5. Rekurentieji sąryšiai

5.1. Generuojančiųjų eilučių algebra

Ankstesniuose skyriuose dažnai naudojomės polinomais. Nagrinėjant begalines sekas $\{a_n\}$, $n \geqslant 0$, patogu įvesti formalias begalines eilutes

$$A(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

vadinamas generuojančiosiomis eilutėmis. Čia a_n gali būti realieji skaičiai arba priklausyti kokiam nors kitam kūnui. Kol kas apsiribosime realiaisiais skaičiais. Susitarkime visada vadovautis tokiu principu. Tegul

$$B(x) := b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

Lygybę $A(x) = B(x)$ rašysime tada ir tik tada, jei $a_n = b_n$ kiekvienam $n \geqslant 0$.

Jei $a_m = 0$ visiems $m > n$, tai generuojanti eilutė virsta polinomu. Kaip ir polinomų algebroje, nežinomajam x nesuteikiame jokios prasmės. Prisiminkime, kad polinomų atveju lygybę $A(x) = B(x)$ užtikrina tai, kad jų reikšmės sutampa didesniame skaičiuje taškų negu yra jų laipsniai. Funkcijų teorijoje Teiloro[17] koeficientai yra vienareikšmiškai nusakomi, jei laipsninė eilutė konverguoja netrivialiame intervale $|x| < \delta$, $\delta > 0$. Bet mes kol kas nesinaudosime eilutės konvergavimu vienokia ar kitokia prasme, kaip yra įprasta matematinėje analizėje. Šios eilutės neapibrėžia funkcijos. Bet kuri jos reikšmė $A(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, išskyrus $A(0) = 0$, bendru atveju yra neapibrėžta. Nors iš įpročio generuojančios eilutės vadinamos funkcijomis. Paįvairindami kalbą ir mes šitaip retsykiais pasielgsime.

Generuojančios eilutės yra puiki priemonė apibrėžti algebrines operacijas begalinių sekų aibėje. Formaliai eilučių veiksmai apibrėžiami kaip ir polinomų. Eilučių $A(x)$ ir $B(x)$ suma vadinama eilutė

$$\begin{aligned} A(x) + B(x) &:= a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n, \end{aligned}$$

o sandauga – eilutė

$$\begin{aligned} A(x)B(x) &:= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)2x^2 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) x^n. \end{aligned}$$

[17]Brook Taylor (1685–1731) – anglų matematikas.

Atkreipkime dėmesį, kad čia sudedame ar dauginame panariui, o su koeficientais atliekame aritmetinius veiksmus, bet visada tik su baigtiniu jų skaičiumi. Iš skaičių veiksmų savybių išplaukia generuojančių eilučių veiksmų ypatybės. Kaip ir polinomams, galioja tie patys dėsniai.

1) Komutatyvumo:

$$A(x) + B(x) = B(x) + A(x), \qquad A(x)B(x) = B(x)A(x).$$

2) Asociatyvumo:

$$\begin{aligned}(A(x) + B(x)) + C(x) &= A(x) + (B(x) + C(x)),\\ (A(x)B(x))C(x) &= A(x)(B(x)C(x));\end{aligned}$$

čia $C(x)$ yra trečia eilutė.

3) Distributyvumo:

$$(A(x) + B(x))C(x) = A(x)C(x) + B(x)C(x).$$

Kai $a_n \equiv 0$, eilutei tenka nulio vaidmuo, o kai $a_0 = 1$ ir $a_n = 0$, $n \geqslant 1$, – vieneto. Jas žymėkime 0 ir 1. Eilutės $A(x)$ priešingoji eilutė turi koeficientus $-a_n$, $n \geqslant 0$. Taigi galime sakyti, kad generuojančių eilučių aibė, kurioje apibrėžtos šios sudėties ir daugybos operacijos, sudaro komutatyvų žiedą su vienetu.

Apibrėžę realaus skaičiaus c ir eilutės $A(x)$ sandaugą

$$cA(x) = ca_0 + ca_1x + \cdots = \sum_{n \geqslant 0} ca_n x^n,$$

nesunkiai patikrintume, kad eilutės sudaro tiesinę erdvę virš realiųjų skaičių kūno.

Galima įvesti ir daugiau formalių operacijų su eilutėmis. Pavyzdžiui, eilutės $A(x)$ išvestine vadinama eilutė

$$A'(x) := a_1 + 2a_2x + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1},$$

o integralu – eilutė

$$\int_0^x A(u)\mathrm{d}u := a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

Vien tik iš apibrėžimų išplaukia lygybės

$$\left(\int_0^x A(u)\mathrm{d}u\right)' = A(x), \qquad \int_0^x A'(u)\mathrm{d}u = A(x).$$

Kaip paprasta, jokių konvergavimo reikalavimų! Tačiau sunkumų iškyla norint apibrėžti dviejų eilučių superpoziciją $A(B(x))$. Bandykime skaičiuoti:

$$\begin{aligned} A(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots) &= a_0 + a_1(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots) \\ &\quad + a_2(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots)^2 + \cdots . \end{aligned} \tag{5.1}$$

Pakelti laipsniais mokame, bet vėliau reiktų sutraukti panašiuosius narius, t. y. su vienodais x laipsniais. Ką daryti su laisvaisiais nariais

$$a_0 + a_1b_0 + a_2b_0^2 + \cdots ?$$

Deja, ši begalinė suma neapibrėžta. Todėl tenka reikalauti, kad $b_0 = 0$. Kiti koeficientai prie x^n, kai $n \geqslant 1$, (5.1) reiškinyje nesunkiai sutraukiami, nes jie išsireiškia per baigtinį skaičių pirmųjų koeficientų. Įsidėmėkime, kad superpozicija $A(B(x))$ apibrėžiama formaliai atliekant veiksmus tik esant sąlygai $b_0 = 0$.

Neprieštaraudami matematinės analizės teiginiams, palikime standartinius žymenis atskiroms eilutėms:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n x^n = \frac{1}{1-ax},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = \mathrm{e}^x = \exp\{x\},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \ln(1+x).$$

Pirmoji lygybė neprieštarauja sandaugai $(1 - ax)(a + ax + \cdots) = 1$. Eilutės $1 - ax$ ir $a + ax + \cdots$ yra viena kitai atvirkštinės. Apskritai eilutė $B(x)$ yra atvirkštinė $A(x)$, jeigu $A(x)B(x) = 1$. Žymėsime $B(x) = A^{-1}(x)$. Ar atvirkštinė eilutė visada egzistuoja? Tarkime, koeficientai $a_0, a_1, \ldots$ yra žinomi. Ieškokime koeficientų $b_0, b_1, \ldots$, tenkinančių sąryšį

$$(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots)(b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n + \cdots) = 1.$$

Pagal sandaugos ir dviejų eilučių lygybės apibrėžimą tai yra ekvivalentu begalinei lygčių sistemai

$$a_0b_0 = 1, \qquad a_0b_1 + a_1b_0 = 0, \qquad a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0 = 0, \ldots .$$

Jei $a_0 = 0$, koeficientas b_0 yra neapibrėžtas ir sistema sprendinio neturi. Jei $a_0 \neq 0$, radę $b_0 = a_0^{-1}$, randame vienintelį b_1. Tarę, kad visi b_k, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, jau žinomi, randame

$$b_n = -a_0^{-1}(a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0).$$

Remiantis indukcijos principu, eilutės $B(x)$ koeficientai yra vienareikšmiškai apibrėžti.

Vadinasi, atvirkštinė eilutė $A^{-1}(x)$ egzistuoja tada ir tik tada, jei $a_0 \neq 0$. Įsidėmėkime tai!

Tarkime, kad α yra bet koks realus skaičius, o $k \in \mathbb{Z}$. Įveskime apibendrintąjį Niutono binomo koeficientą:

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{(\alpha)_k}{k!}, \quad \text{kai } k \geqslant 0, \qquad \binom{\alpha}{k} = 0, \quad \text{kai } k < 0.$$

Apibendrintoji Niutono binomo formulė

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

taip pat suprantama kaip formalioji eilutė. Dydis, esantis kairiojoje lygybės pusėje, yra tik eilutės žymuo, neprieštaraujantis analizės tradicijoms.

Taip žymėdami analizėje aptinkamas eilutes, išsaugome ir jų sąryšius, žinomus iš matematinės analizės. Pavyzdžiui,

$$\exp\big(-\ln(1-x)\big) = \frac{1}{1-x}, \qquad \ln\big(1 + (\mathrm{e}^x - 1)\big) = x.$$

Pastarajame sąryšyje pridėdami ir atimdami vienetą mes pabrėžėme, kad rašant superpoziciją vidinė eilutė turi turėti nulinį laisvąjį narį. Eilutė $\mathrm{e}^x - 1$ šią sąlygą tenkina. Diferencijavimo taisyklės

$$\begin{aligned} (c_1A(x) + c_2B(x))' &= c_1A'(x) + c_2B'(x), \\ (A(x)B(x))' &= A'(x)B(x) + A(x)B'(x) \end{aligned}$$

yra lengvai patikrinamos naudojantis apibrėžimais. Panašiai mūsų apibrėžti formalūs integralai turi įprastas integralų savybes. Visi užrašytieji sąryšiai reiškia tik vieną faktą: eilutės, esančios kairiojoje lygybės pusėje, n-asis koeficientas sutampa su eilutės, esančios dešiniojoje lygybės pusėje, n-uoju koeficientu.

Išvedant formalių generuojančių eilučių savybes, pakanka kombinatorikos priemonių. Kad būtų lengviau įsivaizduoti, kaip tai yra daroma, pateikiame porą paprastų pavyzdžių.

5.1 pavyzdys. Patikriname, ar

$$\mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{-x} = 1. \tag{5.2}$$

Sudauginame panariui kairėje esančias eilutes ir palyginame su eilute, lygia 1. Laisvieji nariai sutampa. Jei $n \geqslant 1$, tai gautos eilutės koeficientas prie x^n yra lygus

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n!0!} - \frac{1}{(n-1)!1!} + \frac{1}{(n-2)!2!} \mp \cdots + \frac{(-1)^n}{0!n!} \\ &= n!\left(1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}\right) \\ &= n!(1-1)^n \\ &= 0. \end{aligned}$$

Vadinasi, (5.2) lygybė yra teisinga.

5.2 pavyzdys. Jei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ yra bet kokie skaičiai, tai

$$(1+x)^{\alpha+\beta} = (1+x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}.$$

Kaip minėjome, toks sąryšis yra ekvivalentus teiginiui, kad abiejose lygybės pusėse esančių eilučių atitinkami koeficientai sutampa. Vadinasi, reikia įrodyti, kad

$$\binom{\alpha+\beta}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{\alpha}{j}\binom{\beta}{k-j}$$

su kiekvienu $k \geqslant 0$. Pastaroji lygybė, kai $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+$, jau buvo įrodyta 3.16 teoremoje. Toliau remsimės polinomų algebra. Į dydžius, esančius kairiojoje ir dešiniojoje paskutinės lygybės pusėse, žiūrime kaip į polinomus su nežinomaisiais α ir β. Kaip minėjome, šių polinomų reikšmės sutampa begalinėje aibėje taškų. Vadinasi, jie yra tapačiai lygūs.

Išvardytos lygybės dažnai tikrinamos matematinės analizės priemonėmis. Turint netrivialią eilutės $A(x)$ konvergavimo sritį $|x| < x_0$, $x_0 > 0$, ir kartu funkciją $x \mapsto A(x)$ šioje srityje, pasinaudojama Teiloro koeficientų formulėmis. Įrodyti sąryšiai tarnauja įvairių lygybių eilučių koeficientams išvesti.

Tiriant laipsnines eilutes matematinės analizės metodais, tenka pagrįsti eilučių konvergavimą netrivialioje taško $x = 0$ aplinkoje. Kai koeficientų seka didėja palyginti greitai, galima normuoti juos žinoma seka. Panagrinėsime dažniausiai pasitaikantį atvejį, kai sekos koeficientas dalijamas iš jo indekso faktorialo.

Sekos $\{a_n\},\ n \geqslant 0$, eksponentine generuojančiąja eilute (toliau vartojama santrumpa e. g. e.) vadinama formali eilutė

$$\widetilde{A}(x) := a_0 + \frac{a_1 x}{1!} + \frac{a_2 x^2}{2!} + \cdots + \frac{a_n x^n}{n!} + \cdots.$$

Taigi vienetų sekos e. g. e. yra e^x, o sekos $\{n!\}$, $n \geqslant 0$, – eilutė $1/(1-x)$.

Pastebėkime porą savybių, labai palengvinančių skaičiavimus.

5.1 lema. Jei $\widetilde{A}(x)$ yra sekos $\{a_n\}$, $n \geqslant 0$, e. g. e., tai $\widetilde{A}'(x)$ – sekos $\{a_{n+1}\},\ n \geqslant 0$, e. g. e.

Jei $\widetilde{B}(x)$ yra sekos $\{b_n\},\ n \geqslant 0$, e. g. e., tai

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}$$

e. g. e. yra sandauga $\widetilde{A}(x)\widetilde{B}(x)$.

Įrodymas. Pirmasis teiginys išplaukia iš apibrėžimų. Pagrįsdami antrąjį tvirtinimą, eilutes sudauginame panariui ir gauname

$$\widetilde{A}(x)\widetilde{B}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!}\frac{b_{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{k!} x^n.$$

Lema įrodyta. ◢

5.3 pavyzdys. Naudodamiesi e. g. e., kitu būdu raskime netvarkingųjų n-osios eilės keitinių skaičių. Kaip ir anksčiau, jį žymėkime t_n, $n \geqslant 1$. Susitarkime, kad $t_0 = 1$. Prisiminkime (4.5) lygybę

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t_{n-k},$$

jau įrodytą 4.2 skyrelyje. Iš jos ir 5.1 lemos išplaukia eksponentinių generuojančių eilučių sąryšis

$$\frac{1}{1-x} = \mathrm{e}^x \widetilde{T}(x), \quad \widetilde{T}(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t_n}{n!} x^n.$$

Dabar randame funkcijos koeficientus:

$$\begin{aligned} \widetilde{T}(x) &= \mathrm{e}^{-x}/(1-x) \\ &= \left(1 - \frac{1}{1!}x + \cdots + \frac{(-1)^m}{m!}x^m + \cdots\right)\left(1 + x + \cdots + x^k + \cdots\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Sulyginę dvi koeficientų išraiškas, gauname formulę:

$$t_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Ar taip seką t_n rasti yra lengviau negu taikyti rėčio principą? Gal atlikote 4 skyriaus 4.4 užduotį ir išmokote šią formulę išvesti trečiuoju būdu? Patirtis tikrai praverstų.

Daugelis eilučių gali būti išreikštos begalinėmis sandaugomis. Kaip dauginti begalinį skaičių begalinių eilučių? Antrame skyriuje mes įteisinsime dalinių sandaugų konvergavimą į begalinę, o dabar išmokime tik formalių operacijų. Tegul

$$F_j(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_j(k) x^{jk},$$

čia $f_j(k) \in \mathbb{R}$, be to (ir tai labai svarbu!), $f_j(0) = 1$ kiekvienam $j \geqslant 1$. Kaip ir anksčiau apibrėžtų funkcijų atvejais, tarsime, kad begalinė sandauga žymi formalią eilutę, kurios visi koeficientai prie x^n, $n \geqslant 0$, apskaičiuojami sutraukiant panašiuosius narius, gautus dauginant panariui eilutes $F_j(x)$. Aišku, galima atlikti tik baigtinį skaičių veiksmų. Patariame eilučių bendriesiems nariams suteikti skirtingus indeksus ir šiuos narius sudauginti. Kai indeksai perbėgs visą jų kitimo sritį, gausime visas kiekvieno nario iš kiekvieno sandaugas.

Pabandykime:

$$\prod_{j=1}^{\infty} F_j(x) = (1 + f_1(1)x + \cdots + f_1(k_1)x^{k_1} + \cdots)$$

$$
\begin{aligned}
&\times (1 + f_j(1)x^j + \cdots + f_j(k_j)x^{jk_j} + \cdots) \\
&\times \cdots \\
= &\sum_{k_1,\ldots,k_j,\ldots \geqslant 0} f_1(k_1)x^{1k_1} \cdots f_j(k_j)x^{jk_j} \cdots .
\end{aligned}
$$

Atlikome pirmąjį žingsnį. Dabar sutraukime panašiuosius narius. Nežinomojo x laipsniai gali būti $0, 1, \ldots, n, \ldots$. Koeficientas prie x^n susiformuoja iš dėmenų, kai

$$1k_1 + \cdots + nk_n + (n+1)k_{n+1} + \cdots = n.$$

Šią lygybę tenkina tik $k_{n+1} = k_{n+2} = \cdots = 0$. Kadangi $f_j(0) \equiv 1$, tai

$$\prod_{j=1}^{\infty} F_j(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \Bigg(\sum_{\substack{k_1,\ldots,k_n \geqslant 0 \\ 1k_1+\cdots+nk_n=n}} f_1(k_1) \cdots f_n(k_n) \Bigg).$$

Skliaustuose esanti suma ir yra n-asis formalios eilutės, užrašytos begaline sandauga, koeficientas.

Taip prieš pustrečio šimto metų elgėsi L. Oileris. Akcentuodami išvestą lygybę, suformuluosime lemą.

5.2 lema. Teisinga formali lygybė

$$\prod_{j=1}^{\infty} \Bigg(1 + \sum_{k=1}^{\infty} f_j(k) x^{jk} \Bigg) = \sum_{n=0}^{\infty} \Bigg(\sum_{\substack{k_1,\ldots,k_n \geqslant 0 \\ 1k_1+\cdots+nk_n=n}} \prod_{j=1}^{n} f_j(k_j) \Bigg) x^n. \tag{5.3}$$

Į galimą klausimą, kiek dėmenų turi ši koeficientų skaičiavimo formulė, atsakysime kitame skyrelyje.

Išplėtoję eilučių dauginimo idėją, įrodysime vieną ateityje reikalingą formulę.

5.1 teorema. (Koši lygybė). Su kiekvienu $n \in \mathbb{N}$ yra teisinga lygybė

$$\sum_{\substack{k_1,\ldots,k_n \geqslant 0 \\ 1k_1+\cdots+nk_n=n}} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{j^{k_j} k_j!} = 1.$$

Įrodymas. Nagrinėjame vienetų sekos generuojančią eilutę. Pritaikę žinomus sąryšius, gauname

$$
\begin{aligned}
\sum_{n \geqslant 0} x^n &= \frac{1}{1-x} = \exp\{-\ln(1-x)\} \\
&= \exp\Bigg\{ \sum_{j \geqslant 1} \frac{x^j}{j} \Bigg\} = \prod_{j \geqslant 1} \exp\Bigg\{ \frac{x^j}{j} \Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$= \prod_{j\geqslant 1}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x^j}{j}\right)^k\frac{1}{k!}\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_n\geqslant 0\\ 1k_1+\cdots+nk_n=n}} \prod_{j=1}^{n}\frac{1}{j^{k_j}k_j!}.$$

Tos pačios generuojančios eilutės dvi koeficientų išraiškos turi sutapti.

Teorema įrodyta. ◢

Atidus skaitytojas turėtų pastebėti, kad Koši lygybė išplaukia ir iš 4.8 teoremos. Iš tiesų, sudėję jungtinių keitinių klasių galias, rastas toje teoremoje, gautume visų keitinių skaičių $n!$. Po to liktų tik padalyti iš šio faktorialo.

5.2. Natūraliojo skaičiaus adityvieji skaidiniai

Nagrinėsime vieną svarbiausių skaičių teorijos ir kombinatorikos objektų – natūraliojo skaičiaus n skaidinius natūraliųjų skaičių sumomis – ir susiesime juos su generuojančių funkcijų teorija. Spręskime klasikinį uždavinį:

Kiek kartų natūralųjį skaičių n galima užrašyti suma

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k?$$

Čia k ir n_k yra bet kokie natūralieji skaičiai. Į dėmenų tvarką neatsižvelgsime, todėl papildomai galime reikalauti, kad būtų $n_1 \geqslant \cdots \geqslant n_k \geqslant 1$. Ieškomasis skaičius vadinamas Oilerio–Hardžio[18]–Ramanudžano[19] seka (funkcija) ir žymimas $p(n)$. Sugrupavę vienodus dėmenis, šią išraišką galime užrašyti ir taip:

$$n = 1k_1 + \cdots + jk_j + \cdots + nk_n. \tag{5.4}$$

Dabar $k_j \geqslant 0$ parodo, kiek lygių j dėmenų buvo ankstesniame n skaidinyje. Pastebėkime, kad $p(n)$ yra (5.4) lygties sveikųjų neneigiamų sprendinių skaičius. Abi n išraiškas vadiname adityviaisiais skaidiniais. Seka $p(n)$ palyginti labai greitai didėja. Štai

$$2 = 1+1, \qquad 3 = 2+1 = 1+1+1, \qquad 4 = 3+1 = 2+1+1 = 1+1+1+1,$$

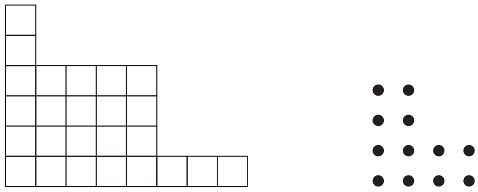
$$5 = 4+1 = 3+2 = 3+1+1 = 2+2+1 = 2+1+1+1 = 1+1+1+1+1$$

ir t. t.

Taigi

$$p(1) = 1, \quad p(2) = 2, \quad p(3) = 3, \quad p(4) = 4,$$

$$p(5) = 7, \quad \ldots, \quad p(20) = 627, \quad \ldots, \quad p(100) = 190569292, \ldots.$$



$25 = 8 + 5 + 5 + 5 + 1 + 1$ $\qquad$ $12 = 4 + 4 + 2 + 2$

5.1 pav.

Skaidinius galima vaizduoti lentelėmis, kaip parodyta 5.1 paveiksle.

Šios lentelės vadinamos Jungo[20] arba Fererso[21] diagramomis. Jose taškų arba langelių skaičius lygus n. Eilučių skaičius parodo dėmenų kiekį skaidinyje.

Įrodysime bent porą elementarių šios sudėtingos sekos savybių. Susitarkime žymėti $p(n|\ldots))$ skaičiaus n adityviųjų skaidinių, tenkinančių daugtaškio vietoje nurodytą sąlygą, skaičių.

5.2 teorema. Tegul $1 \leqslant r \leqslant n$ tada

$$p(n|\text{dėmenų skaičius neviršija } r) = p(n + r|\text{dėmenų skaičius lygus } r).$$

Įrodymas. Tegul pirmąją klasę sudaro visi skaičiaus $n + r$ adityvieji skaidiniai, o antrąją — skaičiaus n adityvieji skaidiniai. Nustatysime abipusiškai vienareikšmį šių klasių sąryšį.

Kadangi $n + r$ skaidinys turi lygiai r dėmenų, tai jo Fererso diagrama turi r eilučių. Nutrynę joje visus r pirmojo stulpelio taškelius, gautume vienintelę skaičiaus n diagramą, kurioje būtų ne daugiau kaip r eilučių. Atvirkščiai, turėdami n skaidinio diagramą iš ne daugiau kaip r eilučių, galime priekyje prirašyti vieną stulpelį su r taškų ir gauti vieną $n + r$ skaidinio su r dėmenų diagramą.

Teorema įrodyta. ◢

5.3 teorema. Tegul $k \in \mathbb{N}$ ir

$$p^{(k)}(n) = p(n|\text{dėmenų skaičius lygus } k).$$

Tuomet teisinga tokia rekurenčioji formulė:

$$p^{(k)}(n) = p^{(k)}(n-k) + p^{(k-1)}(n-k) + \cdots + p^{(1)}(n-k).$$

[18]Godfray Harold Hardy (1877–1947) – anglų matematikas.

[19]Srinivasa Aiyangar Ramanujan (887–1920) – indų matematikas.

[20]Heinrich Wilhelm Ewald Jung (1876–1953) – vokiečių matematikas.

[21]Norman Macleod Ferrers (1829–1903) – anglų matematikas.

Įrodymas. Pritaikome 5.2 teoremą ir skaičiaus $n-k$ skaidinių, turinčių ne daugiau kaip k dėmenų, aibę užrašome jos poaibių tiesiogine sajunga. ◢

Kadangi

$$p(n) = \sum_{k=1}^{n} p^{(k)}(n),$$

tai naudojantis šia teorema labai patogu skaičiuoti sekos $p(n)$ narius.

5.4 teorema. Tegul $1 \leqslant m \leqslant n$. Tada

$$p(n|\text{dėmenų skaičius lygus } m) = p(n|\text{didžiausias dėmuo lygus } m).$$

Įrodymas. Kaip ir 5.2 teoremoje, tarp skaidinių klasių reikia apibrėžti abipusiškai vienareikšmį atvaizdį. Tam pakanka transponuoti Fererso diagramą, t. y. skaidinio diagramos eilutes ir stulpelius sukeisti vietomis. Taip m eilučių diagrama tampa diagrama su ilgiausia eilute iš m taškų. Ji atitinka didžiausią dėmenį. ◢

Dabar pasinaudokime praeitame skyrelyje įvestomis generuojančiomis eilutėmis. Pradėkime nuo tokios polinomų sandaugos

$$\prod_{j=1}^{m}(1+x^j) =: 1 + \sum_{n=1}^{N} \hat{p}_m(n)x^n;$$

čia $N = 1 + 2 + \cdots + m$. Kokia koeficiento $\hat{p}_m(n)$ prasmė? Įžvelkime, kad jis lygus kiekiui skaičiaus n adityviųjų skaidinių

$$n = j_1 + \cdots + j_r, \tag{5.5}$$

kuriuose dėmenys j_i, $1 \leqslant i \leqslant r$, yra skirtingi ir neviršija m, o $r \geqslant 1$ yra bet koks. Iš tiesų x^n tarp polinomų sandaugos narių pasirodė tiek kartų, kiek buvo tokių skaidinių.

Daugindami begalinį skaičių polinomų

$$\prod_{j=1}^{\infty}(1+x^j) =: 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{p}(n)x^n$$

taikome (5.3) formulę, kai $f_j(k) = 1$, jei $k = 0$ arba $k = j$, ir $f_j(k) = 0$ – priešingu atveju. Tuomet

$$\hat{p}(n) = \sum_{\substack{j_1+\cdots+j_r=n \\ j_1,\ldots,j_r\geqslant 1,\, r\geqslant 1 \\ j_i\neq j_l,\, 1\leqslant i<l\leqslant r}} 1.$$

Vadinasi, $\hat{p}(n)$ yra lygus (5.5) skaidinių su bet kokiu $m \geqslant 1$ ir skirtingais dėmenimis skaičiui.

Raskime sekos $p(n)$ generuojančią eilutę. Jau žinome, kad verta nagrinėti sandaugas.

5.5 teorema. Tegu $p(0) := 1$. Tada

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{j=1}^{\infty}(1-x^j)^{-1}.$$

Įrodymas. Prisiminę, kokią eilutę žymi $(1-x^j)^{-1}$, ir (5.3) formulę, dauginame:

$$\begin{aligned} P(x) &= (1+x+x^2+\cdots)\cdots(1+x^j+x^{2\cdot j}+\cdots)\cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{\substack{1k_1+\cdots+nk_n=n \\ k_1,\ldots,k_n\geqslant 0}} 1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n. \end{aligned}$$

Teorema įrodyta. ◢

Skaičiavimus atlikome formaliai. Nekantraujantys įteisinti tokius argumentus gali pasinaudoti matematine analize ir įsitikinti, kad teoremoje išvesta lygybė yra teisinga intervale $|x| < 1$ ir net kompleksinės plokštumos vienetiniame skritulyje, kuriame eilutė konverguoja ir apibrėžia analizinę funkciją. Daugiau įdomių ir elementarių sekos $p(n)$ savybių rasite N. Bigso [11] ir P. Camerono [22] vadovėliuose.

5.3. Binarieji medžiai ir Katalano skaičiai

Atliekant binariąsias algebrines operacijas, pavyzdžiui, sudėtį, tenka suskliausti ir sudėti po du dėmenis paeiliui. Mus domina suskliautimų skaičius. Įsitikiname, kad yra 5 keturių dėmenų suskliautimo būdai nemaišant dėmenų tvarkos:

$$\begin{aligned} ((a+b)+(c+d)) &= (a+((b+c)+d)) \\ &= (((a+b)+c)+d) \\ &= (a+((b+(c+d))) \\ &= ((a+(b+c))+d). \end{aligned}$$

Iš pradžių pastebėsime vieną rekurentųjų sąryšį.

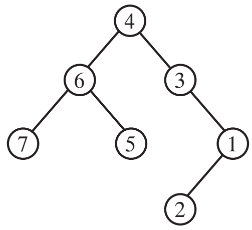
5.3 lema. Jei C_n yra $n \geqslant 2$ dėmenų suskliautimo būdų skaičius ir $C_1 = 1$, tai

$$C_n = \sum_{k=1}^{n-1} C_k C_{n-k}, \quad n \geqslant 2. \tag{5.6}$$

Įrodymas. Bet kaip skliausdami paskutiniame žingsnyje suskliaudžiame du dėmenis $E_1 + E_2$. Jei naryje E_1 buvo k dėmenų, tai $1 \leqslant k \leqslant n-1$, o E_2 naryje liko $n-k$. Remdamiesi skaičiaus C_k apibrėžimu, juos galėjome suskliausti nepriklausomai C_k ir

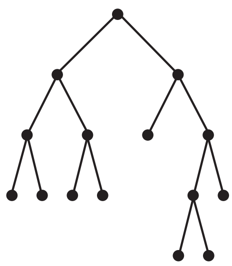
C_{n-k} būdų. Skirtingiems k skaičiuojamos suskliautimų aibės nesikerta, todėl sudėję jų sandaugas pagal k gauname norimą rezultatą. ◢

Seka C_n pasitaiko grafų ir algoritmų teorijose. Skirtingus realius duomenis ar duomenų raktus į kompiuterį įveskime ne kaip tiesinį, t. y. iš eilės einančių skaičių masyvą, bet juos talpinkime įsivaizduojamo medžio viršūnėse. Pavyzdžiui, sekos 4, 6, 5, 3, 1, 2, 7 narius talpinkime tokiu būdu, kaip pavaizduota 5.2 paveiksle.



5.2 pav.

Pirmąjį skaičių 4 patalpinome medžio viršūnėje. Sekantį didesnį skaičių 6 nukėlėme kairėn į kitą briaunos viršūnę. Po to didesnį už 4 skaičių 5 vėl nešėme žemyn kairėn, bet pastebėję, kad jis yra mažesnis už 6, patalpinome dešinėje kitoje briaunos viršūnėje ir t. t. Taip gaunama binariųjų paieškos medžių seka. Pagrindinis šio duomenų užrašymo privalumas pasireiškia ieškant tokiame medyje i-ojo pagal eilę mažiausio ar didžiausio skaičiaus. Vidutiniškai yra sugaištama daug mažiau laiko negu tą patį darant tiesiniame duomenų masyve. Taip įvesdami duomenis, po kiekvieno žingsnio galėjome pasiruošti sekančiam ir prie ką tik užpildytos viršūnės prijungti du tuščius medžio lapus, t. y. pirmojo laipsnio viršūnes. Būtume gavę medį, pavaizduotą 5.3 paveiksle.



5.3 pav.

Čia nubraižytus medžius vadiname binariaisiais. Apibrėžkime juos formaliau.

5.1 apibrėžimas. Šakninis medis vadinamas binariuoju, jeigu jis yra sudarytas iš vienos šaknies arba iš kairiojo ir dešiniojo binariųjų medžių, prijungtų prie šaknies briaunomis, išvestomis iš šių medžių šaknų. ◀

Šis rekursyvus apibrėžimas yra korektiškas, nes pritaikytas matematinės indukcijos principas: apibrėžus mažesnių eilių medžius apibūdinamas didesnės eilės medis.

Atkreipiame dėmesį, kad lyginant du binariuosius medžius atskirai turi sutapti kairieji ir dešinieji pomedžiai. Be to, pastebėkime, kad lapų skaičius binariajame n-osios, $n \geqslant 2$, eilės medyje visada vienetu yra didesnis negu kitų viršūnių. Tad kyla klausimas, kiek yra n-lapių binariųjų medžių.

Kaip ir skaičių suskliautimo uždavinyje, pastebime, kad kairiajame medyje gali būti $1 \leqslant k \leqslant n-1$ lapų, o kiti lapai yra dešiniajame. Vėl gauname 5.3 lemoje nurodytą rekurentųjį sąryšį. Vadinasi, n-lapių binariųjų medžių skaičių apibrėžia seka C_n, kurios pirmasis narys $C_1 = 1$. Šiuo atveju susitariama pirmosios eilės binariojo medžio šaknį vadinti ir lapu. Raskime C_n išraišką bet kokiam $n \geqslant 1$.

5.6 teorema. Kai $n \geqslant 1$,

$$C_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}.$$

Įrodymas. Pirmiau randame sekos $\{C_n\},\ n \geqslant 1$, generuojančią eilutę

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n =: C(x).$$

Pasinaudoję 5.3 lema, apskaičiuojame

$$C^2(x) = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1} C_k C_{n-k}\right)x^n = C(x) - x.$$

Išsprendę kvadratinę lygtį, gauname

$$C(x) = \frac{1}{2}(1 \pm (1-4x)^{1/2}).$$

Kadangi $C(0) = 0$, reikia imti minuso ženklą. Taikome apibendrintąją Niutono binomo formulę; keliame laipsniu 1/2 ir sulyginame koeficientus prie x^n. Gauname, kad

$$\begin{aligned}
C_n &= -\frac{1}{2}\binom{1/2}{n}(-4)^n \\
&= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{-1}{2}\,\frac{-3}{2}\cdots\frac{-(2n-3)}{2}\,\frac{(-4)^n}{n!}\cdot\frac{(2n-2)!!}{(2n-2)!!} \\
&= \frac{(2n-2)!}{(n-1)!n!} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1};
\end{aligned}$$

čia $(2k)!! = 2\cdot 4 \cdots 2k$.

Teorema įrodyta. ◢

Skaičių seka

$$C_{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}, \quad n \geqslant 0,$$

yra vadinama Katalano[22] seka.

[22] Eugéne Charles Catalan (1814–1894) – belgų matematikas.

5.4. Tiesiniai rekurentieji sąryšiai

Skyrelyje 1.2 paminėjome Fibonačio skaičių seką $\{F_n\}$, $n \geqslant 0$, apibrėžtą sąryšiu

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

ir dviem pirmaisiais nariais $F_0 = F_1 = 1$. Žinodami atsakymą, nesunkiai patikrinome jį matematinės indukcijos būdu. Klausimo, kaip atspėti atsakymą, net nekėlėme. Dar sunkiau būtų nagrinėti sekas, kurių n-asis narys išreiškiamas per didesnį skaičių prieš jį esančių sekos narių. Šiame skyrelyje pateiksime išsamią tiesinių rekurenčiųjų sąryšių teoriją. Tačiau prieš tai norėtume priminti skaitytojui, kad dažnai gelbsti jau įgytos žinios. Panagrinėkime šiek tiek bendresnę nei Fibonačio seką.

5.4 pavyzdys. Tegul $a_0, a_1, b, c \in \mathbb{R}$. Raskime u_n, $n \geqslant 2$, jei

$$u_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0 \tag{5.7}$$

ir $u_0 = a_0$, $u_1 = a_1$.

Sprendimas. Žinomo geometrinės progresijos atvejo, kai $c = 0$, nenagrinėkime. Jei turėtume tokius α ir β, kad

$$-b = \alpha + \beta, \qquad c = \alpha\beta, \tag{5.8}$$

tai $\alpha\beta \neq 0$ ir (5.7) galėtume perrašyti

$$\Delta_{n+1} := u_{n+2} - \alpha u_{n+1} = \beta(u_{n+1} - \alpha u_n) = \beta\Delta_n.$$

Be to, $\Delta_0 = u_1 - u_0 = a_1 - a_0 =: a$ yra žinomas. Seka $\{\Delta_n\}, n \geqslant 0$, sudaro geometrinę progresiją, todėl

$$\Delta_n = a\beta^n, \quad n \geqslant 0.$$

Vadinasi, visiems $n \geqslant 1$

$$u_n = \alpha u_{n-1} + \Delta_{n-1} = \alpha u_{n-1} + a\beta^{n-1}. \tag{5.9}$$

Dabar sekos narys išreiškiamas per prieš tai buvusį narį. Nors ši rekurenčioji formulė neapibrėžia aritmetinės progresijos, bet ją palyginti nesunku išnagrinėti. Pakeitę keletą kartų u_n per narius su mažesniais indeksais, galime įžiūrėti atsakymą ir vėliau įrodyti naudojantis matematine indukcija. Taigi atlikę i žingsnių, gauname

$$\begin{aligned} u_n &= \alpha\big(\alpha u_{n-2} + a\beta^{n-2}\big) + a\beta^{n-1} \\ &= \alpha^2 u_{n-2} + a\big(\alpha\beta^{n-2} + \beta^{n-1}\big) \\ &= \alpha^3 u_{n-3} + a\big(\alpha^2\beta^{n-3} + \alpha\beta^{n-2} + \beta^{n-1}\big) \\ &= \cdots \\ &= \alpha^i u_{n-i} + a\big(\alpha^{i-1}\beta^{n-i} + \alpha^{i-2}\beta^{n-i+1} + \cdots + \beta^{n-1}\big). \end{aligned} \tag{5.10}$$

Paskutinė išraiška yra atspėta intuityviai. Laikydami ją indukcijos hipoteze, įrodykime, kad ji yra teisinga. Remdamiesi (5.9) lygybe, tęsiame toliau:

$$\begin{aligned} u_n &= \alpha^i\big(\alpha u_{n-i-1} + a\beta^{n-i-1}\big) + a\big(\alpha^{i-1}\beta^{n-i} + \alpha^{i-2}\beta^{n-i+1} + \cdots + \beta^{n-1}\big) \\ &= \alpha^{i+1} u_{n-i-1} + a\big(\alpha^i\beta^{n-i-1} + \alpha^{i-1}\beta^{n-i} + \cdots + \beta^{n-1}\big). \end{aligned}$$

Vadinasi, ir $(i+1)$-ame žingsnyje atsiranda tokia pati išraiška. Remiantis matematinės indukcijos principu, (5.10) formulė dėl u_n yra teisinga su visais $i \geqslant 1$. Kai $i = n$, iš jos gauname

$$u_n = \alpha^n u_0 + a\big(\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}\beta^1 + \cdots + \beta^{n-1}\big).$$

Pastaroji formulė yra teisinga visiems $n \geqslant 0$. Suprastinkime ją.

Jei $\alpha \neq \beta$, tai, pasinaudoję lygybe

$$(\alpha - \beta)\big(\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}\beta^1 + \cdots + \beta^{n-1}\big) = \alpha^n - \beta^n,$$

gauname ieškomos sekos bendrojo nario formulę

$$u_n = \alpha^n u_0 + a\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} =: c_1\alpha^n + c_2\beta^n. \tag{5.11}$$

Konstantos c_1, c_2 apskaičiuojamos iš pradinių sekos narių u_0, u_1 ir koeficientų b, c arba α bei β.

Jei $\alpha = \beta$, tai

$$u_n = \alpha^n u_0 + an\alpha^{n-1} = c_1'\alpha^n + c_2' n\alpha^n; \tag{5.12}$$

čia c_1, c_2 taip pat yra tam tikros nesunkai apskaičiuojamos konstantos.

Dar kartą peržvelgę sprendimą, matome, kad, remiantis Vijeto[23] formulėmis, α ir β, apibrėžti (5.8) lygybe, yra polinomo

$$x^2 + bx + c = 0$$

šaknys. Jos lemia atsakymo pavidalą. Kai jos skirtingos, gauname (5.11) lygybę, kai sutampa – (5.12) išraišką. Vadinasi, bendrąjį narį u_n galime rasti neapibrėžtųjų koeficientų metodu naudodamiesi (5.11) ir (5.12) formulėmis. Koeficientams rasti pirmuoju atveju sudarome lygčių sistemą

$$\begin{aligned} u_0 &= c_1 + c_2, \\ u_1 &= c_1\alpha + c_2\beta, \end{aligned}$$

o antruoju – sistemą

$$\begin{aligned} u_0 &= c_1', \\ u_1 &= c_1'\alpha + c_2'\alpha. \end{aligned}$$

Radę c_1, c_2 ar c_1', c_2', vėl pasinaudotume (5.11) arba (5.12) formules.

Įgiję patyrimo, išplėtokime bendresnę rekurenčiųjų sąryšių teoriją. Tarkime, kad seka $\{u_n\},\ n \geqslant 0$, apibrėžta formule

$$u_{n+r} + a_1 u_{n+r-1} + \cdots + a_r u_n = 0, \quad n \geqslant 0; \tag{5.13}$$

čia $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{R}$, $r \geqslant 1$, yra bet koks fiksuotas skaičius ir pradiniai nariai $u_0, u_1, \ldots, u_{r-1} \in \mathbb{R}$ yra žinomi. Išraiškas (5.13) vadiname tiesiniais homogeniniais rekurenčiaisiais r-osios eilės sąryšiais. Čia žodis homogenininis pabrėžia, kad visų narių laipsniai u_j atžvilgiu yra vienodi ir lygūs vienetui.

[23]François Viéte (1540–1603) – prancūzų matematikas.

Polinomas

$$A(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_r x^r = \sum_{j=0}^{r} a_j x^j, \quad a_0 := 1,$$

vadinamas (5.13) sąryšio charakteristiniu polinomu.

Ištirkime laipsninę generuojančią eilutę

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n.$$

5.4 lema. Sandauga $A(x)U(x)$ yra ne aukštesnio kaip $(r-1)$-ojo laipsnio polinomas

$$D(x) := \sum_{k=0}^{r-1} d_k x^k,$$

kurio koeficientai

$$d_k = \sum_{j=0}^{k} a_j u_{k-j}, \quad 0 \leqslant k \leqslant r-1.$$

Įrodymas. Papildykime $A(x)$ iki begalinės eilutės pridėdami nulinius narius. Sudauginę $A(x)$ ir $U(x)$ panariui, gauname laipsninę eilutę $D(x)$, kurios koeficientai

$$d_k = \sum_{j=0}^{k} a_j u_{k-j};$$

čia $a_j = 0$, kai $j \geqslant r+1$. Jei $k \leqslant r-1$, iš paskutinės lygybės išplaukia teoremos formulės.

Jei $k = r$, tai d_r išraiška sutampa su (5.13) formule. Vadinasi, $d_r = 0$. Toliau didinant r, koeficientų d_k išraiška nebesikeičia, nes pridedami nuliniai dėmenys.

Lema įrodyta. ◢

1 išvada. Generuojanti funkcija $U(x) = D(x)/A(x)$ yra taisyklinga polinominė trupmena.

Toliau funkcijai $U(x)$ taikysime polinominių trupmenų teoriją, paprastai išdėstomą pradiniuose algebros kursuose. Šią medžiagą galima rasti A. Matuliausko [64] vadovėlio 41 skyrelyje.

Net ir nagrinėdami realias sekas u_n, galime pasinaudoti kompleksinėmis charakteristinio polinomo šaknimis. Tegul $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{C}$ yra $A(x)$ šaknys, kurių atitinkami kartotinumai yra $k_1, \ldots, k_m$; čia $k_1 + \cdots + k_m = r$. Iš pagrindinės algebros teoremos išplaukia

$$A(x) = a_r (x-\alpha_1)^{k_1} (x-\alpha_2)^{k_2} \cdots (x-\alpha_m)^{k_m}.$$

Pagal Vijeto teoremą $\alpha_1^{k_1}\alpha_2^{k_2}\cdots\alpha_m^{k_m} = (-1)^r \neq 0$, todėl lygybę galime perrašyti

$$A(x) = a_r(-1)^r(1-\lambda_1 x)^{k_1}(1-\lambda_2 x)^{k_2}\cdots(1-\lambda_m x)^{k_m}; \tag{5.14}$$

čia $\lambda_j = \alpha_j^{-1}$, jei $1 \leqslant j \leqslant m$. Iš pagrindinės polinominių trupmenų teoremos išplaukia mums reikalingas teiginys.

5.7 teorema. Tarkime, kad jau radome (5.14) skaidinį. Generuojančią eilutę $U(x) = D(x)/A(x)$ galime užrašyti paprasčiausiųjų polinominių trupmenų suma, t. y. egzistuoja tokie kompleksiniai skaičiai c_{jl}, $1 \leqslant l \leqslant k_j$, $1 \leqslant j \leqslant m$, kad

$$U(x) = \frac{D(x)}{A(x)} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{k_j}\frac{c_{jl}}{(1-\lambda_j x)^l}. \tag{5.15}$$

Be to, ši išraiška yra vienintelė.

Galutinis tikslas – rasti sekos $\{u_n\}$ bendrąjį narį – jau ranka pasiekiamas.

5.8 teorema. Tarkime, kad jau radome (5.15) išraišką. Tada

$$u_n = \sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{k_j} c_{jl}\binom{n+l-1}{n}\lambda_j^n, \quad n \geqslant 0. \tag{5.16}$$

Įrodymas. Pagal apibendrintąją Niutono binomo formulę bet kokiems $1 \leqslant l \leqslant k_j$ ir $1 \leqslant j \leqslant m$

$$(1-\lambda_j x)^{-l} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-l}{n}(-1)^n\lambda_j^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+l-1}{n}\lambda_j^n x^n.$$

Įstatę tai į (5.15) lygybę ir sulyginę koeficientus prie vienodų x laipsnių, baigiame teoremos įrodymą. ◢

Pastebėkime, kad nagrinėjant realiąsias sekas charakteristinio polinomo kompleksinės šaknys yra poromis jungtinės, todėl taikant šią teoremą atsiradę menamieji skaičiai susiprastina.

Nurodytą 5.8 teoremoje u_n formulę su nežinomomis konstantomis c_{jl}, $1 \leqslant l \leqslant k_j$, $1 \leqslant j \leqslant m$, galima užrašyti vadovaujantis tik generuojančios eilutės (5.15) išraiška ir nežinant pradinių sekos narių. Šias konstantas galima rasti ir vėliau jau naudojantis pradiniais sekos nariais. Dažnai (5.16) formulė vadinama bendruoju rekurenčiosios (5.13) lygties sprendiniu.

5.5 pavyzdys. Raskime sekos $\{u_n\}$, $n \geqslant 0$, tenkinančios ketvirtos eilės rekurentųjį sąryšį

$$u_{n+4} - 2u_{n+2} + u_n = 0,$$

bendrąjį narį, jei $u_0 = u_1 = 1$, o $u_2 = u_3 = 2$.

Sprendimas. Nesistenkime įsidėmėti formulių, o geriau pakartokime visus teoremų įrodymų žingsnius. Charakteristinis polinomas yra

$$A(x) = 1 - 2x^2 + x^4,$$

todėl generuojanti eilutė

$$U(x) = \frac{D(x)}{(1-x^2)^2}.$$

Čia kubinio polinomo $D(x) = d_0 + d_1x + d_2x^2 + d_3x^3$ koeficientai skaičiuojami dauginant: $U(x)A(x) = D(x)$. Gauname

$$d_0 = a_0u_0 = 1,$$

$$d_1 = a_0u_1 + a_1u_0 = 1,$$

$$d_2 = a_0u_2 + a_1u_1 + a_2u_0 = 0,$$

$$d_3 = a_0u_3 + a_1u_2 + a_2u_1 + a_3u_0 = 0.$$

Vadinasi,

$$\begin{aligned} U(x) &= \frac{1+x}{(1-x^2)^2} \\ &= \frac{1}{(1-x)^2(1+x)} \\ &= \frac{c_1}{1-x} + \frac{c_2}{(1-x)^2} + \frac{c_3}{1+x}. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Subendravardiklinę ir sulyginę skaitikliuose esančius polinomus, randame neapibrėžtuosius koeficientus c_1, c_2, c_3. Gauname polinomų lygybę

$$1 = c_1(1-x^2) + c_2(1+x) + c_3(1-2x+x^2),$$

ekvivalenčią lygčių sistemai

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + \ c_3 &= 1, \\ c_2 - 2c_3 &= 0, \\ -c_1 \qquad + c_3 &= 0. \end{aligned}$$

Vadinasi, $c_1 = 1/4$, $c_2 = 1/2$ ir $c_3 = 1/4$, o

$$\begin{aligned} U(x) &= \frac{1}{4(1-x)} + \frac{1}{2(1-x)^2} + \frac{1}{4(1+x)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{n} \frac{x^n}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{4}. \end{aligned}$$

Surinkę visus koeficientus prie x^n, gauname

$$u_n = \frac{1 + (-1)^n}{4} + \frac{n+1}{2}.$$

Aišku, labiau patyręs skaitytojas, tik išvydęs (5.17) formulę, būtų iš karto taikęs neapibrėžtųjų koeficientų metodą ir tęsęs:

$$u_n = C_1 + C_2 n + C_3(-1)^n.$$

Pasinaudojęs pradiniais sekos nariais, toliau būtų radęs C_1, C_2 ir C_3. Išbandykite šį būdą ir patikrinkite mūsų skaičiavimus!

Kaip nagrinėti nehomogeninius rekurenčiuosius sąryšius

$$u_{n+r} + a_1 u_{n+r-1} + \cdots + a_r u_n = f(n), \quad n \geqslant 0, \tag{5.18}$$

kai $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{R}$ ir $f(n)$ yra žinoma realiųjų skaičių seka?

Apsiribosime bendru nurodymu. Reikia pasinaudoti homogeninio (5.13) sąryšio bendruoju (5.16) sprendiniu ir rasti kokį nors (vadinamąjį atskirąjį) (5.18) sąryšio sprendinį. Tegul jis yra seka $u_n^{(0)}$, $n \geqslant 0$. Tada rekurenčiojo (5.18) sąryšio bendrasis sprendinys yra tokio pavidalo:

$$u_n = \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{k_j} c_{jl} \binom{n+l-1}{n} \lambda_j^n + u_n^{(0)}, \quad n \geqslant 0.$$

Atskirųjų sprendinių ieškojimo būdai labai priklauso nuo nario $f(n)$. Kai kurie atvejai yra aptarti net lietuviškame [69] vadovėlyje. Be to, yra daug specializuotos literatūros.

5.5. Sudėtinių funkcijų koeficientų rekurentieji sąryšiai

Tiesiniai rekurentieji sąryšiai neišsemia viso jų lobyno. Praeituose skyreliuose mes jau susidūrėme su netiesiniais sąryšiais, be to, jų koeficientai buvo ne konstantos, o kito kartu su nežinomos sekos indeksu. Pavyzdžiui, taip buvo ir su Stirlingo, ir su Belo skaičių formulėmis. Bendra teorija yra gana sudėtinga.

Dabar, atvirkščiai, ieškosime ne rekurenčiojo sąryšio sprendinio, o sudėtingas sekų išraiškas stengsimės paversti paprastomis rekurenčiosiomis formulėmis. Jos yra gerokai naudingesnės programuojant, ypač skaičiuojant sudėtinių funkcijų Teiloro koeficientus. Pradėkime nuo pavyzdžio.

5.6 pavyzdys. Tegul a_j yra realiųjų skaičių seka. Raskime eilutės

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \exp\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{j} x^j \right\}$$

koeficientą b_n.

Sprendimas. Pirmiausia pastebėkime, kad koeficientus a_j dalijant iš j kitos formulės tampa daug paprastesnės.

Formaliai daugindami eilutes (žr. taip pat (5.3)), gauname

$$\begin{aligned} F(x) &= \prod_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{a_j x^j}{j}\right)^k \frac{1}{k!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{\substack{k_1,\dots,k_n\geqslant 0\\ 1k_1+\dots+nk_n=n}}\prod_{j=1}^{n}\frac{a_j^{k_j}}{j^{k_j}k_j!}\right)x^n. \end{aligned}$$

Vadinasi,

$$b_n = \sum_{\substack{k_1,\dots,k_n\geqslant 0\\ 1k_1+\dots+nk_n=n}}\prod_{j=1}^{n}\frac{a_j^{k_j}}{j^{k_j}k_j!}, \quad n \geqslant 0. \tag{5.19}$$

Akivaizdu, kad skaičiuojant ši išraiška yra nepatogi. Palyginkime ją su tokiu rezultatu.

5.9 teorema. Funkcijos $F(x)$ koeficientai b_n tenkina rekurentųjį sąryšį

$$b_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} a_{n-j+1}b_j, \qquad b_0 := 1, \quad n \geqslant 0.$$

Įrodymas. Diferencijuojame:

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nb_n x^{n-1} = F(x)\sum_{l=0}^{\infty} a_{l+1}x^l = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} b_j a_{n-j+1}\right)x^n.$$

Kadangi eilutės, esančios šios lygybės kairėje, koeficientas prie x^n lygus $(n+1)b_{n+1}$, tai apskliaustoji suma dešinėje yra tik kita jo išraiška.

Teorema įrodyta. ◢

Pastebėkime naudingą nelygybę.

2 išvada. Jei $|a_j| \leqslant d_j$, $j \geqslant 1$, tai $|b_n|$ neviršija funkcijos

$$\exp\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\frac{d_j}{j}x^j\right\}$$

n-ojo koeficiento.

Įrodymas. Pakanka dukart pasinaudoti (5.19) formule. ◢

Panašiai gauname tokį rezultatą.

5.10 teorema. Tegul $a_j \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$, $j \geqslant 0$. Funkcijos

$$G_m(x) := (A(x))^m := \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)^m, \quad m \in \mathbb{N},\ a_0 \neq 0,$$

koeficientai $g_n := g_n(m)$ tenkina rekurentųjį sąryšį

$$g_{n+1} = a_0^{-1} \sum_{j=0}^{n} \left(m - \frac{(m+1)j}{n+1} \right) a_{n-j+1} g_j, \qquad g_0 = a_0^m, \quad n \geqslant 0.$$

Įrodymas. Vėl diferencijuodami gauname

$$G'(x) = mA^{m-1}(x)A'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) g_{n+1} x^n.$$

Padauginame abiejų pusių reiškinius iš $A(x)$ ir panariui sudauginame eilutes. Kairėje gauname

$$mA^m(x)A'(x) = mG_m(x)A'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(m \sum_{l=0}^{n} (n-l+1) g_l a_{n-l+1} \right) x^n.$$

Panašiai dešinėje gauname eilutę

$$A(x) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) g_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{n} (l+1) g_{l+1} a_{n-l} \right) x^n.$$

Sulyginame koeficientus prie x^n:

$$\sum_{l=0}^{n} (l+1) g_{l+1} a_{n-l} = m \sum_{l=0}^{n} (n-l+1) g_l a_{n-l+1}.$$

Iš čia išplaukia

$$\begin{aligned} (n+1) g_{n+1} a_0 &= m \sum_{l=0}^{n} (n-l+1) a_{n-l+1} g_l - \sum_{l=0}^{n} l a_{n-l+1} g_l \\ &= \sum_{l=0}^{n} (m(n-l+1) - l) a_{n-l+1} g_l. \end{aligned}$$

Tai ir yra ieškomoji lygybė. ◢

Užduotys

5.1. Integruodami generuojantį polinomą $(1+x)^n$, išveskite jau žinomą lygybę

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \binom{n}{k} = -\frac{1}{n+1}.$$

5.2. Įrodykite, kad apibrėžtos 1.2 skyrelyje Fibonačio sekos F_n, $n \geqslant 0$, generuojanti eilutė gali būti užrašyta polinomine trupmena $(1 - x - x^2)^{-1}$.

5.3. Lygindami generuojančias funkcijas, įrodykite lygybę

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{2k} 2^{n-k} = \frac{1}{3}(2^{2n+1} + 1), \quad n \geqslant 0.$$

5.4. Raskite sekų

$$p(n|\text{dėmenys yra nelyginiai})$$

ir

$$p(n|\text{dėmenys yra lyginiai}),$$

čia $n \geqslant 1$, generuojančias funkcijas.

5.5. Palyginę generuojančias eilutes, įrodykite lygybę

$$p(n|\text{dėmenys yra nelyginiai}) = p(n|\text{dėmenys yra skirtingi}), \quad n \geqslant 1.$$

5.6. Tegul $1 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ yra natūralieji skaičiai, o $A(n)$ – skaičiaus $n \in \mathbb{N}$ išraiškų $n = a_1 x_1 + \cdots + a_k x_k$, kuriose $x_i \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leqslant i \leqslant k$, kiekis. Raskite sekos $A(n)$ generuojančią eilutę.

5.7. Keliais būdais galima padengti n-ojo ilgio atkarpą naudojant degtukus, kurių vieno ilgis lygus 1, o antrojo lygus 2, ir jų neužkeičiant? Svarbu atsižvelgti į degtukų tvarką dangoje.

5.8. Raskite sekos, apibrėžtos rekurenčiuoju sąryšiu ir pradiniais nariais, bendrąjį narį u_n, jei:

a) $u_{n+4} + 2u_{n+2} + u_n = 0, \quad u_0 = u_1 = 2,\ u_2 = u_3 = 1;$

b) $u_{n+4} + 3u_{n+2} + 3u_{n+1} + u_n = 0, \quad u_0 = u_2 = -1,\ u_1 = u_3 = 1.$

5.9. Raskite funkcijos

$$\ln\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j\right), \quad a_0 = 1,$$

koeficientų rekurenčiąją formulę.