DARBAI IŠ TIKIMYBINĖS SKAIČIŲ TEORIJOS IR KOMBINATORIKOS

Eugenijus MANSTAVIČIUS

APŽVALGA

Pateikiamas 24 straipsnių, paskelbtų 1982-2014 metais, rinkinys yra viso iki šiol atlikto mokslinio tiriamojo darbo dalis. Pilname autoriaus publikacijų sąraše būtų per 200 darbų, iš jų per 100 sudarytų straipsniai recenzuojamuose ir referuojamuose Lietuvos bei užsienio moksliniuose žurnaluose ir konferencijų darbuose. Pristatomi straipsniai, kuriuose yra daugiau originalių idėjų, naujų uždavinių, pakankamai išbaigti rezultatai arba išsamus tematikos aptarimas. Apžvalgoje rezultatai rikiuojami pagal potemes ir bandoma prisilaikyti chronologinės tyrimų eigos. Siekdami istorinio tikslumo ir įterpdami savo rezultatus į bendrą mokslo plėtotę, minime kitų autorių ir savo darbus, neįdėtus į šį rinkinį. Todėl apžvalgos gale yra du bibliografiniai sąrašai. Pirmąjį iš sudaro tik šio rinkinio straipsniai, jie cituojami panaudojant numeraciją [1],..., [24]. Minėdami kitus darbus, naudojame autorių inicialus ir metų nuorodą.

Apžvalgą dalijame į dvi dalis, skirtas tikimybinei skaičių teorijai (TST) ir tikimybinei kombinatorikai (TK).

TURINYS

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

I. TIKIMYBINĖ SKAIČIŲ TEORIJA

Tikimybinė skaičių teorija – ,,lietuviška" mokslo šaka. Jai pagrindus padėjo profesoriaus Jono Kubiliaus mokslinis įnašas. Be jo, šiuolaikinei problematikai susiformuoti buvo svarbūs Vengrijos (P. Erdős, I. Ruzsa, I. Kátai, G.Halász), Prancūzijos (H. Delange, G. Tenenbaum), JAV (A. Hildebrand, P.D.T.A. Elliott), Rusijos (B.V. Levin, N.M. Timofeev), Vokietijos (W. Schwarz, K.-H. Indlekofer) ir kitų matematikų darbai. Siaurąja prasme TST suprantama kaip aritmetinių funkcijų reikšmių pasiskirstymo teorija, kai argumentas, kuris yra natūralusis skaičius, imamas atsitiktinai.

Tegul $\mathbf{N}$ ir $\mathbf{R}$ yra natūraliųjų ir realiųjų skaičių aibės, o ν_n – tolygusis tikimybinis matas, apibrėžtas aibėje $\{1,\dots,n\}$. Pagal apibrėžimą funkcija $h:\mathbf{N}\to\mathbf{R}$ yra adityvioji funkcija, jei kiekvienai porai tarpusavyje priminių skaičių m,n teisinga lygybė $h(mn)=h(m)+h(n)$. Todėl šias funkcijas galima apibrėžti pirminių skaičių natūraliųjų laipsnių aibėje $\{p^k\ :\ \ p\,-\,pirminis,\, k\in\mathbf{N}\}$. Tarp jų yra, pavyzdžiui, skaičiaus m skirtingų pirminių daugiklių kiekis $\omega(m)$, kitos svarbios skaičių teorijos funkcijos. Nors $\omega(p^k)\equiv 1$, funkcijos $\omega(m)$ elgsena, kai m perbėga visus natūraliuosius skaičius, yra gana chaotiška. Egzistuojančius dėsningumus tenka aprašyti tikimybių teorijos terminais. Išskirsime keletą nagrinėtų uždavinių tipų.

1.1. Pagrindinė TST problema.

J. Kubiliaus monografijoje [JK62] buvo suformuluota ir dalinai išspręsta pagrindinė TST problema.

Problema. *Kada egzistuoja tokios normuojančios sekos* $\alpha(n)\in\mathbf{R}$ *ir* $\beta(n)>0$, *kad skirstiniai* $\nu_n(u):=\nu_n\big(h(m)<\alpha(n)+x\beta(n)\big)$, $x\in\mathbf{R}$, *silpnai konverguotų į ribinį dėsnį?*

Čia ir toliau ribiniuose sąryšiuose $n\to\infty$. J. Kubilius naudojo vadinamąjį standartinį normavimą, kai

$$\alpha(n)=A(n):=\sum_{p^k\le n}\frac{h(p^k)}{p^k},\qquad \beta(n)=B(n):=\Big(\sum_{p^k\le n}\frac{h^2(p^k)}{p^k}\Big)^{1/2}.$$

Jo rezultatai yra galutiniai, jei $h(m)$ priklauso jo vardu pavadintai klasei $\mathcal{H}$, apibrėžiamai sąlyga

$$B(n)\sim B(nu)\to\infty,\quad \forall u\in(0,1).$$

Iki šiol nerasta galutinio iškeltos problemos sprendimo, kai $\beta(n)\to\infty$, todėl buvo keliami nauji artimi uždaviniai.

Viename iš pirmųjų [EM73] darbų mes išnagrinėjome funkcijos $h(m)$ reikšmių trupmeninių dalių $\{h(m)\}$ ribinio skirstinio egzistavimo problemą, nustatydami būtinas ir pakankamas sąlygas, kada pasiskirstymo funkcijos $\nu_n\big(\{h(m)-\alpha(n)\}<u\big)$ konverguoja moduliu vienetas į ribinį dėsnį intervale $[0,1]$. Abi darbo teoremos, sujungtos į vieną teiginį yra išdėstytos P.D.T.A. Elliott'o monografijoje [El79] (1 t. 8.9 teorema). Vėliau mums buvo pavykę nustatyti bendriausias tuo metu žinomas sąlygas, kada $\nu_n(u)$ konverguoja į išsigimusį nulio taške dėsnį; deja, mokslines lenktynes sprendžiant pastarąjį uždavinį laimėjo I. Ruzsa. Po poros dešimtmečių, nagrinėjant didžiųjų skaičių dėsnį kombinatoriškai apibrėžtiems dydžiams, pavyko būti pirmuoju (žr II skyrelį ir [13]).

Šio rinkinio pirmame straipsnyje [1] išplečiama Kubiliaus $\mathcal{H}$ klasė ir apibendrinami jo rezultatai. Pagal apibrėžimą platesnės klasės $\mathcal{H}(\alpha,\beta)$ adityviosios funkcijos tenkina sąlygas:

$$\frac{1}{B(n)\log n}\sum_{p\le n}\frac{h(p)\log p}{p}=\alpha+o(1),$$

$$\frac{1}{B^2(n)\log n}\sum_{p\le n}\frac{h^2(p)\log p}{p}=\beta+o(1).$$

Dabar $|\alpha|\le\min\{1/\sqrt{2},\sqrt{\beta}\}$, $0\le\beta\le 1$ ir $\mathcal{H}=\mathcal{H}(0,0)$.

Pateiksime tik paprasčiau formuluojamus teiginius. Toliau visur $B(n)\to\infty$.

1 teorema. *Tegul $h(m)\in\mathcal{H}(\alpha,\beta)$. Pasiskirstymo funkcijos $\nu_n(x)$ silpnai konverguoja į neišsigimusį dėsnį tada ir tik tada, jei egzistuoja tokia nemažėjanti aprėžta funkcija $K(u)$, kad $K(-\infty)<K(\infty)$ ir*

$$K_n(u):=\frac{1}{B^2(n)}\sum_{p\le n}\frac{h^2(p)}{p}I\{h(p)<uB(n)\}$$

silpnai konverguoja į $K(u)$. Jei pastaroji sąlyga yra patenkinta, tai tolygiai atžvilgiu u iš kiekvieno baigtinio intervalo

$$B(n^u)/B(n)\to u^{\beta/2(1-\beta)},\quad \beta<1,$$

ir

$$\frac{A(n^u)-A(n)}{B(n)}\to\begin{cases}0, & \text{jei } \beta=0,\\ \frac{\alpha(2-\beta)}{\beta}\big(u^{\beta/2(1-\beta)}-1\big), & \text{jei } \beta\ne 0.\end{cases}$$

Lyginant su J. Kubiliaus rezultatais galima pastebėti, kad šioje teoremoje galimi ribiniai dėsniai sudaro platesnę negu neaprėžtai dalių skirstinių aibę. Į normalųjį dėsnį gali konverguoti skirstiniai adityviųjų funkcijų, nebūtinai priklausančių Kubiliaus $\mathcal{H}$ klasei. Tačiau tokių funkcijų reikšmės pirminių skaičių aibėje negali būti pastovaus ženklo. Tą rodo šis referuojamo darbo rezultatas.

Tegul $I\{\cdot\}$ žymi nurodyto įvykio indikatorių.

2 teorema. *Tegul $\delta>0$ yra bet kokia konstanta ir*

$$\frac{1}{\log n}\sum_{p\le n}\frac{\log p}{p}I\{h(p)<-\delta B(n)\}=o(1).$$

Skirstiniai $\nu_n(x)$ konverguoja į standartinį normalųjį dėsnį tada ir tik tada, jei patenkinta Lindebergo sąlyga

$$\frac{1}{B^2(n)}\sum_{p\le n}\frac{h^2(p)}{p}I\{|h(p)|\ge\varepsilon B(n)\}=o(1)\qquad((\mathrm{L}))$$

su kiekvienu $\varepsilon>0$.

Teorema apibendrina B.V. Levin'o ir N.M. Timofeev'o ([LeTi74], [LeTi77]) bei P. Elliott'o darbus šiuo klausimu (plačiau žr. monografijos [El79]) antrąjį tomą. Mūsų straipsnyje buvo iškeltas uždavinys nagrinėti adityviųjų funkcijų skirstinių logaritminio tankio prasme konvergavimą susiejant tai su pirmųjų momentų konvergavimu. Tokiu būdu buvo pasiekta pažanga sprendžiant pagrindinės TST problemos analogą.

Tegul

$$\mu_n(x) := \frac{1}{\log n} \sum_{m \le n} \frac{1}{m} I\{h(m) < A_n + xB(n)\},$$

o $a(\mu)$ bei $b(\mu)$ yra skirstinio μ pirmieji du momentai.

3 teorema. *Šie teiginiai yra ekvivalentūs:*

- $\mu_n(x)$ *silpnai konverguoja į* $\mu(x)$, $a(\mu) = 0$ *ir* $b(\mu) = 1$;
- $h(m) \in H$ *ir egzistuoja tokia pasiskirstymo funkcija* $K(u)$, *kad* $K_n(u)$ *silpnai konverguoja į* $K(u)$.

Išvada. *Pasiskirstymo funkcijos* $\mu_n(x)$ *silpnai konverguoja į standartinį normalųjį dėsnį tada ir tik tada, kai patenkinta Lindebergo sąlyga* (L).

Panašiai, buvo išspręsta ir logaritminiam tankiui performuluota pagrindinė TST problema, kai žinomi ribinių skirstinių pirmieji du momentai, o normavimas yra standartinis.

Daug dėmesio autorius skyrė pasiskirstymo funkcijų $\nu_n(x)$ (ir jų analogų multiplikatyviosioms funkcijoms) konvergavimo į normalųjį dėsnį (logaritminį normalųjį) greičiui nustatyti. Mūsų 1974 m. straipsnis [EM74] išsiskyrė tuo, kad jame pirmą kartą analizinis Halász'o metodas buvo pritaikytas kiekybinei analizei. Jis turėjo įtakos J. Kubiliaus mokinių Z. Kryžiaus [ZKdis] ir A. Mačiulio [AMdis] disertacijoms ir vėlesniems tyrimams.

1.2. Funkcinės ribinės teoremos.

Nupjaudami kanonines sumas, išreiškiančias adityviąsias funkcijas $h(m)$, ir įvesdami laiko parametrą $t \in [0, 1]$ apibrėžiame trajektorijas, priklausančias funkcijų erdvėms $\mathbf{C}[0, 1]$ arba $\mathbf{D}[0, 1]$ (žr. [Bi68k]). Kai $m \le n$ imame atsitiktinai, dažniausiai pagal tikimybinį matą ν_n, iš determinuotų objektų gauname atsitiktinių procesų seką. Iškyla jų skirstinių konvergavimo minėtose erdvėse problemos.

Trumpumo dėlei, tegul $h(m)$ yra stipriai adityvioji (t.y. $h(p^k) = h(p)$ kiekvienam pirminiam skaičiui p ir $k \in \mathbf{N}$) funkcija, $A(n)$ ir $B(n)$ anksčiau įvestos standartinės normuojančios sekos ir $B(n) \to \infty$. Pažymėkime

$$W_n := W_n(m, t) = B(n)^{-1} \Bigg(\sum_{\substack{p \le x(t) \\ p | m}} h(p) - A(x(t)) \Bigg),$$

čia

$$x(t) := x_n(t) := \sup\{u : \, B^2(u) \le tB^2(n)\}, \quad 0 \le t \le 1.$$

Erdvėje $\mathbf{D}$ su Skorohodo topologija galima tirti skirstinių $\nu_n \circ W_n^{-1}$ konvergavimą, kai $n \to \infty$. Tiesiškai sujungdami $W_n(m, t)$ grafiko trūkius galima apibrėžti tolydžias trajektorijas ir erdvės $\mathbf{C}[0,1]$ procesus. Matų silpnąjį konvergavimą žymėsime simboliu $\Rightarrow$. Jei $\nu_n \circ W_n^{-1} \Rightarrow P \circ X^{-1}$, čia $X := X(t)$ koks nors atsitiktinis procesas, apibrėžtas tikimybinėje erdvėje $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$, mes taip pat žymėsime $W_n \Rightarrow X$, o W_n vadinsime *aritmetiniu proceso X modeliu.* Toliau W yra standartinis Brauno judesys intervale $[0,1]$.

J. Kubiliaus 7.3 teorema iš [JK62] nagrinėja specialaus funkcionalo, apibrėžto $W_n(m,t)$ trajektorijose, konvergavimą. Bendresnės teoremos priklauso W. Philip'ui [WP73] ir P. Bilingsley'iui [Bi74], kurie įrodė $\nu_n \circ W_n^{-1}$ konvergavimą į Vynerio matą, kai $h(p)$ yra aprėžtos. Prasidėjo varžytuvės gauti bendras aritmetiškai apibrėžtų procesų konvergavimo sąlygas. N.M. Timofeev'as ir H.H. Usmanov'as [TiUs82] įrodė, kad anksčiau minėta Lindebergo sąlyga (L) yra netgi būtina ir pakankama konvergavimui į ribinį standartinį Brauno judesį.

Nagrinėjant bendresnius modelius, ypač procesų su begaline dispersija atveju, $B(n)$ reikia keisti ir vietoje $x(t)$ įvesti kitą nupjaunančiąją seką. Tegul toliau $\beta(n) \to \infty$ yra bet kokia, $u^* = \min\{1, |u|\} \operatorname{sgn} u$,

$$B^2(v,n) = \sum_{p \le v} \left(\frac{h(p)}{\beta(n)}\right)^{*^2} \frac{1}{p},$$

Pažymėkime

$$y(t) := y_n(t) = \sup\{u : \ B^2(u,n) \le tB^2(n,n)\},$$

čia $0 \le t \le 1$. Aritmetiniai procesų modeliai apibrėžiami tokiu būdu:

$$H_n := H_n(m,t) = \sum_{\substack{p \le y(t) \\ p|m}} \frac{h(p)}{\beta(n)} - \sum_{p \le y(t)} \left(\frac{h(p)}{\beta(n)}\right)^* \frac{1}{p}.$$

Straipsniuose [EM84] ir [EM85] nustatėme būtinas ir pakankamas konvergavimo į stabiliuosius ir bendresnius Levý procesus sąlygas. Kitą žingsnį vėl žengė minėtieji N.M. Timofeev'as ir H.H. Usmanov'as [TiUs84], aprėpdami visą klasę ribinių procesų, kurių prieaugiai yra nepriklausomi, o skirstiniai yra saviskaidūs. Svarbūs Puasono ir kiti neaprėžtai dalūs procesai liko nepaliesti, jų modeliavimui netinka viena nupjautinė adityvioji funkcija. Reikia pradėti nuo jų sekų. Paskutinis žodis šioje problemoje priklauso mums. Suformuluosime šiame rinkinyje pateikto straipsnio [2] rezultatą.

Tegul $X := X(t)$ yra stochastiškai tolydus procesas, apibrėžtas erdvėje $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ ir turintis nepriklausomus prieaugius bei trajektorijas, priklausančias erdvei $\mathbf{D}[0,T]$. Čia $T > 0$ bet koks fiksuotas skaičius. Proceso charakteristinę funkciją užrašykime tokiu būdu:

$$\mathbf{E}e^{i\lambda X(t)} = \exp\left\{ i\lambda\gamma(t) + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\lambda w} - 1 - i\lambda w^*) {w^*}^{-2} \, d(\Psi_t(w)) \right\},$$

čia $\gamma(t)$ yra tolydi funkcija, o $\Psi_t(w)$ yra aprėžta, tolydi atžvilgiu t ir nemažėjanti atžvilgiu t bei w. Be to, fiksuotoms poroms $0 \le s < t \le T$ skirtumas $\Psi_t(w) - \Psi_s(w)$ taip pat nemažėja.

Apibrėždami $X(t)$ aritmetinį modelį, imkime tokią realiųjų skaičių $h_n(p)$ seką, kad $h_n(p) = o(1)$ kiekvienam p, ir pažymėkime

$$Z_n := Z_n(m,t) = \sum_{\substack{p|m \\ p \le z_n(t)}} h_n(p) - \sum_{p \le z_n(t)} \big(h_n(p)\big)^* \frac{1}{p}$$

Čia $z_n : [0,T] \to \{1,\ldots,n\}$ – monotoniškai didėja ir tenkina sąlygą: jei $z_n([0,T]) := \{1 = k_{n1} < \cdots < k_{nj_n}\}$, tai

$$(i_1) \qquad \max\{k_{n,j+1} - k_{nj} : 1 \le j < j_n\} = o(n^\varepsilon) \qquad \text{su bet kokiu } \varepsilon > 0$$

ir

$$(i_2) \qquad \max\{\operatorname{meas} z_n^{-1}(k_{nj}) : 1 \le j \le j_n\} = o(1).$$

Trumpumo dėlei pažymėkime

$$D(n,v) = \sum_{p \le v} \big(h_n(p)\big)^{*2} \frac{1}{p}, \qquad \Psi_t^n(w) = \sum_{p \le z_n(t)} \frac{1}{p} \big(h_n(p)\big)^{*2} I\{h_n(p) < w\}.$$

4 teorema. *Procesų seka Z_n silpnai konverguoja į X tada ir tik tada, kai*

(I) $\Psi_t^n(w) \Rightarrow \Psi_t(w)$ *ir* $\Psi_t^n(\pm\infty) \to \Psi_t(\pm\infty)$ *su bet kokiu* t, $0 \le t \le T$;

(II) $D(n,n) - D(n^\varepsilon, n) = o(1)$ *su bet kokiu* ε, $0 < \varepsilon < 1$.

Netgi tradiciniai funkcinių ribinių teoremų taikymai procesų funkcionalams aprašyti pasiteisino skaičių teorijoje. Suformuluotos teoremos išvada yra P. Erdös'o [Er46] be įrodymo paskelbtas teiginys. Toliau naudosime santrumpą $Lu = \log\max\{u, e\}$, kai $u \in \mathbf{R}$.

Išvada. *Tegul $p_1(m) < \cdots < p_{\omega(m)}$ yra visi skirtingi skaičiaus $m \in \mathbf{N}$ pirminiai daugikliai. Tada*

$$\nu_n\big(\#\{k \le \omega(m) : LLp_k(m) < k\} < uLLn\big) \Rightarrow \frac{2}{\pi} \arcsin\sqrt{u},$$

čia $0 \le u \le 1$.

Visi bandymai įrodyti šį arksinuso dėsnį, panaudojant santykio $L\big(Lp_{k+1}(m)/Lp_k(m)\big)$ elgseną "beveik visiems m", buvo nesėkmingi. Mums patikslinus šio santykio asimptotikas, buvo realizuota ir ši įrodymo idėja [EM94].

1995 m., gavę ES individualų grantą tyrimams Bordeaux 1-ame universitete, mes pirmieji apibrėžėme naujus aritmetinius procesus, kuriuose pirminiai dalikliai pakeičiami natūraliaisiais. Rezultatai buvo paskelbti straipsnyje [3], įtrauktame į šį rinkinį. Jie parodo, kad nupjautinė natūraliųjų daliklių funkcija $\tau(m,x) := \#\{d \in \mathbf{N} : d|m,\ d \le x\}$, čia $x \ge 1$, taip pat „žaidžia" Brauno judesį.

5 teorema. *Pažymėkime*

$$U_n := U_n(m,t) = \frac{1}{\sqrt{LLn}} \big(\log_2 \tau(m, \exp\{(Ln)^t\}) - tLLn\big), \quad 0 \le t \le 1.$$

Tada $\nu_n \circ U_n^{-1} \Rightarrow W$.

Tegul $1 = d_1(m) \le d_2(m) \le \cdots \le d_{\tau(m)}$ – yra visi natūralieji m dalikliai, I^+ – aibės $\{x : x > 0\}$ indikatorius.

Išvada. *Visiems* $0 \le u \le 1$ *turime*

$$\nu_n\Big(\sum_{j\le\tau(m)}\frac{1}{j}I^+\big(\log_2 j - LLd_j(m)\big) < u(L2)LLn\Big) \to \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{u}.$$

Kartu su N.M. Timofeev'u [4] žengėme kitą žingsnį – pradėjome tirti bendrus dalinėmis sumomis apibrėžtus aritmetinius procesų modelius. Tarkime, kad $f(d)$ yra neneigiama multiplikatyvioji funkcija,

$$F(m,v) := \sum_{d|m, d\le v} f(d), \qquad F(m,m) =: F(m)$$

ir

$$X_n := X_n(m,t) := F(m)^{-1}F(m,n^t), \quad 0 \le t \le 1.$$

6 teorema. *Jei* $f(p) = \kappa > 0$ *ir* $f(p^k) \ge 0$ *su visais pirminiais skaičiais* p *ir* $k \ge 2$, *tai skirstiniai* $\nu_n \cdot X_n^{-1}$ *silpnai konverguoja į ribinį matą, apibrėžtą erdvės* $\mathbf{D}[0,1]$ *Borelio aibių* σ *algebroje.*

,,Ant kulnų lipo" G. Tenenbaum'as, parašęs priedą [Te97] mūsų darbui. Šių modelių tyrimai buvo pratęsti kartu su G. Bareikiu. Pristatytame darbe [5] ištirtas vidurkis.

7 teorema. *Tegul* X_n *yra apibrėžtas procesas,* $n \ge 3$, $f(d)$ *tenkina* 6 *teoremos sąlygas ir* $f(p^k)$ *yra aprėžti visiems pirminių skaičių laipsniams* p^k. *Tada*

$$\frac{1}{n}\sum_{m\le n} X_n(m,t) = B(t;\alpha,\beta) + O\Big(\frac{1}{\log^\alpha n} + \frac{1}{\log^\beta n}\Big).$$

Čia $B(t;\alpha,\beta)$ *yra beta skirstinio funkcija, o* $\alpha = a/(1+\kappa) = 1-\beta$.

Rezultatas paneigė tuo metu vyravusią specialistų nuomonę, kad ši vidurkio riba visada turinti būti arcsinuso dėsnio skirstinio funkcija. Gautasis konvergavimo greičio įvertis yra optimalus.

Visos TST funkcinės ribinės teoremos iki 1999 m. išsamiai apžvelgtos studijiniame šio rinkinio [6] straipsnyje, susilaukusiame itin palankaus įvertinimo referatiniuose žurnaluose (Žr. *Mathematical Reviews*, MR1954708(2004b:1115), F. Saidak). Todėl atsitiktinių procesų, apibrėžtų panaudojant skaitmenų sumas įvairiose adityviosiose bazėse, tyrimų (žr., pavyzdžiui, [EM97], [9]) nekomentuosime. Kitu aspektu pastarasis darbas bus analizuojamas sekančiame skyrelyje.

1.3. Kartotinio logaritmo dėsniai.

Šiai tematikai atstovauja trys rinkinio straipsniai - [7], [8] ir [9]. Pirmieji rezultatai iš jos buvo paskelbti dar 1986 m. [EM86a], [EM86b] ir kt.

Nagrinėjamas stiprusis atsitiktinių aritmetinių objektų (funkcijų, procesų) sekų konvergavimas. Problemos formuluojamos tikimybinių erdvių sekoje $(\mathbf{N}, \mathcal{N}, \nu_n)$, o ne fiksuotoje erdvėje, kaip įprasta tikimybių teorijoje. Pirmiausia teko išplėsti konvergavimo su tikimybe vienetas koncepsiją. Tokią galimybę dar 1946 m. [Er46] gana neformaliai paminėjo P. Erdős. Pateiksime pagrindinę sąvoką.

Tegul $(\mathcal{S}, d)$ yra separabili metrinė erdvė, $n \in \mathbf{N}$ ir $Y, Y_1, \ldots, Y_n$ yra $\mathcal{S}$-reikšmiai atsitiktiniai elementai, apibrėžti tikimybinių erdvių sekoje $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n)$. Pažymėkime $d(X, A) = \inf\{d(X, Z) : Z \in A\}$, $A \subset \mathcal{S}$, elemento X atstumą nuo aibės $A \subset \mathcal{S}$. Sakome, kad Y_k *stipriai konverguoja* į Y matų sekos $\mathcal{P} := \{P_n\}$ atžvilgiu, jeigu su kievienu $\varepsilon > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P_n\Big(\max_{x\le k\le n} d(Y_k, Y) \ge \varepsilon\Big) = 0.$$

Jei P_n nepriklauso nuo n, tai šis sąryšis išreiškia konvergavimą su tikimybe vienetas. Kompaktinė aibė $A \subset \mathcal{S}$, tenkinanti sąlygas

$$\lim_{x\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P_n\Big(\max_{x\le k\le n} d(Y_k, A) \ge \varepsilon\Big) = 0$$

ir

$$\lim_{x\to\infty} \liminf_{n\to\infty} P_n\Big(\max_{x\le k\le n} d(Y_k, X) \ge \varepsilon\Big) = 1$$

su bet kokiais $\varepsilon > 0$ ir $X \in A$, vadinama sekos $\{Y_k\}$ *sankaupos aibe* $\mathcal{P}$ beveik tikrai ($\mathcal{P}$-b.t.). Šiuos du sąryšius pažymėkime $Y_k \hookrightarrow A$ ($\mathcal{P}$-b.t.). Darbų cikle buvo išvestas stiprusis didžiųjų skaičių dėsnis, kartotinio logaritmo dėsniai ir rastos įvairių aritmetinių objektų reikšmių sankaupos aibės (ν-b.t.), čia $\nu := \{\nu_n\}$. Pradžioje pateiksime paprastą išvadą.

Kaip ir anksčiau, tegul $\omega(m, k)$ yra m skirtingų pirminių daugiklių, neviršijančių k, skaičius, o $L_j u$ žymi j kartotinumo logaritmą, tada

$$\big(2(L_2k)L_4k\big)^{-1/2}\big(\omega(m,k) - L_2k\big) \hookrightarrow [-1, 1] \quad (\nu - b.t.)$$

Iš gilesnio Felerio teoremos analogo (žr. pristatytą [8] darbą) išplaukia informacija apie j-ojo skaičiaus m pirminio daugiklio $p_j(m)$ elgseną: su kiekvienu $s \ge 2$ ir $0 < \varepsilon < 1$ įvertis

$$\big|L_2p_j(m) - j\big| \le \Big(2j\big(L_2j + \frac{3}{2}L_3j + L_4j + \cdots + (1+\varepsilon)L_sj\big)\Big)^{1/2}$$

galioja ν-b.t., bet negalioja $+\varepsilon$ pakeitus $-\varepsilon$. Tokių rezultatų reikia tiriant natūraliųjų skaičiaus m daliklių savybes (žr. [HaTe88]). Pastarosios knygos autoriai kitu metodu sugebėjo gauti $p_j(m)$ asimptotiką beveik visiems m, tik kai $s = 2$. Beje, pastarąją formulę jau buvo spėjęs P. Erdős [Er69].

Rinkinio [8] darbe pirmą kartą skaičių teorijoje nustatomos artimetinių procesų trajektorijų sankaupos aibės ir įrodomi vadinamieji Strassen'o kartotinio logaritmo dėsniai. Pagal apibrėžimą *Strassen'o aibę* $\mathcal{K} \subset \mathbf{C}[0, 1]$ sudaro tokios absoliučiai tolydinės funkcijos $g : [0, 1] \to \mathbf{R}$, kad $g(0) = 0$ ir

$$\int_0^1 \big(g(t)\big)^2 dt \le 1.$$

Pateiksime vieną iš bendresnių teoremų. Tegu

$$h(m, q) := \sum_{p^\alpha || m, p \le q} h(p^\alpha), \quad 2 \le q \le n,$$

yra nupjautinė adityvioji funkcija, $A(n)$ – anksčiau apibrėžta centruojanti konstantų seka,

$$D(u) := \sum_{p\le u} \frac{h^2(p)}{p}\Big(1-\frac{1}{p}\Big), \qquad \beta(u) = \sqrt{2D(u)L_2(u)}.$$

Tegul $2 \le q < q' \le n$ yra funkcijos $D(u)$ gretimi trūkio taškai. Nagrinėjamas laiptinių trajektorijų procesas $U_k(m,t)$, apibrėtas lygybėmis

$$U_k(m,t) = \beta(k)^{-1}\big(h(m,q) - A(q)\big),$$

kai $D(q)/D(k) \le t < D(q')/D(k)$ ir $q \le k$.

8 teorema. *Jei* $D(p) \to \infty$ *ir*

$$h(p) = o\Big(\sqrt{D(p)}/\sqrt{L_2 D(p)}\Big), \quad p \to \infty,$$

tai $U_k(m,\cdot) \hookrightarrow \mathcal{K}$ *(*ν *b.t.*

Funkcionalai, apibrėžti šio proceso trajektorijose, išreiškia pirminių daugiklių beveik visiems m savybes. Anksčiau suformuluotą j-ojo daugiklio $p_j(m)$ asimptotiką, papildysime funkcine ribine teorema. Patogumo dėlei, dabar pažymėkime $p_{[u]}(m) =: p(m,u)$, kai $0 \le u \le \omega(m)$, ir $p(m,u) = 0$, kai $0 \le u < 1$. Tegul, be to,

$$P_k(m,t) := \frac{L_2 p(m,tk) - tk}{\sqrt{2kL_2k}}, \quad 0 \le t \le 1.$$

9 teorema. *Tegul* $\mathcal{K}$ *yra Strassen'o aibė. Tada*

$$P_k(m,t) \hookrightarrow \mathcal{K} \quad (\nu - b.t.)$$

Darbe [8] analogiška teorija buvo išplėtota ir aritmetiniams procesams, apibrėžtiems per natūraliuosius daliklius. Tegul $1 = d_1(m) < d_2(m) < \cdots < d_{\tau(m)}(m)$ yra atsitiktinio skaičiaus m natūraliųjų daliklių seka. Pažymėkime $d_{[u]}(m) =: d(m,u)$, kai $0 \le u \le \tau(m)$, ir $d(m,u) = 0$, kai $0 \le u < 1$, ir

$$D_k(m,t) := \frac{L_2 d(m,k^t) - t(Lk)/L2}{\sqrt{2\big((Lk)L_3k\big)/L2}}, \quad 0 \le t \le 1.$$

10 teorema. *Tegul* $\mathcal{K}$ *yra Strassen'o aibė. Tada*

$$D_k(m,t) \hookrightarrow \mathcal{K} \quad (\nu - b.t.)$$

Šis rezultatas toli pralenkia 13-ą knygos [HaTe88] teoremą. Pacituosime I. Berkes ir M. Weber [BeWe] žodžius, parašytus adityviųjų aritmetinių funkcijų kartotinio logaritmo dėsnių teorijos apžvalgoje:

Erdos' teorema vėliau buvo išplėsta Kubiliaus (žr. [Ku62], *7.2 teorema) ir keletoje Manstavičiaus darbų. Naudodamas konvergavimo su tikimybe vienetas koncepsijos plėtinį, pritaikomą tikimybinių erdvių sekų kontekste, Manstavičius atliko gilų adityviųjų funkcijų KLD (kartotinio logaritmo dėsnių) savybių studiją, apimančią modifikuotas Strassen'o tipo funkcines KLD versijas.*

Dar 1996 m. (žr. [EM97] ir kt.) pradėjome plėtoti aritmetinių funkcijų, susijusių su sveikojo neneigiamo skaičiaus m adityviuoju dėstiniu skaičiavimo sistemoje pagrindu q, t.y.

$$m = \sum_{j=0}^{N} a_{q,j}(m) q^j,$$

čia $q \geq 2$ yra natūralusis skaičius, $N+1 := N_q + 1$ skaitmenų skaičius, o $a_{q,j}(m) \in \{0, \ldots, q-1\}$ – skaitmenys. Skaitmenų suma $s_q(m)$ ir bendresnės q adityviosios funkcijos $h(m)$, turinčios pavidalą

$$h(m) = \sum_{j=0}^{N} h(a_{q,j}(m) q^j),$$

imant m iš aibės $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ su vienodomis tikimybėmis (pagal tolygųjį tikimybinį matą ν_n) yra paslaptingas TST objektas. Pradžioje pavyko įrodyti vienamates ir funkcines ribines teoremas, nagrinėjančias silpnąjį skirstinių konvergavimą. Pavyzdžiui, buvo įrodyta, kad procesas

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{N}} \Bigg(\sum_{0 \leq j \leq Nt} \Big(a_{q,j}(m) - \frac{q-1}{2} \Big) \Bigg)$$

modeliuoja Brauno judesį. Čia $\sigma := \sqrt{(q^2-1)/12}$. Po to, nagrinėdami stiprųjį konvergavimą, įrodėme, kad laužtėmis, einančiomis per taškus,

$$\Big(\frac{i}{k}, \frac{1}{\sigma\sqrt{2k \log\log k}} \Big(s_q(m,i) - \frac{(q-1)i}{2} \Big) \Big), \quad i = 0, 1, \ldots, k,$$

apibrėžta procesų seka $S_{q,n,k}(m,t)$ paklūsta Strassen'o dėsniui.

Pratęsdami [8] darbą, rinkinio kolektyviniame straipsnyje [9], uždavinius apibendriname nagrinėdami superpozicijas $h(P(m))$, čia $P(m)$ yra polinomas su sveikaisiais koeficientais, su teigiamu vyriausiuoju koeficientu ir laipsnio $\deg P = r$. Be to, pradėjome nagrinėti dvimates teoremas. Tą paskatino *Gelfondo hipotezė*, teigianti, kad skirtingose q bazėse apibrėžtos adityviosios funkcijos yra asimptotiškai stochastiškai nepriklausomos. Ji pasitvirtino netgi funkcinėse ribinėse teoremose stipriojo konvergavimo prasme, t.y. (ν-b.v.). Teko apsiriboti vadinamaisiais likinių klases (mod q^k) perstatančiaisiais polinomais (toliau šią savybę žymėsime $P \in \mathfrak{P}$).

10 teorema. *Tegul $P_1(m), P_2(m) \in \mathfrak{P}$, $q_1 \neq q_2$ yra du skaičiavimo sistemų pagrindai, ir $S_{q_1,n,k}(P_1(m),t)$ bei $S_{q_2,n,k}(P_2(m),t)$ – dvi ką tik apibrėžtos procesų sekos. Natūraliai praplėtus stipriojo konvergavimo sąvoką ir jo žymenį dvimačiu atveju, turime*

$$\Big(S_{q_1,n,k}(P_1(m),t), S_{q_2,n,k}(P_2(m),t) \Big) \hookrightarrow \mathcal{K} \times \mathcal{K} \ \ (\nu - b.t.)$$

Pastarąją teoremą pritaikius įvairiems funkcionalams, gaunama įdomių skaičių teorijos faktų.

1.4. Aritmetiniai pusgrupiai.

Dirbdami Paderborno (VFR) universitete vizituojančiu profesoriumi 1989-1990 m., įsitraukėme į adityviųjų aritmetinių pusgrupių tematiką. Šie objektai apibendrina polinomų virš baigtinių kūnų pusgrupius ir yra išskirtinai svarbi teorinėje informatikoje bei kriptologijoje. Aritmetinio pusgrupio $\mathbf{G}$ elementas $a \neq e$, (čia e yra neutralusis elementas) yra išskaidomas vieninteliu būdu baigtine pirminių elementų iš $\mathbf{P} \subset \mathbf{G}$ sandauga. Yra apibrėžiama visiškai adityvi funkcija $\partial : \mathbf{G} \to \mathbf{N}_0$, tenkinanti sąlygą $\partial(p) \geq 1$ kiekvienam $p \in \mathbf{P}$, vadinama laipsniu. Bendrą analizinę teoriją praeito amžiaus aštuntajame dešimtmetyje kūrė J.Knopfmacher'is [Kn79]. Teorijos pagrindu tapo

A aksioma. *Egzistuoja tokios konstantos $A > 0$, $q > 1$ ir $0 \leq \alpha < 1$, kad*

$$G_n := \big|\{a \in \mathbf{G} : \ \partial(a) = n\}\big| = Aq^n + O(q^{\alpha n}).$$

Keliama problema: *Rasti m-ojo laipsnio pirminių elementų skaičiaus asimptotinę elgseną, kai $n \to \infty$.*

Kitaip sakant, reikia ištirti sekos

$$\pi(m) := \big|\{p \in \mathbf{P} : \ \partial(p) = m\}\big|$$

asimptotiką, kai $m \to \infty$. Kaip ir tradicinėje analizinėje skaičių teorijoje, sprendimas remiasi dzeta funkcijos savybėmis. Šiuo atveju tai laipsninė eilutė

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n z^n = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - z^j)^{-\pi(j)},$$

apibrėžianti analizinę skritulyje $|z| < q^{-1}$ funkciją, kuri turi paprastąjį polių taške $z = q^{-1}$ ir yra analiziškai pratęsiama srityje $|z| < q^{-\alpha}$. Pasirėmęs klaidingu savo rezultatu, kad $G(z) \neq 0$ apskritimo $|z| = q^{-1}$ taškuose, J. Knopfmacher'is paskelbė klaidingą bendru atveju $\pi(m)$ asimptotiką. Tą pastebėję, kartu su bendraautoriais K.-H. Indlekofer'iu ir R. Warlimont'u ėmėmės darbo. Štai pora rezultatų iš [10].

11 teorema. *Egzistuoja tokia teigiama konstanta θ, $\max\{1/2, \alpha\} < \theta < 1$, kad*

$$\pi(m) = \big(1 + (-1)^{m+1} I_0\big)\frac{q^m}{m} + O(q^{\theta m}).$$

Čia I_0 yra galimo funkcijos $G(z)$ nulio taške $z = q^{-1}$ indikatorius.

Čia pirmą kartą atskleistas naujas efektas - pirminių elementų skaičius gali kisti priklausomai nuo jų laipsnių lyginumo. Antrajai teoremai knygoje [KnZh] suteiktas vardas.

12 (Indlekofer-Manstavicius-Warlimont) teorema. *Tegul galioja A aksioma. Jei $G(-q^{-1}) = 0$, tai $G(z) \neq 0$ visame skritulyje $|z| < q^{-\alpha}$. Be to, tada $\pi(m)$ liekamojo nario įvertis yra teisingas su bet kokiu $\theta \in (\alpha, 1)$.*

Teoremai paskirtas monografijos [KnZh] 5.1 skyrius. Įtrauktas į ją, mūsų darbas nebeteko cituojamumo rodiklio augimo.

Vėiau gavome išsamius rezultatus (žr. [EM92K] ir [EM92]) dėl pusgrupių elementų, neturinčių mažo laipsnio pirminių daaugiklių, skaičiaus asimptotinės elgsenos. Jie buvo pastebėti ir pritaikyti faktorizavimo algoritmų analizėje (žr. A.M. Odlyzko apžvalgą [Od00]). Įdomu pažymėti, kad mūsų straipsniai aplenkė JAV Georgia'os ir Michigan'o universitetuose parašytų R. Lovorn'o [Lo92dis] ir K. Soundararajan'o disertacijų publikavimą. Vėliau pasitaikė rezultatų pakartojimo atvejų (žr. Mathematical Reviews, 2001e:11119).

Darbų cikle, parašytame kartu su K.-H. Indlekofer'iu (žr. [InEM94], [InEM95], [InEM01] ir kt.) atsiliepėme į J. Knopfmacher'io raginimą sukurti tikimybinę aritmetinių pusgrupių teoriją, adekvačią Kubiliaus teorijai (žr. [Kn79], *Open Problems*). Mūsų pagrindiniai rezultatai užpildė buvusių spragą. Tyrimai buvo pratęsti būnant vizituojančiu profesoriumi Witwatersrand'o universitete Johanesburge (PAR) ir Lietuvoje, straipsnių buvo parašyta su A. Knopfmacher'iu [KnEM97] ir R. Skrabutėnu EMSk03.

II. ANALIZINĖ IR TIKIMYBINĖ KOMBINATORIKA

Nuo 1996 m. (žr. [EM96] ir vėlesnius) sprendėme simetrinės grupės keitinių, visų baigtinės aibės atvaizdžių, svorinių multiaibių skaičiavimo ir bendresnių kombinatorinių struktūrų tikimybinius uždavinius. Tematika turi nemaža sąlyčio taškų su statistikine fizika, teorine informatika ir net matematine genetika. Mūsų tikslas buvo atlikti tik teorinius tyrimus panaudojant žinomus ir plėtojant naujus analizinius bei tikimybinius metodus.

2.1 Kombinatoriniai atsitiktinių procesų modeliai.

Išryškindami atsitiktinių keitinių, imamų iš simetrinės grupės su Ewens'o tikimybe, sąryšius su genetiniais uždaviniais (plačiau [BaEM99]), mes su partneriu iš Pensilvanijos valstijos universiteto G.J. Babu parengėme projektą JAV Nacionalinės Mokslo Tarybos 1998–1999 m. *Twinning* programos grantui ir sėkmingai jį gavome. Bendrų darbų serijoje (iš jos šiame rinkinyje pateikti [11] ir [12]) realizavome iki tol nepastebėtą idėją, kad TST rezultatai, aprašyti šios apžvalgos 1.3 skyrelyje, turi savo analogus ir kombinatorikoje. Be to, labai tinka mūsų jau išrutuliota įrodymų technika. Anksčiau kitų autorių J.M. DeLaurentis'o ir B. Pittel'io [DePi85], P. Donnelly'io, T.G. Kurtz'o ir S. Tavaré [DoKuTa91] ir J. Hansen [Ha90] buvo apibrėžti tik Brauno judesio modeliai, ir tik panaudojus ciklų skaičiaus keitinyje nupjautinę funkciją. Suformuluosime porą mūsų gautų galutinių rezultatų.

Tegul σ yra simetrinės grupės $\mathbf{S}_n$, $n \geq 1$, keitinys, $k_j(\sigma)$ žymi jo j ilgio ciklų skaičių. Tada vadinamasis *ciklų vektorius* $\bar{k}(\sigma) := \big(k_1(\sigma), \dots, k_n(\sigma)\big)$ tenkina sąlygą $\ell(\bar{k}(\sigma)) = n$ su kiekvienu $\sigma \in \mathbf{S}_n$. Čia ir toliau $\ell(\bar{s}) = 1s_1 + \cdots + ns_n$, jei $\bar{s} := (s_1, \dots, s_n) \in \mathbf{N}_0^n$.

Jei keitinys yra atsitiktinis, pastaroji sąlyga nusako koordinačių priklausomumą, kurį tenka įveikti netradicinėmis tikimybių teorijoje priemonėmis. Kitų autorių buvo plačiau nagrinėtas ciklų skaičius $w(\sigma) := k_1(\sigma) + \cdots + k_n(\sigma)$.

Ewens'o tikimybinis matas grupėje $\mathbf{S}_n$ apibrėžiamas formule

$$\nu_{n,\theta}(\{\sigma\}) = \theta^{w(\sigma)} \left(\sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} \theta^{w(\sigma)} \right)^{-1} = \theta^{w(\sigma)} (\theta^{(n)})^{-1}, \quad \sigma \in \mathbf{S}_n.$$

Čia $\theta > 0$ ir $\theta^{(n)}) := \theta(\theta+1)\cdots(\theta+n-1)$. Ciklų vektorius turi tokį skirstinį:

$$\nu_{n,\theta}(\bar{k}(\sigma) = \bar{s}) = \mathbf{1}\{\ell(\bar{s}) = n\} \frac{n!}{\Theta(n)} \prod_{j \le n} \frac{1}{s_j!} \left(\frac{\theta}{j} \right)^{s_j} = P_n(\{\bar{s}\}).$$

Tikimybės, priskirtos aibės $\ell^{-1}(n)$ vektoriams, yra vadinamos Ewens'o Atrankos Formule, pirmą kartą apibrėžta matematinėje genetikoje. Mes nagrinėjome konvergavimą procesų

$$H_n := H_n(\sigma, t) = \frac{1}{B(n)} \left(\sum_{j \le y(t)} h_j(k_j(\sigma)) - A(y(t)) \right),$$

čia

$$A(u) := \theta \sum_{j \le u} \frac{a(j)}{j}, \qquad B^2(u) := \theta \sum_{j \le u} \frac{a(j)^2}{j},$$

$h_j(1) =: a(j)$, ir

$$y(t) := y_n(t) = \max\{u \le n : \ B^2(u) \le tB^2(n)\}, \quad t \in [0,1].$$

Straipsnyje [11] buvo įrodytas toks galutinis rezultatas.

13 teorema. *Tegul $B(n) \to \infty$. Procesų H_n skirstiniai mato $\nu_{n,\theta}$ atžvilgiu silpnai konverguoja į Vynerio matą tada ir tik tada, jei su bet kokiu $\varepsilon > 0$*

$$\frac{1}{B^2(n)} \sum_{j \le n} \frac{a(j)^2}{j} I\{|a(j)| \ge \varepsilon B(n)\} = o(1).$$

Ir vėl Lindebergo sąlyga yra būtina ir pakankama. Ji reiškia, kad modeliuojant Brauno judesį, ilgi ciklai turi būti eliminuoti. Neužilgo straipsnyje [12] problemą išsprendėme bet kokio proceso su nepriklausomais prieaugiais atveju. Modelyje, kai siekiama modeliuoti procesą su begaline dispersija, $B^2(n)$ nebetinka. Ir laiką įvedančią seką $y(t)$ tenka pakeisti kita.

Tegul dabar $u^* = (1 \wedge |u|)\mathrm{sgn}\, u$, jei $a \wedge b := \min\{a, b\}$. Imkime bet kokią neaprėžtai didėjančią seką $\beta(n) > 0$ ir pažymėkime

$$B(u, n; h) = \sum_{j \le u} \left(\frac{a(j)}{\beta(n)} \right)^{*^2} \frac{1}{j}, \qquad A(u, n; h) = \theta \sum_{j \le u} \left(\frac{a(j)}{\beta(n)} \right)^{*} \frac{1}{j},$$

be to, tegul

$$y(t) := y_n(t) = \max\{l \le n : \ B(l,n;h) \le tB(n,n;h)\}, \quad t \in [0,1].$$

Nagrinėkime bendresnį procesą

$$H_{n,h} := H_{n,h}(\sigma,t) = \frac{1}{\beta(n)} \sum_{j \le y(t)} h_j(k_j(\sigma)) - A(y(t),n;h), \quad t \in [0,1],$$

apibrėžtą $\mathbf{D}[0,1]$ erdvėje su Skorohodo topologija. Išskirkime stabilaus ribinio proceso atvejį, užbaigtą straipsnyje [BaEM02].

14 teorema. *Tegul X yra atsitiktinis procesas su nepriklausomais prieaugiais $X(t) - X(s)$, kurių charakteristinė funkcija*

$$\exp\left\{(t-s)a_1 \int_{-\infty}^{0} (e^{i\lambda u} - 1 - i\lambda u^*)\, d(|u|^{-\alpha}) - (t-s)a_2 \int_{0}^{\infty} (e^{i\lambda u} - 1 - i\lambda u^*)\, d(u^{-\alpha})\right\},$$

čia $a_1, a_2 \ge 0,\ a_1 + a_2 > 0,\ 0 < \alpha < 2,\ \ 0 \le s \le t \le 1,\ \lambda \in \mathbf{R}$. Tam kad $H_{n,h} \Rightarrow X$, yra būtina ir pakankama, kad su bet kokiu $u > 0$,

$$\sum_{a(j) < -u\beta(n),\ j \le n} j^{-1} \to a_1\theta^{-1}u^{-\alpha}, \qquad \sum_{a(j) > u\beta(n),\ j \le n} j^{-1} \to a_2\theta^{-1}u^{-\alpha}$$

ir

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} \beta^{-2}(n) \sum_{|a(j)| < \varepsilon\beta(n),\ j \le n} a(j)^2 j^{-1} = 0.$$

Taigi, net priklausomų dėmenų atveju sąlygos yra tokios pat, kokios būtų ir nagrinėjant tokius procesus su nepriklauomais prieaugiais

$$X_{n,h} := X_{n,h}(t) = \frac{1}{\beta(n)} \sum_{j \le y(t)} a(j)\xi_j - A(y(t),n;h), \quad t \in [0,1].$$

Sekų $H_{n,h}$ konvergavimo į neaprėžtai dalius procesus problema buvo išspręsta bendrame darbe [12].

15 teorema. *Tam kad $H_{n,h}$ silpnai konverguotų į ribinį nepriklausomų prieaugių procesą, kuris įgyja ne vieną reikšmę laiko momentu 1, yra būtinos ir pakankamos šios dvi sąlygos:*

- *$\beta(n)$ yra lėtai kintanti Karamatos prasme;*
- *seka funkcijų*

$$\Psi_n(u) := \sum_{j \le n} \left(\frac{a(j)}{\beta(n)}\right)^{*^2} \frac{1}{j}$$

silpnai konverguoja į kokią nors nemažėjančią funkciją $\Psi(u)$, apibrėžtą $\bar{\mathbf{R}}$ ir tokią, kad $0 = \Psi(-\infty) < \Psi(\infty) < \infty$ bei $\Psi_n(\infty) \to \Psi(\infty)$.

Be to, jei šios sąlygos galioja, ribinio proceso $X(t)$ charakteristinė funkcija

$$\mathbf{E}e^{ivX(t)} = \exp\left\{ \int_{\mathbf{R}} \left(e^{ivu} - 1 - ivu^*\right) u^{*^{-2}} dM_t(u) \right\}, \quad v \in \mathbf{R},$$

čia

$$M_t(u) = \int_{-\infty}^{u/b(t)} \left(zb(t)\right)^{*^2} z^{*^{-2}} d\Psi(z), \qquad b(t) = \lim \beta(y_n(t))/\beta(n).$$

Funkcija $b(t)$ taip pat randama iš lygties $M_t(\infty) = t\Psi(\infty)$.

Funkcinės ribinės teoremos leidžia giliau įsiskverbti į sekos

$$j_1(\sigma) < j_2(\sigma) < \cdots < j_s(\sigma),$$

sudarytos iš skirtingų ilgių ciklų, kuriais išsiskaido atsitiktinis keitinys $\sigma \in \mathbf{S}_n$. Pvz., iš jų išplaukia toks teiginys.

Išvada. *Visiems $x \in \mathbf{R}$ turime*

$$\nu_n\big(\max_{k \le s} |\log j_k(\sigma) - k| \le x\sqrt{\log n}\big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{l \in \mathbf{Z}} (-1)^l \int_{-x}^{x} e^{-(u-2lx)^2/2} du + o(1).$$

Vėliau darbuose [EM02K] ir [BoEM12] panašiai išnagrinėjome kombinatorinius procesus, apibrėžtus panaudojant adityviųjų funkcijų sekas h^n, nebūtinai pavidalo $h^n(\sigma) = h(\sigma)/\beta(n)$ ir apibrėžtas bendresnėse nei keitiniai struktūrose. Tada tarp ribinių pasirodo ir Puasono procesas. Kaip pademonstravome straipsnyje [EM09], galima nagrinėti ir kombinatorinius procesus, apibrėžtus keitinių laipsnių poaibiuose arba atžvilgiu apibendrintų Ewens'o matų (žr. [24]). Procesų, kurių prieaugiai yra priklausomi, modeliai buvo nagrinėti kolektyviniame darbe [BaEMZa07].

2.2. Vienamatės ribinės teoremos.

Pirmoji 15 teoremos sąlyga normuojančiai konstantų sekai nebėra būtina, jei sprendžiamas tik vienamatis uždavinys, t.y. ji neišplaukia iš silpnojo a.d. $H_{n,h}(\sigma, 1)$ konvergavimo. Apibendrinkime šį uždavinį, prisilaikydami TST stiliaus. Tegul

$$h^n(\sigma) = \sum_{j \le n} h_{nj}(k_j(\sigma)),$$

čia $\{h_{nj}(k)\} \in \mathbf{R}$ yra dvimatis masyvas, $h_j(0) \equiv 0$, jei $1 \le j \le n$.

Problema. *Kada egistuoja tokia centruojanti konstantų seka, kad skirstiniai*

$$F_n(x) := \nu_n(h^n(\sigma) - \alpha(n) < x)$$

silpnai konverguotų į ribinę pasiskirtymos funkciją.?

Šio rinkinio [13] straipsnyje problema yra išsprendžiama, kai ribinis dėsnis yra išsigimęs viename taške. Atsakymą suformuluosime. Apibrėžkime

$$h_{nj}(k,\lambda) := h_{nj}(k) - \lambda jk, \qquad a_{nj}(\lambda) := a_{nj} - \lambda j = h_{nj}(1) - \lambda j$$

Primename, kad a.d. X, apibrėžto erdvėje $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$, Lévy atstumas nuo konstantų aibės yra

$$L(X;P) := \inf\big\{\varepsilon + P(|X-a| \geq \varepsilon)\colon\ a \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\big\}.$$

Pažymėkime $L(h;\nu_n) =: L_n(h)$,

$$U_n(h,\lambda) := \sum_{jk \leq n} \frac{h_j(k,\lambda)^{*^2}}{j^k k!},$$

$U_n(h) = \min\{U_n(h,\lambda)\colon\ \lambda \in \mathbf{R}\}$ ir $V_n(h) = 1 \wedge U_n(h)$.

16 teorema. *Bet kokiai adityviajai funkcijai $h(\sigma)$ galioja*

$$V_n(h) \ll L_n(h) \ll V_n(h)^{1/3},$$

čia konstantos simbolyje $\ll$ yra absoliučios.

Minėtas atsakymas į iškeltą klausimą yra šios teoremos išvada.

Išvada. *Tegul $h^n(\sigma)$ yra anksčiau apibrėžtų adityviųjų funkcijų seka. Dažniai $F_n(x)$ konverguoja į išsigimusį nulio taške dėsnį tada ir tik tada, jei*

$$U_n(h,\lambda) = o(1)$$

su kažkokiu $\lambda = \lambda_n \in \mathbf{R}$ ir

$$\alpha(n) = n\lambda + \sum_{j \leq n} \frac{a_j(\lambda)^*}{j} + o(1).$$

Kai $h^n(\sigma) = h(\sigma)/\beta(n)$ ir $\beta(n)$ tenkina pirmąją 15 teoremos sąlygą irgi turime suformuluotos teoremos sprendimą. Deja, kaip mes esame pastebėję dar 1996 m. [EM96], ribinius $F_n(x)$ dėsnius galima gauti net su $\beta(n) \sim n^\alpha$, $\alpha > 0$; tarp jų yra ir stabilieji, ir net nebūtinai neaprėžtai dalūs.

Pažanga buvo padaryta nagrinėjant suformuluotą problemą sveikareikšmėms sekoms $h^n(\sigma)$.

17 teorema. *Tarkime, $h^n(\sigma)$ yra seka visiškai adityviųjų funkcijų ir $a_j := h_{nj}(1) \in \{0,1\}$, o $\Pi_a(x)$ yra Puasono pasiskirstymo funkcija su parametru $a > 0$. Skirstiniai $\tilde{F}_n(x) := \nu_n\big(h(\sigma) < x\big)$ silpnai konverguoja į $\Pi_a(x)$ tada ir tik tada, jei*

$$\sum_{j \leq n} \frac{1}{j} I\{a_j = 1\} = a + o(1)$$

ir

$$\sum_{\varepsilon n<j\le n}\frac{1}{j}I\{a_j=1\}=o(1)$$

su bet kokiu fiksuotu $0<\varepsilon<1$.

Aptariamame [13] darbe išryškėjo vienalaikio skirstinių ir jų momentų konvergavimo svarba. Ši idėja buvo išplėtota šiemet pasirodžiusiame straipsnyje [14], parašytame su doktorante T. Bakšajeva. Jos disertacijoje [TBdis] gauti 17 teoremos apibendrinimai, kai skirstiniai imami Ewens' mato atžvilgiu.

Kitokio tipo ribinėms teoremoms buvo skirtas [15] darbas. Iš jo pacituosime lokaliąją teoremą apie sutvarkytosios ciklų ilgių statistikos $\{j_k(\sigma)\}$, $k\le w(\sigma)$, ribinį skirstinį. Pažymėkime

$$L(t,m)=\log\frac{m}{1+t/\log m},\qquad \lim_{n\to\infty}\nu_n(j_k(\sigma)=m).$$

18 teorema. *Tegul* $m\ge 3$, $0<\varepsilon<1$, *and* $1\le k\le m^{1-\varepsilon}$. *Tada*

$$\frac{d_{k+1}(m)}{d_k(m)}=\frac{L(k,m)}{k}\Big(1+O\Big(\frac{1}{\log m}\Big)\Big).$$

Be to,

$$\max_{1\le k\le m}d_k(m)=\frac{1}{m\sqrt{2\pi\log m}}\Big(1+O\Big(\frac{1}{\log m}\Big)\Big)$$

ir maksimumas pasiekiamas, kai $k=k_m=\log m+O(1)$.

2.3. Momentų vertinimas.

Tikimybine prasme adityviosios funkcijos, apibrėžtos natūraliųjų skaičių tiek keitinių aibėse, yra priklausomų atsitiktinių dydžių (a.d.) sumos. Nagrinėjant jų momentus pavyko patikslinti ir klasikinius nepriklausomų a.d. sumų momentų įverčius, kuriuos buvo gavę B. von Bahr'as ir C.G. Esseen'as [BaEs65]. Rinkinyje pateiktas straipsnis [16], susilaukęs nemaža dėmesio.

Tegul $X_1,\dots,X_n$ yra nepriklausomi a.d., $F_k(x)$ - jų pasiskirstymo funkcijos, $\tilde F_k(x)$ - simetrizuotų a.d. pasiskirstymo funkcijos atitinkamai ir $Y_n:=X_1+\dots+X_n$. Tarkime, kad $\mathbf{E}X_k=0$, $k=\overline{1,n}$, ir pažymėkime

$$\Lambda_n(s,t)=\Big(\sum_{k=1}^n\int_{|u|<t}u^2\,d\tilde F_k(u)\Big)^{s/2}+\sum_{k=1}^n\int_{|u|\ge t}|u|^s\,d\tilde F_k(u),\quad t\ge 0,$$

and

$$\Lambda_n(s)=\inf_{t\ge 0}\Lambda_n(s,t).$$

19 teorema. *Jei nepriklausomi a.d.* $X_1, \dots, X_n$ *turi* $\mathbf{E}|X_k|^s < \infty$, *kai* $1 \le s < 2$, *tai egzistuoja tokios teigiamos konstantos* $c_1(s)$ *ir* $c_2(s)$, *priklausančios tik nuo* s, *kad*

$$c_1(s)\Lambda_n(s) \le \mathbf{E}|Y_n|^s \le c_2(s)\Lambda_n(s).$$

Atvejis, kai $0 < s < 1$, o centruojama medianomis, buvo taip pat išnagrinėtas. Nelygybės pateko į kitų autorių monografijas (žr., pavyzdžiui, [Pe87]). P. Elliott'as ją plačiai panaudojo monografijoje [El97], įvesdamas netgi terminą *Manstavičiaus nelygybė*. Atvejį $s \ge 2$ užpildo klasikinė Rosenthal'io nelygybė. Iškilo problema, ar galima gauti jų analogus kombinatorikoje, kai sumuojami a.d. yra specifiškai priklausomi. Ją galutinai išnagrinėjome straipsniuose [17] ir [EM06]. Suformuluosime porą rezultatų iš šio rinkinio [17] darbo, skirto adityviųjų funkcijų

$$h(\sigma) := \sum_{j \le n} h_j\big(k_j(\sigma)\big)$$

momentų įvertinimui.

Pažymėkime $\mathbf{E}_n f(\sigma)$ funkcijos $f : \mathbf{S}_n \to \mathbf{R}$ vidurkį atžvilgiu tikimybinio mato ν_n. Tegul $h_j(k;\lambda) = h_j(k) - \lambda jk$ ir $h^{(\lambda)}(\sigma) = h(\sigma) - \lambda l(\sigma)$ yra adityvioji funkcija. čia

$$\ell(\sigma) := \ell\big(\bar{k}(\sigma)\big) = 1k_1(\sigma) + \dots + nk_n(\sigma) \equiv n, \quad \sigma \in \mathbf{S}_n,$$

irgi yra adityvi pagal apibrėžimą. Kaip atskiras dėmuo, ji gali įeiti į nagrinėjamą funkciją $h(\sigma)$, o jos „išfiltravimas" sukelia nemaža techninių sunkumų. Nagrinėkime

$$M_n(h, A, \beta) := \big(\mathbf{E}_n|h(\sigma) - A|^\beta\big)^{1/\beta},$$

jei

$$A_n(h) = \sum_{jk \le n} \frac{h_j(k)}{j^k k!}, \qquad B_n(h,\beta) = \bigg(\sum_{jk \le n} \frac{|h_j(k)|^\beta}{j^k k!}\bigg)^{1/\beta},$$

čia $A \in \mathbf{R}$ ir $\beta > 0$. Trumpumo dėlei, vietoje $O(\cdot)$, vartosime simbolį $\ll$ ir $a \asymp b$, reiškiantį, kad $a \ll b \ll a$. Pabrėždami priklausomumą nuo parametrų, pridėsime indeksus.

20 teorema. *Tegul* $n \ge n_0(\beta)$ *yra pakankamai didelis. Jei* $\beta \ge 2$, *tai*

$$M_n(h, A, \beta) \asymp_\beta \min\Big\{|A_n(h^{(\lambda)}) - A + \lambda n| + B_n(h^{(\lambda)}, 2) + B_n(h^{(\lambda)}, \beta) : \ \lambda \in \mathbf{R}\Big\}.$$

Tai yra minėtos Rosenthal'io nelygybės analogas. Prieš pateikdami likusį atvejį, pažymėkime

$$h'_j(k;\lambda,c) = \begin{cases} h_j(k;\lambda), & \text{jei } |h_j(k;\lambda)| < c, \\ \\ 0, & \text{jei } |h_j(k;\lambda)| \ge c, \end{cases}$$

ir $h''_j(k;\lambda,c) = h_j(k;\lambda) - h_j(k;\lambda,c)$. Panaudoję šias sekas, galime apibrėžti dvi adityviąsias funkcijas $h'(\sigma) := \hat{h}^{(\lambda,c)}(\sigma)$ ir $h''(\sigma) := \check{h}^{(\lambda,c)}(\sigma)$. Kitaip tariant, išskaidome $h^{(\lambda)}(\sigma) = h'(\sigma) + h''(\sigma)$.

21 teorema. *Tegul $n \geq n_0(\beta)$ yra pakankamai didelis. Jei $1 \leq \beta < 2$, tai*

$$M_n(h, A, \beta) \asymp_\beta \inf\Big\{|A_n(h^{(\lambda)}) - A + \lambda n| + B_n(\hat{h}^{(\lambda,c)}, 2) + B_n(\check{h}^{(\lambda,c)}, \beta) : \lambda \in \mathbf{R}, c > 0\Big\}.$$

Jei $0 < \beta < 1$, tai

$$M_n(h, A, \beta) \asymp_\beta \inf\Big\{|A_n(\hat{h}^{(\lambda,c)}) - A + \lambda n| + B_n(\hat{h}^{(\lambda,c)}, 2) + B_n(\check{h}^{(\lambda,c)}, \beta) : \lambda \in \mathbf{R}, c > 0\Big\}.$$

Pastarosios teoremos yra adityviųjų funkcijų erdvių nagrinėjimo pagrindas ([EM07k]). Antrajam momentui pavyko [EM06] nustatyti optimalią konstantą viršutiniame įvertyje. Dar įdomiau tao padaryti, kai adityvioji funkcijos momentai nagrinėjami Ewens'o mato atžvilgiu. Galime kelti tokią hipotezę.

Hipotezė. *Tegul $\mathbf{E}_{n\theta}$ žymi vidurkį Ewens'o mato su parametru $\theta > 0$ atžvigiu. Tada*

$$\mathbf{E}_{n\theta}\bigg(\sum_{j\leq n} a(j)\Big(k_j(\sigma) - \frac{\theta a(j)}{j}\Big)\bigg)^2 \leq \Big(\frac{\theta+2}{\theta+1} + o(1)\Big)\sum_{j\leq n}\frac{a^2(j)}{j}.$$

Kai $\theta = 1$, darbe [EM06] ji buvo patvirtinta netgi su tikslesniu liekamuoju nariu. Rinkinyje įdėtas mūsų bendras darbas [18], atliktas kartu su doktorantu Ž. Žilinsku. Jame hipotezė įrodyta atveju $\theta = 2$. Įrodymuose iškyla atskira klasė iki šiol nenagrinėtų integralinių operatorių, kurių tikrinės funkcijos yra Jacob'io polinomai. Neseniai kartu su doktorantu V. Stepanausku [EMSt15] gavome antrojo momento Ewens'o mato atžvilgiu įvertį visiems $\theta > 0$. Atsiradusios konstantos priklausomybė nuo θ-os, t.y. hipotezės galutinis patvirtinimas - tolesnių tyrimų tikslas. Jau minėtame [14] darbe rasta nemaža sudėtingų momentų išraiškų ir jų konvergavimo faktų.

2.4. Stiprusis konvergavimas kombinatorikoje.

Patirtis TST padėjo įvesti stiprųjį konvergavimą į TK. Mūsų darbas [EM98], skirtas atistiktiniams keitiniams, tapo pirmąja kregžde. Tęsinys buvo publikuotas straipsnyje [EM04]. Vėliau tematiką plėtojome kartu su doktorante J.Norkūniene (žr. [NoDis], [EMNo08]). Su ja pradėjome nagrinėti bendras struktūrų klases, ne tik keitinius. Eilės n, $n \geq 1$, ansambliai yra sudaromi išskaidant n aibę į poaibius ir juose įvedant papildomus sąryšius, pavyzdžiui, brėžiant grafo briaunas tarp elementų porų. Poaibiai su įvestais sąryšiais tampa komponentėmis, o pati pradinė aibė - ansambliu. Jei iš j galios poaibio padaroma m_j komponenčių, tai n eilės ansamblių poklasio $\mathcal{A}_n$ galia $p(n) := |\mathcal{A}_n|$ susisieja su m_j per formalias eksponentines generuojančias eilutes (žr. [FlSe09]:

$$P(x) := 1 + \sum_{n\geq 1}\frac{p(n)}{n!}x^n = \exp\Big\{\sum_{j\geq 1}\frac{m_j}{j!}x^j\Big\},$$

čia x yra kintamasis. Keitiniams $p(n) = n!$ ir $m_j = (j-1)!$. Logaritminėms struktūroms, įvestoms [ABTkn], reikalaujama, kad

$$m_j/j! = \theta\rho^j/j(1 + r(j))$$

su fiksuotomis konstantomis ρ ir $\theta > 0$ bei tam tikru greičiu nykstančiu liekamuoju nariu $r(j)$, kai $j \to \infty$. Dažniausiai $r(j) = O(r^{-\alpha})$ su $\alpha > 0$. Tada

$$p(n) = \sum_{\ell(\bar{k})=n} Q_n(\bar{k}) := n! \sum_{\ell(\bar{k})=n} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{m_j}{j!}\right)^{k_j} \frac{1}{k_j!}.$$

Sekos $p(n)$ elgsena, kai $n \to \infty$, yra sudėtinga net logaritminių struktūrų atveju. Mums pavyko logaritmiškumo sąlygą pakeisti aprėžtumo reikalavimu

$$m_j/j! \asymp \theta\rho^j/j.$$

Išvengti ρ nesunku, todėl toliau jį laikysime vienetu. Straipsnyje [19] įrodytos atsitiktinių sekų, apibrėžtų ansambliuose, stipriojo konvergavimo teoremos. Jų gylį pademonstruosime pavyzdžiu, nagrinėdami silpnai logaritminius ansamblius. Jie tenkina vidurkinę reguliarumo sąlygą

$$\sum_{j\le m} m_j/j! = \varkappa \log m + O(1), \quad m \to \infty.$$

Tarkime, kad $\sigma \in \mathcal{A}_n$ imami su vienodomis tikimybėmis $\mu_n(\{\sigma\}) = 1/p(n)$, $s := s(\sigma)$ yra skirtingų eilių komponenčių skaičius, o $j_1(\sigma) < \cdots < j_s(\sigma)$ – sutvarkytoji šių eilių statistika. Apibrėžkime norimai ilgą sumą

$$\eta_{sm}(\pm\varepsilon)^2 = 2\Big(L_2 m + \frac{3}{2} L_3 m + L_4 m + \cdots + (1 \pm \varepsilon) L_s m\Big),$$

čia $0 < \varepsilon < 1$, $s \ge 2$ ir $L_k m$ žymi k-ojo kartotinumo natūralųjį logaritmą.

22 teorema. *Jei ansamblių klasė tenkina vidurkinio reguliarumo sąlygą, tai*

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mu_n\left(\frac{|\varkappa j_m(\sigma) - m|}{\eta_{sm}(+\varepsilon)\sqrt{m}} \ge 1\right) = 0.$$

Pakeitus $+\varepsilon$ į $-\varepsilon$ pastaroji riba lygi 0.

Kitaip tariant, μ-b.v. $\sigma \in \mathcal{A}_n$ yra teisinga nelygybė

$$|\varkappa j_m(\sigma) - m| \le \eta_{sm}(+\varepsilon)\sqrt{m}, \quad m \ge m_0 \ge 3,$$

ir s gali būti norimai didelis.

2.4. Analiziniai metodai.

Kartu su tikimybiniais metodais ir jų variacijomis, kilusiomis sprendžiant TST problemas, naudojome ir plėtojome metodus, paremtus kompleksinio kintamojo funkcijų analize. Pradžia buvo mūsų darbas [EM96], pralenkęs P. Flajolet ir A.D. Odlyzko metodiką [PhOd90] tuo, kad jis taikytinas net tuo atveju, kai generuojančiosios funkcijos neturi analizinio ar meromorfinio tęsinio už eilutės konvergavimo skritulio. Vėliau sekė idėją plėtojantys straipsniai, pavyzdžiui, [EM99kn]. Rinkinio straisnyje [20] vertinama adityviosios funkcijos

$$h(\sigma) := \sum_{j\le n} a_j k_j(\sigma), \quad a_j \in \mathbf{R},\ 1 \le j \le n,$$

apibrėžtos simetrinėje grupėje, reikšmių koncentracija

$$Q_n(l) = \sup_{x\in\mathbf{R}} \nu_n(x \le h(\sigma) < x + l), \quad l \ge 0.$$

Pažymėkime

$$V_n(l;\lambda) = \sum_{j\le n} \frac{l^2 \wedge (a(j) - \lambda j)^2}{j}, \qquad V_n(l) = \min_{\lambda\in\mathbf{R}} V_n(l;\lambda).$$

23 teorema. *Egzistuoja tokia absoliuti konstanta $C > 0$, kad*

$$Q_n(l) \le Cl(V_n(l))^{-1/2}.$$

Nelygybe remiamasi visose ribinių dėsnių egzistavimo teoremose įrodant sąlygų būtinumą. Jos kokybė tokia pati kaip ir nepriklausomų a.d. atveju.

Vertindami konvergavimo greitį centrinėje ribinėje teoremoje, gavome optimalų įvertį, kuris yra Berry-Esseen'o teoremos analogas. Priešingai negu jų nagrinėtame nepriklausomų a.d. sumų atveju, adityviosioms funkcijoms, apibrėžtoms simetrinėje grupėje, tikslus greitis išsireiškia per trečiąjį normuotą momentą, pakeltą laipsniu 2/3. Suformuluosime [21] darbo rezultatą. Priminsime 2.2 skyrelio žymenis ir įvesime kitus. Tegul vėl $h(\sigma) := h^n(\sigma)$ yra visiškai adityviųjų funkcijų seka, normuota taip, kad

$$\sum_{j\le n} \frac{a_{nj}^2}{j} = 1.$$

Pažymėkime $a_j := a_{nj}$,

$$A_n = \sum_{j\le n} \frac{a_j}{j}, \qquad L_n = \sum_{j\le n} \frac{|a_j|^3}{j}, \qquad D_n = \sum_{\substack{1\le j,k\le n\\ j+k>n}} \frac{a_j a_k}{jk}.$$

24 teorema. *Jei $\nu_n(x) := \nu_n(h(\sigma) - A_n < x)$ ir $\Phi(x)$ yra standartinio normaliojo dėsnio pasiskirstymo funkcija, tai*

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} \left| \nu_n(x) - \Phi(x) - \frac{D_n x}{2\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \right| = O(L_n).$$

Čia konstanta simbolyje $O(\cdot)$ yra absoliuti.

Išvada. *Teisingas toks nepagerinamas eilės atžvilgiu įvertis:*

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} |\nu_n(x) - \Phi(x)| = O(L_n^{2/3}).$$

Darbo idėjas plėtojo doktorantas V. Zacharovas [VZdis].

Pastarųjų metų darbuose tobulinamas laipsninių eilučių koeficientų palyginimo metodas, pradėtas dar 2002 m. mūsų [22] darbe. Imkime jau 2.3 skyrelyje matytas funkcijas pavidalo

$$Z(x) := 1 + \sum_{n\ge1} D(n)x^n = \exp\left\{\sum_{j\ge1} \frac{d_j}{j} x^j\right\}$$

ir

$$Y(x) := 1 + \sum_{n\ge1} Q(n)x^n = \exp\left\{\sum_{j\ge1} \frac{b_j}{j} x^j\right\}$$

su $b_j \in \mathbf{C}$, $|b_j| \le d_j = O(1)$, kai $j \le n$. Problema: *rasti santykio $Q(n)/D(n)$ asimptotiką.*

Straipsnyje [22] ji gauta, kai $d_j \ge c > 0$ visiems $j \le n$. Jame panaudotios bendros sąlygos neleidžia pratęsti $Z(x)$ ir $Y(x)$ už skritulio $|x| \le 1$, todėl Flajolet-Odlyzko [FlOd00] metodika netinka. Vėliau [23] darbe palyginimo metodą pritaikėme spręsti 2.2 skyrelyje apibūdintą vienamačių skirstinių konvergavimo uždavinį. Ten naudojome charakteristines skirstinių funkcijas, rezultatai papildė mūsų tyrimus, publikuotus [13] darbe. Greitai pasirodysiančiame straipsnyje [EM15] metodas pritaikytas struktūrų be tam tikrų komponenčių skaičiaus analizėje.

Plačios metodo taikymo perspektyvos atsivėrė sprendžiant atstumo pagal variaciją įvertinimo uždavinius. Juos formuluosime ansamblių, įvestų 2.3 skyrelyje, atveju. Tegul $\mathcal{A} := \cup_{n\ge0}\mathcal{A}_n$ yra visa ansamblių klasė, $\mathcal{A}_0 = \{\emptyset\}$. Visa kiekybinė informacija apie $\mathcal{A}$ užkoduota formalioje eilutėje $P(x)$. Poklasyje $\mathcal{A}_n$ apibrėžtas tolygusis tikimybinis matas. Pažymėkime $\lambda_j = m_j/j!$. Tegul $\sigma \in \mathcal{A}_n$, jo komponenčių vektorius $\bar{k}(\sigma) = \big(k_1(\sigma), \dots, k_n(\sigma)\big)$ nurodo, kad jame yra $k_j(\sigma) \ge 0$ eilės j. Aišku, kad $\ell\big(\bar{k}(\sigma)\big) = n$ visiems $\sigma \in \mathcal{A}_n$.

Apibrėžimas. *Pora $\big(\mathcal{A}_n, \mu_n\big)$ vadinama silpnai logaritmine, jeigu egzistuoja tokie nepriklausomi Puasono a.d. ξ_j, $j \le n$, kad $\mathbf{E}\xi_j =: \lambda_j \ge 0$,*

$$\mu_n(\bar{k}(\sigma) = \bar{s}) = P\big(\bar{\xi} = \bar{s} | \ell(\bar{\xi}) = n\big), \quad \bar{s} \in \mathbf{N}_0^n$$

ir egzistuoja $n_0 \in \mathbf{N}$ bei teigiamos konstantos Θ, θ, θ_1, tenkinančios sąlygas:

- $j\lambda_j \le \Theta, \quad 1 \le j \le n;$
- $$\sum_{j\le u} j\lambda_j \ge \theta u, \quad n_0 \le u \le n;$$
- $nP\big(\ell(\bar{\xi}) = n\big) \ge \theta_1, \quad n \ge n_0.$

Straipsnyje [23] buvo naudota sudėtingiau formuluota paskutinė sąlyga. Šis variantas atsirado mūsų darbe [EM12]. Beveik visos iki šiol tyrinėtos ansamblių klasės yra silpnai logaritminės. Išimtį, pavyzdžiui, sudaro nesenas A.D. Barbour ir A. Posfai darbas

[BaPo10]. Tikimybinių metodų, naudojamų atsitiktinių ansamblių teorijoje, pagrindas yra vadinamoji Fundamentalioji lema, primenanti J.Kubiliaus lemą TST. Suformuluosime savo rezultatą.

Tegul $\bar{s}_r = \big(s_1, \ldots, s_n\big)$, $1 \le r \le n$, yra ,,sutrumpintas" vektorius ir $\bar{k}_r(\sigma)$ atitinkamas komponenčių vektorius. Tradiciškai $\mathcal{L}(X)$ žymi a.d. X skirstinį, o $x_+ := \max\{x, 0\}$, jei $x \in \mathbf{R}$. Vertiname atstumą pagal pilnąją variaciją.

25 teorema. *Tarkime, kad $(\mathcal{A}_n, \mu_n)$ yra silpnai logaritminė ir $n \ge 1$. Egzistuoja tokia teigiama konstanta α, kad*

$$\rho_{TV}\Big(\mathcal{L}\big(\bar{k}_r(\sigma)\big), \mathcal{L}(\bar{\xi}_r)\Big) := \sum_{\bar{s} \in \mathbf{N}_0^r} \Big(\mu_n\big(\bar{k}_r(\sigma) = \bar{s}\big) - P(\bar{\xi}_r = \bar{s})\Big)_+ = O\bigg(\Big(\frac{r}{n}\Big)^{\alpha}\bigg),$$

čia $1 \le r \le n$, o visos konstantos priklauso tik nuo n_0, Θ, θ bei θ_1.

Jei $r = o(n)$, priklausomus a.d. galima aproksimuoti nepriklausomais Puasono a.d. Likusios komponenčių vektoriaus dalies, kai $r \le j \le n$, įtakos eliminavimui buvo sukurta kita metodika (žr. [11], [19] ir kitus darbus).

Gauti rezultatai prisidėjo iškeliant atsitiktinių struktūrų teoriją į tą lygį, kuris yra pasiektas TST. Jų paklausa atsitiktinių matricų teorijoje (žr. [Wi03], [DaZe14] ir kt.) ar su geroku pavėlavimu fizikų teoretikų [BeUeVe11] iš naujo atrandami apibendrintieji Ewens'o skirstiniai, kuriuos pradėjome nagrinėti dar 2002 m., teikia vilčių šios tematikos perspektyvoms.

RINKINYJE PRISTATOMI STRAIPSNIAI

[1] E. Manstavičius, Distribution of the traditionally normalized additive functions, *Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp.*, 14(1994), 115–139.

[2] E. Manstavičius, An invariance principle for additive arithmetic functions, *Soviet. Math. Dokl.*, 1988, **298**(6), 1316–1320; vert.: 1988, **37**(1), 259-263.

[3] E. Manstavičius, Natural divisors and the Brownian motion, *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, 1996, **8**, 159–171.

[4] E. Manstavičius, N. M. Timofeev, Functional limit theorem related to natural divisors, *Acta Math. Hungarica*, 1997, **75**(1–2), p. 1–13.

[5] E. Manstavičius, G. Bareikis, On the DDT theorem, *Acta Arithm*, 2007, **126**(2), 155–168.

[6] E. Manstavičius, Functional limit theorems in probabilistic number theory, in: *Bolyai Society Mathematical studies. 11: Paul Erdös and His Mathematics.* I, G. Halász, L. Lovász, M. Simonovits and V. T. Sos (Eds.), Springer, Berlin, 2002, p. 465–491.

[7] E. Manstavičius, Laws of the iterated logarithm for additive functions, *Colloquia Math. Soc. J. Bolyai*, 1987, **51**, 279-299.

[8] E. Manstavičius, Functional approach in the divisor distribution problems, *Acta Math. Hungarica*, 1995, **67**(1-2), 1–17.

[9] M. Drmota, M. Fuchs, E. Manstavičius, Functional limit theorems for digital expansions, *Acta Math. Hungarica*, 2003, **98**(3), 175–201.

[10] K.-H. Indlekofer, E. Manstavičius and R. Warlimont, On a certain class of infinite products with an application to arithmetical semigroups, *Archiv der Math.*, 1991, **56**, 446–453.

[11] G.J. Babu, E. Manstavičius, Brownian motion for random permutations, *Sankhyā: The Indian J. of Statistics*, 1999, **61**(3), 312–327.

[12] G.J. Babu, E. Manstavičius, Limit processes with independent increments for the Ewens sampling formula, *Ann. Inst. Statist. Math.*, 2002, **54**(3), 607–620.

[13] E. Manstavičius, Asymptotic value distribution of additive function defined on the symmetric group, *Ramanujan J.*, 2008, **17**, 259–280.

[14] T. Bakšajeva and E. Manstavičius, On statistics of permutations chosen from the Ewens distribution, Combin., Probab. Computing, 2014, **23**(06), 889–913.

[15] E. Manstavičius, On some densities in the set of permutations, *Electronic J. Combin.*, 2010, **17**(1), R100.

[16] E. Manstavičius, Inequalities for the p-th moment, $0 < p < 2$, of a sum of independent random variables, *Lith. Math. J.*, 1982, **22**(1), 64–67.

[17] E. Manstavičius, Moments of additive functions on random permutations, *Acta Appl. Math.*, 2007, **97**, 119–127.

[18] E. Manstavičius, Ž. Žilinskas, On a variance related to the Ewens sampling formula, *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 2011, **16(4)**, 453–466.

[19] E. Manstavičius, Strong convergence on weakly logarithmic combinatorial assemblies, *Discrete Math.*, 2010, **311**(6), 463–477.

[20] E. Manstavičius, Value concentration of additive functions on random permutations, *Acta Appl. Math.*, 2003, **79**, 1–8.

[21] E. Manstavičius, The Berry–Esseen bound in the theory of random permutations, *Ramanujan J.*, 1998, **2**, 185–199. Perspausdinta kn.: *Analytic and Elementary Number Theory*, ser. *Developments in Math.*, vol. 1, 1998, 185–199.

[22] E. Manstavičius, Mapings on decomposable combinatorial structures: analytic approach, *Combin., Probab. Computing*, 2002, **11**, 61–78.

[23] E. Manstavičius, An analytic method in probabilistic combinatorics, *Osaka J. Math.*, 2009, **46**(1), 273–290.

[24] E. Manstavičius, Total variation approximation and a functional limit theorem, *Monatshefte Math.*, 2010, **161**(3), 313–334.

APŽVALGOJE CITUOJAMA LITERATŪRA

[ABT03] R. Arratia, A.D. Barbour and S. Tavaré, *Logarithmic Combinatorial Structures: a Probabilistic Approach*, EMS Publishing House, Zürich, 2003.

[BaEM99] G.J. Babu and E. Manstavičius, Random permutations and the Ewens sampling formula in genetics, In: *Probability Theory and Mathematical Statistics: Proceedings of the Seventh Vilnius Conf. (1998)*, B.Grigelionis *et al.* (Eds), VSP/TEV, Utrecht/ Vilnius, 1999, p. 33–42.

[BaEM02] G.J. Babu and E. Manstavi.čius, Infinitely divisible limit processes for the Ewens sampling formula, *Lith. Math. J.*, 2002, **42**(3), 232–242.

[BaEMZa07] J.G. Babu, E. Manstavičius and V. Zacharovas, Limiting processes with dependent increments for measures on symmetric group of permutations, in: *Advanced Studies in Pure Mathematics*, 2007,**49**, Kanazawa, 41–67.

[BaEs65] B.von Bahr and C.G.Esseen, Inequalities for the r-th absolute moment of a sum of random variables, $1 \leq r \leq 2$, *Ann. Math. Stat.*, **36**(1965), 1, 298-303.

[TBdis] T. Bakshajeva, *Asymptotic distributions related to the Ewens Samplin Formula*, Daktaro disertacija, Vilnius, 2013.

[BaPo10] A.D. Barbour and A. Psfai, Couplings for irregular combinatorial assemblies, *arXiv:1011.0309v1.*

[BeUeVe] Y. Betz, D. Ueltschi and Y. Velenik, Random permutations with cycle weights, *Ann. Appl. Probab.*, 2011, **21**(1), 312-331.

[Bi74] P. Billingsley, The probability theory of additive arithmetic functions, *Ann. of Probab.*, 1974, 2, 749-791.

[Bi68] P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, Wiley & Sons, New York, 1968.

[BoEM12] K. Bogdanas and E. Manstavičius, Stochastic processes on weakly logarithmic assemblies, in: *Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory*: Proceedings of the 5th International Conference in Honour of J. Kubilius, Palanga, 4–10 September, 2011. Kubilius Memorial Volume. Eds. A. Laurinčikas, E. Manstavičius, G. Stepanauskas, Vilnius: TEV, 2012, 69–80.

[DaZe14] K. Dang and D. Zeindler, The characteristic polynomial of a random permutation matrix at different points, *Stochastic Process. Appl.*, 2014, **124**(1), 411–439.

[DePi85] J.M. DeLaurentis and B.G. Pittel, Random permutations and the Brownian motion. *Pacific J. Math.* **119**, 287–301.

[DoKuTa91] P. Donnelly, T.G. Kurtz and S. Tavaré, On the functional central limit theorem for the Ewens Sampling Formula. *Ann. Appl. Probab.*, 1991, **1**, 539–545.

[El79] P.D.T.A. Elliott, *Probabilistic Number Theory.* I,II. Springer-Verlag, New York Inc., 1979/80.

[El97] P.D.T.A. Elliott, *Duality in Analytic Number Theory*, Cambridge University Press, 1997.

[Er46] P.Erdös, On the distribution of additive functions, *Ann. of Math.*, **47**(1946), 1-20.

[Er69] P. Erdös, On the distribution of prime divisors, *Aequationes Math.*, 1969, **2**, 177-183.

[FlOd90] P. Flajolet and A.M. Odlyzko, Singularity analysis of generating functions, 1990, *SIAM J. Discrete Math.*, **3**(2), 216–240.

[FlSe09] P. Flajolet and R. Sedgewick, *Analytic Combinatorics*, Cambridge University Press, 2009.

[HaTe88] R.R. Hall and G. Tenenbaum, *Divisors*, Cambridge University Press, 1988.

[Ha90] J.C. Hansen, A functional central limit theorem for the Ewens Sampling Formula, *J. Appl. Probab.*, 1990, **27**, 2843.

[InEM94] K.-H. Indlekofer and E. Manstavičius, Additive and multiplicative functions on arithmetical semigroups, *Publicationes Math. Debrecen*, 1994, **45**(1–2), 1–17.

[InEM95] K.-H. Indlekofer and E. Manstavičius, Translates of additive and multiplicative functions defined on arithmetical semigroups, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 1995, **61**, 105–122.

[InEM01] K.-H. Indlekofer and E. Manstavičius, Distribution of multiplicative functions defined on semigroups, *Quaestiones Mathematicae*, 2001, **24**(3), 335–347.

[KnEM97] A. Knopfmacher and E. Manstavičius, On the largest degree of an irreducible factor of a polynomial in $\mathbf{F_q}[\mathbf{X}]$, *Lith. Math. J.*, 1997, **37**(1), 38–45.

[Kn] J. Knopfmacher, *Analytic Arithmetic of Algebraic Function Fields*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 50, Marcel Dekker, New York, 1979.

[KnZh] J. Knopfmacher and W.-B. Zhang, *Number Theory Arising from Finite Fields. Analytic and Probabilistic Theory*, Marcel Dekker, Inc., New York-Basel, 2001.

[ZKdis] Z. Kryžius, *Adityvių̨jų ir multiplikatyvių̨jų funkcijų integralinės ribinės teoremos*, Kandidatinė disertacija, Vilnius, 1980 (rusų k.).

[JK62] J. Kubilius, *Probabilistic methods in the Theory of Numbers* (Rusų k.), Vilnius, 1962; AMS Translations, 1964.

[LeTi74] B.V. Levin and N.M. Timofeev, Distribution of the values of additive functions I, *Acta Arithm.*., 1974, **26**, 333-364.

[LeTi77] B.V. Levin and N.M. Timofeev, Distribution of the values of additive functions II, *Acta Arithm.*, 1977, **33**, 327-351.

[Lo92dis] R. Lovorn [Renee Lovorn Bender], *Rigorous, Subexponential Algorithms for Discrete Logarithms Over Finite Fields*, PhD Thesis, University of Georgia, 1992.

[AMdis] A. Mačiulis, *Konvergavimo greičio įverčiai aritmetinių funkcijų integralinėse ribinėse teoremose*, Kandidatinė disertacija, Vilnius, 1983 (rusų k.).

[EM73] E. Manstavičius, The distribution of additive arithmetic functions (mod 1), *Liet. matem. rink.*, 1973, **13**(1), 101–108; *Math. Trans. Acad. Sci. Lith. SSR*, 1973, **13**(1), 70–75.

[EM74] E. Manstavičius, An application of the method of generating Dirichlet series in the theory of the distribution of values of arithmetic functions, *Liet. matem rink.*, 1974, **14**(1), 99–111; *Lith. Math. Trans.*, 1974, **14**(1), 72–82.

[EM84] E. Manstavičius, Arithmetic simulation of stochastic processes. *Lith. Math. J.*, 1984, **24**(3), 276–285.

[EM85] E. Manstavičius, Additive functions and stochastic processes, *Lith. Math. J.*, 1985, **25**(1), 52–61.

[EM86a] E. Manstavičius, Strong convergence of additive arithmetic functions, *Lith. Math. J.*, 1986, **25**(2), 154–161.

[EM86b] E. Manstavičius, Law of the iterated logarithm in the Strassen formulation and additive functions, *Lith. Math. J.*, 1986, **26**(1), 50–56.

[EM92K] E. Manstavičius, Semigroup elements free of large prime factors. In: *New Trends in Probability and Statistics.* V. 2: Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory. *Proceedings on the Intern. Conf. in Honour of J. Kubilius, Palanga, Lithuania, 24–28 September 1991.* Eds. F. Schweiger and E. Manstavičius, Vilnius: TEV, Utrecht: VSP, 1992, p. 135–153.

[EM92] E. Manstavičius, Remarks on the semigroup elements free of large prime factors, *Lith. Math. J.*, 1992, **32**(4), 400–410.

[EM94] E. Manstavičius, A proof of the Erdös arcsine law, *Probab. Theory and Math. Statistics, Proceedings of the sixth Intern. Vilnius Conf.*, B. Grigelionis et al. (Eds), VSP/Utrecht, TEV/Vilnius, 1994, p. 533–539.

[EM96] E. Manstavičius, Additive and multiplicative functions on random permutations, *Lith. Math. J.*, 1996, **36**(4), 400–408.

[EM97] E. Manstavičius, Probabilistic theory of additive functions related to systems of numeration, In: *New Trends in Probability and Statistics.* V. 4: Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory. *Proceedings on the Second Intern. Conf. in Honour of J. Kubilius, Palanga, Lithuania, 23–27 September 1996.* Eds. A. Laurinčikas, E. Manstavičius and V. Stakėnas, Vilnius: TEV, Utrecht: VSP, 1997, p. 413–429.

[EM98] E. Manstavičius, The law of iterated logarithm for random permutations, *Lith. Math. J.*, 1998, **38**, 160–171.

[EM99kn] E. Manstavičius, A Tauber theorem and multiplicative functions on permutations, *In: Number Theory in Progress: Proceedings on the International Conference on Number Theory in Honour of Andrzej Schinzel, Zakopane, Poland, June 30–July 9, 1997*, Walter de Gruyter, Berlin, 1999, v.2 p. 1025–1038.

[EM99] E. Manstavičius, Stochastic processes with independent increments for random mappings, *Lith. Math. J.*, 1999, **39**(4), 393–407.

[EM02K] E. Manstavičius, Functional limit theorem for sequences of mappings on the symmetric group, in: *Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory. Proceedings of the Third Intern. Conf. in Honour of J. Kubilius, Palanga, Lithuania, 24–28 September, 2001.* A. Dubickas, A. Laurinčikas, E. Manstavičius (Eds), TEV, Vilnius, 2002, p. 175–187.

[EM04] E. Manstavičius, Iterated logarithm laws and the cycle lengths of a random permutation, *Trends Math., Mathematics and Computer Science III, Algorithms, Trees, Combinatorics and Probabilities, M.Drmota et al (Eds)*, Birkhauser Verlag, Basel, 2004, 39–47.

[EM06] E. Manstavičius, Conditional probabilities in combinatorics. The cost of dependence, in: *Prague Stochastics 2006. Proceedings of the joint session of 7th Prague Symposium on Asymptotic Statistics and 15th Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions and Random Processes*, Eds. M. Huškova and M. Janžura, Matfyzpress, Prague, 2006, 523–532.

[EM07] E. Manstavičius, Summability of additive functions on permutations, in: Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory, Proceedings of the Fourth Intern. Conf. in Honour of J. Kubilius, Palanga, Lithuania, 25–29 September 2006, (eds. A. Laurinčikas and E. Manstavičius), 2007, TEV, Vilnius, 2007, 99–108.

[EM09] E. Manstavičius, A functional limit theorem on powers of random permutations, *Lith. Math. J.*, 2009, **49**(3), 297–308.

[EM11] E. Manstavičius, A limit theorem for additive functions defined on the symmetric group, *Lith. Math. J.*, 2011, **51**(2), 220–232.

[EM12] E. Manstavičius, On total variation approximations for random assemblies, *Discrete Math. Th. Comput. Sci.*, 2012, 97-108.

[EM15] E. Manstavičius, Restrictive patterns of combinatorial structures via comparative analysis, *Ann. Combin.*, 2015 (spausdinamas).

[EMNo08] E. Manstavičius, J. Norkūnienė, An analogue of Feller's theorem for logarithmic combinatorial assemblies, *Lith. Math. J.*, 2008, **48**(4), 405–417.

[EMSk03] E. Manstavičius and R. Skrabutėnas, On analytic problems for additive arithmetical semigroups, *Ann. Univ. Sci. Budapest, Sec. Comp.*, 2003, **22**, 269–285.

[EMSt15] E. Manstavičius and V. Stepanauskas, On variance of an additive function with respect to a generalized Ewens probability, *Discrete Math. Th. Comp. Sci.*. Proceedings of the 25th International Conference on Probabilistic, Combinatorial and Asymptotic Methods for the Analysis of Algorithms, Mireille Bousquet-Mélou; Michéle Soria (Eds), France. BA, p. 301–312, 2014.

[NoDis] J. Norkūnienė, *The laws of iterated logarithm for combinatorial structures*, Doctoral dissertation, Vilnius University, 2007.

[Od00] A.M. Odlyzko, Discrete logarithms: the past and the future, *Designs, Codes and Cryptography*, 2000, **19**, 129-145.

[Pe87] V.V. Petrov, *Limit Theorems for Sums of Independent Random Variables*, Nauka, Moscow, 1987 (rusų k.)

[WP73] W. Philipp, Arithmetic functions and Brownian motion, *Proc. Symposia in Pure Mathematics*, 1973, **24**, 233–246.

[Te95] G. Tenenbaum, *Introduction to Analytic and Probabilistic Number Theory*, Cambridge Tracts in Math., **46**, Cambridge University Press, 1995.

[Te97] G. Tenenbaum, Addendum to the paper of E.Manstavičius and N.M.Timofeev "A functional limit theorem related to natural divisors", *Acta Math. Hung.*, 1997, **75**(1-2), 15–22.

[TiUs82] N.M. Timofeev, H.H. Usmanov, On the arithmetical simulating of the Brownian motion, *Dokl. Akad. Sc. TadzSSR*, 1982, **25**(4), 207–211.

[TiUs84] N.M. Timofeev, H.H. Usmanov, On the arithmetical simulating of the processes with independent increments, *Dokl. Akad. Sc. TadzSSR*, 1984, **27**(10), 556–559.

[Wi03] K. Wieand, Permutation matrices, wreath products, and the distribution of eigenvalues, *J. Theoret. Probab.* 2003. **16**(3), 599–623.

[VZdis] V. Zacharovas, *Distribution of random variables on the symmetric group*, Doctorial dissertation, Vilnius University, 2004, *arXiv:0901.1733.*