X$. Ne visada jis yra a.d. Reikia tikrinti jo $\mathcal{F}$ matumą. Šį žingsnį galime supaprastinti, žinant, kaip buvo generuota σ algebra $\mathcal{B}(X)$.

Lema 8. *Jei $\mathcal{E}$ yra X poaibių šeima ir $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{B}(X)$, tai $\xi : \Omega \to X$ yra $\mathcal{F}$ matus tada ir tik tada, jei*

$$\xi^{-1}(B) \in \mathcal{F}, \quad \forall B \in \mathcal{E}.$$

Proof. Pastarosios sąlygos būtinumas yra akivaizdus.

Įrodysime pakankamumą. Jei ne visos $\xi^{-1}(B)$ su $B \in \mathcal{B}(X)$ patenka į $\mathcal{F}$, tai dalis tikrai. Pagal sąlygą visos aibės iš $\mathcal{E}$ yra tokios. Tegul $\mathcal{D}$ yra visų tokių $D \in \mathcal{B}(X)$ klasė, kad $\xi^{-1}(D) \in \mathcal{F}$. Turime $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}$.

Įsitikiname, kad $\mathcal{D}$ yra σ algebra. Tam pakanka pritaikyti pirmavaizdžių savybes:

$$\xi^{-1}\Big(\cup_\alpha B_\alpha\Big) = \cup_\alpha \xi^{-1}(B_\alpha)$$
$$\xi^{-1}\Big(\cap_\alpha B_\alpha\Big) = \cap_\alpha \xi^{-1}(B_\alpha)$$
$$\overline{\xi^{-1}(B_\alpha)} = \xi^{-1}(\overline{B_\alpha}).$$

Vadinasi,

$$\mathcal{E} \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{B}(X).$$

Generuodami σ algebras išlaikome šias implikacijas, todėl

$$\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{E}) \subset \sigma(\mathcal{D}) = \mathcal{D} \subset \mathcal{B}(X).$$

Tą ir reikėjo įrodyti. □

Išvada 3. *Jei $\xi : \Omega \to X$ yra a.elementas, tai aibės*

$$A = \xi^{-1}(B) \in \mathcal{F}, \quad B \in \mathcal{B}(X),$$

sudaro Ω poaibių σ algebrą, žymimą $\mathcal{F}_\xi$. Be to, $\mathcal{F}_\xi \subset \mathcal{F}$.

Proof. Pritaikyti lemos įrodyme pateiktas pirmavaizdžių savybes. □

Išvada 4. *Jei $X = \mathbb{R}$, tai lemos teiginys yra teisingas su*

$$\mathcal{E} = \{I :\ I = (a, b],\ -\infty \le a < b < \infty\}.$$

Išvada 5. *Jei $X = \mathbb{R}^n$, tai lemos teiginys yra teisingas su*

$$\mathcal{E} = \{I_1 \times \cdots \times I_n : \ I_k = (a_k, b_k], \ -\infty \leq a_k < b_k < \infty, \ 1 \leq k \leq n\}.$$

Išvada 6. *Funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ yra Borelio tada ir tik tada, jei su kiekvienu stačiakampiu $S = I_1 \times \cdots \times I_n$ turime $f^{-1}(S) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.*

Išvada 7. *Jei Funkcija $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ yra Borelio, ir $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^m$ yra a. vektorius, tai $f(\xi)$ irgi yra a. vektorius.*

Proof. Reikia patikrinti, ar superpozicija $\eta(\omega) := f(\xi(\omega))$ yra $\mathcal{F}$ mati. Tegul $S \subset \mathbb{R}^n$ yra stačiakampis. Nagrinėjame aibę

$$\eta^{-1}(S) = \{\omega : \ f(\xi(\omega)) \in S\} = \{\omega : \ \xi(\omega) \in f^{-1}(S)\} \in \mathcal{F},$$

nes $f^{-1}(S) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$. □

Panašias išvadas galėtume tęsti. Nagrinėdami vienamačių a.d. ribas, eilutes, susiduriame su poreikiu pratęsti a.d. apibrėžimo sritį iki papildytos begaliniais taškais tiesės $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Atitinkamą Borelio σ algebrą pažymėkime $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$. A.d. $\xi : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ galės įgyti ir reikšmes $\pm\infty$ su teigiamomis tikimybėmis. Juos vadinkime *išplėstaisiais*. Kita sako: *apibendrintieji.*

Prisiminkime, kad *paprasčiausieji a.d.* įgyja tik baigtinį skaičių reikšmių su teigiamomis tikimybėmis. Juos galima užrašyti

$$\xi = \xi(\omega) = \sum_{i=1}^{k} x_i \mathbf{1}_{A_i}(\omega), \quad A_i := \xi^{-1}(x_i).$$

Teorema 29. *Tegul $\xi = \xi(\omega)$ yra vienamatis a.d. (gal būt, išplėstasis). Tada egzistuoja tokia paprasčiausiųjų a.d. seka $\xi_1, \xi_2, \ldots$, kad $|\xi_n| \leq |\xi|$ ir $\xi_n(\omega) \to \xi(\omega)$ su kiekvienu $\omega \in \Omega$.*

Be to, jei $\xi \geq 0$, tai egzistuoja tokia paprasčiausiųjų a.d. seka $\xi_1, \xi_2, \ldots$, kad $\xi_n(\omega) \uparrow \xi(\omega)$ su kiekvienu $\omega \in \Omega$.

Proof. . Pradėkime nuo antrojo teiginio. Įrodymui pakanka apibrėžti

$$\xi_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \mathbf{1}_{k,n}(\omega) + n\mathbf{1}_{\{\xi(\omega) \geq n\}}(\omega),$$

čia $\mathbf{1}_{k,n}(\omega)$ yra aibės

$$\{\omega : \ (k-1)/2^n \leq \xi(\omega) < k/2^n\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

indikatorius. Aišku, kad $\xi_n(\omega) \uparrow \xi(\omega)$ su kiekvienu $\omega \in \Omega$.

Pirmajam teiginiui įrodyti pakanka išskaidyti $\xi = \xi^+ - \xi^-$ ir kiekvienam iš dėmenų pritaikyti įrodytą antrąjį teiginį. □

Pabrėžiame, pastarojoje teoremoje a.d. konvergavimas kiekviename taške $\omega \in \Omega$. Išplėstųjų a.d. klasė patogi, nes ji uždara ribinio perėjimo atžvilgiu. Riba $\lim_n \xi_n(\omega) = \xi(\omega)$ bus rašoma, jei ji egzistuoja kiekvienma taške ω. Kitaip tariant, jei

$$\liminf_n \xi_n(\omega) = \limsup_n \xi_n(\omega)$$

su visais $\omega \in \Omega$.

Teorema 30. *Jei ξ_n, $n \in \mathbb{N}$ yra išplėstieji a.d., tai*

$$\inf_n \xi_n, \qquad \sup_n \xi_n, \qquad \liminf_n \xi_n, \qquad \limsup_n \xi_n, \qquad \lim_n \xi_n$$

irgi yra tokie.

Proof. . Nagrinėjami dydžiai įgyja reikšmes erdvėje $\overline{\mathbb{R}}$. Tegul $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ yra jos poaibių Borelio σ algebra. Pakanka patikrinti $\mathcal{F}$ matumą. tas matosi iš lygybių

$$\{\omega: \inf_n \xi_n < x\} = \cup_n \{\omega: \xi_n < x\} \in \mathcal{F},$$

$$\{\omega: \sup_n \xi_n > x\} = \cup_n \{\omega: \xi_n > x\} \in \mathcal{F}.$$

Be to,

$$\liminf_n \xi_n = \sup_n \inf_{m \geq n} \xi_m, \qquad \limsup_n \xi_n = \inf_n \sup_{m \geq n} \xi_m.$$

Dabar, jei riba $\lim_n \xi_n = \xi$ egzistuoja, tai pastarosios matumas išplaukia iš lygybių

$$\begin{aligned}
\{\omega: \xi(\omega) \leq x\} &= \{\omega: \lim_n \xi_n(\omega) \leq x\} \\
&= \{\omega: \limsup_n \xi_n = \liminf_n \xi_n\} \cap \{\omega: \limsup_n \xi_n \leq x\} \\
&= \Omega \cap \{\omega: \limsup_n \xi_n \leq x\} \\
&= \{\omega: \limsup_n \xi_n \leq x\} \in \mathcal{F}.
\end{aligned}$$

□

Atliekant veiksmus su a.d. sekomis ir toliau pereinant prie ribų, reikia išvengti neapibrėžtumų pavidalo $\infty - \infty$, $a/0$, $\pm\infty / \pm\infty$. begalinės ribos ne bėda, jei turima omenyje išplėstųjų a.d. klasė.

Panagrinėkime plačiau σ algebras $\mathcal{F}_\xi \subset \mathcal{F}$. Jei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yra Borelio, tai a.d. $\eta = f(\xi)$ yra $\mathcal{F}_\xi$ matus. Iš tiesų,

$$\mathcal{F}_\eta \subset \mathcal{F}_\xi \subset \mathcal{F}.$$

Teisingas ir atvirkščias teiginys.

Teorema 31. *Jei a.d. η yra $\mathcal{F}_\xi$ matus, tai egzistuoja tokia Borelio funkcija $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kad $\eta(\omega) = f(\xi(\omega))$ su kiekvienu $\omega \in \Omega$.*

Proof. Tegul Φ^ξ yra funkcijų $\eta : \Omega \to \mathbb{R}$, kurios yra $\mathcal{F}_\xi$ mačios, klasė, o $\widehat{\Phi}^\xi$ – klasė, funkcijų $\eta : \Omega \to \mathbb{R}$, turinčių pavidalą $\eta(\omega) = f(\xi(\omega))$ su kokia nors Borelio funkcija f, poklasė. Kodėl $\widehat{\Phi}^\xi = \Phi^\xi$?

Kiekviena $A \in \mathcal{F}_\xi$ yra pirmavaizdis, t.y. $A = \xi^{-1}(B)$ su kokiu nors $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Todėl ir pradėkime nuo indikatorių $\eta = \mathbf{1}_A(\omega)$. Pagal apibrėžimą

$$\eta(\omega) = \begin{cases} 1, & jei\ \xi(\omega) \in B \\ 0, & jei\ \xi(\omega) \notin B. \end{cases}$$

Matome, kad su funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ir

$$f(x) = \begin{cases} 1, & jei\ x \in B \\ 0, & jei\ x \notin B. \end{cases}$$

galime gauti norimą išraišką $\eta(\omega) = f(\xi(\omega))$. Todėl visi indikatoriai $\mathbf{1}_A(\omega)$ priklauso $\widehat{\Phi}^\xi$. Iš čia išplaukia, kad jų tiesinės kombinacijos, t.y. paprasčiausi a.d.irgi yra ten pat. Kitaip tariant,

$$\eta_n(\omega) := \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{1}_{A_k}(\omega) = \sum_{k=1}^n c_k f_k(\xi(\omega)),$$

kai

$$f_k(x) = \begin{cases} 1, & jei\ x \in B_k \\ 0, & jei\ x \notin B_k, \end{cases}$$

priklauso $\widehat{\Phi}^\xi$. Pažymėję

$$f^n(x) = \sum_{k=1}^n c_k f_k(x),$$

gauname $\eta_n(\omega) = f^n(\xi(\omega))$ su kiekvienu ω. Čia buvo $A_k = \xi^{-1}(B_k)$ ir $1 \le k \le n$.

Jei $\eta = \eta(\omega)$ yra bet kokia $\mathcal{F}_\xi$ mati funkcija, pagal 29 teoremą, egzistuoja paprasčiausiųjų a.d. seka $\eta_n(\omega) \uparrow \eta(\omega)$ su kiekvienu ω. Be to, ką tik parodėme, kad

$$\eta_n(\omega) = f^n(\xi(\omega))$$

su tam tikromis Borelio funkcijomis $f^n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Jei $B = \{x \in \mathbb{R} : \exists \lim_n f^n(x) =: f(x)\}$ ir $f(x) = 0$, kai $x \notin B$, tai $f(x)$ yra Borelio funkcija, be to,

$$\eta(\omega) = \lim_n f^n(\xi(\omega)) = f(\xi(\omega)).$$

Tą ir reikėjo įrodyti. □

Apskritai, paskutinėje teoremoje gautoji Borelio funkcija gali būti sudėtinga. Patogiau naudotis a.d. išraiškomis, susietomis su elementariųjų įvykių erdvės skaidiniais. Dabar imsime nebūtinai baigtinius skaidinius, bet juose poaibių aibė bus skaiti. Tegul tas skaidinys yra toks:

$$\mathcal{D} = \{D_1, D_2, \dots\}, \qquad \Omega = D_1 \cup D_2 \cup \cdots ,$$

čia D_i yra poromis nesikertančios netuščios aibės. Jų sajungų šeima

$$\mathcal{A} := \Big\{ \cup_{i \in I} D_i, \ I \subset \mathbb{N} \Big\}$$

įskaitant ir tuščiąją sąjungą yra algebra. Ji yra monotoninė klasė (patikrinkite!), todėl ji sudaro ir σ algebrą, sutampančią su $\sigma(\mathcal{D}) \subset \mathcal{F}$.

Teorema 32. *Jei a.d $\xi = \xi(\omega)$ yra $\sigma(\mathcal{D})$ matus, tai jį galima išreikšti*

$$\xi(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \mathbf{1}_{D_k}(\omega).$$

Čia $x_k \in \mathbb{R}$ kokie tai skaičiai.

Pastaba. Teorema teigia, kad $\sigma(\mathcal{D})$ matūs a.d. yra diskretieji. Be to, bet kurioje skaidinio aibėje $\xi(\omega)$ yra konstanta. Tai girdėta: matumas baigtinių skaidinių atžvigiu reiškė pastovumą bet kurioje skaidinio aibėje. Vadovėlyje pateiktas įrodymas yra painus. Mes samprotausime panašiai, kaip įrodant 31 teoremą.

Proof. Jei ξ yra paprasčiausias a.d., įgyjantis baigtinį skaičių reikšmių x_k, tai dėl $\mathcal{D}$ matumo $\{\omega : \ \xi = x_k\} \in \mathcal{A}$. Todėl bet kurioje aibėje D_i turi būti pastovus. Jei ne paprasčiausias, jis aproksimuojamas $\mathcal{D}$ mačiais paprasčiausiais a.d. Jie pastovūs kiekvienoje iš D_i, tai tokią savybę turi ir riba. $\square$

Nagrinėkime kitas erdves $(X, \mathcal{B}(X))$. Jei $X = \mathbb{R}^n$, tada $\mathcal{F}$ matūs atvaizdžiai $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ yra *a. vektoriai.* Juos galėsime užrašyti

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n),$$

o jo koordinatės ξ_j bus a.d., nes bet kokiam intervalui

$$\{\omega : \ \xi_j \in I_j\} = \Big\{\omega : \ \xi \in \mathbb{R}_1 \times \cdots \times I_j \times \cdots \times \mathbb{R}_n\Big\} \in \mathcal{F}.$$

Jei $T = \mathbb{N}_0$, tai $\mathcal{F}$ matų atvaizdį $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^T$ vadinsime *diskretaus laiko a. procesu.* Jo reikšmė yra visa seka arba *trajektorija*

$$\xi(\omega) = (\xi_0(\omega), \xi_1(\omega), \dots) \in \mathbb{R}^T.$$

Pagal 8 lemą, matumą užtikrina sąlyga:

$$\forall n \ \& \forall \ I_1, \dots, I_n \subset \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \Big\{\omega : \ (\xi_1, \dots, \xi_n) \in I_1 \times \cdots \times I_n\Big\} \in \mathcal{F}.$$

O skirstinį P_ξ vienareikšmiškai apibrėžia tikimybės

$$P\Big((\xi_1, \dots, \xi_n) \in I_1 \times \cdots \times I_n\Big).$$

Jei $T = [0, \infty)$ ar kita kontinumo galios $\mathbb{R}$ poaibis, tai $\mathcal{F}$ matų atvaizdį $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^T$ vadinsime *tolydaus laiko a. procesu.* Jo reikšmė yra visa seka arba *trajektorija*

$$\xi(\omega) = (\xi_t(\omega) : \ t \in T) \in \mathbb{R}^T.$$

Pagal 8 lemą, matumą užtikrina sąlyga:

$$\forall n,\ \forall\, I_1, \dots, I_n,\ \&\,\forall\, \{0 \le t_1 < \dots < t_n\} \subset T$$
$$\Rightarrow \quad \Big\{\omega :\ (\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n}) \in I_1 \times \dots \times I_n\Big\} \in \mathcal{F}.$$

O skirstinį P_ξ vienareikšmiškai apibrėžia tikimybės

$$P\Big((\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n}) \in I_1 \times \dots \times I_n\Big),$$

vadinamos *baigtiniamačiais skirstiniais.*

15. Matematinė viltis, Lebego, Lebego-Styltjeso integralai

Medžiaga išdėstyta [2] vadovėlyje, ji sudaro bakalauro studijų dalį. Keletą sąvokų ir teiginių verta prisiminti...

Trečioji dalis. **PRIKLAUSOMUMAS**

16. Sąlyginės tikimybės ir sąlyginiai vidurkiai

Tegul, kaip ir anksčiau $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ yra tikimybinė erdvė ir

$$\mathbf{E}\xi = \int_\Omega \xi(\omega)P(d\omega) =: \int_\Omega \xi dP$$

a.d. $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ matematinė viltis arba *vidurkis*. Žinoma, jei jis egzistuoja.

Jei $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_i, \dots, \}, \cup_n D_i = \Omega$, yra skaitus Ω aibės skaidinys, be to, $P(D_i) > 0$, tai sąlyginės tikimybės ir sąlyginiai vidurkiai atžvilgiu skaidinio apibrėžiami kaip ir baigtinių skaidinių atveju. Taigi

$$P(B|\mathcal{D}) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B|D_i)\mathbf{1}_{D_i}(\omega).$$

Tai $\mathcal{D}$ matus a.d.. Jis matus ir σ algebros $\sigma(\mathcal{D})$ atžvilgiu. Kodėl?

Panašiai, jei $\mathbf{E}\xi$ apibrėžtas, tai sąlyginis vidurkis atžvilgiu įvykio A, kurio $P(A) > 0$, yra vidurkis $\mathbf{E}(\xi|A) = \mathbf{E}(\xi\mathbf{1}_A)/P(A)$, o

$$\mathbf{E}(\xi|\mathcal{D}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{E}(\xi|D_i)\mathbf{1}_{D_i}(\omega).$$

Visos turėtos savybės išlieka galioti.

Kai $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ yra bet kokia σ algebra (pvz., $\mathcal{G} = \mathcal{B}([0,1])$) nulinės tikimybės įvykių gali būti daug ir jie reikalingi, tenka įvesti sąlygines tikimybes ir vidurkius tokių įvykių atžvilgiu. Pradėkime nuo pastarųjų.

Apibrėžimas. *Neneigiamo a.d. ξ sąlyginis vidurkis atžvilgiu σ algebros $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ yra toks išplėstasis a.d., žymimas $\mathbf{E}(\xi|\mathcal{G})$ arba $\mathbf{E}(\xi|\mathcal{G})(\omega)$, kad*

(i) $\mathbf{E}(\xi|\mathcal{G})$ *yra $\mathcal{G}$ matus*;

(ii) *su bet kokiu $A \in \mathcal{G}$*

$$\int_A \xi dP = \int_A \mathbf{E}(\xi|\mathcal{G})dP.$$

Ar toks a.d egzistuoja? Va, čia ir reikia pereitos dalies teoremų. Pastebėkime, kad integralai

$$\int_A \xi dP =: Q(A), \quad A \in \mathcal{G},$$

apibrėžia matą erdvėje $(\Omega, \mathcal{G})$. Be to, šis matas yra absoliučiai tolydus mato P atžvilgiu (t.y. $P(B) = 0 \quad \Rightarrow \quad Q(B) = 0$ su kiekviena $B \in \mathcal{G}$). Todėl pagal Radono-Nikodimo teoremą, egzistuoja neneigiamas a.d., mes jį pasižymime $\mathbf{E}(\xi|\mathcal{G})$), tenkinantis lygybes

$$Q(A) = \int_A \mathbf{E}(\xi|\mathcal{G})dP$$

kokia bebūtų $A \in \mathcal{G}$. Be to, a.d. $\mathbf{E}(\xi|\mathcal{G})$ yra apibrėžtas vienareikšmiai, išskyrus nulinio mato aibę. Mes sakysime *apibrėžtas P beveik visur.* Patogus ir prasmingas žymuo yra toks:

$$\mathbf{E}(\xi|\mathcal{G}) = \frac{dQ}{dP}(\omega).$$

Tad, a.d. $\mathbf{E}(\xi|\mathcal{G})$ galima vadinti *Radono-Nikodimo išvestine.*

Jei ξ įgyja ir neigiamas reikšmes, galima išskaidyti $\xi = \xi^+ - \xi^-$ ir pritaikyti jau turėtą apibrėžimą jo dėmenims.

Apibrėžimas. *A.d. $\xi = \xi^+ - \xi^-$ sąlyginis vidurkis atžvilgiu σ algebros $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ yra a.d. lygus*

$$\mathbf{E}(\xi|\mathcal{G}) = \mathbf{E}(\xi^+|\mathcal{G}) - \mathbf{E}(\xi^-|\mathcal{G}),$$

jei yra tenkinama sąlyga

$$\min\{\mathbf{E}(\xi^+|\mathcal{G}), \mathbf{E}(\xi^-|\mathcal{G})\} < \infty$$

P beveik visur.

Toje nulinio mato aibėje, kurioje negalioja pastarasis reikalavimas, paprastai laikoma, kad $\mathbf{E}(\xi|\mathcal{G}) = 0$. Pirmojo apibrėžimo (ii) reikalavime paėmę $A = \Omega$, gauname

$$\mathbf{E}\xi = \mathbf{E}\Big(\mathbf{E}(\xi|\mathcal{G})\Big).$$

Kontrolinis klausimas. Kada yra teisinga lygybė $\mathbf{E}(\xi|\mathcal{G}) = \xi$?

Apibrėžimas. *Sąlyginė tikimybė*

$$P(B|\mathcal{G}) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_B(\omega)|\mathcal{G}), \quad B \in \mathcal{F}.$$

Čia $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$.

Vadinasi, $P(B|\mathcal{G})$ yra $\mathcal{G}$ matus ir

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= \int_A \mathbf{1}_B(\omega)dP = \int_A \mathbf{E}(\mathbf{1}_B(\omega)|\mathcal{G})dP \\ &= \int_A P(B|\mathcal{G})dP, \quad \forall\, A \in \mathcal{G}. \end{aligned} \tag{16.1}$$

Išskirkime jau minėtą atvejį, kai $\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{D})$ yra skaidinio generuota σ algebra.

Teorema 33. *Jei $\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{D})$ ir $P(D_i) > 0$ su bet kuriuo i, tada $\mathcal{G}$*

$$\mathbf{E}(\xi|\mathcal{G}) = \sum_i \mathbf{E}(\xi|D_i)\mathbf{1}_{D_i}(\omega).$$

Proof. Matus atžvilgiu $\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{D})$ a.d. turi pavidalą

$$\mathbf{E}(\xi|\mathcal{G}) = \sum_i x_i \mathbf{1}_{D_i}(\omega)$$

P beveik visur. Todėl sąlyginio vidurkio apibrėžime imdami $A = D_i$, gauname

$$\mathbf{E}\Big(\xi\mathbf{1}_{D_i}(\omega)\Big) = x_i P(D_i).$$

Taigi,

$$x_i = \frac{\mathbf{E}\Big(\xi \mathbf{1}_{D_i}(\omega)\Big)}{P(D_i)}$$

ir

$$\mathbf{E}(\xi|\mathcal{G}) = \sum_i \frac{\mathbf{E}\Big(\xi \mathbf{1}_{D_i}(\omega)\Big)}{P(D_i)} \mathbf{1}_{D_i}(\omega) = \sum_i \mathbf{E}(\xi|D_i)\mathbf{1}_{D_i}(\omega).$$

To ir buvo tikėtasi. □

Įsidėmėkime, pastarieji mūsų apibrėžimai neprieštarauja anksčiau turėtiesiems skaidinio atžvilgiu, jei nekreipsime dėmesio į nulinio mato aibes. Jei $\mathcal{G} = \mathcal{F}_\eta$, čia η yra a.d., tai žymenis keisime:

$$P(B|\mathcal{F}_\eta) =: P(B|\eta), \qquad \mathbf{E}(\xi|\mathcal{F}_\eta) =: \mathbf{E}(\xi|\eta).$$

Apibrėžimas. Sąlyginė dispersija yra vidurkis

$$\mathbf{V}(\xi|\mathcal{G}) = \mathbf{E}\Big[(\xi - \mathbf{E}(\xi|\mathcal{G}))^2 \Big| \mathcal{G}\Big].$$

Visas sąlyginio vidurkio savybes išvardinsime vienoje teoremoje. Toliau C, a, b yra konstantos.

Teorema 34. *Tegul žemiau vartojami sąlyginiai a.d. ξ ir η vidurkiai atžvilgiu σ algebros $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ yra apibrėžti. Tada*

A. *Jei $\xi = C$ (b.v.), tai $\mathbf{E}(\xi|\mathcal{G}) = C$ (b.v.).*
B. *Jei $\xi \le \eta$ (b.v.), tai $\mathbf{E}(\xi|\mathcal{G}) \le \mathbf{E}(\eta|\mathcal{G})$ (b.v.).*
C. $\Big|\mathbf{E}(\xi|\mathcal{G})\Big| \le \mathbf{E}\Big(|\xi|\Big|\mathcal{G}\Big)$ *(b.v.).*
D. $\mathbf{E}(a\xi + b\eta|\mathcal{G}) = a\mathbf{E}(\xi|\mathcal{G}) + b\mathbf{E}(\eta|\mathcal{G})$ *(b.v.).*
E. *Jei $\mathcal{G} = (\emptyset, \Omega)$, tai $\mathbf{E}(\xi|\mathcal{G}) = \mathbf{E}\xi$.*
F. $\mathbf{E}(\xi|\mathcal{F}) = \xi$ *(b.v.).*
G. $\mathbf{E}\Big(\mathbf{E}(\xi|\mathcal{G})\Big) = \mathbf{E}\xi$ *(b.v.).*
H. *Jei $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$, tai $\mathbf{E}\Big[\mathbf{E}(\xi|\mathcal{G}_2)\Big|\mathcal{G}_1\Big] = \mathbf{E}(\xi|\mathcal{G}_1)$ (b.v.).*
I. *Jei $\mathcal{G}_2 \subset \mathcal{G}_1$, tai $\mathbf{E}\Big[\mathbf{E}(\xi|\mathcal{G}_2)\Big|\mathcal{G}_1\Big] = \mathbf{E}(\xi|\mathcal{G}_2)$ (b.v.).*
J. *Jei ξ yra nepriklausomas nuo $\mathcal{G}$, tai $\mathbf{E}(\xi|\mathcal{G}) = \mathbf{E}\xi$ (b.v.).*
K. *Jei η yra $\mathcal{G}$ matus, tai $\mathbf{E}(\xi\eta|\mathcal{G}) = \eta\mathbf{E}\xi$ (b.v.).*

Proof. Reikalingą $\mathcal{G}$ matumo savybę įžiūrėti yra nesunku. Todėl daugumos faktų patikrinimas remsis sąlyginio vidurkio apibrėžimo (ii) reikalavimu ir jo savybe, kad jame esančių integralų, kai $A \in \mathcal{G}$ perbėga visas aibes, reikšmės vienareikšmiai (b.v.) nusako pointegrinę funkciją. Žinoma, a.d. besąlyginių vidurkių ir integralų savybėmis taip pat galėsime pasinaudoti.

Nagrinėsime tik kai kuriuos iš teiginių.

B. Turime integralų nelygybes

$$\int_A \xi dP \le \int_A \eta dP, \quad A \in \mathcal{G}.$$

ir
$$\int_A \mathbf{E}(\xi|\mathcal{G})dP \le \int_A \mathbf{E}(\eta|\mathcal{G})dP, \quad A \in \mathcal{G}.$$
Kaip minėjome, iš čia išplaukia
$$\mathbf{E}(\xi|\mathcal{G}) \le \mathbf{E}(\eta|\mathcal{G}) \quad (b.v.).$$

E. Konstantos $\mathbf{E}\xi$ matumas trivialios σ algebros atžvilgiu yra žinomas. Lieka patikrinti apibrėžimo (ii) reikalavimą kai $A = \emptyset$ ir $A = \Omega$.

H. Pritaikome apibrėžimą, kai vietoje ξ yra $\mathbf{E}(\xi|\mathcal{G}_2)$. Tegul $A \in \mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$. Tada
$$\int_A \mathbf{E}\Big[\mathbf{E}(\xi|\mathcal{G}_2)\Big|\mathcal{G}_1\Big]dP = \int_A \mathbf{E}(\xi|\mathcal{G}_2)dP = \int_A \xi dP$$
pagal tą patį apibrėžimą dėl $\mathbf{E}(\xi|\mathcal{G}_2)$, nes $A \in \mathcal{G}_2$.

Bet $A \in \mathcal{G}_1$, todėl galima grįžti atgal ir prilyginti
$$\int_A \mathbf{E}(\xi|\mathcal{G}_1)dP = \int_A \xi dP.$$
Dabar iš
$$\int_A \mathbf{E}\Big[\mathbf{E}(\xi|\mathcal{G}_2)\Big|\mathcal{G}_1\Big]dP = \int_A \mathbf{E}(\xi|\mathcal{G}_2)dP = \int_A \mathbf{E}(\xi|\mathcal{G}_1)dP, \quad A \in \mathcal{G}_1$$
išplaukia teginys H.

J. A.d. ξ ir $\mathbf{1}_A(\omega)$, $A \in \mathcal{G}$, yra nepriklausomi. Taigi
$$\mathbf{E}(\xi \mathbf{1}_A(\omega)) = \mathbf{E}\xi P(A) = \int_A \xi dP.$$
Kitaip užrašius,
$$\int_A \mathbf{E}\xi dP = \int_A \xi dP = \int_A \mathbf{E}(\xi|\mathcal{G})dP, \quad A \in \mathcal{G}.$$
Konstantos $\mathbf{E}\xi$ matumas nekelia abejonių, todėl dėl vienaties (b.v.) gauname norimą išraišką $\mathbf{E}(\xi|\mathcal{G}) = \mathbf{E}\xi$.

Išsinagrinėkite kitas savybes savarankiškai. □

Kaip ir vidurkių atveju, galioja ribinio perėjimo po sąlyginio vidurkio ženklu taisyklės, žinoma, tik pridėjus *beveik visur.*

Teorema 35. *Tegul* $(\xi_n), n \ge 1$ *yra a.d. seka,* η, ξ *– a.d. ir* $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ *– kokia nors* σ *algebra. Teisingi šie teiginiai:*

(a) *Jei* $|\xi| \le \eta$, $\xi_n \to \xi$ *(b.v.) ir* $\mathbf{E}\eta < \infty$, *tai*
$$\mathbf{E}(\xi_n|\mathcal{G}) \to \mathbf{E}(\xi|\mathcal{G}), \qquad \mathbf{E}\Big(|\xi_n - \xi|\Big|\mathcal{G}\Big) \to 0 \ (b.v.).$$

(b) *Jei* $\xi_n \ge \eta$, $\xi_n \uparrow \xi$ *(b.v.) ir* $\mathbf{E}\eta > -\infty$, *tai*
$$\mathbf{E}(\xi_n|\mathcal{G}) \uparrow \mathbf{E}(\xi|\mathcal{G}) \ (b.v.).$$

(c) *Jei* $\xi_n \le \eta$, $\xi_n \downarrow \xi$ *(b.v.) ir* $\mathbf{E}\eta < \infty$, *tai*
$$\mathbf{E}(\xi_n|\mathcal{G}) \downarrow \mathbf{E}(\xi|\mathcal{G}) \ (b.v.).$$

(d) *Jei* $\xi_n \geq \eta$, *(b.v.) ir* $\mathbf{E}\eta > -\infty$, *tai*

$$\mathbf{E}\Big(\liminf \xi_n|\mathcal{G}\Big) \leq \liminf \mathbf{E}(\xi_n|\mathcal{G}) \ (b.v.).$$

(e) *Jei* $\xi_n \leq \eta$, *(b.v.) ir* $\mathbf{E}\eta < \infty$, *tai*

$$\limsup \mathbf{E}(\xi_n|\mathcal{G}) \leq \mathbf{E}\Big(\limsup \xi_n|\mathcal{G}\Big) \ (b.v.).$$

(f) *Jei* $\xi_n \geq 0$ *(b.v.), tai*

$$\mathbf{E}\left(\sum_n \xi_n \middle| \mathcal{G}\right) = \sum_n \mathbf{E}(\xi_n|\mathcal{G}) \ (b.v.).$$

Proof. Ir vėl panagrinėsime tik porą iš jų. Visuose įrodymuose reikia pasinaudoti atittinkama perėjimo po integralo ženklu galimybe ir prieš tai buvusia teorema.

(a). Jei $\varepsilon > 0$ yra bet kokia konstanta ir $n \geq n_0(\varepsilon)$, tai

$$|\xi_n - \xi| < \varepsilon \ (b.v.).$$

Pagal sąlygą a.d. ξ_n ir ξ vidurkiai yra aprėžti. Pritaikę paskutinės teoremos D., C. ir A. dalis, gauname

$$\Big|\mathbf{E}(\xi_n|\mathcal{G}) - \mathbf{E}(\xi|\mathcal{G})\Big| = \Big|\mathbf{E}\Big(\xi_n - \xi\Big|\mathcal{G}\Big)\Big| \leq \mathbf{E}\Big(|\xi_n - \xi|\Big|\mathcal{G}\Big) \leq \mathbf{E}(\varepsilon|\mathcal{G}) \leq \varepsilon \ (b.v.).$$

Pirmasis ir antrasis teiginiai iš (a) matosi iš šių įverčių.

(b). Tegul pradžioje $\eta = 0$ (b.v.). Turime

$$\mathbf{E}(\xi_n|\mathcal{G}) \leq \mathbf{E}(\xi_{n+1}|\mathcal{G}), \quad n \geq 1.$$

Vadinasi, egzistuoja riba (b.v.)

$$\mathbf{E}(\xi_n|\mathcal{G}) \uparrow \zeta, \quad n \to \infty.$$

Lygybėse

$$\int_A \xi_n dP = \int_A \mathbf{E}(\xi_n|\mathcal{G}) dP, \quad A \in \mathcal{G},$$

dėl monotoniško konvergavimo galime pereiti prie ribos. Vadinasi,

$$\int_A \xi dP = \int_A \zeta dP, \quad A \in \mathcal{G}.$$

Pagal apibrėžimą, $\zeta = \mathbf{E}(\xi|\mathcal{G})$ (b.v).

Jei η yra nebūtinai 0, pritaikę jau įrodytą dalį, gauname

$$\mathbf{E}(\xi_n^{\pm}|\mathcal{G}) \uparrow \mathbf{E}(\xi^{\pm}|\mathcal{G}) \ (b.v.).$$

Pagal sąlygą $\mathbf{E}\xi^- > -\infty$, todėl

$$\mathbf{E}(\xi_n|\mathcal{G}) = \mathbf{E}(\xi_n^+|\mathcal{G}) - \mathbf{E}(\xi_n^-|\mathcal{G}) \to \mathbf{E}(\xi^+|\mathcal{G}) - \mathbf{E}(\xi^-|\mathcal{G}) \ (b.v.).$$

Teiginys (b) įrodytas.

Likusius teiginius įsirodykite savarankiškai. $\square$

17. Sąlyginiai vidurkiai atsitiktinių dydžių atžvilgiu

Pratęskime praeito skyrelio medžiagą paimdami $\mathcal{G} = \mathcal{F}_\eta$, čia η a.d. Natūraliai pratęskime apibrėžimus išplėstiesiems a.d., apibrėžtiems erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ir reikšmėmis iš $\left(\overline{R}, \mathcal{B}(\overline{R})\right)$. Visos savybės, suminėtos pereito skyrelio 35 teoremoje galioja ir sąlyginiams vidurkiams atžvilgiu $\mathcal{F}_\eta$ ir įvykio $\{\eta = x\}$, tačiau atsižvelgdami į specifiką dalį medžiagos galime paaiškinti paprasčiau.

Dabar sąlyginis vidurkis bus žymimas $\mathbf{E}(\xi|\mathcal{F}_\eta) =: \mathbf{E}(\xi|\eta)$. Tai yra $\mathcal{F}_\eta$ matus a.d., todėl pagal antrosios dalies 31 teoremą egzistuoja tokia Borelio funkcija $m : \overline{R} \to \overline{R}$, kad

$$\mathbf{E}(\xi|\eta)(\omega) = m(\eta(\omega))$$

koks bebūtų $\omega \in \Omega$. Vadinasi,

$$\int_A \xi dP = \int_A \mathbf{E}(\xi|\eta) dP = \int_A m(\eta) dP, \quad A \in \mathcal{F}_\eta. \tag{17.1}$$

Atkreipkime dėmesį, kad $m(y)$ apibrėžta P (b.v.). Jei $\eta = y$, tai

$$\mathbf{E}(\xi|\eta = y) = m(y).$$

Čia jau *a.d.* ξ *sąlyginis vidurkis atžvilgiu įvykio* $\eta = y$. Kaip matome, apibrėžimas turi prasmę, net jeigu $P(\eta = y) = 0$.

Atlikus integravimo kintamojo pakeitimą iš (17.1) gauname lygybę

$$\int_{\{\omega:\, \eta \in B\}} \xi dP = \int_B m(y) P_\eta(dy), \quad B \in \mathcal{B}(\overline{R}). \tag{17.2}$$

Aišku, čia $\{\omega : \eta \in B\} = A$, kuri buvo anksčiau, o P_η – a.d. η skirstinys. Lygybė (17.2), galiojanti visoms $B \in \mathcal{B}(\overline{R})$, irgi galėjo būti sąlyginio vidurkio $\mathbf{E}(\xi|\eta = y)$ apibrėžimu. Jis lygus čia P_η b.v. apibrėžtai funkcijai $m(y)$. Tokiam apibrėžimui ir $m(y)$ egzistavimo pagrindimui galėjome pasinaudoti ir faktu, kad

$$\int_{\{\omega:\, \eta \in B\}} \xi dP = Q(B), \quad B \in \mathcal{B}(\overline{R}),$$

taip pat yra absoliučiai tolydus atžvilgiu P matas, bet jau erdvėje $(\overline{R}, \mathcal{B}(\overline{R})$. Vadinasi, pagal Radono-Nikodimo teoremą egzistuoja tokia Borelio funkcija $m(y)$. Žinoma, turi egzistuoti vidurkis $\mathbf{E}\xi$. Taigi, atsiminkime:

Apibrėžimas. *Jei egzistuoja vidurkis* $\mathbf{E}\xi$*, tai a.d.* ξ *sąlyginis vidurkis atžvilgiu įvykio* $\eta = y$*, t.y.,* $\mathbf{E}(\xi|\eta = y)$*, yra lygybe (17.2)* P_η *(b.v.) apibrėžta funkcija* $m(y)$.

Kai $B = \overline{R}$, iš (17.2) gauname

$$\mathbf{E}\xi = \int_\Omega \xi dP = \int_{\overline{R}} m(y) P_\eta(dy).$$

Matą P_η apibrėžia a.d. η pasiskirstymo funkcija $F_\eta(y) = P(\eta \le y)$, todėl dažniau vartojama išraiška

$$\mathbf{E}\xi = \int_{\overline{R}} \mathbf{E}(\xi|\eta = y)dF_\eta(y). \tag{17.3}$$

Kai η yra diskretus a.d., t.y. $P(\eta = y_k) > 0$, ir kai $\mathbf{E}\xi$ egzistuoja, lygybė virsta

$$\mathbf{E}\xi = \sum_k \mathbf{E}(\xi|\eta = y_k)P(_\eta = y_k),$$

o absoliučiai tolydžiam a.d. η, turinčiam tankio funkciją $f_\eta(y)$ –

$$\mathbf{E}\xi = \int_{\overline{R}} \mathbf{E}(\xi|\eta = y)f_\eta(y)dy.$$

Apibrėžimas. *Tegul $A \in \mathcal{F}$ yra bet koks a. įvykis. Jo sąlygine tikimybe atžvilgiu įvykio $\{\eta = y\}$, kurią žymėsime $P(A|\eta = y)$, vadinsime indikatoriaus $\mathbf{1}_A(\omega)$ sąlyginį vidurkį, t.y.*

$$P(A|\eta = y) = \mathbf{E}\Big(\mathbf{1}_A(\omega)\Big|\eta = y\Big).$$

Pastebėkime, kad lygybės

$$P\Big(A \cap \{\eta \in B\}\Big) = \int_B P\Big(A|\eta = y\Big)P_\eta(dy), \quad B \in \mathcal{B}(\overline{B}), \tag{17.4}$$

irgi apibrėžia P_η (b.v.) funkciją $P\Big(A|\eta = y\Big)$.

Diskretaus a.d. η atveju, jei $P(\eta = y_k) > 0$, $k \in \mathbb{N}$, iš čia išplaukia

$$P\Big(A\Big|\eta = y_k\Big) = P\Big(A \cap \{\eta = y_k\}\Big)/P(\eta = y_k).$$

Kai $P(\eta = y) = 0$, t.y. a.d. η neįgyja reikšmės y, galima susitarti, kad

$$P\Big(A\Big|\eta = y\Big) = 0.$$

Detaliau panagrinėkime absoliučiai tolydinių a.d. ξ ir η atvejus. Tegul $f_\xi(x)$ ir $f_\eta(y)$ jų tankio funkcijos. Jos apibrėžiamos lygybėmis

$$P(\xi \in A) = \int_A f_\eta(x)dx, \qquad P(\eta \in B) = \int_B f_\eta(y)dy, \quad A, B \in \mathcal{B}(R).$$

Panašiai, tegul $f_{\xi,\eta}(x, y)$ yra vektoriaus (ξ, η) tankis. Kitaip tariant,

$$P\Big((\xi, \eta) \in C\Big) = \int_C f_{\xi,\eta}(x, y)dxdy, \quad C \in \mathcal{B}R^2).$$

Pažymėkime

$$f_{\xi|\eta}(x|y) = \frac{f_{\xi,\eta}(x, y)}{f_\eta(y)},$$

jei $f_\eta(y) \ne 0$ ir $f_{\xi|\eta}(x|y) = 0$, jei $f_\eta(y) = 0$, ir vadinkime *a.d. ξ sąlyginiu tankiu atžvilgiu a.d. η.*

Teorema 36. *Jei $f_{\xi|\eta}(x|y)$ yra a.d. ξ sąlyginis tankis atžvilgiu a.d. η, tai su bet kokiu $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ yra teisinga formulė*

$$P\Big(\xi \in C|\eta = y\Big) = \int_C f_{\xi|\eta}(x|y)dx.$$

Jei $\mathbf{E}\xi$ egzistuoja, tai

$$\mathbf{E}(\xi|\eta = y) = \int_{\mathbb{R}} x f_{\xi|\eta}(x|y)dx.$$

Proof. Tegul $A := \{\omega : \ \xi \in C\}$. Pirmajam teiginiui įrodyti pakanka įsitikinti, kad

$$P\Big(A \cap \{\eta \in B\}\Big) = \int_B \left[\int_C f_{\xi|\eta}(x|y)dx\right] P_\eta(dy), \quad B \in \mathcal{B}(\overline{B}),$$

ir palyginti su (17.4). Dešinėse pusėse esančių integralų pagal $P_\eta(dy)$ pointegrinės funkcijos turi sutapti P_η (b.v.), nes integralai sutapo visoms $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Remdamiesi Fubinio teorema, skaičiuojame kartotinį integralą

$$\begin{aligned}
\int_B \left[\int_C f_{\xi|\eta}(x|y)dx\right] P_\eta(dy) &= \int_B \left[\int_C f_{\xi|\eta}(x|y)dx\right] f_\eta(y)dy \\
&= \int_{B\times C} f_{\xi|\eta}(x|y) f_\eta(y)dxdy \\
&= \int_{B\times C} f_{\xi,\eta}(x|y)dxdy \\
&= P\Big(\xi \in C, \eta \in B) \\
&= P\Big(A \cap \{\eta \in B\}\Big).
\end{aligned}$$

□

Širiajevo vadovėlyje yra keletas gražių pavyzdžių. Vieną iš jų mes išskirsime ir atidžiau panagrinėsime atskirame skyrelyje.

18. Užmaršūs a.d.

Apibrėžimas. *Neneigiamas a.d. X vadinamas neturinčiu atminties arba užmaršiu, jeigu su visais $t \geq 0$ ir $s \geq 0$ yra teisinga lygybė*

$$P(X > s + t\,|X > t) = P(X > s).$$

Eksponentinio a.d. skirstinio funkcija lygi 0, kai $x < 0$ ir

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

su $\lambda > 0$, jei $x \geq 0$.

Teorema 37. *Užmaršus a.d. be atminties turi eksponentinį skirstinį.*

Proof. Tarkime $F(x) = P(X < x)$ yra a.d. skirstinio funkcija, o $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$. Tada

$$P(X > s + t \,|X > t) = \frac{P(X > s + t, X > t)}{P(X > t)} = P(X > s).$$

Vadinasi,

$$\frac{\bar{F}(s + t)}{\bar{F}(t)} = \bar{F}(s).$$

Beveik visur tolydi funkcija, tenkinanti Koši lygtį yra eksponentinė. Todėl $\bar{F}(x) = e^{-\lambda x}$. Parametro λ ženklas bus teigiamas, nes $\bar{F}(x)$ yra mažėjanti funkcija. $\square$

Apibrėžimas. *Neneigiamas a.d. X vadinamas stipriai užmaršiu, jeigu su visais $s \geq 0$ ir nepriklausomais a.d.s $Y \geq 0$ yra teisinga lygybė*

$$P(X > s + Y \,|X > Y) = P(X > s).$$

Teorema 38. *Eksponentinis a.d. yra stipriai užmaršus.*

Proof. Įvykio tikimybė yra jo indikatoriaus vidurkis, todėl ir ją galime sąlyginti. Jei a.d. Y pasiskirstymo funkcija yra $F(y) = P(Y \leq y)$, tai

$$\begin{aligned}
P(X > s + Y) = \mathbf{E}\Big(P(X > s + Y \,|Y)\Big) &= \int_{\mathbb{R}} P(X > s + Y \,|Y = y) dF(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} P(X > s + y \,|Y = y) dF(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} P(X > s + y) dF(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\lambda(s+y)} dF(y) = \mathbf{E}\Big(e^{-\lambda(s+Y)}\Big).
\end{aligned}$$

Kai $s = 0$, iš čia gauname

$$P(X > Y) = \mathbf{E}\Big(re^{-\lambda Y}\Big).$$

Todėl

$$\frac{P(X > s + Y)}{P(X > Y)} = e^{-\lambda s} = P(X > s).$$

Tą ir reikėjo įrodyti. $\square$

UŽDUOTIS. *Įėjęs į banką pastebiu, kad yra du tarnautojai aptarnaujantys klientus nepriklausomai vienas nuo kito. Abiejų klientų aptarnavimo laikas yra eksponentinis a.d. su parametru λ. Kokia tikimybė, kad sutvarkęs savo reikalą aš išeisiu po abiejų klientų?*

Sprendimas. Tegu X yra mano prabuvimo banke laikas, o Y, Z - klientų aptarnavimo laikas nuo mano įėjimo. Tarkime, kad $Y < Z$. Jei η eksponentinis a. dydis - pirmojo kliento aptarnavimo laikas. Man atėjus jau aptarnavimas vyko, sakysim, atsitiktinį laiko tarpą S (iš čia nelygybė $\eta > S$) ir dar truks

t, todėl $\eta > S + t$. Kadangi mano atėjimas nepriklauso nuo pirmojo kliento aptarnavimo, tai S ir η yra nepriklausomi. Vadinasi,

$$P(Y > t) = P(\eta > t + S|\, \eta > S) = P(\eta > t) = \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{t}}.$$

Čia pirmoji lygybė apibrėžia Y skirstinį, o antroji - eksponentinio a.d. stipriojo užmaršumo savybė. Vadinasi, ir a.d. Y pasiskirstęs pagal eksponentinį dėsnį su tuo pačiu parametru kaip ir η. Panašiai, randamas ir Z skirstinys. Jis irgi toks pat kaip a.d. η.

Dar kartą pakartokime tokius argumentus. Nagrinėkime laiko momentą, kai pirmojo kliento aptarnavimo laikas pasibaigė ir pradėjo aptarnauti mane. Jei U yra laiko tarpas tarp šio momento iki antrojo kliento aptarnavimo pabaigos, tai

$$P(U > u) = P(Z > Y + u|Z > Y) = P(Z > u) = \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{u}}.$$

Vadinasi, nuo to momento, kai pradėjo aptarnauti mane, antrojo kliento aptarnavimo laiko likutis irgi turi tą patį skirstinį, kaip ir mano aptarnavimo laikas. Kadangi visada vienodai pasiskirsčiusiems ir nepriklausomiems dydžiams η_1 ir η_2 dėl simetrijos yra teisinga lygybė

$$P(\eta_1 < \eta_2) = 1/2.$$

Tai toks ir yra uždavinio atsakymas.

UŽDUOTIS. *Tęskime ankstesnės užduoties nagrinėjimą. Dabar reikia rasti mano prabuvimo banke laiko X vidurkį, jei klerkai dirba skirtingais aptarnavimo greičiais λ_1 ir λ_2.*

Sprendimas. Pagal pilnos tikimybės formulę

$$\mathbf{E}X = \mathbf{E}(X|\, Y < Z)P(Y < Z) + \mathbf{E}(X|\, Y \geq Z)P(Y \geq Z)$$

Jei η_j yra eksponentiniai a.d. su vidurkiais λ_i, $i = 1, 2$, tai

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}X &= \mathbf{E}(X|\, Y < Z)\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \mathbf{E}(X|\, Y \geq Z)\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \\
&= \mathbf{E}(Y + \eta_1|\, Y < Z)\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \mathbf{E}(Z + \eta_2|\, Y \geq Z)\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \\
&= \Big(\mathbf{E}(Y|\, Y < Z) + \mathbf{E}\eta_1\Big)\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \Big(\mathbf{E}(Z|\, Y \geq Z) + \mathbf{E}\eta_2\Big)\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \\
&= (\mathbf{E}(\min\{Y, Z\}) + 1/\lambda_1\Big)\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \Big(\mathbf{E}(\min\{Y, Z\}) + 1/\lambda_2\Big)\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \\
&= \Big(\frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} + 1/\lambda_1\Big)\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \Big(\frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} + 1/\lambda_2\Big)\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \\
&= \frac{3}{\lambda_1 + \lambda_2}.
\end{aligned}$$

UŽDUOTIS. *Ką tik atėjusius klientus pradėjo aptarnauti n darbuotojų ir visų jų aptarnavimo laikas yra eksponentinis su tuo pačiu vidurkiu ir yra nepriklausomas vienas nuo kito. Rasti laiko tarpo tarp k-ojo ir $(k+1)$-ojo klientų aptarnavimų pabaigų skirstinio tankį.*

19. Puasono procesas

Pradėkime nuo tradicinio Puasono proceso apibrėžimo. Kai kurias sąvokas įveskime prieš tai. Tegul $X(t)$, $t \geq 0$, yra procesas su trajektorijomis $\mathbb{D}[0,\infty)$ erdvėje. Jo skirstinys apibrėžiamas visais baigtiniamačiais skirstiniais vektorių

$$\Big(X(t_1),\ X(t_2), \dots, X(t_n)\Big),$$

čia $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ yra bet kokie laiko momentai ir $n \in \mathbb{N}$ – bet koks natūralusis skaičius. Procesas $X(t)$ vadinamas *stacionariuoju*, jeigu bet kokiam $s > 0$ šie skirstiniai yra invariantiški laiko postūmių atžvilgiu, t.y., ir vektorių

$$\Big(X(t_1+s),\ X(t_2+s), \dots, X(t_n+s)\Big),$$

skirstiniai būtų tie patys su kokiu bebūtų $s > 0$. Dažnai, aprašant procesus imami jų prieaugių

$$\Big(X(t_1) - X(0),\ X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1}\Big)$$

skirstiniai ir akcentuojamos pastarųjų savybės. Pvz., proceso prieaugiai *yra nepriklausomi* arba *prieaugiai yra stacionarūs.* Pastaroji savybė, aišku, reiškia prieaugių skirstinių stacionarumą. Vienamačiu atveju, tai galėtume užrašyti lygybe

$$P\Big(X(t) - X(0) < x\Big) = P\Big(X(t+s) - X(s) < x\Big), \quad s > 0,\ x \in \mathbb{R}.$$

Dabar skirstinys priklauso tik nuo laiko intervalo ilgio.

Apibrėžimas. Atsitiktinis procesas (a.p.) $\Pi(t)$, $t \geq 0$, vadinamas *Puasono* (homogeniniu), jeigu

- $\Pi(0) = 0$;
- $\Pi(t) \in \mathbb{Z}^+$;
- $\Pi(t)$ turi stacionarius ir nepriklausomus prieaugius;
- $P\Big(\Pi(t) \geq 2\Big) = o(t)$, jei $t \to 0$;
- $P\Big(\Pi(t) = 1\Big) = \lambda t + o(t)$, jei $t \to 0$; čia $0 \leq \lambda < \infty$ yra konstanta.

Žinoma, pirmieji reikalavimai gali būti ir su vienetine tikimybe. Kodėl Puasono vardas?

Teorema 39. *Jei procesas tenkina apibrėžimo sąlygas su $0 < \lambda < \infty$, tai*

$$P_k(t) := P\Big(\Pi(t) = k\Big) = e^{-\lambda t}\,\frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{Z}^+.$$

Proof. Nagrinėjame šių tikimybių seką, kai $k = 0$, o t pakeistas $t + h$, čia $h > 0$ yra mažas. Gauname

$$\begin{aligned} P_0(t+h) &:= P\Big(\Pi(t+h) = 0\Big) = P\Big(\Pi(t) = 0,\ \Pi(t+h) - \Pi(t) = 0\Big) \\ &= P\Big(\Pi(t) = 0\Big)P\Big(\Pi(t+h) - \Pi(t) = 0\Big) \\ &= P\Big(\Pi(t) = 0\Big)\Big[1 - \lambda h + o(h)\Big] \\ &= P_0(t)\Big[1 - \lambda h + o(h)\Big]. \end{aligned}$$

Vadinasi,

$$\frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} = -\lambda P_0(t) + o(1),$$
$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t).$$

Iš čia ir pradinės proceso reikšmės išplaukia, kad $P_0(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

Panašiai samprotaujame ir toliau:

$$\begin{aligned} P_n(t+h) &:= P\Big(\Pi(t+h) = n\Big) \\ &= P\Big(\Pi(t) = n,\ \Pi(t+h) - \Pi(t) = 0\Big) \\ &\quad + P\Big(\Pi(t) = n-1,\ \Pi(t+h) - \Pi(t) = 1\Big) \\ &\quad + P\Big(\Pi(t+h) = n,\ \Pi(t+h) - \Pi(t) \geq 2\Big) \\ &= P_n(t)P_0(h) + P_{n-1}(t)P_1(h) + o(h) \\ &= (1 - \lambda h)P_n(t) + \lambda h P_{n-1}(t) + o(h). \end{aligned}$$

Dabar

$$\frac{P_n(t+h) - P_n(t)}{h} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + o(1),$$

todėl perėję prie ribos gauname diferencialinę lygtį

$$P_n'(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t).$$

Ją spręsdami pertvarkome

$$\mathrm{e}^{\lambda t}\Big[P_n'(t) + \lambda P_n(t)\Big] = \lambda \mathrm{e}^{\lambda t} P_{n-1}(t),$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\mathrm{e}^{\lambda t} P_n(t)\Big) = \lambda \mathrm{e}^{\lambda t} P_{n-1}(t), \tag{19.1}$$

Kai $n = 1$,

$$\frac{d}{dt}\Big(\mathrm{e}^{\lambda t} P_1(t)\Big) = \lambda \mathrm{e}^{\lambda t} P_0(t) = \lambda,$$
$$P_1(t) = (\lambda t + c)\mathrm{e}^{-\lambda t},$$

Pasinaudoję $P_1(0) = 0$, gauname $c = 0$ ir

$$P_1(t) = \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t},$$

Toliau pakanka taikyti matematinę indukciją ir (19.1).

Taigi, įsirodykite savarankiškai, kad koks bebūtų $n \in \mathbb{N}$

$$P_n(t) = e^{-\lambda t}\,\frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

Teorema įrodyta. $\square$

Apibrėžimas. A.p. $N(t)$, $t \geq 0$, vadinamas *skaičiuojančiuoju*, jeigu jis išreiškia įvykių pasirodymo laiko intervale $(0, t]$ skaičių.

Taigi,

- $N(t) \in \mathbb{Z}^+$;
- Jei $s < t$, tai $N(s) \leq N(t)$.

Susitarkime, kad proceso trajektorijos $N(t)$ yra tolydžios iš dešinės su vienetine tikimybe.

Naudosimės tokia ribine teorema.

Lema. *Tarkime, kad X_{ni}, $1 \leq i \leq k_n$, yra nepriklausomi a.d., įgyjantys sveikąsias neneigiamas reikšmes ir tokie, kad tikimybės $p_{ni} := P(X_{ni} = 1)$ ir $\varepsilon_{ni} := P(X_{ni} \geq 2)$ tenkina sąlygas:*

(i) $\max_{i \leq k_n} p_{ni} = o(1)$;

(ii) $\sum_{i \leq k_n} p_{ni} \to \lambda \in [0, \infty]$;

(iii) $\sum_{i \leq k_n} \varepsilon_{ni} = o(1)$,

jei $n \to \infty$. Tada sumos

$$\sum_{i \leq k_n} X_{ni}$$

skirstinys silpnai konverguoja į Puasono skirstinį su parametru λ.

Įrodymas bus pateiktas ribinių teoremų kurse.

Kai $\lambda = 0$, skirstinys išsigimęs nulio taške, o atveju $\lambda = \infty$ ribinis a.d. išsigimęs begalybėje, t.y. jo skirstinio funkcija yra tapačiai lygi nuliui.

Dabar galime skaičiuojančiųjų procesų klasėje išskirti Puasono procesą.

1 teorema. *Jei skaičiuojantis procesas $N(t)$ turi nepriklausomus stacionarius prieaugius, jo šuoliai neviršija vieneto, $N(0) = 0$ ir $N(t) \not\equiv 0$, tai egzistuoja toks $\lambda \in (0, \infty)$, kad $N(t)$ yra Puasono procesas su parametru λ.*

Įrodymas. Tegul $n \geq 1$ ir $t > 0$. Apibrėžkime a.d.

$$X_{ni} = N\Big(\frac{it}{2^n}\Big) - N\Big(\frac{(i-1)t}{2^n}\Big), \quad 1 \leq i \leq 2^n.$$

Įrodysime, kad jie tenkina lemos sąlygas. Išlaikydami jos žymenis, patikriname įvertį

$$\varepsilon_n \equiv \varepsilon_{ni} = P(X_{ni} \geq 2) = o(2^{-n}), \quad 1 \leq i \leq 2^n, \tag{19.2}$$

jei $n \to \infty$. Tarę priešingai, turime kažkokį posekį $n_k \to \infty$ ir $\delta \in (0, \infty]$ su savybe

$$2^{n_k}\varepsilon_{n_k} \to \delta,$$

jei $k \to \infty$. Įveskime binominius a.d.

$$\eta_{ni} = \mathbf{1}\{X_{ni} \geq 2\}, \quad 1 \leq i \leq 2^{n_k}.$$

Tai nepriklausomi vienodai pasiskirstę a.d., be to,

$$P(\eta_{ni} = 1) = \varepsilon_{ni} = \varepsilon_n.$$

Skaičiuojame tikimybę

$$\begin{aligned} P\Big(\exists i \leq 2^{n_k} : X_{ni} \geq 2\Big) &= P\Big(\sum_{i \leq 2^{n_k}} \eta_{ni} \geq 1\Big) = 1 - P\Big(\sum_{i \leq 2^{n_k}} \eta_{ni} = 0\Big) \\ &= 1 - \prod_{i \leq 2^{n_k}} P(\eta_{ni} = 0) = 1 - (1 - \varepsilon_n)^{2^{n_k}} \to 1, \end{aligned}$$

jei $\delta = \infty$. Jei $\delta < \infty$, logaritmuodami gauname

$$\begin{aligned} P\Big(\exists i \leq 2^{n_k} : X_{ni} \geq 2\Big) &= 1 - \exp\{2^{n_k} \log(1 - \varepsilon_{n_k})\} \sim 1 - \exp\{-2^{n_k} \varepsilon_{n_k}\} \\ &\sim 1 - e^{-\delta} > 0, \quad k \to \infty. \end{aligned}$$

Kadangi

$$N(t) = \Big(N(t) - N(t - t2^{-n})\Big) + \cdots + \Big(N(t2^{-n}) - N(0)\Big) = \sum_{i \leq 2^n} X_{ni},$$

paskutinieji įverčiai rodo, kad $N(t)$ turi nemažesnius už du šuolius su teigiama tikimybe. Prieštara teoremos sąlygai rodo (1.2) lygybės teisingumą. Iš jos išplaukia lemos reikalavimas (iii).

Tikimybės $p_n := p_{ni}(t) = P(X_{ni} = 1)$ yra vienodos visiems $1 \leq i \leq 2^n$. Kai $i = 1$, gauname

$$p_n \leq P\Big(N(t/2^n) \geq 1\Big).$$

Vadinasi, naudodamiesi susitarimu, kad trajejktorijos yra tolydžios iš dešinės, gauname

$$\limsup_{n \to \infty} p_n \leq P(N(+0) \geq 1) = P(N(0) \geq 1) = 0.$$

Tai yra lemos sąlyga (i).

Išrinkime tokį neaprėžtai didėjantį indeksų posekį n_k, kad egzistuotų riba

$$\lim_{k \to \infty} 2^{n_k} p_{n_k} =: g(t).$$

Pagal lemą

$$N(t) = \sum_{i \leq 2^{n_k}} X_{ni} \Rightarrow \Pi_{g(t)}$$

skirstinių konvergavimo prasme. Čia $\Pi_{g(t)}$ yra Puasono a.d. su parametru $g(t)$. Kitais žodžiais tariant, $N(t) = \Pi_{g(t)}$. Kadangi

$$\mathbf{E}(N(t)) = \mathbf{E}(\Pi_{g(t)}) = g(t),$$

iš lygybės $N(s + t) = N(s) + N(t)$ išplaukia Koši funkcinė lygtis $g(t + s) = g(t) + g(s)$. Monotoniškai didėjanti funkcija, tenkinanti šią lygtį, turi pavidalą $g(t) = \lambda t$, čia $\lambda > 0$ ir $t \geq 0$.

Teorema įrodyta.

Mus dažnai domina ne a.d. sumos elgesys, bet dėmenų skaičius, kada suma pasiekia tam tikrą sritį. Šį požiūrį nelengva psichologiškai įsisamoninti, todėl panagrinėsime paprastą uždavinį.

Lietuviškas nesėkmės paradoksas. *Tarkime, kad man ir draugams finansinės nesėkmės yra vienodai pasiskirstę tolydiniai a.d.* $X_1, \ldots, X_n, \ldots$. *Sulaukęs nesėkmės, aš noriu žinoti, kiek reiks laukti, kad mano draugas patirs dar didesnių nuostolių. Koks to laukimo laiko vidurkis?*

Tegul mano numeris yra 1. Nagrinėkime seką $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Pažymėkime $N = \min\{k : X_k > X_1\}$. Pastebėkime, kad $N > n$, $n \geq 2$, tada ir tik tada, jei maksimalus šios sekos narys yra pirmasis. Bet šis įvykis yra simetrinis, t.y. maksimalus galėjo būti bet kuris jos narys. Todėl

$$P(N > n) = 1/n.$$

Iš čia

$$P(N = n) = P(N > n-1) - P(N > n) = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)}$$

Vadinasi,

$$\mathbf{E}(N) = \sum_{n=2}^{\infty} n \frac{1}{n(n-1)} = \infty.$$

Man iš tiesų nesiseka, nes vidutiniškai teks laukti begalo daug, kol kam nors nesiseks dar labiau!

Grįžkime prie Puasono proceso. Pastebėsime, kad skaičiuojantysis procesas, tenkinantis 1 teoremos sąlygas, egzistuoja. Sekančiame teiginyje skaičiuosime a.d. sumas, neviršijančias tam tikros ribos.

2 teorema. *Jei* X_k, $k \geq 1$, *yra nepriklausomi a.d. pasiskirstę pagal tą patį eksponentinį su parametru* $\lambda > 0$ *dėsnį, tai procesas*

$$N(t) := \sup\left\{ n \geq 0 : \sum_{k \leq n} X_k \leq t \right\}, \quad t > 0,$$

yra Puasono.

Įrodymas. Akivaizdu, kad $P(N(0) = 0) = P(X_1 > 0) = 1$. Pagal stipriąjį didžiųjų skaičių dėsnį

$$\frac{1}{n} \sum_{k \leq n} X_k \to \mathbf{E}(X_k) = 1/\lambda,$$

su vienetine tikimybe, jei $n \to \infty$. Vadinasi, beveik visada X_k suma yra monotoniškai didėjanti, todėl fiksavus $t \geq 0$, rasime tokį baigtinį numerį $N(t)$, nurodytą jo apibrėžime. Kitais žodžiais tariant, $N(t) < \infty$ su tikimybe vienetas. Šis procesas turi vienetinius šuoliukus, nes $P(X_k = 0) = 0$, ir trajektorijos yra tolydžios iš dešinės. Jo prieaugiai $N(t+s) - N(s)$ išreiškia naujų dėmenų X_k, prisidėjusių prie sumos, skaičių. Jis priklauso tik nuo laiko intervalo ilgio t, todėl jie yra stacionarūs. Iš šių dėmenų nepriklausomumo išplaukia ir paties proceso $N(t)$ prieaugių nepriklausomumas. Pagal 1 teoremą $N(t)$ yra Puasono procesas.

Įrodysime, kad jo greičio parametras $\lambda_1 = \lambda$. Turime $\mathbf{E}(N(t)) = \lambda_1 t$. Kadangi

$$N(t) \geq n \Leftrightarrow S_n := \sum_{k \leq n} X_k \leq t,$$

tai

$$F_{S_n}(t) = P(S_n \leq t) = P(N(t) \geq n).$$

A.d. S_n tankio funkcija yra gama skirstinio tankio funkcija

$$g_n(t) := f_{S_n}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad t \geq 0.$$

Iš tiesų, kai $n = 1$, tai išplaukia iš apibrėžimo. Tarę kad ji teisinga dėl n, skaičiuojame $(n+1)$-o dėmens sumos tankio funkciją. Pagal sąsūkos formulę

$$g_{n+1}(t) = \int_0^t g_n(t-x) g_1(x) dx = \frac{\lambda^{n+1} t^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!} \int_0^t x^n \, dx = \frac{\lambda^{n+1} t^n e^{-\lambda t}}{n!},$$

kaip ir buvo manyta. Toliau skaičiuojame vidurkį kitu būdu. Pasinaudojame Abelio sumavimu ir gauname

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(N(t)) &= \sum_{k \geq 1} k P(N(t) = k) = \sum_{k \geq 1} k \Big(P(N(t) \geq k) - P(N(t) \geq k+1) \Big) \\
&= \sum_{m \geq 1} P(N(t) \geq m) = \sum_{m \geq 1} P(S_m \leq t) \\
&= \sum_{m \geq 1} \int_0^t f_{S_m}(u) \, du = \int_0^t \sum_{m \geq 1} f_{S_m}(u) \, du \\
&= \int_0^t \lambda e^{-\lambda u} \sum_{m \geq 1} \frac{(\lambda u)^{m-1}}{(m-1)!} \, du = \int_0^t \lambda e^{-\lambda u} \cdot e^{\lambda u} \, du = \lambda t.
\end{aligned}$$

Vadinasi, iš tiesų $\lambda_1 = \lambda$.

Teorema įrodyta.

Tegul toliau $\Pi(t)$ yra Puasono procesas su parametru $\lambda > 0$. Pažymėkime X_1 pirmojo $\Pi(t)$ šuolio laiko momentą, X_2 - laiko tarpą tarp pirmojo ir antrojo šuolio, X_3 - sekantį laiko tarpą tarp šuolių ir X_n - laiko tarpą tarp $(n-1)$-o ir n-o šuolių. Galima įsivaizduoti, kad Puasono procesas skaičiuoja kažkokių įvykių pasirodymą, įvykiui įvykus jo reikšmė padidėja vienetu. Tokioje interpretacijoje suma

$$S_n = \sum_{k \leq n} X_k$$

reikštų n-o įvykio laiką, o X_k būtų tarpai tarp tų įvykių.

Sekantis teiginys tam tikra prasme yra atvirkštinis 2 teoremai.

3 teorema. *Jei $\Pi(t)$ yra Puasono procesas, kurio greitis yra λ, o a.d. X_k, $k \geq 1$, - laiko tarpai tarp įvykių, kuriuos skaičiuoja procesas, pasirodymo, tai* *pastarieji yra nepriklausomi ir pasiskirstę pagal eksponentinį dėsnį su parametru λ.*

Įrodymas. Turime

$$P(X_1 > t) = P(\Pi(t) = 0) = e^{-\lambda t}.$$

Dabar

$$P(X_2 > t) = \mathbf{E}\Big(P(X_2 > t\,|X_1)\Big).$$

Tačiau dėka prieaugių nepriklausomumo, turime

$$\begin{aligned} P(X_2 > t\,|X_1 = s) &= P(\Pi(t) \text{ nedare suoliu intervale } (s, s+t]\,|X_1 = s) \\ &= P(\Pi(t+s) - \Pi(s) = 0) = e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

koks bebūtų s ir

$$\begin{aligned} P(X_2 > t,\, X_1 > u) &= \int_u^\infty P(X_2 > t\,|X_1 = s) d(1 - e^{-\lambda s}) \\ &= e^{-\lambda t} e^{-\lambda u}. \end{aligned}$$

Todėl X_1 ir X_2 yra nepriklausomi, be to,

$$P(X_2 > t) = e^{-\lambda t}.$$

Pakartoję samprotavimus su bet kokiu a.d. X_k rinkiniu, (galima būtų pritaikyti matematinę indukciją) baigtume griežtą 3 teoremos įrodymą.

UŽDUOTIS. Tarkime, kad $0 < s \le t$. Rasti sąlyginę tikimybę

$$P(X_1 < s\,|\Pi(t) = 1)$$

ir skirstinio

$$P(S_1 < x, S_2 < y\,|\Pi(t) = 2)$$

tankį.

Atsakymai: s/t ir $2xy/t^2$, kai $x < y < t$.

Nekantriesiems ir nesugebantiems pateikiame sprendimą !

Sprendimas. Pirmąją ieškomą tikimybę užrašome

$$\frac{P\Big(X_1 < s,\, \Pi(t) = 1\Big)}{P\Big(\Pi(t) = 1\Big)}.$$

Analizuojame vykį, esantį po tikimybe skaitiklyje. Jei $X_1 < s$, tai pirmasis Puasono proceso šuolis buvo iki laiko momento s, vadinasi, $\Pi(s) = 1$. Antrasis įvykis po šia tikimybe rodo, kad laiko intervale $(s, t]$ šuolio nebuvo. Apgręždami šiuos samprotavimus, pastebime net įvykių ekvivalentumą. Gauname

$$\begin{aligned} P(X_1 < s\,|\Pi(t) = 1) &= \frac{P\Big(\Pi(s) = 1,\, \Pi(t) - \Pi(s) = 0\Big)}{P\Big(\Pi(t) = 1\Big)} \\ &= \frac{\lambda s e^{-\lambda s} \cdot e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t}. \end{aligned}$$

Antrame pratime reikia imti mažus $\delta_1, \delta_2 > 0$ ir nagrinėti tikimybę

$$P := \frac{P\Big(x < S_1 \le x + \delta_1, y < S_2 \le y + \delta_2\,, \Pi(t) = 2\Big)}{P\Big(\Pi(t) = 2\Big)}\,.$$

Įvykį po tikimybe skaitiklyje vėl reikia išreikšti Puasono proceso šuoliais. Jei antrasis šuolis įvyko momento y aplinkoje, tai t turi būti didesnis už y. Tad, sumažinę δ_2 (panašiai ir dėl δ_1), galime imti $0 < x+\delta_1 \le y \le t-\delta_2$. Pažymėkime

$$J = (0,t] \setminus \Big((x, x+\delta_1] \cup (y, y+\delta_2]\Big).$$

Pakeičiame nagrinėjamą įvykį ir išvedame

$$\begin{aligned} P &= \frac{P\Big(\Pi(x+\delta_1) - \Pi(x) = 1, \Pi(y+\delta_2) - \Pi(y) = 1\,, \Pi(t) = 2\Big)}{P\Big(\Pi(t) = 2\Big)} \\ &= \frac{P\Big(\Pi(x+\delta_1) - \Pi(x) = 1, \Pi(y+\delta_2) - \Pi(y) = 1,\ \textit{int. J suoliu nera}\Big)}{P\Big(\Pi(t) = 2\Big)} \\ &= \Big(\lambda\delta_1 e^{-\delta_1\lambda}\,\lambda\delta_2 e^{-\delta_2\lambda}\ e^{-\lambda(t-\delta_1-\delta_2)}\Big)\Big/\Big((\lambda t)^2 e^{-\lambda t}/2\Big) = 2\delta_1\delta_2 t^{-2}. \end{aligned}$$

Jei $\delta_1, \delta_2 \to 0$, gauname,

$$\frac{d^2 P(S_1 < x, S_2 < y\,|\Pi(t) = 2)}{dx\,dy} = 2/t^2.$$

Gavome dvimačio a.d. tankio funkciją. Integruodami pagal $0 \le x \le a$ ir $0 \le y \le b$ išvestume atsakymą (su $x = a$ ir $y = b$).

Apibendrinę šią lygybę, gauname svarbią Puasono proceso savybę.

4 teorema. *Sąlyginis skirstinys*

$$P(S_i < x_i,\ i \le n\,|\Pi(t) = n)$$

sutampa su n *nepriklausomų tolygiai pasiskirsčiusių intervale* $[0,t]$ *a.d.* $U_1, \dots,$ U_n *sutvarkytosios statistikos* $U_{i_1} < \dots < U_{i_n}$ *skirstiniu.*

Savarankiškai pakartokite viršuje užrašytus samprotavimus bendru atveju! Primename, kad minimos statistikos tankio funkcija yra

$$f(x_1, \dots, x_n) = n!/t^n,$$

kai $0 \le x_1 < x_2 < \dots < x_n \le t$ ir $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ priešingu atveju. Iš tiesų, antrasis atvejis akivaizdus. Kadangi iš visų vektorių $\overline{X} := (U_1, \dots, U_n)$ bet kaip perstačius tolygiai apsiskirsčiusius a.d. U_j gaunama ta pati sutvarkytoji statistika, tai atsiranda daugiklis $n!$. Be to, reikia pastebėti, kad a. vektoriaus $\overline{X}$ tankio funkcija yra lygi t^{-n}, jei $0 \le x_i \le t$, $1 \le i \le n$, ir lygi nuliui likusioje $\mathbb{R}^n$ dalyje. Suintegravę tankį gautume pasiskirstymo funkciją.

Taikant šią teoremą, patogu įsivaizduoti, kad esant sąlygai $\Pi(t) = n$, įvykių, kuriuos skaičiuoja Puasono procesas, pasirodymo momentai yra nesutvarkyti laiko skalėje ir yra nepriklausomi tolygiai intervale $[0, t]$ pasiskirstę a.d. Seka $S_1, \ldots S_n$ jau yra sutvarkytoji. Tuo pasinaudosime kituose skyreliuose.

20. Masinio aptarnavimo teorijos uždavinys

Nagrinėsime aptarnavimo sistemą, kurios standartinis žymuo yra $M/G/\infty$. Pirmoji raidė paprastai žymi laiko tarpų tarp klientų atvykimų skirstinį, o M - eksponentinį skirstinį su parametru $\lambda > 0$. Antroji raidė - aptarnavimo laiko skirstinį. Skaičius už pasvirojo brūkšnio reiškia serverių skaičių. Taigi, mūsų sistemoje klientai atvyksta pagal Puasono procesą.

Palyginkite su kita vieno serverio sistema $G/M/1$. Joje klientų atvykimas vyksta pagal procesą, kuriame laiko tarpai tarp atvykimų turi skirstinį G, o aptarnavimo laikas yra eksponentinis a.d.

UŽDUOTIS Tarkime, kad klientai atvyksta į aptarnavimo stotį pagal Puasono procesą su greičiu $\lambda > 0$ ir yra iš karto aptarnaujami. Tegul jų aptarnavimo laikai yra vienodai pasiskirstę a.d., nepriklausomi tarpusavyje ir nepriklausomi nuo Puasono proceso bei turi pasiskirstymo funkciją $G(x)$. Rasti klientų, esančių aptarnavimo stotyje momentu t, skaičiaus skirstinį.

Sprendimas. Nagrinėjama aptarnavimo sistema $M/G/\infty$. Tegul $X(t)$ yra tiriamasis a.d. Įvesdami sąlygą, gauname

$$P(X(t) = j) = \sum_{n=0}^{\infty} P\Big(X(t) = j \,|\Pi(t) = n\Big) e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad j = 0, 1, \ldots.$$

Sąlygine tikimybe aprašomi j klientų, o iš viso jų yra n. Taigi, galime pasinaudoti binominiu dėsniu. Gauname

$$P\Big(X(t) = j \,|\Pi(t) = n\Big) = \begin{cases} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}, & j = 0, 1 \ldots, n \\ 0, & j > n. \end{cases}$$

Čia p yra tikimybė, kad vienas klientas yra aptarnaujamas momentu t.

Raskime p. Nagrinėdami tik tą vieną klientą, turime $\Pi(t) = 1$. Prisimename, kad esant sąlygai $\Pi(t) = 1$, to kliento atvykimo laikas yra tolygusis a.d. U su pastovia tankio funkcija $f(x) = 1/t$, kai $x \in [0, t]$. Todėl

$$\begin{aligned} p &= P(\textit{klientas yra aptarn. laiko momentu } t) \\ &= \mathbf{E}\Big(P\Big(\textit{klientas yra aptarn. laiko momentu } t \,|U\Big)\Big) \\ &= \int_0^t P\Big(\textit{klientas yra aptarn. laiko momentu } t \,|U = x\Big) \frac{dx}{t}. \end{aligned}$$

Pasinaudodami žinomu aptarnavimo laiko skirstiniu, skaičiuojame tikimybę po integralo ženklu. Klientas dar stotyje, vadinasi, jo aptarnavimo laikas buvo ne trumpesnis už $t - x$ ir tokio įvykio tikimybė lygi $1 - G(t - x)$. Taigi,

$$p = \int_0^t (1 - G(t-x))\frac{dx}{t}.$$

Įstatę šią formulę į aukščiau išvestą lygybę, gauname

$$\begin{aligned} P(X(t) = j) &= \sum_{n=j}^{\infty} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t p)^j}{j!} \sum_{n=j}^{\infty} \frac{(\lambda t(1-p))^{n-j}}{(n-j)!} = e^{-\lambda t p} \frac{(\lambda t p)^j}{j!}. \end{aligned}$$

Čia $j = 0, 1, \ldots,$ o p yra anksčiau apskaičiuota tikimybė.

21. Patikimumo teorijos uždavinys

Sakant, kad procesai $N_1(t), N_2(t), \ldots, t \in T$, yra nepriklausomi, turima omenyje, kad bet kokiam $k \geq 1$, bet kokiom Borelio aibėms $A_{ij_i} \subset \mathbb{R}$ ir bet kokiems laiko momentams $t_{ij_i} \in T$ ir $1 \leq i \leq k$, įvykių šeima

$$N_1(t_{1j_1}) \in A_{1j_1}, \quad \ldots, \quad N_i(t_{ij_i}) \in A_{ij_i}, \quad \ldots, \quad N_k(t_{kj_k}) \in A_{kj_k}$$

yra nepriklausoma.

Problema. *Žinoma, kad nekokybiškos detalės aparatūroje laiko intervale $t > 0$ sukelia nemalonius įvykius, pasiskirsčiusius pagal Puasono su greičiais $\lambda_i > 0$ procesus. Tarkime, kad jie yra nepriklausomi. Atlikus testavimą, vis tiek išlieka brokuotų detalių. Ar galima, pagal testo rezultatus įvertinti likusių nekokybiškų detalių tikimybes?*

Kokį dydį reiktų vertinti? Tegul

$$\psi_i(t) = \mathbf{1}\{\Pi_i(t) = 0\}$$

yra indikatorius įvykio, kad po testo i-oji brokuota detalė nesukėlė pasekmių ir neišryškėjo, $i \geq 1$. Tada

$$P\Big(\psi_i(t) = 1\Big) = P(\Pi_i(t) = 0) = \mathrm{e}^{-\lambda_i t} = 1 - \mathrm{P}\Big(\Pi_i(t) = 0\Big).$$

Čia $\Pi_i(t)$ - Puasono procesas, kurio greitis yra λ_i. Natūralus žinotinas dydis yra sumos

$$\Lambda(t) = \sum_i \lambda_i \psi_i(t)$$

vidurkis.

Po testo matome tik blogų detalių poveikį. Tarkime, $M_j(t)$ yra skaičius defektuotų detalių, kurios sukėlė j pasekmių iki laiko t, o $X_i(t)$ - indikatorius, kad i brokuota detalė per tą patį laikotarpį sukėlė lygiai vieną įvykį. Tada

$$P\Big(X_i(t)=1\Big)=P(\Pi_i(t)=1)=\lambda_i t \mathrm{e}^{-\lambda_i \mathrm{t}}=1-\mathrm{P}\Big(\mathrm{X_i(t)=0}\Big).$$

Turime

$$\mathbf{E}(M_1(t))=\mathbf{E}\Big(\sum_i X_i(t)\Big)=\sum_i \lambda_i t e^{-\lambda_i t}.$$

Antra vertus,

$$\mathbf{E}\Big(\Lambda(t)\Big)=\mathbf{E}\Big(\sum_i \lambda_i\psi_i(t)\Big)=\sum_i \lambda_i P\Big(\Pi(t)=0\Big)=\sum_i \lambda_i e^{-\lambda_i t}.$$

Vadinasi,

$$\mathbf{E}\Big(\Lambda(t)-\frac{M_1(t)}{t}\Big)=0$$

ir dydis $M_1(t)/t$ gali būti nežinomo $\Lambda(t)$ nepaslinktoji statistika (įvertinys).

Jos kokybė? Vertinkime

$$\mathbf{V}ar\Big(\Lambda(t)-\frac{M_1(t)}{t}\Big).$$

Prisimename, kad

$$\mathbf{V}ar(X-Y)=\mathbf{V}ar(X)+\mathbf{V}ar(Y)-2\mathbb{C}ov(X,Y),$$

čia

$$\mathbb{C}ov(X,Y)=\mathbf{E}(XY)-\mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$$

yra a.d. kovariacija.

Taikome šias formules. Gauname

$$\begin{aligned}\mathbf{V}ar\Big(\Lambda(t)-\frac{M_1(t)}{t}\Big) &= \sum_i \mathbf{V}ar\Big(\lambda_i\psi_i(t)-X_i(t)/t\Big)\\ &= \sum_i\Big(\lambda_i^2\mathbf{V}ar\Big(\psi_i(t)\Big)+\frac{1}{t^2}\mathbf{V}ar\Big(X_i(t)\Big)-2\frac{\lambda_i}{t}\mathbb{C}ov\Big(\psi_i(t),X_i(t)\Big)\Big)\\ &= \sum_i\Big(\lambda_i^2 e^{-\lambda_i t}(1-e^{-\lambda_i t})\\ &\quad+\frac{1}{t^2}\lambda_i t e^{-\lambda_i t}(1-\lambda_i t e^{-\lambda_i t})+2\frac{\lambda_i}{t}e^{-\lambda_i t}\lambda_i t e^{-\lambda_i t}\Big).\end{aligned}$$

Čia pasinaudojome lygybe $\psi_i(t)X_i(t)=0$. Sutvarkę reiškinį gauname

$$\begin{aligned}\mathbf{V}ar\Big(\Lambda(t)-\frac{M_1(t)}{t}\Big) &= \sum_i\Big(\lambda_i^2 e^{-\lambda_i t}+\frac{\lambda_i}{t}e^{-\lambda_i t}\Big)\\ &= \sum_i \lambda_i^2 e^{-\lambda_i t}+\frac{\mathbf{E}\Big(M_1(t)\Big)}{t^2}=\frac{1}{t^2}\mathbf{E}\Big(2M_2(t)+M_1(t)\Big).\end{aligned}$$

Čia pasinaudojome lygybėmis

$$M_2(t) = \sum_j \mathbf{1}\{\Pi_j(t) = 2\}$$

ir

$$\mathbf{E}M_2(t) = \sum_j P\Big(\Pi_j(t) = 2\Big) = (1/2)(\lambda_j t)^2 \mathrm{e}^{-\lambda_j t}.$$

Taigi, ir dispersija, charakterizuojanti testo kokybę, gali būti įvertinta iš jo rezultatų.

22. Puasono procesų sumos

Pirmasis teiginys yra nesunkiai patikrinamas.

1 teorema. *Jei* $\Pi_i(t)$, $1 \le i \le r$ *yra nepriklausomi Puasono procesai su greičiais* $\lambda_i > 0$, *tai jų suma* $\Pi(t) = \Pi_1(t) + \cdots + \Pi_r(t)$ *irgi yra Puasono procesas, kurio greitis yra* $\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_r$.

Įrodykite savarankiškai.

Žymiai įdomesnis yra atvirkštinis teiginys.

2 teorema. *Tarkime, kad įvykių, kuriuos skaičiuoja Puasono procesas* $\Pi(t)$ *su parametru* $\lambda > 0$, *pasirodymo metu mes galime juos skirstyti į* r *klasių su tikimybėmis* p_i, *nepriklausomai nuo kitų įvykių. Jei* $\Pi_i(t)$ *yra procesas, skaičiuojantis* i*-os klasės įvykius, tai jis irgi yra Puasono, jo parametras yra* $\lambda_i = p_i\lambda$, *be to,* $\Pi_i(t)$, $1 \le i \le r$, *- nepriklausoma procesų šeima.*

Įrodymas. Paprastumo dėlei imsime atvejį $r = 2$. Tada $p_1 = p$, o $p_2 = q = 1 - p$. Aišku, kad $\Pi(t) = \Pi_1(t) + \Pi_2(t)$. Nagrinėjame dvimatį skirstinį

$$P\Big(\Pi_1(t) = k, \Pi_2(t) = m\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} P\Big(\Pi_1(t) = k, \Pi_2(t) = m \,|\Pi(t) = n\Big) P(\Pi(t) = n).$$

Čia ir toliau $k, m \ge 0$. Pastebėkime, kad šios tikimybės yra nenulinės tik atveju, kai $n = k + m$. Tada

$$P\Big(\Pi_1(t) = k, \Pi_2(t) = m \,|\Pi(t) = k + m\Big) P(\Pi(t) = k + m) = P\Big(\Pi_1(t) = k, \Pi_2(t) = m \,|\Pi(t) = k + m\Big) e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{k+m}}{(k+m)!}.$$

Esant sąlygai po tikimybės ženklu, iš $k+m$ įvykių k yra pirmo tipo. Pasinaudoję binominiu skirstiniu, gauname

$$P\Big(\Pi_1(t) = k, \Pi_2(t) = m \,|\Pi(t) = k + m\Big) = \binom{k+m}{k} p^k q^m.$$

Taigi,

$$P\Big(\Pi_1(t) = k, \Pi_2(t) = m\Big) = \binom{k+m}{k} p^k q^m e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{k+m}}{(k+m)!}$$

$$= e^{-\lambda p t} \frac{(\lambda p t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda q t} \frac{(\lambda q t)^m}{m!}.$$

Matome, kad nagrinėjami procesai yra nepriklausomi. Susumavę pagal $m \geq 0$, randame pirmojo proceso skirstinį:

$$P\Big(\Pi_1(t) = k\Big) = \sum_{m=0}^{\infty} P\Big(\Pi_1(t) = k, \Pi_2(t) = m\Big)$$

$$= e^{-\lambda p t} \frac{(\lambda p t)^k}{k!}.$$

Vadinasi, $\Pi_1(t)$ yra Puasono procesas, o jo greitis lygus λp. Taip pat pasielgę su $\Pi_2(t)$, baigiame teoremos įrodymą.

Patikrinkite teoremą, kai r yra bet koks natūrinis skaičius.

Taikydami šią teoremą, neskubėkime daryti klaidingų išvadų. Panagrinėkime pavyzdį. Jei į parduotuvę žmonės atvyksta pagal Puasono procesą, o moterų ir vyrų tikimybės yra vienodos, tai iš fakto, kad per pirmas 10 valandų atėjo 100 vyrų, neišplaukia, kad per tą patį laiką turėjo ateiti ir 100 moterų. Netgi atėjusių moterų vidurkis nebus 100.

Paprasta UŽDUOTIS Emigrantai į Airiją atvyksta pagal Puasono procesą, kurio greitis 10 žmonių per savaitę. Lietuviai sudaro 1/12 visų imigrantų, atvykstančių į šią šalį. Kokia tikimybė, kad per keturis sekančius mėnesius neatvyks joks lietuvis?

Pavyzdys. Masinio aptarnavimo teorijos uždavinyje, tirdami sistemą $M/G/\infty$, esame radę klientų dar esančių stotyje skirstinį. Raskime klientų, kurie jau yra aptarnauti momentu t vidurkį.

Sprendimas. Klientai atvyksta pagal Puasono procesą! Anksčiau buvome radę dar aptarnaujamų klientų skirstinį. Jo vidurkis buvo $\lambda p t$, čia

$$p = \frac{1}{t} \int_0^t (1 - G(t-x))dx,$$

o $G(x)$ - aptarnavimo laiko skirstinio funkcija. Atvykę klientai skirstosi į dvi klases, aptarnautus ir dar ne, tai pasinaudoję ką tik išvestu teiginiu, kad abu klientų srautai yra Puasono, randame, kad ieškomasis vidurkis lygus

$$\lambda t - \lambda p t = \lambda \int_0^t G(t-x)dx = \lambda \int_0^t G(y)dy.$$

Kai kada nagrinėjamą uždavinį yra patogu įvilkti į Puasono proceso rūbą. Tai vadinama puasonizacija.

Kolekcionieriaus problema. *Kolekcionierius nori surinkti m tipų monetų kolekciją. Kiekvieną kartą, kai jis randa kokią, su tikimybe p_i, $1 \leq i \leq m$, ji yra* *i-ojo tipo ir tai nepriklauso nuo praeities. Kiek vidutiniškai jam teks nupirkti monetų, kad susidarytų geidžiamas komplektas?*

Sprendimas. Galima įsivaizduoti, kad monetos kolekcionieriui pasiūlomos pagal Puasono procesą $\Pi(t)$ su greičiu 1. Kitokio parametro atveju skaičiavimai būtų tie patys. Tada i-ojo tipo moneta patenka pas jį pagal Puasono procesą $\Pi_i(t)$ su greičiu p_i. Jei $X(i)$ yra pirmos i-o tipo monetos laukimo laikas (jis yra eksponnentinis a.d. su parametru p_i), tai visas laukimo laikas iki pilnos kolekcijos bus

$$X := \max_i X(i).$$

Jei $T_1, T_2, \ldots$ yra laiko tarpai tarp monetų patekimo ir Y yra visas supirktų monetų skaičius, tai

$$X = \sum_{k=1}^{Y} T_k.$$

Modelyje T_k yra vienodai pasiskirstę eksponentiniai dydžiai su vidurkiu 1. Tad, $\mathbf{E}(T_k) = 1$, be to,

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y)\mathbf{E}(T_1) = \mathbf{E}(Y).$$

Kadangi

$$P(X \leq t) = P(\max_i X(i) < t) = \prod_{i=1}^{m} \left(1 - e^{-p_i t}\right),$$

tai **atsakymas** yra toks:

$$\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(X) = \int_0^\infty P(X > t)dt = \int_0^\infty \left(1 - \prod_{i=1}^{m} \left(1 - e^{-p_i t}\right)\right) dt.$$

Atskiru atveju, kai $p_i = 1/m$, $1 \leq i \leq m$, gautume

$$\mathbf{E}(Y) = m \sum_{i \leq m} 1/i \sim m \log m, \quad m \to \infty.$$

23. Bendresni Puasono procesai

Skaičiuojančiųjų procesų prieaugiai yra nebūtinai stacionarūs. Nepriklausomų prieaugių procesas $\Pi(t)$ su skirstiniu

$$P(\Pi(t) = m) = e^{-g(t)} \frac{g^m(t)}{m!}, \quad m = 0, 1, \ldots, \ t > 0,$$

čia $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ yra funkcija, tenkinanti sąlygą $g(0) = 0$, vadinamas *nehomogeniniu Puasono procesu.* Jei $g(t)$ yra tolydi funkcija, tai procesas stochastiškai tolydus. Atsisakius stacionarumo sąlygos, kai šuoliai yra nedideli, iš skaičiuojančiųjų procesų klasės galima išskirti nehomogeninius Puasono procesus.

Teorema. *Tegul $N(t)$ yra skaičiuojantysis procesas su nepriklausomais prieaugiais, o jo šuolių didumas yra 1, $N(0) = 0$ bei kiekvienam fiksuotam $t \geq 0$*

šuolio momentu t tikimybė yra nulinė. Tada egzistuoja tokia tolydi funkcija $g(t)$, kad kiekvienam fiksuotam t a.d. $N(t)$ skirstinys yra Puasono su parametru $g(t)$.

Be įrodymo.

Funkcija $g(t)$ apibrėžia proceso baigtiniamačius skirstinius ir tuo pačiu patį procesą. Jei

$$g(t) = \int_0^t \lambda(s)ds,$$

tai funkcija $\lambda(s)$ vadinama proceso $\Pi(t)$ *intensyvumu*. Homogeninio proceso atveju intensyvumas lygus jo greičiui.

Homogeninį Puasono procesą galima įsivaizduoti kaip atsitiktinį taškų realioje tiesėje rinkinį. Tai bus tiesiog įvykių, kuriuos skaičiuoja tas procesas, pasirodymo momentai. Skaičius taškų intervale $(a, b]$ lygus $\Pi(b) - \Pi(a)$ turi Puasono skirstinį su parametru $\lambda(b-a)$. Taškus galime įsivaizduoti ir erdvėje. Todėl yra įvedama taškinių procesų klasė.

Apibrėžimas. Atsitiktinė aibė taškų Euklido erdvėje $\mathbb{R}^d$ vadinama *taškiniu procesu*, jei taškų, esančių aprėžtoje mačioje aibėje $A \subset \mathbb{R}^d$, skaičius $N(A)$ yra baigtinis su tikimybe vienetas.

Teorema. *Tegul $N(A)$ yra taškinis procesas Euklido erdvėje $\mathbb{R}^d$ ir turi savybes:*

(*) kiekvienam poromis nesikertančių poaibių rinkiniui A_i a.d. šeima $\{N(A_i)\}$ yra nepriklausoma;

(**) a.d. $N(A)$ skirstiniai priklauso tik nuo aibės A tūrio $|A|$.

Tada egzistuoja toks $\lambda \in [0, \infty)$, kad a.d. $N(A)$ turi Puasono skirstinį su parametru $\lambda|A|$.

Be įrodymo.

Apibrėžimas. Jei $\Pi(t)$ yra Puasono procesas su greičiu λ, o X_k - nepriklausomų a.d., turinčių tą patį skirstinį $F(x)$, šeima, nepriklausoma nuo $\Pi(t)$, tai suma

$$X(t) = \sum_{k \le \Pi(t)} X_k$$

yra vadinama *sudėtiniu Puasono procesu.*

Jo parametru laikoma pora $(F(x), \lambda)$. Iš anksčiau turėtų teiginių išplaukia formulės

$$\mathbf{E}(X(t)) = \mathbf{E}(N(t))\,\mathbf{E}(X_1) = \lambda t\mathbf{E}(X_1), \qquad Var(X(t)) = \lambda t\mathbf{E}(X_1^2).$$

24. Impulsų amplitudės modelis

Ir sudėtiniai Puasono procesai neaprašo visų taikomųjų uždavinių. Panagrinėkime pavyzdį.

UŽDUOTIS Tarkime, kad elektros impulsai patenka į skaitiklį pagal Puasono procesą su greičiu $\lambda > 0$, bet jų amplitudės determinuotai eksponentiškai mažėja, *t.y. A didumo amplitudė po laiko τ bus lygi $Ae^{-\alpha\tau}$. Tarkime, kad pradinės amplitudės yra vienodai pasiskirstę a.d., nepriklausomi tarpusavyje ir nepriklausomi nuo Puasono proceso bei turi pasiskirstymo funkciją $G(x)$. Rasti visų impulsų amplitudžių momentu t sumos skirstinio charakteristinę funkciją ir vidurkį.*

Sprendimas. Jei S_n yra n-o impulso, kurio amplitudė yra A_n, patekimo momentas, tai tiriama amplitudžių suma lygi

$$A(t) := A(t; S_1, \dots, S_{\Pi(t)}) = \sum_{n=1}^{\Pi(t)} A_n e^{-\alpha(t-S_n)}.$$

Nors dėmenų skaičius čia yra $\Pi(t)$, patys dėmenys yra priklausomi nuo šio proceso, nes turi a.d. S_n.

Reikia rasti

$$\Phi(u) := \mathbf{E}\Big(e^{iuA(t)}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}\Big(e^{iuA(t)}\,|N(t) = n\Big) P(\Pi(t) = n).$$

Toliau naudojamės 4 teorema. Jei $U_1, U_2, \dots, U_n$ yra nepriklausomi a.d., tolygiai pasiskirstę intervale [0,t], o $U_{i_1} \leq \dots \leq U_{i_n}$ - sutvarkytoji statistika, tai pagal užpraeito skyrelio 4 teoremą

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\Big(e^{iuA(t)}\,|\Pi(t) = n\Big) &= \mathbf{E}\Big(\exp\{iuA(t; U_{i_1}, \dots, U_{i_n})\}\Big) \\ &= \mathbf{E}\Big(\exp\{iuA(t; U_1, \dots, U_n)\}\Big). \end{aligned}$$

Paskutinė lygybė teisinga dėl to, kad iš lygybės

$$\sum_{j=1}^{n} U_{i_j} = \sum_{i=1}^{n} U_i$$

išplaukia

$$A(t; U_{i_1}, \dots, U_{i_n}) = A(t; U_1, \dots, U_n)$$

ir vietoje integravimo srityje

$$0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq 1/t$$

pagal matą

$$(n!/t^n)\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n$$

galime imti integralą srityje

$$0 \leq x_1 \leq 1/t, \dots, 0 \leq x_n \leq 1/t$$

pagal matą

$$(1/t^n)\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n.$$

Taigi

$$\mathbf{E}\Big(e^{iuA(t)}\,|\Pi(t) = n\Big) = \mathbf{E}\left(\exp\left\{iu\sum_{j=1}^{n} A_j e^{-\alpha(t-U_j)}\right\}\right).$$

Pažymėkime $Z_j = A_j e^{-\alpha(t-U_j)}$. Šie a.d. yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę, vadinasi,

$$\mathbf{E}\Big(e^{iuA(t)}\,|\Pi(t)=n\Big) = \mathbf{E}\Big(\exp\Big\{iu\sum_{j=1}^{n} Z_j\Big\}\Big) = \Big[\mathbf{E}\Big(e^{iuZ_1}\Big)\Big]^n.$$

Skaičiuodami čia esančią charakteristinę funkciją vėl vidurkiname:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\Big(e^{iuZ_1}\Big) &= \mathbf{E}\Big(\mathbf{E}\Big(e^{iuZ_1}\,|U_1\Big)\Big)\\
&= \int_0^t \mathbf{E}\Big(\exp\Big\{iuA_1 e^{-\alpha(t-U_1)}\Big\}\,|U_1=y\Big)\,\frac{dy}{t}\\
&= \int_0^t \mathbf{E}\Big(\exp\Big\{iuA_1 e^{-\alpha(t-y)}\Big\}\Big)\,\frac{dy}{t}\\
&= \frac{1}{t}\int_0^t \phi_A\Big(ue^{-\alpha(t-y)}\Big)dy.
\end{aligned}$$

Čia $\phi_A(v)$ yra a.d. A_1 charakteristinė funkcija. Surinkę gautas lygybes, gauname

$$\begin{aligned}
\Phi(u) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\Big[\frac{1}{t}\int_0^t \phi_A\Big(ue^{-\alpha(t-y)}\Big)dy\Big]^n\\
&= e^{-\lambda t}\exp\Big\{\lambda\int_0^t \phi_A\Big(ue^{-\alpha y}\Big)dy\Big\}.
\end{aligned}$$

Momentai skaičiuojami diferencijuojant. Gauname

$$\mathbf{E}(A(t)) = \Phi'(0)/i = \lambda\int_0^t \frac{\phi_A(0)}{i}\,e^{-\alpha y}dy = \frac{\lambda\mathbf{E}(A_1)}{\alpha}(1-e^{-\alpha t}).$$

Užduotis atlikta.

Ketvirtoji dalis. **MATEMATINĖS STATISTIKOS ELEMENTAI**

25. Statistinis modelis

Stebima populiacija (tiksliau, kokia nors viena jos savybė; mes ją įsivaizduokime kaip vienamatį dydį) ir po n stebėjimų metu gaunamas vektorius $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Jį traktuojame kaip atsitiktinio vektoriaus $X = (X_1, \ldots, X_n)$, vadinamo *imtimi*, realizacija. Čia $X_1, \ldots, X_n$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę a.d.; tą pabrėžiant dažnai priduriama *paprastoji imtis* ir jos *realizacija* atitinkamai. A.d. yra apibrėžti tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ir vektorius X indukuoja tikimybinį matą P_X mačioje erdvėje $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Tai a.v-iaus skirstinys, kuris nėra visiškai žinomas. Problema: kaip gauti informaciją apie jį, iš realizacijų. Bet kai ką galime nuspėti: pavyzdžiui, skirstinys P_X priklauso skirstinių šeimai, pvz., priklauso nuo parametro, tegu θ ir jis gali būti iš kokios nors aibės Θ. Todėl studijų objektu tampa skirstinių šeima

$$\{P_X(\cdot|\theta),\ \theta \in \Theta\}$$

arba t.erdvių šeima

$$\Big\{\Big(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), P_X(\cdot|\theta)\Big),\ \theta \in \Theta\Big\}.$$

Šios šeimos vadinamos eksperimento ar stebėjimo *statistiniais modeliais*. Jis nusako, kokios imties skirstinių klasės duomenis mes analizuosime. Dažnai sakoma *imtis imama iš skirstinio* $P_X(\cdot|\theta)$. Pats θ gali būti ir kokybinis apibudinimas, nebūtinai skaitmeninis ar vektorinis dydis. Pastaraisiais atvejais sakysime, kad analizuojamas *parametrinis modelis*. Puasono skirstinių šeima turi vienamatį parametrą $\lambda > 0$, normalieji skirstiniai - dvimatį $(\mu, \sigma^2) \in (\mathbb{R}, \mathbb{R}_{>}0)$, kurie atitinka vidurkį ir dispersiją ir t.t.

Dažniausiai parametras įtraukimas į žymenis:

$$P_X(B|\theta), \quad F_X(x|\theta), \quad f_X(x|\theta),$$

arba

$$P_X(B;\theta), \quad F_X(x;\theta), \quad f_X(x;\theta),$$

kai svarbu pabrėžti, apie kokią imtį X kalbame. Jei imtis n-matė, tai čia atitinkamai yra vektoriaus skirstinys, jo pasiskirstymo funkcija ir jo tankio funkcija, o $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ir $x \in \mathbb{R}^n$.

Trumpesnis būdas akcentuoti parametrą jį rašant indekso vietoje.

$$P_\theta(\cdot), \quad F_\theta(x), \quad f_\theta(x).$$

Atsargiai(!) Šie žymenys vartojami ir vienamačiu atveju, t.y., ir paprastosios imties bet kurios koordinatės skirstiniui apibudinti.

Dažnai statistiniuose tyrimuose aiškinamasi, ar objektas turi savybę ar ne. Vadinasi, imčių modeliuose bus a.vektoriai, kurių koordinatės įgis tik dvi reikšmes 0 arba 1. Jie bus apibrėžiami diskrečių tikimybių rinkiniais.

1 *pavyzdys.* Nagrinėkime n Bernulio eksperimentų, tikėdamiesi išaiškinti nežinomą sėkmės tikimybę p. Vadinasi, imtis paprastoji, tai vektorius X, sudarytas iš n nepriklausomų Bernulio a.d. $X_i = \mathbf{Be}(p)$, o modelis $P_X(\cdot|\theta)$ – tikimybių šeima

$$P(X = x|p) = p^{x_1+\cdots+x_n}(1-p)^{n-(x_1+\cdots+x_n)}: \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n,$$

čia $0 < p < 1$.

Pabrėždami, kad imtis nebūtinai yra paprastoji imkime kitokį stebėjimų statistinį modelį.

2 *pavyzdys.* Tarkime atrankinei kontrolei pateko N gaminių partija, kurios defektinių gaminių skaičius $M \in \{0, 1, \ldots, N\}$ yra nežinomas. Atsitiktinai negrąžinant paimama $n < N$ gaminių ir nustatoma, kurie yra defektiniai. Tegul $X_i = 1$, jei i-tasis gaminys yra defektinis ir $X_i = 0$ priešingu atveju, čia $i \leq n$. Vėl tiriame imtį $X = (X_1, \ldots, X_n)$ ir jos realizacijas $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n$. Atskiros koordinatės X_i skirstinys yra Bernulio $\mathbf{Be}(M/N)$ (arba binominis $\mathbf{Bi}(1, M/N)$), tačiau imtis $X = (X_1, \ldots, X_n)$ nėra paprastoji. Dabar modelis $P_X(\cdot|\theta)$ nusakomas tikimybėmis

$$\begin{aligned} P(X = x|M) &= P\Big(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n|M\Big) \\ &= \frac{M\cdots(M-m+1)\cdot(N-M)\cdots(N-M-(n-m)+1)}{N\cdots(N-n+1)}, \end{aligned} \tag{25.1}$$

čia x perbėga visus vektorius iš $\{0,1\}^n$, kuriuose yra tiksliai m,

$$\max\{0, M-N+n\} \leq m \leq \min\{M, n\},$$

vienetų. Imties vektoriaus koordinatės yra **priklausomi a.d.**! Todėl ji nėra paprastoji.

Apibrėžimas. *Jei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$ yra mačioji funkcija, o X yra imtis, tai $T(X)$ vadinama statistika, o imties reikšmė $T(x)$ – statistikos realizacija.*

Sprendimai dėl modelio $\mathcal{P} := (P_\theta,\ \theta \in \Theta)$ priimami turint statistiką, vadinamą sprendimų funkcija $\delta(X)$. Tegul $\mathcal{D}$ yra jos reikšmių aibė. Pagaliau, norėdami palyginti sprendimus, turime turėti nuostuolių funkciją $L(\theta, d) \geq 0$, čia $\theta \in \Theta$, o $d \in \mathcal{D}$. Pvz., vertinant vienamatį parametrą tai galėtų būti $L(\theta, d) = (d-\theta)^2$, o $d = T(X)$ - statistikos, aproksimuojančios θ, reikšmė. Dažniausiai ieškoma taisyklės, minimizuojančios vidurkį

$$\int_{\mathbb{R}^n} L(\theta, \delta(X)) P_\theta(dx) = \mathbf{E}L(\theta, \delta(X)) =: R(\theta, \delta)$$

koks bebūtų $\theta \in \Theta$. Tai vadinamoji *rizikos funkcija.*

Įsidėmėkime: Parametrinės statistikos uždavinį sąlygoja trejetas $(\mathcal{P}, \mathcal{D}, L)$ – stebėjimų statistinis modelis, sprendimų aibė ir nuostolių funkcija.

Štai trejetas uždavinių tipų ir sprendimų priėmimai juos sprendžiant.

1. *Hipotezių tikrinimo uždavinys.* Keliama hipotezė, kad imties X skirstinys P_X priklauso siauresnei negu $\mathcal{P} = (P_\theta,\ \theta \in \Theta)$ klasei $\mathcal{P}_0 = (P_\theta,\ \theta \in \Theta_0)$, čia $\Theta_0 \subset \Theta$. Tada natūralu turėti dvi sprendimų funkcijos reikšmes $\mathcal{D} = \{d_0, d_1\}$, čia d_0 reikštų, kad hipotezė teisinga, o d_1, kad teisinga *alternatyva* – $P_X \in \mathcal{P} \backslash \mathcal{P}_0$.

Atskiru atveju, galėtų būti $\mathcal{P} = (N(\mu, \sigma^2) :\ \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0)$, o $\mathcal{P}_0 = (N(1, \sigma^2) : \sigma > 0)$. Sprendimų priėmimo taisyklė galėtų būti pagal normuoto skirtumo

$$\sqrt{n}|\overline{X} - 1|/s =: \Delta,$$

kuriame

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2, \quad s = \sqrt{s^2}.$$

Pasirinkę lygį c_n, hipotezę priimtume (sprendimas d_0), kai $\Delta < c_n$ ir priimtume (sprendimas d_1), jei $\Delta \geq c_n$.

Tai daryti natūralu, nes $\overline{X}$ reikšmės išsisklaidžiusios apie vidurkį. Čia įvestas s sumažina matavimų sklaidos įtaką.

2. *Pasikliovimo sričių konstravimo uždavinyje* ieškotume atsitiktinės srities $\mathcal{I}$, kuri su didele tikimybe uždengia parametro θ reikšmę. Tada sprendimai būtų priimami jei tikimybės

$$P_\theta(\theta \in \mathcal{I}) \geq q \geq 1 - \varepsilon$$

yra didelės.

Pasikliovimo intervalus normaliojo statistinio modelio atveju konstravote bakalauro studijose.

UŽDAVINIAI (V.Bagdonavičius ir J.Kruopis, Mat. Stat., 99–101 psl.).

1. Tegul turime dvi paprastąsias nepriklausomas imtis

$$(X_1, \ldots, X_{n_1}), \qquad (Y_1, \ldots, Y_{n_2}),$$

čia X_i, Y_j yra $\mathbf{Be}(p)$ a.d. Pažymėkime $U = X_1 + \cdots + X_{n_1}$ ir $V = Y_1 + \cdots + Y_{n_2}$. Užrašykite imties (U, V) statistinį modelį ir raskite statistikos

$$T = U/n_1 - V/n_2.$$

vidurkį ir dispersiją.

Sprendimas. Aišku, kad vektoriaus (U, V) koordinatės yra nepriklausomi $\mathbf{Bi}(n_1, p)$ ir $\mathbf{Bi}(n_2, p)$ a.d. Todėl statistinis modelis aprašomas tikimybėmis

$$P(U = m_1, V = m_2) = \binom{n_1}{m_1}\binom{n_1}{m_1} p^{m_1+m_2}(1-p)^{n_1-m_1+n_2-m_2},$$

$$0 \leq m_1 \leq n_1,\ 0 \leq m_2 \leq n_2,\ 0 < p < 1.$$

Be to, $\mathbf{E}T = 0$, $\mathbf{V}arT = p(1-p)(n_1 + n_2)(n_1 n_2)^{-1}$.

2. Aukščiau pateiktame 2 pavyzdyje apie atranką negrąžinant, kai statistinis modelis buvo aprašytas (25.1), raskite statistikos $S = X_1 + \cdots + X_n$ skirstinį ir jo vidurkį. Jei sprendimo funkcija yra $d_0 := \mathbf{1}\{S \le c\}$. Kaip partijos priėmimo tikimybė priklauso nuo M?

Sprendimas. Tarp tikimybių (25.1) yra daug vienodų. Atsižvelgdami į tai gauname S skirstinį:

$$P(S = m) = \binom{N}{n}^{-1} \binom{M}{m} \binom{N-M}{n-m} =: h(m|N, M, n)$$

(hipergeometrinis skirstinys). Partijos priėmimo tikimybė yra

$$\sum_{0 \le m \le c} h(m|N, M, n).$$

3. Objektų, turinčių savybę A, dalys generalinėse aibėse yra π_1, ...,π_k.

a) Atsitiktinai pasirenkama generalinė aibė ir iš jos imama grąžinant n didumo imtis. Sudarykite statistinį modelį.

b) Atsitiktinai pasirenkama generalinė aibė ir iš jos atsitiktinai imamas grąžinant vienas elementas. Po to ši procedūra kartojama n kartų. Sudarykite statistinį modelį.

c) Abiem atvejais raskite statistikos $S/n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$ vidurkį ir dispersiją.

Sprendimas. a) Tikimybė pasirinkti generalinę aibę, pvz., r-ąją, yra $1/k$. Imties skirstinys X (modelis) apibrėžiamas tikimybėmis

$$P\Big(X = (j_1, \dots, j_n)\Big) = \frac{1}{k} \sum_{r=1}^{k} \pi_r^{j_1+\cdots+j_n} \Big(1 - \pi_r\Big)^{n-(j_1+\cdots+j_n)},$$

čia $j_i \in \{0, 1\}$, $1 \le i \le n$ ir $0 < \pi_r < 1$, kai $1 \le r \le k$.

b)

$$P\Big(X = (j_1, \dots, j_n)\Big) = \prod_{i=1}^{n} \left[\Big(\frac{1}{k}\Big) \sum_{r=1}^{k} \pi_r^{j_i} \Big(1 - \pi_r\Big)^{1-j_i} \right], \tag{25.2}$$

čia $j_i \in \{0, 1\}$, $1 \le i \le n$ ir $0 < \pi_r < 1$, kai $1 \le r \le k$.

c) *Atsakymas atveju a).*

$$E(S/n) = \bar{\pi} := \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} \pi_r, \qquad V(S/n) = \frac{1}{nk} \sum_{r=1}^{n} \pi_r(1 - \pi_r);$$

Atveju b) detalizuokime. Iš (25.2) matome, kad vienodų tikimybių, kai $j_1 + \cdots + j_n = m$, yra $\binom{n}{m}$. Atskyrę sandaugose daugiklius su $j_i = 1$ ir $j_i = 0$, gauname

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(S/n) &= \frac{1}{nk^n}\sum_{m=1}^{n} m\binom{n}{m}\prod_{j_i=1}\left[\sum_{r=1}^{k}\pi_r\right]\prod_{j_i=0}\left[\sum_{r=1}^{k}\Big(1-\pi_r\Big)\right]\\ &= \frac{1}{nk^n}\sum_{m=1}^{n} m\binom{n}{m}(k\bar\pi)^m\Big(k-k\bar\pi\Big)^{n-m},\end{aligned}$$

nes pirmoje sandaugoje buvo m vienodų daugiklių, o antrojoje – $(n-m)$. Vadinasi,

$$\mathbf{E}(S/n) = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} m\binom{n}{m}\bar\pi^m(1-\bar\pi)^{n-m} = \bar\pi.$$

Pastaroji suma buvo binominio a.d. $\mathbf{Bi}(n,\bar\pi)$, padalyto iš n, vidurkis.

Atveju b) dispersija skaičiuojama panašiai: $V(S/n) = \frac{1}{n}\bar\pi(1-\bar\pi)$.

Kituose uždaviniuose panagrinėkime nuostolių ir rizikos funkcijas.

4 (2.28). Tiriama paprastoji imtis $X = (X_1,\dots,X_n)$, kai $X_i \sim \mathbf{Bi}(1,p)$ ir $p\in(0,1)$. Vertinant parametrą p naudojamasi kvadratine nuostolių funkcija $L(p,T(X)) = (p-T(X))^2$ ir statistika $T(X)$. Apskaičiuokite rizikos funkcijas, kai

a) $T(X) = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$;

b)

$$T_0(X) = \begin{cases} 0, & \text{jei daugiau negu pusė } X_i \text{ yra } 0;\\ 1, & \text{jei daugiau negu pusė } X_i \text{ yra } 1;\\ 1/2, & \text{jei tiksliai pusė } X_i \text{ yra } 0.\end{cases}$$

Sprendimas. a) Rizikos funkcija yra

$$R(p,T) = \int_{\mathbb{R}^n}\Big(p-\bar x\Big)^2 P_p(dx),$$

čia $\bar x = (1/n)(x_1+\dots+x_n)$, o $P_p(x)$ yra Bernulio a.d. sudaryto vektoriaus $X=(X_1,\dots,X_n)$ skirstinys. Todėl integralas yra suma pagal visus jo šuolius. Grupuodami pagal a.d. X_i, įgyjančių reikšmę 1, skaičių k, gauname

$$\begin{aligned}R(p,T) &= \sum_{k=0}^{n}\left(p-\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}(np-k)^2\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\\ &= \frac{1}{n^2}\mathbf{V}ar(X_1+\dots+X_n)\\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{V}arX_i = \frac{1}{n^2}np(1-p) = \frac{p(1-p)}{n}.\end{aligned}$$

Pakeliui įžiūrėjome, kad skaičiuojama suma yra a.d. sumos $S = X_1+\dots+X_n$ dispersija.

Sprendimas. b) Dabar rizikos funkcija yra

$$R(p,T_0) = \int_{\mathbb{R}^n} \Big(p - T_0(x)\Big)^2 P_p(dx) = p^2 P(S < n/2) + (1-p)^2 P(S > n/2)$$
$$+ \mathbf{1}\{n = 2m\}(1/2 - p)^2 P(S = m).$$

Čia aišku,

$$P(S \le u) = \sum_{0 \le k \le u} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad u \ge 0.$$

26. Empirinė pasiskirstymo fukcija

Statistinio modelio tyrimas remiasi imties a.d. X_i skirstinių klasės žinojimu, išskyrus, gal būt, aptariamąjį parametrą $\theta \in \Theta$. Kaip kyla mintys apie pačių dėsnių klasę? Jas atrandame tirdami imčių realizacijas. Jei $x = (x_1, \dots, x_n)$ yra paprastosios imties realizacija, tai galime apibrėžti funkciją

$$F_n(u) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{(-\infty,u]}(x_i), \quad u \in \mathbb{R}.$$

Apibrėžimas. Atsitiktinę funkciją

$$\widehat{F}_n(u) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{(-\infty,u]}(X_i)$$

vadiname *empirine pasiskirstymo funkcija*, o funkciją $F_n(u)$ – jos realizacija.

Aišku, kad $\widehat{F}_n(u)$ yra vienamatė statistika, kai u fiksuotas; ji skirta įvertinti imtį apibrėžiančią p.f-ą $F(u)$. Trumpumo dėlei pažymėkime $u \wedge v = \min\{u, v\}$, čia $u, v \in \mathbb{R}$.

Teorema 40. *Kokie bebūtų fiksuoti realieji skaičiai u ir v, turime*

$$\mathbf{E}\Big(\widehat{F}_n(u)\Big) = F(u), \qquad \mathbf{V}ar\Big(\widehat{F}_n(u)\Big) = \frac{1}{n} F(u)\Big(1 - F(u)\Big),$$
$$\mathbf{C}ov\Big(\widehat{F}_n(u), \widehat{F}_n(v)\Big) = \frac{1}{n}\Big[F(u \wedge v) - F(u)F(v)\Big].$$

Be to,

$$P\bigg(\widehat{F}_n(u) \to F(u), \quad kai\, n \to \infty\bigg) = 1. \tag{26.1}$$

Proof. A.d.

$$D_n(u) := \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{(-\infty,u]}(X_i)$$

turi skirstinį $\mathbf{Bi}(n, F(u))$. Todėl

$$\mathbf{E}\Big(\widehat{F}_n(u)\Big) = \frac{1}{n} \mathbf{E}\Big(D_n(u)\Big) = F(u)$$

ir

$$\mathbf{V}ar\Big(\widehat{F}_n(u)\Big) = \frac{1}{n^2}\mathbf{V}ar\Big(D_n(u)\Big) = \frac{1}{n}F(u)\Big(1 - F(u)\Big).$$

Skaičiuodami kovariaciją, pastebime, kad atveju $i \neq j$ a.d. $\mathbf{1}_{(-\infty,u]}(X_i)$ ir $\mathbf{1}_{(-\infty,v]}(X_j)$ yra nepriklausomi, o

$$\begin{aligned}
&\mathbf{C}ov\Big[\mathbf{1}_{(-\infty,u]}(X_i), \mathbf{1}_{(-\infty,v]}(X_i)\Big] \\
&= \mathbf{E}\Big[\mathbf{1}_{(-\infty,u\wedge v]}(X_i)\Big] - \mathbf{E}\Big[\mathbf{1}_{(-\infty,u]}(X_i)\Big]\mathbf{E}\Big[\mathbf{1}_{(-\infty,v]}(X_i)\Big] \\
&= F(u \wedge v) - F(u)F(v).
\end{aligned}$$

Dabar

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}ov\Big(\widehat{F}_n(u), \widehat{F}_n(v)\Big) &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{C}ov\Big[\mathbf{1}_{(-\infty,u]}(X_i), \mathbf{1}_{(-\infty,v]}(X_j)\Big] \\
&= \frac{1}{n}\Big[F(u \wedge v) - F(u)F(v)\Big].
\end{aligned}$$

Teoremos (26.1) sąryšis yra atskiras stipriojo didžiųjų skaičių dėsnio atvejis. □

Pastarąjį teiginį 1933 m. gerokai sustiprino V. Glivenka, įrodęs, kad konvergavimas yra tolygus atžvilgiu $u \in \mathbb{R}$.

Teorema 41. *Kokia bebūtų pasiskirstymo funkcija $F(u)$, turime*

$$P\left(\sup_{u\in\mathbb{R}}\Big|\widehat{F}_n(u) - F(u)\Big| \to 0\right) = 1.$$

Proof. Remsimės žinoma lema, kad skaičiai a.įvykių šeimai A_i, $i \geq 1$, tenkinančiai sąlygą $P(A_i) = 1$, galioja

$$P\left(\bigcap_i A_i\right) = 1.$$

Pradžioje pasinaudosime jau įrodytu faktu (26.1) dėl baigtinio skaičiaus u_k, $k = 1, \ldots, N$.

Tegul $\varepsilon > 0$ yra bet koks, ir fiksuokime tokius taškus

$$-\infty = u_0 < u_1 < \cdots < u_{N-1} < u_N = \infty,$$

kad

$$F(u_{k+1} - 0) - F(u_k) < \varepsilon, \quad 0 \leq k \leq N$$

ir $N \geq N_0(\varepsilon)$.

Kaip ir (26.1),

$$P\Big(\widehat{F}_n(u_k - 0) \to F(u_k - 0), \quad \text{kai } n \to \infty\Big) = 1.$$

su parinktuoju baigtiniu taškų u_k rinkiniu. Fiksuokime vieną realizaciją

$$F_n(\cdot) = \widehat{F}_n(\cdot, \omega)$$

ir įvertinkime skirtumų prieaugius, kai $u \in [u_k, u_{k+1})$:

$$F_n(u) - F(u) \le F_n(u_{k+1} - 0) - F(u_k) \le F_n(u_{k+1} - 0) - F(u_{k+1} - 0) + \varepsilon,$$

$$F_n(u) - F(u) \ge F_n(u_k) - F(u_{k+1} - 0) \ge F_n(u_k - 0) - F(u_k) - \varepsilon.$$

Todėl su bet kuriuo $\omega \in \Omega$

$$\begin{aligned}
&\sup_{u\in\mathbb{R}} \Big|\widehat{F}_n(u,\omega) - F(u)\Big| \\
&\le \max_{0\le k\le N} \max\Big\{\Big|\widehat{F}_n(u_k,\omega) - F(u_k)\Big|, \Big|\widehat{F}_n(u_k - 0,\omega) - F(u_k - 0)\Big|\Big\} + \varepsilon \\
&=: \Delta_{Nn}(\omega) + \varepsilon,
\end{aligned}$$

jei tik $N \ge N_0(\varepsilon)$. Jei $A_N := \{\omega : \ \Delta_{Nn}(\omega) < \varepsilon, \text{ kai } n \ge n_0(\varepsilon, N)\}$, tai parinkdami pakankamai didelį $n_0(\varepsilon, N)$, galime užtikrinti, kad $P(A_N) = 1$ koks bebūtų $N \ge N_n(\varepsilon)$. Vadinasi,

$$P\Big(\sup_{u\in\mathbb{R}} \Big|\widehat{F}_n(u,\omega) - F(u)\Big| \le 2\varepsilon\Big) \ge P\Big(\bigcap_{N\ge N_0} A_N\Big) = 1$$

Tikimybės atžvilgiu ε yra monotoniškos, todėl pereidami prie ribos, kai $\varepsilon \to 0$, baigiame įrodymą. □

A.Kolmogorovas žymiai sustiprino 41 teoremą.

Teorema 42. *Jei pasiskirstymo funkcija $F(u)$ yra tolydi, tai*

$$P\Big(\sqrt{n}\sup_{u\in\mathbb{R}} \Big|\widehat{F}_n(u) - F(u)\Big| \le y\Big) \to K(y) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k \mathrm{e}^{-2k^2y^2},$$

kai $y \ge 0$ ir $n \to \infty$.

Proof. Be įrodymo. □

Palyginkime su panašiu teiginiu, galiojančiu kiekvienam fiksuotam u.

Teorema 43. *Koks bebūtų fiksuotas u a.d.*

$$\sqrt{n}\Big(\widehat{F}_n(u) - F(u)\Big)$$

skirstinys konverguoja į normaliojo a.d. $N\Big(0, F(u)\Big(1 - F(u)\Big)\Big)$ skirstinį, jei $n \to \infty$.

Proof. Tai yra centrinės ribinės teoremos atskiras atvejis. Normuodami tik kvadratine šaknimi iš n, o ne iš visos dispersijos (žr. 40), negavome vienetinės ribinio dėsnio dispersijos. □

27. Pasiskirstymo funkcijų sąryšiai

Teorinėje analizėje itin svarbių statistikų pasiskirstymo funkcijos ar tankiai dažnai būna nelengvai randamos. Pavyzdžiui, Kolmogorovo teoremoje atsirado įdomus ribinis dėsnis. Pasitreniruokime analizuoti skirstinius ir jų sąryšius. Reikia prisiminti porą specialiųjų funkcijų:

Oilerio gamma funkciją –

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} \mathrm{e}^{-x} dx,$$

apibrėžtą visiems $\Re z > 0$ ir analiziškai pratęsiamą į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus sveikuosius neteigiamus skaičius;

Beta funkciją –

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt, \quad \Re x > 0,\ \Re y > 0,$$

ir jų sąryšį –

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(x)}{\Gamma(x+y)}, \quad x > 0,\ y > 0.$$

Šios funkcijos vartojamos apibrėžiant skirstinius.

1. *Gamma skirstinio tankis* yra:

$$p_\Gamma(x|\lambda, \theta) := \frac{\lambda^\delta}{\Gamma(\delta)} x^{\delta-1} \mathrm{e}^{-\lambda x}, \quad x > 0,$$

o charakteristinė funkcija –

$$\varphi_\Gamma(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^\delta, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Kai $\delta = 1$, gamma skirstinys tampa jau ne kartą sutiktu eksponentiniu skirstiniu.

2. *Beta skirstinys* yra sukoncentruotas intervale $[0,1]$. Jo tankis

$$\begin{aligned} p_B(x) = p_B(x|a,b) &= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} \\ &= \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, \quad a, b > 0. \end{aligned}$$

Kai $a = b = 1$, turime tolygųjį intervale [0,1] dėsnį.

Užduotis. Įrodykite, kad beta a.d. X su parametrais (a,b) momentai

$$\mathbf{E}X^k = \frac{\Gamma(a+b)\Gamma(a+k)}{\Gamma(a+b+k)\Gamma(b)}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Vidurkis ir dispersija:

$$\mathbf{E}X = \frac{a}{a+b}, \qquad \mathbf{V}arX = \frac{ab}{(a+b)^2(1+b+1)}. \tag{27.1}$$

3. *A.d.* $\chi^2 := \chi^2(n)$, *turintis* n *laisvės laipsnių ir jo skirstinys.* Pagal apibrėžimą

$$\chi^2 := \chi^2(n) := Z_1^2 + \cdots + Z_n^2,$$

čia Z_i, $1 \le i \le n$, yra nepriklausomi standartiniai normalieji a.d. Bakalauro programoje yra numatyta apskaičiuoti charakteristinę funkciją

$$\varphi_{\chi^2}(t) := \mathbf{E}e^{it\chi^2} = \Big(\frac{1}{1-2it}\Big)^{n/2}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{27.2}$$

Tai nesunku, tačiau skaičiavimai ilgoki. Pirmiausia randama $\chi(1)$ charakteristinė funkcija. Tegul $Z = Z_1$, tada

$$\begin{aligned}\varphi_{\chi^2(1)}(t) &= \int_0^\infty e^{itu} dP(|Z| \le \sqrt{u}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{itu-u/2}\frac{du}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-y^2(1-2it)/2}dy.\end{aligned}$$

Toliau pritaikomas keitinys $z = y\sqrt{1-2it}$ ir integravimo kelio kompleksinėje plokštumoje pakeitimas ir gaunama

$$\varphi_{\chi^2(1)}(t) = \Big(\frac{1}{1-2it}\Big)^{1/2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dėl nepriklausomumo iš čia išplaukia (27.2). Po to, pritaikius apvertimo formulę ir vėl kompleksinį integravimą gaunamas tankis

$$p_{\chi^2(n)}(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}x^{n/2-1}e^{-x/2}, \tag{27.3}$$

kai $x \ge 0$, ir $p_{\chi^2}(x) = 0$, $x \le 0$.

Įrodymo detales rasite J.Kubiliaus vadovėlyje, skirtame bakalauro studijoms.

4. *Stjudento skirstinys ir a.d..* Jei $Z, Z_1, \ldots, Z_n$ yra nepriklausomi standartiniai normalieji a.d., tai

$$t := t_n := \frac{Z}{\sqrt{(Z_1^1 + \cdots + Z_n^2)/n}} = \frac{Z}{\sqrt{\chi^2(n)/n}}$$

yra vadinamas *Stjudento* a.d., turinčiu n laisvės laipsnių. Jo tankio funkcija lygi

$$f_{t_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)}\Big(1+\frac{x^2}{n}\Big)^{-(n+1)/2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Skaičiuojant pasiskirstymo funkciją, integruojamas atitinkamas integralas. Iš pradžių randama a.d. $Y := \sqrt{\chi^2(n)/n}$ pasiskirstymo funkcija

$$\begin{aligned}
P(Y \leq x) &= P\Big(\chi^2(n) \leq nx^2\Big) = \int_0^{nx^2} p_{\chi^2}(u)du \\
&= 2^{-n/2}\Gamma(n/2)^{-1} \int_0^{nx^2} u^{n/2-1}\mathrm{e}^{-u/2}du \\
&= 2^{-n/2+1}n^{n/2}\Gamma(n/2)^{-1} \int_0^{x} v^{n-1}\mathrm{e}^{-nv^2/2}dv \\
&=: A_n \int_0^x v^{n-1}\mathrm{e}^{-nv^2/2}dv,
\end{aligned}$$

kai $x > 0$. Be to, $P(Y \leq x) = 0$, jei $x \leq 0$. Taigi, šio a.d., sukoncentruoto teigiamojoje pusašėje, tankis lygus

$$f_Y(x) = A_n x^{n-1}\mathrm{e}^{-nx^2/2}, \quad x > 0.$$

A.d. Z ir Y yra nepriklausomi, todėl Stjudento a.d. pasiskirstymo funkcija lygi

$$\begin{aligned}
P(Z/Y \leq x) &= A_n \int_{\substack{v>0 \\ u/v\leq x}} \Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-u^2/2}\Big)v^{n-1}\mathrm{e}^{-nv^2/2}dv \\
&= \frac{\Gamma\Big((n+1)/2\Big)}{\sqrt{\pi n}\Gamma(n/2)} \int_{-\infty}^x (1+w^2/n)^{-(n+1)/2}dw. \qquad (27.4)
\end{aligned}$$

Integruodami paeiliui darėme pakeitimus $u = wv$ ir $(n + w^2)v^2/2 = y$. Po jų atsiradęs vidinis integralas pagal y išsireiškė per gamma funkciją.

5. *Fišerio skirstinys ir a.d.*. Pagal apibrėžimą tai dviejų normuotų χ^2 a.d. santykis:

$$F(m,n) := \frac{\chi^2(m)/m}{\chi^2(n)/n}, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Raskime pasiskirstymo funkciją, kai $x > 0$, atsisakydami santykio n/m, t.y.

$$\begin{aligned}
F(x) := P\Big((m/n)F(m,n) \leq x\Big) &= \int_{\substack{u,v>0 \\ u/v\leq x}} p_{\chi^2(m)}(u)p_{\chi^2(n)}(v)dudv \\
= B_{m,n} \int_{\substack{u,v>0 \\ u/v\leq x}} & u^{m/2-1}\mathrm{e}^{-u/2}v^{n/2-1}\mathrm{e}^{-v/2}dudv.
\end{aligned}$$

Čia

$$B_{m,n} = \frac{1}{2^{m/2}\Gamma(m/2)}\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}.$$

Atlikę pakeitimą $u/v = w$ ir pasinaudoję gama funkcijos savybe gauname

$$\begin{aligned}
F(x) &= B_{m,n} \int_0^x w^{m/2-1} \int_0^\infty v^{(m+n)/2-1}\mathrm{e}^{-(1+w)v}dv \\
&= \frac{\Gamma((m+n)/2)}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)} \int_0^x w^{m/2-1}(1+w)^{-(m+n)/2}dw.
\end{aligned}$$

Kai $x \leq 0$, aišku, kad $F(x) = 0$. Diferencijuodami pagal x gautume tankio funkciją. Ateityje naudosime

$$\begin{aligned} p_{F(m,n)}(x) &= \frac{\Gamma((m+n)/2)}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)} m^{m/2} n^{n/2} x^{m/2-1} (n+mx)^{-(m+n)/2} \\ &= \frac{1}{B(m/2,n/2)} x^{m/2-1}(n+mx)^{-(m+n)/2}, \quad x > 0. \end{aligned} \tag{27.5}$$

Uždavinys. Tegul X yra $\mathbf{Po}(\lambda)$ a.d. Įrodyti, kad

$$\begin{aligned} P(X < m) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda} = \frac{1}{2^m \Gamma(m)} \int_{2\lambda}^{\infty} x^{m-1} \mathrm{e}^{-x/2} dx \\ &= P(\chi(2m) > 2\lambda). \end{aligned}$$

Charakteristinės funkcijos $\varphi_{\chi^2}(t)$ formulė primena sąryšius su jau žinomais eksponentiniais skirstiniais, kurių tankiai $p_{exp(\lambda)}(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$ ir charakteristinės funkcijos

$$\varphi_{exp(\lambda)}(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}.$$

sandaugas. Iš tiesų, yra sąryšių. Pavyzdžiui,

$$\varphi_{\chi^2(2k)}(t) = \varphi_{exp(1/2)}(t)^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Todėl $\chi^2(2k)$ ir $X_1 + \cdots + X_k$ turi tą patį skirstinį; čia X_j, $1 \leq j \leq k$, yra nepriklausomi eksponentiniai su parametru $1/2$ a.d.

V. Bagdonavičiaus ir J. Kruopio vadovėlyje skirstiniai gražiai susisteminti.

28. Variacinė eilutė

Jei paprastoji imtis $X_1, \ldots, X_n$, tai surikiavus a.d. pagal nemažėjančias jų reikšmes, gauname *variacinę eilutę*

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)}.$$

Kiekvienas iš šių a.d yra vadinamoji *pozicinė statistika.* Pagal ją net lengviau užrašyti anksčiau įvestą empirinę pasiskirstymo funkciją

$$\widehat{F}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{(-\infty,x]}(X_{(i)}). \tag{28.1}$$

Turėdami atitinkamą imties realizaciją $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(n)}$, galime užrašyti ir pačios funkcijos realizaciją

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{jei } x < x_{(1)}; \\ i/n, & \text{jei } x_{(i)} \leq x < x_{(i+1)},\ i = 1, \ldots, n-1; \\ 1, & \text{jei } \geq x_{(n)}. \end{cases}$$

Variacinė eilutė eilutė itin paranki tiriant *kvantilius*. Pasiskirstymo funkcijos $F(x)$ kvantilis (p kvantilis, $0 < p < 1$) yra taškas

$$x(p) = \inf\Big\{x: \ F(x) \geq p\Big\}.$$

Pagal analogiją, empirinis p kvantilis yra

$$\hat{x}(p) = \inf\Big\{x: \ \widehat{F}(x) \geq p\Big\} = \begin{cases} X_{(np)}, & \text{jei } np \in \mathbb{N}; \\ X_{([np]+1)}, & \text{jei } np \notin \mathbb{N}; \end{cases}$$

čia $[u]$ yra skaičiaus $u \in \mathbb{R}$ sveikoji dalis. Lygybės išplaukia iš (28.1).

Rasime pozicinių statistikų skirstinių, bet pradžioje labai pravartus pastebėjimas.

Lema 9. *Jei $F(x)$ yra a.d. X pasiskirstymo funkcija ir egzistuoja tankis $F'(x)$, tai tankis*

$$P'\Big(F(X) \leq u\Big) = \begin{cases} 0, & \textit{jei } u \notin [0,1]; \\ 1, & \textit{jei } u \in [0,1]. \end{cases}$$

Proof. Trivialu. □

Lemoje gavome tolygiojo intervale $[0,1]$ dėsnio tankio funkciją. Įsidėmėkime, kad $Y_i = F(X_i)$ yra tolygieji a.d., jei $F_i(x)$ - absoliučiai tolydžios p. funkcijos. Įveskime ir jų variacinę eilutę

$$Y_{(1)} = F(X_{(1)}) \leq Y_{(2)} = F(X_{(2)}) \leq \cdots \leq Y_{(n)} = F(X_{(n)}).$$

Teorema 44. *A. d. vektoriaus $Y^{(n)} := (Y_{(1)}, Y_{(2)}, \ldots, Y_{(n)})$ tankio funkcija yra*

$$p_{Y^{(n)}}(y_1, \ldots, y_n) = \begin{cases} 0, & \textit{jei } y := (y_1, \ldots, y_n) \notin Q_{1n}; \\ n!, & \textit{jei } y \in Q_{1n}. \end{cases}$$

Čia

$$Q_{1n} := \Big\{y: \ 0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n \leq 1\Big\}.$$

Proof. Iš variacinės eilutės narių sudarytas vektorius visada yra srityje Q_{1n} ir jis gaunamas iš bet kokio iš $n!$ kėlinių rikiuojant vektoriaus $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ koordinates. Pastarasis yra tolygiai kube $Q_{0n} := [0,1]^n$ pasiskirstęs a.v-ius. □

Dabar nagrinėkime tik dalį vektoriaus $Y^{(n)}$ koordinačių.

Teorema 45. *Tegul*

$$1 \leq k_1 < k_2 \cdots < k_r \leq n.$$

A. d. vektoriaus $\widetilde{Y}^{(r)} := (Y_{(k_1)}, Y_{(k_2)}, \ldots, Y_{(k_r)})$ tankio funkcija yra sukoncentruota aibėje Q_{1r} ir ten ji lygi

$$p_{\widetilde{Y}^{(r)}}(y_1, \ldots, y_r) = \frac{n!}{(k_1-1)!(k_2-k_1-1)!\cdots(k_r-k_{r-1}-1)!(n-k_r)!}$$
$$\times\, y_1^{k_1-1}(y_2-y_1)^{k_2-k_1-1}\cdots(y_r-y_{r-1})^{k_r-k_{r-1}-1}(1-y_r)^{n-k_r}.$$

Proof. Taikoma indukcija r atžilgiu, bet pradedama nuo didžiausios galimos reikšmės. Kai $r = n$, tai ankstesnioji teorema. Tarę, kad formulė galioja dėl $r+1$, skaičiuojame r-matį tankį. Integruojame pagal y_{r+1} intervale $[y_r, 1]$ tankį $p_{\widetilde{Y}^{(r+1)}}(y_1, \ldots, y_r, y_{r+1})$ Iškėlę daugiklius, nepriklausančius nuo kintamojo y_{r+1}, turime integralą

$$I_r := \int_{y_r}^1 (y_{r+1} - y_r)^{k_{r+1}-k_r-1}(1 - y_{r+1})^{n-k_{r+1}} dy_{r+1}.$$

jame pakanka atlikti kintamojo pakeitimą

$$u = (y_{r+1} - y_r)/(1 - y_r).$$

Tada $0 \le u \le 1$, o $1 - y_{r+1} = (1 - y_r)(1 - u)$. Tuo pasinaudoję integralą perrašome

$$\begin{aligned} I_r &= (1 - y_r)^{n-k_r} \int_0^1 u^{k_{r+1}-k_r-1}(1 - u)^{n-k_{r+1}} du \\ &= (1 - y_r)^{n-k_r} \frac{(k_{r+1} - k_r - 1)!(n - k_{r+1})!}{(n - k_r)!}. \end{aligned}$$

Įstatę tai, užbaigiame skaičiavimus. □

Išvada 8. *Tankis j-osios pozicinės statistikos $Y_{(j)}$ yra*

$$p_j(y) := p_{Y_{(j)}}(y) = \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} y^{j-1}(1 - y)^{n-j}, \quad 0 < y < 1.$$

Pastaba. Tai yra Beta skirstinys su parametrais $(j, n - j + 1)$. Faktorialų atsiradimą nesunku paaiškinti. Turime $p_j(y)dy \approx P(Y_{(j)} \in [y, y + dy])$. Todėl visus imties $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ a.d. galime skirstyti į klases, turinčias $(j-1)$-ą, 1-ą ir $(n - j)$ dydžių. Tai dydžiai mažesni už y, vienas dydis intervale $[y, y+dy]$ ir didesni už $y + dy$. Skirstymo variantų skaičius yra multinominis koeficientas

$$\binom{n}{j-1, 1, n-j} = \frac{n!}{(j-1)!1!(n-j)!}.$$

Daugikliai $y^{j-1} \cdot 1 \cdot (1-y)^{n-j}$ yra atrinktųjų a.d. patekimo į intervalus tikimybės.

Dabar panašus teiginys, bet kokio absoliučiai tolydinio skirstinio atveju.

Teorema 46. *Tegul $F'(x) = p(x)$ yra a.d. X_i, $1 \le i \le n$, tankis,*

$$1 \le k_1 < k_2 \cdots < k_r \le n.$$

A. d. vektoriaus $\widetilde{X}^{(r)} := (X_{(k_1)}, X_{(k_2)}, \ldots, X_{(k_r)})$ tankio funkcija yra sukoncentruota aibėje

$$Q_r := \Big\{(x_1, \ldots, x_r) : \ -\infty < x_1 \le \cdots \le x_r < \infty\Big\}$$

ir ten lygi

$$p_{\widetilde{X}^{(r)}}(x_1,\dots,x_r) = \frac{n!}{(k_1-1)!(k_2-k_1-1)!\cdots(k_r-k_{r-1}-1)!(n-k_r)!}$$
$$\times F_1^{k_1-1}(x_1)\Big(F(x_2)-F(x_1)\Big)^{k_2-k_1-1}\cdots$$
$$\cdots\times\Big(F(x_r)-F(x_{r-1})\Big)^{k_r-k_{r-1}-1}\Big(1-F(x_r)\Big)^{n-k_r}p(x_1)\cdots p(x_r).$$

Proof. Galima samprotauti, kaip ir ką tik padarytoje pastaboje. Kitas būdas – taikyti a.d. transformaciją ir Lemą. Trumpumo dėlei, pažymėję pozicinės statistikos $X_{(k_j)}$ tankį $q(x_j)$, turime

$$P\Big(\widetilde{X}^{(r)} \le (x_1,\dots,x_r)\Big) = \int_{Q_r} q(x_1)\cdots q(x_r)dx_1\cdots dx_r.$$

Darome pakeitimą $x_j = F^{-1}(y_j)$ arba $y_j = F(x_j)$, kai $1 \le j \le r$. Jo jakobianas lygus

$$|J| = \left|\left(\frac{\partial(y_j)}{\partial(x_i)}\right)\right| = p(x_1)\cdots p(x_r).$$

Nelygybė $X_{(k_j)} \le x_j = F^{-1}(y_j)$ virsta $F\Big(X_{(k_j)}\Big) = Y_{(k_j)} \le y_j$, $q(x_j) = q\Big(F^{-1}(y_j)\Big) =$ 1 arba 0, atitinkamose srityse, o sritis Q_r keičiasi į Q_{1r} su $y_j = F(x_j)$. Vadinasi, pakanka pritaikyti prieš tai buvusią teoremą, kai $y_j = F(x_j)$ ir nepamiršti padauginti iš jakobiano. □

Užduotis. Variacinė eilutė $X_{(1)},\dots X_{(n)}$, $n \ge 2$, gauta stebint a.d., kurio tankio funkcija yra

$$f(x) := f(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma}\exp\Big\{-\frac{x-\mu}{\sigma}\Big\}, \quad x > \mu.$$

Raskite statistikos

$$T = \frac{X_{(1)}-\mu}{W}, \qquad \left(W := \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n}\Big(X_{(i)}-X_{(1)}\Big)\right).$$

tikimybinį tankį.

Sprendimas. Stebėjimo statistinis modelis yra vektoriaus $X = (X_1,\dots,X_n)$ skirstinys, kurio marginaliniai skirstiniai turi tą patį tankį $f(x|\mu,\sigma)$. Todėl variacinės eilutės $X^{(n)} := (X_{(1)},\dots,X_{(n)})$ skirstinio tankio funkcija yra

$$p_{X_{(1)},\dots,X_{(n)}}(u_1,\dots,u_n) = n!f(u_1)\cdots f(u_n),$$

jei $-\infty < u_1 \le \cdots \le u_n < \infty$.

Patogiau dirbti su variacinės eilutės prieaugiais

$$Z_1 := X_{(1)}-\mu, \quad Z_2 := X_{(2)}-X_{(1)},\dots,Z_n := X_{(n)}-X_{(n-1)},$$

nes jie sudaro nepriklausomų a.d.rinkinį (!) Iš tiesų, galime lengvai rasti jų jungtinę pasiskrstymo funkciją. Skaičiuojame

$$P\Big(Z_1 \le y_1, \dots, Z_n \le y_n\Big) = P\Big(X_{(1)} - \mu \le y_1, \dots, X_{(n)} - X_{(n-1)} \le y_n\Big)$$
$$= \int_\Delta \varphi_{X_{(1)},\dots,X_{(n)}}(u_1, \dots, u_n) du_1 \cdots du_n$$
$$= n! \int_\Delta f(u_1) \cdots f(u_n) du_1 \cdots du_n.$$

Integravimo sritis $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ aprašoma nelygybėmis

$$0 \le u_1 - \mu \le y_1, \quad 0 \le u_2 - u_1 \le y_2, \dots, 0 \le u_n - u_{n-1} \le y_n.$$

Todėl pritaikykime keitinį

$$t_1 = u_1 - \mu, \quad t_2 = u_2 - u_1, \dots, t_n = u_n - u_{n-1},$$

kurio jakobianas

$$|J| = \left|\left(\frac{\partial t_i}{\partial u_j}\right)\right|, \quad 1 \le i, j \le n,$$

lygus vienetui. Gauname

$$P\Big(Z_1 \le y_1, \dots, Z_n \le y_n\Big) = n! \int_0^{y_1} \int_0^{y_2} \cdots \int_0^{y_n} f(t_1 + \mu) f(t_2 + t_1 + \mu) \cdots$$
$$\times f(t_n + \cdots + t_1 + \mu) dt_1 dt_2 \cdots dt_n.$$

Įstatę pateiktąją tankio funkciją, nustembame, kad

$$f(t_1 + \mu) f(t_2 + t_1 + \mu) \cdots f(t_n + \cdots + t_1 + \mu)$$
$$= \frac{1}{\sigma^n} \exp\Big\{ - \frac{n t_1}{\sigma} - \frac{(n-1) t_2}{\sigma} \cdots - \frac{t_n}{\sigma} \Big\}.$$

Vadinasi, integralai atsiskiria. Jų sandauga lygi

$$P\Big(Z_1 \le y_1, \dots, Z_n \le y_n\Big) = \frac{n!}{\sigma^n} \int_0^{y_1} \mathrm{e}^{-n t_1/\sigma} dt_1$$
$$\times \int_0^{y_2} \mathrm{e}^{-(n-1) t_2/\sigma} dt_2 \cdots \int_0^{y_n} \mathrm{e}^{-t_n/\sigma} dt_n$$
$$= \Big(1 - \mathrm{e}^{-n y_1/\sigma}\Big)\Big(1 - \mathrm{e}^{-(n-1) y_2/\sigma}\Big) \cdots \Big(1 - \mathrm{e}^{-y_n/\sigma}\Big).$$

Iš čia, paėmę $y_i = \infty$, kai $i \ne k$, taip pat matome, kad

$$P\Big(Z_k \le y_k\Big) = 1 - \mathrm{e}^{-(n-k+1) y_k/\sigma}, \quad y_k \ge 0, \ k = 1, 2, \dots, n.$$

Taigi a.d. $Z_1, \dots, Z_n$ yra nepriklausomi eksponentiniai su parametrais $(n - k + 1)/\sigma$ a.d.

Toliau nagrinėjame a.d.

$$W = \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n}\Big(X_{(i)} - X_{(1)}\Big) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n}\Big(Z_k + \cdots + Z_2\Big)$$
$$= \frac{1}{n-1}\Big((n-1)Z_2 + \cdots + Z_n\Big).$$

Iš čia matome, kad statistikoje T esantys a.d. $X_{(1)} - \mu$ ir W yra nepriklausomi. Be to, galime rasti ir W skirstinį. Paprasčiau pradžioje nagrinėti charakteristinę funkciją

$$\mathbf{E}\mathrm{e}^{it(n-1)W} = \prod_{k=2}^{n}\mathbf{E}\mathrm{e}^{it(n-k+1)Z_k} = \prod_{k=2}^{n}\frac{1}{1-it\sigma} = \Big(\frac{1}{1-it\sigma}\Big)^{n-1}.$$

Ją jau matėme nagrinėdami $\chi^2(k)$ skirstinį. Palyginę darome išvadą, kad $2(n-1)W/\sigma$ ir $\chi^2(2n-2)$, kai $n \geq 2$, skirstiniai yra tie patys.

Panašiai, sutampa ir $2nZ_1/\sigma$ bei $\chi^2(2)$ skirstiniai. Užduotį baigiame apskaičiuodami

$$P(nT \leq x) = P\bigg(\frac{2nZ_1/(2\sigma)}{2(n-1)W/\big(2(n-1)\sigma\big)} \leq x\bigg)$$
$$= P\bigg(\frac{\chi^2(2)/2}{\chi^2(2n-2)/(n-1)} \leq x\bigg)$$
$$= P\Big(F(2, 2n-2) \leq x\Big).$$

Čia $F(k,m)$ yra Fišerio a.d. Įstatę jo skirstinį, gautume atsakymą.

Naudojantis pozicine statistika, žymiai patogiau tirti empirinės pasiskirstymo funkcijos $\widetilde{F}(x)$ kvantilius. Kaip prisimename

$$\hat{x}(p) = \inf\Big\{x:\ \widehat{F}(x) \geq p\Big\} = \begin{cases} X_{(np)}, & \text{jei } np \in \mathbb{N};\\ X_{([np]+1)}, & \text{jei } np \notin \mathbb{N};\end{cases}$$

čia $[u]$ yra skaičiaus $u \in \mathbb{R}$ sveikoji dalis.

Teorema 47. *Tegul imties $X = (X_1, \ldots, X_n)$ komponenčių X_i pasiskirstymo funkcija yra $F(x)$, o $x(p)$ yra jos p kvantilis, $0 < p < 1$. Jei ji turi tolydžią atvirkštinę funkciją $F^{-1}(x)$, tai*

$$\hat{x}(p) \to^{P} x(p).$$

Proof. Tegul $\delta = 1$, jei $np \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, ir $\delta = 0$ jei $np \in \mathbb{N}_0$. Pagal prieš teoremą parašytą formulę

$$\hat{x}(p) = X_{(k)}, \quad k = [np] + \delta.$$

Patogiau šį a.d. transformuoti ir imti k-ąjį variacinės eilutės narį

$$Y_{(k)} = F\Big(X_{(k)}\Big),$$

kuris pagal 45 teoremą turi beta skirstinį su parametrais $(k, n-k+1)$. Kitaip tariant, jo tankis yra

$$f_{Y_{(k)}}(y) = \binom{n}{k-1, 1, n-k} y^{k-1}(1-y)^{n-k}, \quad y \in (0,1).$$

Pagal (27.1) formulę

$$\mathbf{E}Y_{(k)} = \frac{k}{n+1} \to p, \qquad \mathbf{V}arY_{(k)} = \frac{k(n-k+1)}{(n+1)^2(n+2)} \to 0,$$

jei $n \to \infty$. Patikrinti! Remiantis Čebyšovo nelygybe, koks bebūtų $\varepsilon > 0$,

$$P\Big(\Big|Y_{(k)} - \mathbf{E}Y_{(k)}\Big| \geq \varepsilon\Big) \leq \mathbf{V}arY_{(k)}\varepsilon^{-2} \to 0.$$

Vadinasi,

$$Y_{(k)} - \mathbf{E}Y_{(k)} =^P Y_{(k)} - p + o(1) \to^P 0,$$

pagal tikimybę. Kitais žodžiais tariant, $F\Big(X_{(k)}\Big) \to^P p$. Dėl teoremos sąlygos, tai ekvivalentu jos teiginiui. □

Teorema 48. *Tegul paprastosios imties* $X = (X_1, \ldots, X_n)$ *komponenčių* X_i *pasiskirstymo funkcija yra* $F(x)$*, o* $x(p)$ *yra jos* p *kvantilis,* $0 < p < 1$*. Jei* $F(x)$ *yra tolydžiai diferencijuojama taško* $x(p)$ *aplinkoje ir jos išvestinė (tankis)* $f(x(p)) > 0$*, tai*

$$\sqrt{n}\Big(\hat{x}(p) - x(p)\Big) \Rightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{p(1-p)}{f^2(x(p))}\right), \quad n \to \infty.$$

Proof. Be įrodymo. Jį galite rasti Bag-Kr [1] vadovėlio 110-111 psl. □

Pastaroji teorema reikalinga konstruojant $x(p)$ pasikliautinuosius intervalus. Skyrelį baigsime pavyzdžiu, kai kvantilio tyrimas yra iš esmės reikalingas.

Pavyzdys. Koši dėsnis $K(\mu, \sigma)$, čia $\mu \in \mathbb{R}$ ir $\sigma > 0$ yra parametrai, turi tankį

$$f(x) := f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\pi} \frac{\sigma}{\sigma^2 + (x-\mu)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Atkreipkime dėmesį į labai lėtą tankio funkcijos mažėjimą, kai $x \to \infty$. Kitais žodžiais tariant, Koši skirstinys yra *sunkiauodegis.* Jo matematinė viltis (vidurkis) yra begalinis. *Mediana* arba pusinis kvantilis $x(1/2) = \mu$ tam tikra prasme pakeičia vidurkį.

Kaip skaičiuoti kvantilius? Visų pirma, turime

$$\begin{aligned} p &= \int_{-\infty}^{x(p)} f(t)dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{(x(p)-\mu)/\sigma} \frac{dy}{1+y^2} \\ &= \frac{1}{\pi}\Big(\frac{\pi}{2} + \arctan((x(p)-\mu)/\sigma)\Big) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan((x(p)-\mu)/\sigma). \end{aligned}$$

Taigi, iš

$$1/2 = 1/2 + (1/\pi)\arctan((x(1/2) - \mu)/\sigma)$$

gauname $x(1/2) = \mu$, o kai $p = 1/4$, turime

$$1/4 = 1/2 + (1/\pi)\arctan((x(1/4) - \mu)/\sigma)$$

ir $x(1/4) = \mu - \sigma$. Panašiai, $x(3/4) = \mu + \sigma$ ir t.t.

Paskutinė šio skyrelio teorema, pritaikyta tokiam atvejui, sako, kad

$$\sqrt{n}\Big(\hat{x}(1/2) - \mu\Big) \Rightarrow \mathcal{N}\bigg(0, \frac{\pi^2\sigma^2}{4}\bigg), \quad n \to \infty.$$

Taigi, jei μ nežinomas, jį su didele tikimybe aproksimuoja empirinis kvantilis $\hat{x}(1/2)$.

Jei σ nežinomas, turėdami išraišką

$$\sigma = \big(x(3/4) - x(1/4)\big)/2,$$

vėl galime eiti tokiu pat keliu. Tam reikalingas teoremos išplėtimas dvimačiu atveju, nes įpinti du kvantiliai. Paėmę atitinkamą empirinių kvantilių skirtumą $\hat{\sigma} = \big(\hat{x}(3/4) - \hat{x}(1/4)\big)/2$, galėtume tikėtis, kad

$$\sqrt{n}\Big(\hat{\sigma} - \sigma\Big) \Rightarrow \mathcal{N}\Big(0, \sigma_1\Big), \quad n \to \infty.$$

su kažkokia dispersija $\sigma_1 > 0$. Toks sąryšis įrodytas [1] vadovėlyje.

29. Empirinių momentų skirstiniai

Pagrindinės statistikos tiriant imties $X = (X_1, \ldots, X_n)$ skirstinio $F(x) = P(X_i \leq x)$ momentus yra *empiriniai momentai*:

$$a_k := \int_{\mathbb{R}} x^k d\widehat{F}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$$

ir

$$m_k := \int_{\mathbb{R}} (x - a_1)^k d\widehat{F}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - a_1)^k.$$

Jie atitinkamai vadinami *pradiniais* ir *centriniais* empiriniais momentais. Aišku, kad

$$a_1 = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

yra empirinis vidurkis. Taip pat išskirtina *empirinė disppersija*:

$$m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 = a_2 - a_1^2.$$

Tai a.d., todėl nagrinėkime jų vidurkius. Ne visada jie egzistuoja, todėl reikalaujame, kad atitinkami skirstinio $F(x)$, apibrėžto statistiniame modelyje, momentai $\mathbf{E}X^k =: \alpha^k$ ir $\mathbf{E}(X - \alpha_1)^k =: \mu_k$ egzistuotų ir būtų baiginiai.

Trumpindami žymėsime $\mu = \alpha_1 = \mathbf{E}X$ ir $\sigma^2 := \mu_2 = \mathbf{V}arX$.

Bakalauro studijose buvo minėta (ir tai nesunkiai patikrinama), kad

Teorema 49. *Tegul paprastosios imties $X = (X_1, \dots, X_n)$ komponentės X_i yra normalieji a.d. su vidurkiais μ ir dispersija σ^2. Tada a.d.*

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j, \qquad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X})^2$$

yra nepriklausomi ir jų skirstiniai yra tokie:

$$\sqrt{n}\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma} \quad - \quad \text{standartinis normalusis;}$$

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \quad - \quad \chi^2(n-1);$$

$$\sqrt{n}\frac{\overline{X}-\mu}{s} \quad - \quad t_{n-1} \text{ Stjudento su (n − 1) laisv. laipsn..}$$

Proof. Įrodymą pradėsime faktu, kad nekoreliuoti normalieji a.d. $Z := (Z_1, \dots, Z_n)$, turintys parametrus (μ_j, σ_j^2), yra nepriklausomi. Iš tiesų, jei jų kovariacijų matrica

$$A := \Big(\mathbf{C}ov(Z_i, Z_j)\Big)_{1\le i,j\le n}$$

yra diagonali, tai naudojant matricų daugybą ir vektoriaus bei matricos daugybą, jungtinė charakteristinė funkcija užrašoma sandauga:

$$\mathbf{E}e^{i(tZ')} = \exp\Big\{i(t\bar{\mu}') - \frac{tAt'}{2}\Big\} = \prod_{j=1}^{n} \exp\Big\{it_j\mu_j - \frac{\sigma_j^2 t_j^2}{2}\Big\}.$$

Čia $t := (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, $\bar{\mu} := (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$ vidurkių vektorius, $\sigma_j^2 := \mathbf{V}arZ_j$, o t' reiškia vektoriaus t transponavimą.

Pritaikę šią pastabą, Įsitikiname, kad normalieji a.d. $\overline{X}$ ir $X_j - \overline{X}$ yra nekoreliuoti. Iš tiesų,

$$\begin{aligned}\mathbf{C}ov(\overline{X}, X_j - \overline{X}) &= \mathbf{C}ov(\overline{X}, X_j) - \mathbf{C}ov(\overline{X}, \overline{X}) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{C}ov(X_i, X_j) - \frac{1}{n^2}\sum_{i,j\le n}\mathbf{C}ov(X_i, X_j) \\ &= \frac{\sigma^2}{n} - \frac{\sigma^2}{n} = 0.\end{aligned}$$

Pritaikę pradžioje padarytą pastabą, gauname a.d. $\overline{X}$ ir $X_j - \overline{X}$ nepriklausomumą, tuo pačiu ir $\overline{X}$ bei s^2 nepriklausomumą. Dabar pirmasis teoremos teiginys dėl centruoto ir normuoto $\overline{X}$ yra beveik akivaizdus.

Kaip s^2 skirstinys siejamas su $\chi^2(n-1)$, kodėl laisvės laipsnių yra ne n? Dėmenų buvo n. Ta pačia proga pastebėkime, kad s^2 yra *nepaslinktasis* dispersijos σ^2 įvertinys (statistika), nes tiesioginiu skaičiavimu gaunama

$$\mathbf{E}s^2 = \sigma^2.$$

Patikrinkite!

Patogiau nagrinėti a.d.

$$S^2 := \frac{n-1}{n}s^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X})^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j^2 - \overline{X}^2. \tag{29.1}$$

Ir jį galima suprastinti atliekant vektoriaus ortogonaliąją transformaciją, t.y. pakeičiant $Y := (Y_1, \ldots, Y_n) = XB$, čia $B = (b_{lj})$, $1 \le l, j \le n$, yra ortogonalioji matrica. Tokia transformacija išlaiko nepakeistą vektoriaus koordinačių kvadratų sumą!

Pasirinkime pirmuoju stulpeliu vektorių b', kai

$$b := (b_{11}, b_{21}, \ldots, b_{n1}) = (1/\sqrt{n}, 1/\sqrt{n}, \ldots, 1/\sqrt{n}),$$

o kitus raskime iš ortonormuotumo sąryšių

$$\sum_{l=1}^{n} b_{lk}b_{lj} = \begin{cases} 1, & \text{jei } k = j; \\ 0, & \text{jei } k \neq j. \end{cases}$$

Iš jų, kai $k = 1$, išplaukia vėliau taikomos lygybės

$$\sum_{l=1}^{n} b_{lj} = 0, \quad j = 2, \ldots, n.$$

Ištirkime a.d. vektorių Y. Kaip minėjome,

$$Y_1^2 + \cdots + Y_n^2 = X_1^2 + \cdots + X_n^2.$$

Pasirodo, jo koordinatės yra normalieji a.d. ir nepriklausomos. Pirmas faktas akivaizdus, nes tiesinės nepriklausomų normaliųjų a.d. kombinacijos yra normalieji a.d.. Kaip pasikeitė vektoriaus X jungtinė charakteristinė funkcija

$$\varphi_X(t) := \mathrm{e}^{itX'} = \exp\Big\{i\bar{\mu}t') - \frac{1}{2}\sigma^2 tt')\Big\}$$

Ji tapo

$$\begin{aligned}\varphi_Y(t) &:= \mathrm{e}^{itY'} = \mathrm{e}^{i(tB')\cdot X'} \\ &= \varphi_X(tB') = \exp\Big\{i\bar{\mu}Bt') - \frac{1}{2}\sigma^2(tB' \cdot Bt')\Big\} \\ &= \exp\Big\{i\mu\sqrt{n}\hat{t}t' - \frac{1}{2}\sigma^2 tt'\Big\},\end{aligned}$$

nes $BB' = I$ - vienetinė matrica. Čia

$$\begin{aligned}\hat{t} &= \mu(1,1,\ldots,1)B = \mu\Big(\sqrt{n}, \sum_{l=1}^{n} b_{l2}, \ldots, \sum_{l=1}^{n} b_{ln}\Big)\\ &= \mu\sqrt{n}\Big(1,0,\ldots,0\Big).\end{aligned}$$

Taigi, transformacija pakeitė tik a. vektoriaus vidurkį, charakteristinė funkcija irgi yra sandauga vienamačių charakteristinių funkcijų. Tai įrodo $Y_1, \ldots Y_n$ nepriklausomumą ir normališkumą.

Iš $\varphi_Y(t)$ išraiškos matome, kad

$$\begin{gathered}Y_1 = n^{-1/2}(X_1 + \cdots + X_n) = \sqrt{n} \cdot \overline{X};\\ \mathbf{E}Y_1 = \sqrt{n}\mu, \qquad \mathbf{E}Y_j = 0, \quad j = 2, \ldots, n;\\ \mathbf{V}arY_j = \mathbf{V}arX_j = \sigma^2, \quad j = 1, 2, \ldots, n.\end{gathered}$$

Vadinasi,

$$nS^2 = \sum_{l=1}^{n}(X_l - \overline{X})^2 = \sum_{l=1}^{n} X_l^2 - n\overline{X}^2 = \sum_{l=2}^{n} Y_l^2$$

yra $(n-1)$-o standartinio normaliojo a.d. kavadrato suma, be to nepriklausoma nuo Y_1.

Dabar teoremos teiginiai išplaukia iš $\chi(n-1)$ ir Stjudento skirstinio apibrėžimų.

□

Kai imtis nėra normalioji, retai kada pasiseka rasti tikslius empirinių momentų skirstinius. Tenka skaičiuoti skaitines jų charakteristikas, dažniausiai, momentus, ir iš jų spręsti apie galimus skirstinius. Pateiksime tik vieną paprastesnį pavyzdį.

Teorema 50. *Tegul imtis $X = (X_1, \ldots, X_n)$ yra paprastoji, o X_1 skirstinio pradiniai momentai $\alpha_j = \mathbf{E}X_1^j$ egzistuoja iki eilių $j \le 2m$ imtinai. Tada empirinių momentų*

$$a_k := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j^k$$

vidurkis, dispersija ir kovariacijos:

$$\mathbf{E}a_k = \alpha_k, \qquad \mathbf{V}ar(a_k) = \frac{\alpha_{2k} - \alpha_k^2}{n}, \qquad \mathbf{C}ov(a_k, a_l) = \frac{\alpha_{k+l} - \alpha_k\alpha_l}{n},$$

jei $k, l \le m$.

Be to, $P(a_k \to \alpha_k) = 1$,

$$\sqrt{n}\frac{a_k - \alpha_k}{\sqrt{\alpha_{2k} - \alpha_k^2}} \Rightarrow^P \mathcal{N}(0,1),$$

kai $n \to \infty$.

Proof. Pritaikyti vienodai pasiskirsčiusių nepriklausomų a.d. sumų vidurkio, dispersijos ir kovariacijos skaičiavimo formules. Pavyzdžiui, įrodant dispersijos formulę, skaičiuojame:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}ar(a_k) &= \frac{1}{n^2}\sum_{j,l\leq n}\mathbf{E}(X_j^k X_l^k) - (\mathbf{E}a_k)^2 \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{j\neq l}\mathbf{E}(X_j^k)\mathbf{E}(X_l^k) + \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}(X_j^{2k}) - \alpha_k^2 \\
&= \frac{1}{n^2}(n^2-n)\alpha_k^2 + \frac{\alpha_{2k}}{n} - \alpha_k^2 \\
&= \frac{\alpha_{2k}-\alpha_k^2}{n}.
\end{aligned}$$

Paskutinis teoremos teiginys išplaukia iš centrinės ribinės teoremos. □

Teoremoje pateiktos ir panašios kitų eilių momentų išraiškos, apjungtos į sistemas, dažnai leidžia išspręsti nežinomus skirstinių parametrus per empirinius momentus. Taip gaunami parametrų įvertiniai. Mes to įsitikinome nagrinėdami Koši dėsnį išreikšdami jo parametrus per empirinius kvantilius.

30. Pakankamosios statistikos

Tarkime, jau esame apibrėžę statistinį modelį - imties $X = (X_1, \ldots, X_n)$ skirstinių šeimą $(P_X,\, \theta \in \Theta)$, priklausančią nuo šeimos parametro θ. Jį paprastumo dėlei laikysime vienamačiu, t.y. $\Theta \subset \mathbb{R}$. Primename, kad imties $X = (X_1, \ldots X_n)$ skirstinys P_X, apibrėžiamas tikimybėmis

$$P_X(B) = P_\theta\Big(\{\omega : X \in B\}\Big), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Pridėjome indeksą θ tikimybinės erdvės $(\Omega, \mathcal{F})$ matui P. Tikimės, kad dviprasmybė P_X ir P_θ nekels sunkumų. Tai matai skirtingose erdvėse!

Įveskime svarbią sąlygą: matai P_X turi *tankio funkciją* $f(x,\theta)$ kokio nors σ baigtinio mato μ atžvilgiu, t.y.

$$P_X(B) = P_\theta(X \in B) = \int_B f(x,\theta)\mu(dx), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Čia $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ (vadovėlyje vektoriai pajuodinti!) ir, aišku, kad $f(x,\theta)$ turi būti integruojama funkcija. Kai galioja toks sąryšis, sakoma, kad matas μ *dominuoja* skirstinių šeimą P_X arba $(P_\theta,\, \theta \in \Theta)$.

Panagrinėkime skirstinių dominavimą. Absoliučiai tolydinių skirstinių atveju, dominuojantysis matas yra Lebego. Ir diskretieji skirstiniai gali būti dominuojami.

1 pavyzdys. Tegul imtis yra paprastoji, o stebimas a.d. įgyja reikšmes u iš skaičios aibės A su tikimybėmis $p_\theta(u)$, $u \in A$, $\theta \in \Theta$. Apibrėžkime matą

$$\mu(B) = \Big|\Big\{(u_1, \dots, u_n) \in B : \ u_i \in A, \, i \geq 1\Big\}\Big|, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),$$

ir funkciją

$$p_\theta(x) = p_\theta(x_1, \dots, x_n) = p_\theta(u_1) \cdots p_\theta(u_n),$$

kai $x = (x_1, \dots, x_n) = u := (u_1, \dots, u_n)$ ir $p_\theta(x) = 0$ priešingu atveju. Tada imties $X = (X_1, \dots, X_n)$ skirstinys užrašomas formule

$$P_X(B) = \int_B p_\theta(x)\mu(dx), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Dominavimo svarba siejasi su tokia statistikų klase.

Apibrėžimas. *A.d.* $T = T(X)$, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *vadinamas pakankamąja parametro* θ *statistika arba pakankamąja klasei* $(P_\theta, \, \theta \in \Theta)$, *jeigu egzistuoja sąlyginės tikimybės variantas*

$$P_\theta\Big(X \in B | T(X) = t\Big) = P_X\Big(B | T^{-1}(t)\Big), \quad \forall \, t \in \Theta \subset \mathbb{R}, \tag{30.1}$$

nepriklausantis nuo θ.

Frazės „egzistuoja sąlyginės tikimybės variantas" reikalinga, nes sąlyginė tikimybė apibrėžiama P_θ beveik visur. Sąlygą $T(X) = t$ antroje išraiškoje pakeitėme atitinkamu įvykiu kitoje erdvėje, nes $A_t := \{X \in T^{-1}(t)\}$. Jei nuo tokių įvykių informacijos tikimybės dar priklausytų nuo θ, tai statistika T būtų bloga; panaudoję ją, kitaip vertintume parametrą. Jei nepriklauso, tai įvykiai A_t nebegali duoti papildomos informacijos apie θ, todėl terminas *pakankama* yra pagrįstas.

Pavyzdys. Paprastoji imtis gauta stebint Puasono a.d., todėl imame modelį $(P_\lambda, \, \lambda > 0)$. Žinodami, kad parametras yra skirstinio vidurkis imame statistiką $T = S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Ar ji pakankama tokiai skirstinių šeimai? Tikriname

$$P_\lambda\Big(X_1 = m_1, \dots, X_n = m_n \Big| S_n = N\Big) = \frac{P_\lambda\Big(X_1 = m_1) \cdots P_\lambda(X_n = m_n)}{P_\lambda(S_n = N)}$$

$$= \binom{N}{m_1, \dots, m_n} \Big(\frac{1}{n}\Big)^N,$$

jei $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}_0$, $m_1 + \cdots + m_n = N$; kitoms m_j reikšmėms tikimybės lygios nuliui. Visais atvejais parametras λ yra išprastintas.

Darome išvadą, kad statistika yra pakankamoji.

Teorema 51. *Tegul* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *yra mati funkcija. Statistika* $T(X)$ *yra pakankama klasei* $(P_\theta, \, \theta \in \Theta)$, *dominuojamai mato* μ *su tankiu* $p_\theta(u)$, *tada ir tik tada, kai visiems* $\theta \in \Theta$ *egzistuoja neneigiama mati funkcija* $g_\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ir tokia Borelio funkcija* $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *nepriklausanti nuo* θ, *kad*

$$p_\theta(x) = g_\theta\Big(T(x)\Big)h(x) \quad \mu - b.v.$$

Prieš pradėdami įrodymą, pasakysime, kad suformuluota teorema yra atskiras Neimano-Fišerio faktorizavimo kriterijaus atvejis. Išskaidymą rasti yra gerokai lengviau, nei išnagrinėti sąlygines tikimybes pakankamosios statistikos apibrėžime. A.d. $p_\theta(X)$ vadinamas *imties tikėtinumo funkcija.*

Proof. **1.** *Diskretusis atvejis.* Įrodant pakankamumą, reikia rasti sąlyginę tikimybę (30.1). Pakanka nagrinėti patekimo į vienataškę aibę $B = \{u\}$. Tegul a. vektorius $X = u$ su teigiama tikimybe. Pagal dominavimo sąlygą

$$P_\theta(X = u) = p_\theta(u)\mu(\{u\}) > 0. \tag{30.2}$$

(*Pastaba*: Jei matas μ kaip nurodyta 1 pavyzdyje, $\mu(\{u\}) = 1$.) Jei $T(u) \neq t$, tai

$$P_X\Big(B|T^{-1}(t)\Big) = P_\theta\Big(X = u|T(X) = t\Big) \leq P_\theta\Big(T(X) = T(u)|T(X) = t\Big) = 0.$$

Priešingu atveju, $T(u) = t$, todėl pagal (30.2) ir teoremos sąlygą

$$P_\theta\Big(X = u|T(X) = t\Big) = \frac{P_\theta\Big(X = u, T(X) = t\Big)}{P_\theta\Big(T(X) = t\Big)} = \frac{P_\theta\Big(X = u\Big)}{P_\theta\Big(T(X) = t\Big)}.$$

Pagal (30.2) ir teoremos sąlygą skaitiklis lygus

$$g_\theta(t)h(u)\mu(\{u\}),$$

o vardiklis –

$$\begin{aligned} P_\theta\Big(T(X) = t\Big) = P_\theta\Big(X \in T^{-1}(t)\Big) &= \sum_{u \in T^{-1}(t)} P_\theta(X = u) \\ &= \sum_{u \in T^{-1}(t)} p_\theta(u)\mu(\{u\}) \\ &= \sum_{u \in T^{-1}(t)} g_\theta\Big(T(u)\Big)h(u)\mu(\{u\}) \\ &= = g_\theta(t) \sum_{u \in T^{-1}(t)} h(u)\mu(\{u\}). \end{aligned}$$

Taigi, santykis suprastinus iš $g_\theta(t)$, virsta funkcija

$$P_\theta\Big(X = u|T(X) = t\Big) = h(u)\mu(\{u\})\Bigg(\sum_{u \in T^{-1}(t)} h(u)\mu(\{u\})\Bigg)^{-1},$$

kuri nepriklauso nuo θ.

Būtinumas. Tegul statistika yra pakankama, t.y., tikimybės

$$P_\theta\Big(X = x|T(X) = t\Big) =: w(x, t)$$

variantas, rastas P_θ b.v., nepriklauso nuo θ. Jei $T(x) = t$, skaičiuojame

$$\begin{aligned} P_\theta(X = x) &= P_\theta\Big(X = x, T(X) = t\Big) \\ &= P_\theta\Big(X = x | T(X) = t\Big) P_\theta\Big(T(X) = t\Big) \\ &= w(x,t) P_\theta\Big(T(X) = t\Big). \end{aligned}$$

Vadinasi, kai $P_\theta(X = x) > 0$,

$$p_\theta(x) = P_\theta\Big(T(X) = T(x)\Big) \cdot w(x, T(x))/\mu(\{x\}) = g_\theta\Big(T(x)\Big) h(x).$$

Diskretųjį atvejį išnagrinėjome.

2. Tolydusis atvejis, esant papildomai glodumo sąlygai, yra vadovėlyje [1]. □

2 pavyzdys. Tarkime, kad paprastoji imtis iš normaliojo dėsnio $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$ ir a yra žinomas. Kokia statistika yra pakankama rasti σ? Atsakymas nėra vienintelis, bet faktorizavimo kriterijus turi būti tenkinamas. Paimkime

$$T(X) = \sum_{j=1}^{n} (X_j - a)^2.$$

Normalusis dėsnis yra absoliučiai tolydus (Lebego mato atžvilgiu), jo tankis, kaip žinome, yra

$$f(x; a, \sigma) := \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\bigg\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^{n} (x_j - a)^2 \bigg\}.$$

Akivaizdu, kad jis išsiskaido

$$f(x; a, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\bigg\{ -\frac{1}{2\sigma^2} T(x) \bigg\} \cdot 1 =: g_\sigma\Big(T(x)\Big) \cdot h(x).$$

3 pavyzdys. Tarkime imtis paprastoji imtis $X = (X_1, \ldots, X_n)$ imama iš Puasono dėsnio $\mathbf{P}oi(\lambda)$ ir $\lambda > 0$ yra nežinomas. Kaip matėme 1 pavyzdyje, imties skirstinys

$$P_X(k) = \prod_{j=1}^{n} P_\lambda(X_j = k_j) = \mathrm{e}^{-n\lambda} \lambda^{k_1 + \cdots + k_n} \frac{1}{k_1! \cdots k_n!}$$

yra dominuojamas mato $\mu(B) := |B \cap \mathbb{N}_0^n|$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, nes

$$P_X(B) = \int_B \mathrm{e}^{-n\lambda} \lambda^{x_1 + \cdots + x_n} \frac{1}{\Gamma(x_1 + 1) \cdots \Gamma(x_n + 1)} \mu(dx).$$

Pasinaudojome lygybe $\Gamma(m + 1) = m!$. Tankis μ atžvilgiu faktorizuojamas:

$$\Big(\mathrm{e}^{-n\lambda} \lambda^{x_1 + \cdots + x_n}\Big) \frac{1}{\Gamma(x_1 + 1) \cdots \Gamma(x_n + 1)} = \Big(\mathrm{e}^{-n\lambda} \lambda^{T(x)}\Big) h(x)$$

jei $T(x) := x_1 + \cdots + x_n$. Vadinasi, $T(X) := X_1 + \cdots + X_n$ yra pakankama statistika.

Iš esmės buvo svarbus tikėtinumo funkcijos

$$\left(\mathrm{e}^{-n\lambda}\lambda^{T(X)}\right)\frac{1}{X_1!\cdots X_n!}$$

faktorizavimas.

Sudėtingesnis pavyzdys iš matematinės genetikos.[1] Žinoma, kad imant genus net iš to paties lokuso, keičiasi jo aleliniai tipai, kuriuos galima atskirti vieną nuo kito. Genas lyg ir tas pats, bet tipai įvairūs. Jie gali nesikartoti, atsirasti nauji, t.y., vyksta mutacija. Bakterijose - net eksperimentų vykdymo metu. Mutacijos greitis, kurį pažymėkime θ, yra susijęs su alelinių tipų skaičiumi. Intuicija sako, kuo tipų daugiau, tuo mutacija didesnė.

Formalizuokime, įsivaizduodami vieną iš genų imčių. Joje bus įvairių genų alelinių tipų atstovų, vieni tipai atstovaujami dažniau, kiti - rečiau. Bet genų imtyje galima suskaičiuoti, kiek yra alelinių tipų, turinčių j atstovų! Jei $X_j \in \mathbb{N}_0$, $1 \le j \le n$, yra tokių tipų skaičius, tai jie turi tenkinti lygybę

$$\ell(X) := 1X_1 + \cdots + jX_j + \cdots + nX_n = n. \tag{30.3}$$

Peršasi išvada, kad statistinį modelį turi sudaryti a. vektorius $X = (X_1, \ldots, X_n)$, juolab, kad

$$T(X) := X_1 + \cdots + X_n$$

yra jau minėtas visų alelinių tipų, pasirodžiusių imtyje, skaičius. Jį manėme esant labai informatyviu tiriant mutacijos greitį θ. Ar teorija tą patvirtins?

Sudarant statistinį modelį, reikia užrašyti a. vektoriaus $X = (X_1, \ldots, X_n)$ skirstinį, įpinant parametrą θ. Kokios natūralios prielaidos gali būti X_j skirstiniui? Jis sukoncentruotas aibėje $\mathbb{N}_0$, bet sunku tikėtis didelių a.d. reikšmių, ypač kai j didelis. Tokiais atvejais dažniausiai taikomi Puasono dėsniai su mažėjančiais parametrais (vidurkiais). Iš kitos pusės, mutacijai intensyvėjant X_j turėtų didėti. Peršasi natūrali prielaida, kad reikia imti nepriklausomų Puasono a.d. $X_1, \ldots, X_n$, turinčių parametrus $\lambda_j = \theta/j$ atitinkamai, rinkinį ir užtikrinti (30.3) sąryšį. Taigi gana natūralus statistinis modelis galėtų būti toks:

$$P_X(k) := P_\theta\Big(X = k | \ell(X) = n\Big),$$

jei $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n$. Šis skirstinys yra sukoncentruotas aibėje $\ell^{-1}(n) = \{k \in \mathbb{N}_0^n :\ \ell(k) = n\}$.

[1] Autoriaus darbų sąlyčiai su šia tematika padėjo jam ir prof. Gutti Jogesh Babu iš Pensilvanijos valstijos universiteto gauti JAV Nacionalinės tyrimų agentūros grantą 1999-2000 m. bendriems tyrimams.

Puasonines tikimybes mokame apskaičiuoti. Tegul $s := (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{N}_0^n$ yra bet koks vektorius, tada pagal pinosios tikimybės formulę

$$\begin{aligned} P_\theta\Big(\ell(X) = n\Big) &= \sum_{s \in \mathbb{N}_0^n} P_\theta\Big(X = s, \ell(X) = n\Big) = \sum_{\ell(s)=n} P_\theta\Big(X = s, \ell(X) = n\Big) \\ &= \sum_{\ell(s)=n} P_\theta(X = s) = \sum_{\ell(s)=n} \prod_{j=1}^n P(X_j = s_j) \\ &= \sum_{\ell(s)=n} \exp\Big\{-\sum_{j=1}^n \frac{\theta}{j}\Big\} \prod_{j=1}^n \Big(\frac{\theta}{j}\Big)^{s_j} \frac{1}{s_j!} \\ &= \exp\Big\{-\sum_{j=1}^n \frac{\theta}{j}\Big\} \sum_{\ell(s)=n} \prod_{j=1}^n \Big(\frac{\theta}{j}\Big)^{s_j} \frac{1}{s_j!} \\ &=: \exp\Big\{-\sum_{j=1}^n \frac{\theta}{j}\Big\} M_n. \end{aligned}$$

Pastarąją sumą galima apskaičiuoti kombinatorinėmis primonėmis. Iš tiesų, dviem būdais raskime n-ąjį koeficientą formalioje eilutėje

$$\begin{aligned} (1-x)^{-\theta} &= \exp\Big\{-\theta \log(1-x)\Big\} = \exp\Big\{\theta \sum_{j=1}^\infty \frac{x^j}{j}\Big\} \\ &= \prod_{j=1}^\infty \exp\Big\{\frac{\theta x^j}{j}\Big\} = \prod_{j=1}^\infty \sum_{k=0}^\infty \Big(\frac{\theta}{j}\Big)^k \frac{x^{jk}}{k!} = \sum_{n=0}^\infty M_n x^n. \end{aligned}$$

Antra vertus,

$$(1-x)^{-\theta} = \sum_{n=0}^\infty \binom{n+\theta-1}{n} x^n.$$

Taigi,

$$M_n = \binom{n+\theta-1}{n} = \frac{\theta(\theta+1)\cdots(\theta+n-1)}{n!} := \frac{\theta^{(n)}}{n!}.$$

Kai $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n$ ir $\ell(k) = n$, tai modelyje esančios sąlyginės tikimybės skaitiklis lygus

$$P_\theta\Big(X = k, \ell(X) = n\Big) = P_\theta\Big(X = k\Big) = \exp\Big\{-\sum_{j=1}^n \frac{\theta}{j}\Big\} \prod_{j=1}^n \Big(\frac{\theta}{j}\Big)^{k_j} \frac{1}{k_j!}.$$

Vadinasi,

$$P_X(k) = P_\theta\Big(X = k | \ell(X) = n\Big) = \frac{n!}{\theta^{(n)}} \prod_{j=1}^n \Big(\frac{\theta}{j}\Big)^{k_j} \frac{1}{k_j!},$$

jei $k \in \ell^{-1}(n)$.

Ši šeima yra dominuojama, pavyzdžiui, σ baigtinio mato

$$\mu(B) := |B \cap \ell^{-1}(n)|, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),$$

nes

$$P_X(B) = \int_B \left(\frac{n!\theta^{x_1+\cdots+x_n}}{\theta^{(n)}}\right)\left(\prod_{j=1}^{n} \frac{1}{j^{x_j}\Gamma(x_j+1)}\right)\mu(dx).$$

Po integralu esanti funkcija (tankis mato μ atžvilgiu) faktorizuojama, todėl pagal Neimano-Fišerio faktorizacijos kriterijų, statistika $T(X) = X_1 + \cdots + X_n$ yra pakankama ir suteikia visą galimą informaciją apie mutacijos greičio parametrą θ.

31. Didžiausio tikėtinumo metodas

Populiariausias statistinio modelio (a.v-iaus $X = (X_1, \ldots, X_n)$ skirstinio), priklausančio nuo nežinomo parametro $\theta \in \Theta$ įvertinių, statistikų $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X)$, sudarymo būdas yra vadinamasis *didžiausio tikėtinumo metodas.*

Tegul modelio a.d. turi bendrą pasiskirstymo funkciją, kuri yra absoliučiai tolydi σ baigtinio mato μ atžvilgiu, t.y. turi atitinkamą tankį $f(x;\theta)$, tenkinantį lygybę

$$P_X(B) = \int_B f(x;\theta)\mu(dx), \quad \theta \in \Theta.$$

Kaip jau minėta, a. d.

$$L(X) := L_X(\theta) := f(X;\theta),$$

vadinama *tikėtinumo funkcija.* Jos realizacijos (tankiai μ atžvilgiu) parodo, kiek tikėtina, jog imtis įgys reikšmę x diskrečiuoju atveju ar reikšmę iš šio taško $(x, x+dx]$ aplinkos tolydžiuoju atveju, nes pirmuoju atveju

$$P_\theta(X = x) = f(x;\theta)\mu(\{x\}) = f(x;\theta),$$

kai $\mu(B) = |B|$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, o antruoju atveju -

$$P_\theta\Big(X \in (x, x+dx]\Big) \approx f(x;\theta)\mu(dx).$$

Geras θ turi realizuoti šios funkcijos maksimumą. Iš čia kyla idėja, kaip rasti gerus θ įvertinius. Dažnai patogiau ieškoti funkciją

$$l(\theta) := \log L(X) := \log L_X(\theta)$$

maksimizuojančių θ. Jie tenkina lygtį

$$\frac{d}{d\theta} l(\theta) = 0. \tag{31.1}$$

Jei $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_m)$ būtų m-matis parametras, turėtume m lygčių. Vektorine forma jas užrašytume

$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta_1} l(\theta), \ldots, \frac{\partial}{\partial\theta_m} l(\theta)\right) = 0 \in \mathbb{R}^m. \tag{31.2}$$

Pavyzdžiai.

1. Tegul imtis, imama iš normaliojo dėsnio su parametrais (μ, σ^2) yra paprastoji. Tada tikėtinumo funkcija

$$L(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma^n (2\pi)^{n/2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^n (X_j - \mu)^2 \right\},$$

o jos logaritmas

$$\ell(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \log \sigma^2 - \frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^n (X_j - \mu)^2.$$

Dalinės išvestinės (vadinamosios *informantės*) yra

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \ell(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^n (X_j - \mu),$$

ir

$$\frac{\partial}{\partial \sigma^2} \ell(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{j=1}^n (X_j - \mu)^2.$$

Prilyginę nuliui, gauname nesunkiai išsprendžiamą lygčių sistemą. Jos sprendiniai yra didžiausio tikėtinumo parametrų (μ, σ^2) įvertiniai:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j = \overline{X},$$

$$\hat{\sigma^2} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (X_j - \overline{X})^2 = m_2.$$

Kaip ir reikėjo tikėtis, sutampa su empiriniais momentais.

Įvertinys $(\hat{\mu}, \hat{\sigma^2})$ maksimizuoja tikėtinumo funkciją. Tuo įsitikiname neskaičiuodami antrųjų išvestinių:

$$\begin{aligned} l(\overline{X}, m_2) - l(\mu, \sigma^2) &= -\frac{n}{2} \log \frac{m_2}{\sigma^2} - \frac{1}{2m_2} \sum_{j=1}^n (X_j - \overline{X})^2 + \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^n (X_j - \mu)^2 \\ &= -\frac{n}{2} \log \frac{m_2}{\sigma^2} - \frac{n}{2} + \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^n \Big((X_j - \overline{X}) + (\overline{X} - \mu) \Big)^2 \\ &= -\frac{n}{2} \log \frac{m_2}{\sigma^2} - \frac{n}{2} + \frac{n m_2}{2\sigma^2} + \frac{n(\overline{X} - \mu)^2}{2\sigma^2} \\ &\geq \frac{n}{2} (u - \log u - 1) \geq 0, \quad u := m_2/\sigma^2, \end{aligned}$$

nes funkcijos $g(u) := u - \log u - 1$, $u > 0$, minimumo taškas yra $u = 1$, be to, $g(1) = 0$. Vadinasi, didžiausias tikėtinumas pasiekiamas imant rastus įvertinius.

2. Daug įvertinių randama panaudojant imties skirstinio P_X tankio $f(x, \theta)$ (atžvilgiu σ adityviojo mato μ) faktorizaciją, kuri yra būtina ieškant pakankamųjų statistikų $T(X)$. Vadinamųjų *eksponentinių* skirstinių atveju galima pradėti nuo pavidalo (žr. aukščiau pateiktus pavyzdžius)

$$f(x,\theta) = h(x) g_\theta\Big(T(x)\Big) = h(x) \exp\Big\{\theta T(x) - b(\theta)\Big\};$$

paprastumo dėlei, čia laikoma, kad parametras θ yra vienamatis. Tada didžiausio tikėtinumo statistika $\hat{\theta} = \theta(X)$ bus lygties

$$0 = l'(\theta) = T(X) - b'(\theta), \qquad b'(\theta) = T(X),$$

sprendinys, užtikrinantis funkcijos $f(x,\theta)$ maksimumą. Jei funkcija $b(u)$ yra diferencijuojama, o jos išvestinė turi atvirkštinę (t.y., mus lydėtų sėkmė), rastume

$$\hat{\theta}(X) = \psi\Big(T(X)\Big).$$

Panaši situacija ir esant didesnio matmenų skaičiaus parametrui θ.

Savarankiškai išsinagrinėkite [1] vadovėlio 4.5.11 pavyzdį apie beta skirstinio parametrų poros didžiausio tikėtinumo įvertinių radimą.

32. Egzamino struktūra

Bilietas

Pirmai ir antrai dalims atskirai:

1. (3 balai) Be knygos: įrodyti suformuluotą teoremą ar teorinį teiginį.

2-3. (po 1 balą) Su knyga ar konspektu: uždaviniai, pratimai, skirti konkretiems atvejams.

KAS BŪTINA ŽINOTI?

2016 m. iš [3] vadovėlio išmokti:

I skyrių be „Arcsine law" 10 skyrelyje ir be 11 skyrelio;

II skyrių 1-8 skyrelius.

Iš [4] įsisavinti 5 skyriaus medžiagą apie Puasono procesą.

Statistikos medžiaga pagal [1] vadovėlį:

1 skyrius: suprasti apibrėžimus, mokėti pasinaudoti ten esančiomis formulėmis turint po ranka knygą.

2 skyrius, skyreliai 2.1 ir 2.2: apibrėžimai, uždaviniai.

3 skyrius, skyreliai 3.1, 3.3 ir 3.5.2: mokėti įrodyti teoremas ir jas taikyti.
Skyreliai 3.2, 3.4, 3.5.1: teoremos be įrodymų, mokėti jas taikyti.
Skyrelis 3.5.3: mokėti taikyti ten išdėstytus metodus skaičiuojant empirinių momentų ir vidurkius ir dispersijas.

4 skyrius, skyreliai 4.5.1 ir 4.5.2: teoremos be įrodymų, mokėti taikyti metodologiją sprendžiant pratimus.

Naudojantis vadovėliu mokėti spręsti uždavinius, kuriems pakanka išvardintuose skyreliuose pateiktos medžiagos.

Linkiu sėkmės, E.M.

Literatūra

[1] V. Bagdonavičius, J. Kruopis, *Matematinė statistika*, 1 dalis, VU, 2007.
[2] J. Kubilius, *Tikimybių teorija ir matematinė statistika*, Vilnius, Mokslas, 1980 ir kiti leidimai.
[3] A.N. Shiryaev, *Probability*, Springer,
[4] Sh.M. Ross, *Introduction to Probability Models*, Academic Press, 7th edn, Boston, 2003.