

4. Rėčio principas

4.1. Aibių sąjungos galia

Nustebote išgirdę žodį rėtis. Iš tiesų, jį verta panaudoti skaičiuojant kai kurių aibių galias. Dažnai, skaičiuojant poaibių galias, patogiau nevengti dubliavimo ir keleriopo tų pačių elementų skaičiavimo, o paskui perteklių išsijoti.

Kalbama, kad terminas kilęs iš skylėtų molinių plokštelių, rastų kasinėjant Babilono teritoriją. Savo forma jos priminė buitinius rėčius, tačiau tolesni tyrimai parodė, kad tai pirminių skaičių lentelės! Iš tiesų, iš eilės surašę natūraliuosius skaičius iki 100 lentelėje 10×10 ir išdūrę skylutes vietoje 1, vietoje 4, 6 bei kitų dvejetainių ir t. t., vietoje visų pirminių skaičių $p \leq 7$ kartotinių kp su $k = 2, 3, \dots$, gautume kažką panašaus į rėtį. Likę neišdurti skaičiai yra pirminiai. Pastebėkime, kad kartotinių $kp \leq x$, $k = 1, 2, \dots$, skaičius yra sveikoji dalis $[x/p]$; tai įžiūrėti buvo nesunku. Tuo tarpu suskaičiuoti pirminių skaičių, neviršijančių x , kiekį nelengva, jei x yra didelis. Atliktus kartotinių skaičių išsijojimo žingsnius galima suskaičiuoti, todėl atsiranda galimybė spręsti ir sunkesnę pirminių skaičių problemą.

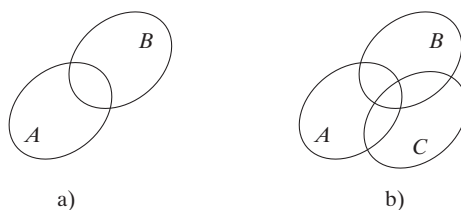
Šiame skyriuje išmoksime apskaičiuoti susikertančių aibių sąjungos galią. Apibendrinsime nesunkiai suvokiamas formules

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

ir

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|. \quad (4.1)$$

Joms išvesti pakanka grafinės iliustracijos, pavaizduotos 4.1 paveiksle.



4.1 pav.

Iš paveikslo matyti, kad sudedant aibių A, B, C galias aibių sankirtose esantys elementai buvo skaičiuojami kelis kartus. Tad teko atimti, kas per daug buvo pridėta.

4.1 pavyzdys. Kiek natūraliųjų skaičių, neviršijančių 100, dalijasi iš bent vieno iš šių skaičių: 3, 5, 7?

Sprendimas. Skaičiaus $m \in \mathbb{N}$ kartotinių, nevirsijančių 100, aibę pažymėkime

$$E_m = \{n = km \leq 100: k \geq 1\}.$$

Ieškomasis skaičius yra $|E_3 \cup E_5 \cup E_7|$. Kadangi

$$|E_m| = |\{k \geq 1: km \leq 100\}| = \left\lfloor \frac{100}{m} \right\rfloor,$$

tai galime pasinaudoti (4.1) formule. Reikia pastebėti, kad $E_3 \cap E_5 = E_{15}$, $E_3 \cap E_7 = E_{21}$, $E_5 \cap E_7 = E_{35}$ ir $E_3 \cap E_5 \cap E_7 = E_{105} = \emptyset$. Vadinas,

$$\begin{aligned} |E_3 \cup E_5 \cup E_7| &= |E_3| + |E_5| + |E_7| - |E_{15}| - |E_{21}| - |E_{35}| + |E_{105}| \\ &= 33 + 20 + 14 - 6 - 4 - 2 + 0 = 55. \end{aligned}$$

Išnagrinėkime bendrąjį atvejį ir raskime elementų, esančių sąjungoje

$$U := A_1 \cup \dots \cup A_n,$$

skaičių. Pažymėkime

$$a(i) = |A_i|, \quad a(i, j) = |A_i \cap A_j|, \quad \dots,$$

$$a(i_1, \dots, i_k) = |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|;$$

čia $1 \leq i < j$, $i_1 < \dots < i_k$, $1 \leq k \leq n$. Apibrėžkime sumas

$$S_1 = \sum_{i=1}^n a(i), \quad S_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a(i, j), \dots,$$

$$S_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} a(i_1, \dots, i_k),$$

kai $1 \leq k \leq n$.

Išidėmėkime, kad sumoje S_k yra sumuojama pagal visus sutvarkytuosius k skirtingų indeksų rinkinius $(i_1, \dots, i_k)$, sudarytus iš visos indeksų aibės $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Kiekvieną k indeksų poaibį galima užrašyti didėjimo tvarka, todėl sumoje S_k yra $\binom{n}{k}$ dėmenų.

4.1 teorema. Bet kokių baigtinių aibių $A_1, \dots, A_n$ sąjungos U galia yra lygi

$$|U| = |A_1 \cup \dots \cup A_n| = S_1 - S_2 + S_3 - \dots + (-1)^{n+1} S_n.$$

Irodymas. Čia būtų galima pritaikyti matematinę indukciją n atžvilgiu, tačiau nepraleisime progos išmokyti taikyti kitą gana formalų metodą.

Funkcija $\mathbf{I}_x(A)$ vadinama poaibio $A \subset U$ indikatoriumi, jeigu $\mathbf{I}_x(A) = 1$, kai $x \in A$, ir $\mathbf{I}_x(A) = 0$, kai $x \notin A$. Vadinasi,

$$|A| = \sum_{x \in U} \mathbf{I}_x(A).$$

Anksčiau įvestas aibių galias perrašome:

$$\begin{aligned} a(i) &= \sum_{x \in U} \mathbf{I}_x(A_i), \\ a(i, j) &= \sum_{x \in U} \mathbf{I}_x(A_i \cap A_j), \quad \dots, \\ a(i_1, \dots, i_k) &= \sum_{x \in U} \mathbf{I}_x(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}); \end{aligned}$$

čia $1 \leq i < j \leq n$, $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$. Vadinasi,

$$S_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \sum_{x \in U} \mathbf{I}_x(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}), \quad 1 \leq k \leq n.$$

Pažymėkime

$$Z_k(x) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \mathbf{I}_x(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}).$$

Sukeitę sumavimo tvarką, gauname

$$S_1 - S_2 + S_3 - \dots + (-1)^{n+1} S_n = \sum_{x \in U} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} Z_k(x).$$

Lieka įsitikinti, kad ši suma lygi

$$|U| = \sum_{x \in U} \mathbf{I}_x(U).$$

Kadangi $\mathbf{I}_x(U) \equiv 1$, tam pakaks įrodyti dėmenų lygybes

$$1 = \mathbf{I}_x(U) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} Z_k(x) \quad (4.2)$$

dėl kiekvieno $x \in U$.

Tarkime,

$$x \in A_1, \dots, A_m,$$

bet

$$x \notin A_{m+1}, \dots, A_n$$

kokiam nors $1 \leq m \leq n$. Dėl šio x gauname $Z_{m+i}(x) = 0$, jei $1 \leq i \leq n - m$. Vadinasi,

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} Z_k(x) = Z_1(x) - Z_2(x) + \cdots + (-1)^{m+1} Z_m(x).$$

Sumoje $Z_k(x)$ yra sudedami 1 ir 0. Vienetų skaičius lygus kiekviui tų sankirtų

$$A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k},$$

kurias sudaro aibės iš rinkinio $\{A_1, \dots, A_m\}$. Tokių sankirtų yra $\binom{n}{k}$. Todėl

$$Z_k(x) = \binom{m}{k},$$

o

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} Z_k(x) &= \binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \cdots + (-1)^{m+1} \binom{m}{m} \\ &= \binom{m}{0} - (1 - 1)^m = 1 \end{aligned}$$

su kiekvienu $1 \leq m \leq n$.

Teorema įrodyta. $\diamond$

Rėčio principą dažniausiai tenka taikyti ieškant elementų, kurie nepriklauso jokiai iš aibių $A_1, \dots, A_n \subset X$, t. y. norint rasti aibės

$$\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_n} = X \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_n)$$

galią; čia $\overline{A}$ žymi poaibio $A \subset X$ papildinį.

Naudojantis išvesta formule, tenka skaičiuoti sumas S_k , kuriose dėmenų indeksai $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ perbėga visus galimus k poaibius. Mokant išrinkti juos iš aibės $\mathbb{N}_n$, galima performuluoti 4.1 teoremą. Tą padarykime nagrinėjamos sąjungos papildiniui.

4.2 teorema. Tarkime, kad $A_1, \dots, A_n$ yra kokios nors baigtinės aibės X poaibiai. Pažymėkime $X_\emptyset := X$ ir tegu bet kokiam netuščiam poaibiui $J \subset \mathbb{N}_n$

$$X_J := \bigcap_{i \in J} A_i.$$

Aibės X elementų, nepriklausančių jokiai iš aibių A_i , skaičius lygus

$$\sum_{J \subset \mathbb{N}_n} (-1)^{|J|} |X_J|;$$

čia sumuojama pagal visus aibės $\mathbb{N}_n$ poaibius J įskaitant ir tuščiąjį.

Įrodymas. Jei $\overline{A}_i := X \setminus A_i$, tai nagrinėjamas skaičius lygus

$$|\overline{A}_1 \cap \dots \cap \overline{A}_n| = |X \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)| = |X| - |A_1 \cup \dots \cup A_n|.$$

Toliau pakanka pritaikyti 4.1 teoremą. Žinoma, tą darant reikia suvokti, kad visi k poaibiai J suformuoja sumą S_k ; čia $1 \leq k \leq n$. $\diamond$

Įvesta suma S_k parodo, kiek yra elementų visose k poaibių sankirtose kartu paėmus. Bet tie patys elementai gali priklausyti ir $k+1$ ar didesnio skaičiaus poaibių sankirtai. Kaip rasti skaičių elementų, priklausančių lygiai k poaibių iš $A_1, \dots, A_n$? Atsakymas glūdi tokioje teoremoje.

4.3 teorema. Tarkime, kad $A_1, \dots, A_n$ yra bet kokios skirtingos galbūt susikertančios aibės, $S_0 = |X|$ ir S_k – ankščiau apibrėžtosios sumos. Skaičius elementų, priklausančių lygiai r , $0 \leq r \leq n$, iš šių aibių, yra lygus sumai

$$S_r - \binom{r+1}{r} S_{r+1} + \binom{r+2}{r} S_{r+2} \mp \dots + (-1)^{n-r} \binom{n}{r} S_n.$$

Įrodymas. Kai $r = 0$, teiginį jau esame įrodę. Tegul toliau $r \geq 1$. Pastebėkime, kad į sumas S_k , kai $k \geq r$, įskaičiuojami tik tie elementai $x \in U = A_1 \cup \dots \cup A_n$, kurie patenka į ne mažiau kaip r nagrinėjamų poaibių. Šią savybę nurodysime žvaigždute prie sumos ženklo. Kaip ir 4.1 teoremos įrodyme, pasinaudoję S_k išraiškomis per $Z_k(x)$ ir kitais žymenimis, 4.3 teoremoje esančią sumą galime perrašyti

$$\sum_{k=r}^n (-1)^{k-r} \binom{k}{r} S_k = \sum_{x \in U} \sum_{k=r}^n (-1)^{k-r} \binom{k}{r} Z_k(x).$$

Įsitikinsime, kad lygybės dešinėje sumuodami pagal $x \in U$ sudedame tiek vienetų, kiek yra elementų, priklausančių lygiai r iš aibių $A_1, \dots, A_n$. Kitaip tariant, fiksavus $x \in U$, vidinės sumos reikšmė turi būti lygi vienetui, jei x priklauso lygiai r aibių, ir nuliui – priešingu atveju. Iš tiesų, jei $x \in A_1, \dots, A_m$, bet $x \notin A_{m+1}, \dots, A_n$, o $r \leq m \leq n$, tai, pasinaudoję jau įrodyta $Z_k(x)$ formule ir binominio koeficiento savybe (3.14 teorema), gauname

$$\begin{aligned} \sum_{k=r}^n (-1)^{k-r} \binom{k}{r} Z_k(x) &= \sum_{k=r}^m (-1)^{k-r} \binom{k}{r} \binom{m}{k} \\ &= \binom{m}{r} \sum_{k=r}^m (-1)^{k-r} \binom{m-r}{k-r} \\ &= \binom{m}{r} (1-1)^{m-r}. \end{aligned}$$

Jei $m = r$, paskutinis dydis yra lygus vienetui, priešingu atveju – nuliui.

Teorema įrodyta. $\diamond$

4.2. Keitiniai ir netvarkų uždavinys

Bijekcinį atvaizdį $\sigma: \mathbb{N}_n \rightarrow \mathbb{N}_n$ vadiname n -osios eilės keitiniu. Jį galime užrašyti lentelės pavidalu:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}.$$

Taip rašant suprantama, kad stulpelio viršuje esantis skaičius k yra atvaizduojamas į apačioje esantį i_k , $1 \leq k \leq n$. Užrašant keitinį lentelę, joje stulpelių išdėstymo tvarka nėra svarbi. Antroji eilutė sudaro skaičių aibės $\mathbb{N}_n$ kėlinį. Vadinasi, iš viso n -sios eilės keitinių yra $n!$.

Kiek yra n -osios eilės keitinių, kuriuose bet koks $1 \leq i \leq n$ pakeičiamas $j \neq i$, $1 \leq j \leq n$? Tokie keitiniai vadinami netvarkingaisiais. Kai kada su šia problema susiduriama vadinamuosiuose kinų restorano uždaviniuose. Tada ji formuluojama būtiškiau. Štai vienas iš galimų variantų.

Būrelis m džentelmenų atvyksta pietauti į kinų restoraną. Rūbinėje visi atiduoda savo skrybėles, kurios po pietų grąžinamos atsitiktinai. Kokia tikimybė, kad $1 \leq r \leq m$ iš šių klientų atgaus savo skrybėles?

Mes grįšime prie šio uždavinio, bet prieš tai suskaičiuokime reikalingus keitinius.

4.4 teorema. Netvarkingųjų n -osios eilės keitinių skaičius

$$t_n := n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}. \quad (4.3)$$

Irodymas. Tegul A_k yra aibė tokių keitinių, kad $i_k = k$, X – visa keitinių aibė, o $\overline{A}_k = X \setminus A_k$, $1 \leq k \leq n$. Remiantis 4.1 teorema,

$$\begin{aligned} t_n &= |\overline{A}_1 \cap \cdots \cap \overline{A}_n| \\ &= |X| - \sum_{i=1}^n |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| - \cdots + (-1)^n |A_1 \cap \cdots \cap A_n| \\ &= |X| - S_1 + S_2 - \cdots + (-1)^n S_n. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Čia, kaip ir anksčiau,

$$S_k = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|.$$

Aibių sankirta šioje sumoje sudaryta iš keitinių, kurie nekeičia $i_1, \dots, i_k$. Kitų $n - k$ elementų keitimui jokių apribojimų nėra. Todėl iš viso šių keitinių gauname tiek, kiek ir yra $(n - k)$ -osios eilės kėlinių, t. y. $(n - k)!$. Taigi

$$S_k = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} (n - k)! = \binom{n}{k} (n - k)! = \frac{n!}{k!},$$

nes sumoje buvo $\binom{n}{k}$ vienodų dėmenų. Kadangi $|X| = n!$, tai įstatę gautas reikšmes į (4.4) lygybę, baigiame teoremos įrodymą. $\diamond$

Kinų restorano uždavinio sprendimas. Pakanka klasikinio tikimybės apibrėžimo: suradę, kiek yra galimų įvykių, kai r klientų atgauna savo skrybėles, šį skaičių padalysime iš visų galimų skrybėlių atidavimo variantų skaičiaus.

Sunumeruokime džentelmenus ir jų skrybėles nuo 1 iki m . Jei j -asis klientas gavo i_j -ąją skrybėlę, tai keitiniai

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_m \end{pmatrix}$$

žymi visus $m!$ įmanomų įvykių. Mums palankius įvykius žyminčiuose keitiniuose sutapimas $i_j = j$ turi pasikartoti lygiai r kartų, o visų likusių $m - r$ klientų aibės indeksai turi sudaryti netvarkingąjį keitinį. Remiantis ką tik įrodyta teorema šis skaičius lygus

$$t_{m-r} = (m-r)! \sum_{k=0}^{m-r} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Kadangi r poaibių, kurių elementus keitinys palieka vietoje, yra $\binom{m}{r}$, tai gauname

$$\frac{m!}{r!(m-r)!} (m-r)! \sum_{k=0}^{m-r} \frac{(-1)^k}{k!}$$

palankių įvykių. Vadinas, uždavinio atsakymas yra tikimybė

$$\frac{1}{r!} \sum_{k=0}^{m-r} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Spėsdami uždavinį, klasifikavome visus keitinius į klases pagal tai, kiek elementų keitinys palieka vietoje. Tie samprotavimai įrodo tokią lygybę:

$$n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t_{n-k}, \quad n \geq 1. \quad (4.5)$$

4.3. Keitinio skaidinys ciklų sandauga

Keitiniai yra svarbūs visoms matematikos ir informatikos šakoms, todėl jiems pašvėskime dar vieną skyrelį. Iš pradžių trumpam įsibrausime į algebros sritį ir pastebėsime, kad visi aibės $\{1, 2, \dots, n\}$ keitiniai sudaro algebrinę struktūrą, t. y. tarp jų galime apibrėžti algebrinę operaciją – daugybą.

Tegul S_n yra keitinių aibė. Pasinaudokime praeitame skyrelyje įvestomis lentelėmis. Jei $\sigma \in S_n$, tai šįkart skaičiaus i vaizdą yra patogiau žymėti $i\sigma$, o ne $\sigma(i)$, kaip esame įpratę atvaizdžių teorijoje. Dabar keitinio σ lentelė atrodytų šitaip:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1\sigma & 2\sigma & \cdots & n\sigma \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Jei $\sigma, \sigma_1 \in \mathbb{S}_n$ yra du keitiniai, tai vaizdo vaizdą žymime $(i\sigma)\sigma_1$, o jų sandauga $\sigma\sigma_1$ vadiname keitinį, kurio lentelė yra

$$\sigma\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ (1\sigma)\sigma_1 & (2\sigma)\sigma_1 & \dots & (n\sigma)\sigma_1 \end{pmatrix}.$$

Taigi du iš eilės pritaikyti atvaizdžiai vaizduoja taip, kaip ir jų sandauga. Bet nespainiokite jų panaudojimo tvarkos! Patikrinkite, ar teisinga:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 4 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 4 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Panašūs pavyzdžiai rodo, kad keitinių sandaugoje daugiklių tvarkos keisti negalima. Moksliskai kalbant, ši keitinių daugyba yra nekomutatyvi. Tačiau jai galioja asociatyvumo dėsnis:

$$(\sigma_1\sigma_2)\sigma_3 = \sigma_1(\sigma_2\sigma_3)$$

su bet kokiais $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in \mathbb{S}_n$. Keitinys, kurio lentelė

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix},$$

turi savybę: $I\sigma = \sigma I = \sigma$ su bet koku $\sigma \in \mathbb{S}_n$. Jis vadinamas vienetiniu (tapačiuoju) keitiniu. Sukeitus (4.6) lentelės eilutes vietomis gautas keitinys

$$\sigma^{-1} := \begin{pmatrix} 1\sigma & 2\sigma & \dots & n\sigma \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

turi savybę $\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = I$. Jis vadinamas atvirkštiniu σ keitiniu.

4.1 apibrėžimas. Keitinių aibė su apibrėžta daugybos operacija yra vadinama simetrine grupe ir žymima $\mathbb{S}_n$. 

Išskirkime tokius keitinius $\varkappa \in \mathbb{S}_n$, kurie vienus skaičius, sakykime, $i_1, \dots, i_k$, $1 \leq k \leq n$, vaizduoja cikliška, t. y.

$$i_1 \xrightarrow{\varkappa} i_2 \xrightarrow{\varkappa} \dots \xrightarrow{\varkappa} i_k \xrightarrow{\varkappa} i_1,$$

o likusius aibės $\{1, 2, \dots, n\}$ elementus palieka vietoje. Kitaip tariant, $i\varkappa = i$, jei $i \notin \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$. Juos vadiname cikliniais, arba tiesiog k -ojo ilgio ciklais, ir žymime

$$\varkappa = (i_1, i_2, \dots, i_k).$$

Susitarkime skaičius $i_1, i_2, \dots, i_k$ vadinti slankiaisiais ciklo $\varkappa$ simboliais. Ciklus galime įsivaizduoti kaip atvaizdžius, apibrėžtus tik slankiųjų simbolių aibėje. Pastebėkime, kad vienetinio ilgio ciklas $\varkappa = (i)$ tik pažymi, kad $i\varkappa = i$. Toks ciklas nekeičia i kaip ir visų likusių skaičių. Iš tiesų jis yra vienetinis keitinys.

Ciklo $\varkappa$ atvirkštinis keitinys yra ciklas

$$\varkappa^{-1} = (i_k, i_{k-1}, \dots, i_1).$$

Du ciklus su nesikertančiomis slankiųjų simbolių aibėmis vadiname nepriklausomaisiais.

Tą patį $\varkappa$ galime užrašyti dar $k - 1$ būdų:

$$\varkappa = (i_2, i_3, \dots, i_k, i_1) = \dots (i_k, i_1, \dots, i_{k-1}).$$

Todėl iš viso yra $k!/k = (k-1)!$ ilgio k ciklų su fiksuotu slankiųjų simbolių $i_1, i_2, \dots, i_k$ poaibiu.

4.5 teorema. Kiekvienas keitinys $\sigma \in \mathbb{S}_n$ yra išreiškiamas poromis nepriklausomų ciklų sandauga

$$\sigma = \varkappa_1 \varkappa_2 \dots \varkappa_w, \quad 1 \leq w = w(\sigma) \leq n. \quad (4.7)$$

Be to, ši išraiška yra vienintelė, jei neatsižvelgiama į ciklų išdėstymo tvarką.

Įrodymas. Pažymėkime $\sigma^0 = I$, $\sigma^1 = \sigma$, $\dots$, $\sigma^m = (\sigma^{m-1})\sigma$, čia $m \geq 1$. Pastebėkime, jog kiekvienam $1 \leq i \leq n$ yra toks $m \geq 1$, kad

$$i, i\sigma, \dots, i\sigma^m = i. \quad (4.8)$$

Iš tiesų sekos $i\sigma^m$, $m \geq 1$, nariai priklauso aibei $\{1, 2, \dots, n\}$, todėl būtinai atsiras pasikartojančių narių. Tegul

$$i\sigma^r = i\sigma^s, \quad 1 \leq r < s.$$

Atvaizdavę šiuos skaičius keitiniu σ^{-r} , gauname $i = i\sigma^{s-r}$. Vadinasi, $m = s - r \in \mathbb{N}$, priklausantis nuo paties i ir turintis (4.8) savybę, egzistuoja. Toliau imame mažiausią iš tokių m . Įžvelgiame, kad tada

$$\varkappa(i) := (i, i\sigma, \dots, i\sigma^{m-1})$$

yra ciklas. Toliau sakysime, kad jį generuoja skaičius i .

Dabar norimą keitinio skaidinį galima gauti algoritmiškai. Pradėję nuo ciklo $\varkappa(1) = (1, 1\sigma, \dots, 1\sigma^{m-1})$ ir dar neišsėmę visų skaičių iki n , imame mažiausią iš dar nepatekusių į ciklą skaičių ir suformuojame jo generuotą ciklą. Per baigtinį skaičių žingsnių, išsėmę visus skaičius, sudarysime ciklų rinkinį

$$\varkappa(1), \dots, \varkappa(i), \dots, \varkappa(j), \dots, \varkappa(w). \quad (4.9)$$

Jie yra poromis nepriklausomi. Iš tiesų, jei sutaptų skirtingų ciklų nariai $i\sigma^r = j\sigma^l$, kai $i < j$, tai $i\sigma^{r-l} = j$. Ši lygybė rodo, kad j turėjo būti cikle $\varkappa(i)$.

Sudauginę (4.9) ciklus, gauname keitinį σ . Pastebėkime, kad dauginant nepriklausomus ciklus juos galime keisti vietomis.

Tikrindami skaidinio vienatį, tariame priešingai. Tegul

$$\sigma = \kappa_1 \kappa_2 \cdots \kappa_w = \kappa'_1 \kappa'_2 \cdots \kappa'_{w'}$$

yra du skaidiniai ciklais. Palyginame ciklus, kuriuose slankusis simbolis yra 1. Tarkime, kad tai κ_1 ir κ'_1 . Cikliška keisdami slankiuosius simbolius, abu ciklus galime pradėti vienetu. Bet tada, kaip buvome pastebėję,

$$\kappa_1 = \kappa'_1 = (1, 1\sigma, \dots, 1\sigma^{m-1}).$$

Panašiai pasielgę su kitais skaičiais, nepatekusiais į išnagrinėtą ciklą, įrodome, kad ir kiti ciklai sutampa.

Teorema įrodyta. $\diamond$

4.2 pavyzdys. Išskaidome keitinį, jau minėtą 1.2 skyrelyje:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 5 & 4 & 9 & 7 & 8 \end{pmatrix} = (1, 2)(3)(4, 6)(5)(7, 9, 8).$$

Teoremos įrodyme sudarėme keitinio skaidinį, pirmąjį ciklą pradėdami vienetu ir t. t., i -ąjį, $1 \leq i \leq w$, – mažiausiu iš skaičių, nesančių ankstesniuose cikluose. Kombinatorikoje dažnai naudojamas vadinamasis kanoninis skaidinys ciklais, kuriame bet kurio iš ciklų slankieji simboliai išrikiuojami pradedant didžiausiu, o vėliau patys ciklai keitinio skaidinyje sandauga surašomi ciklų pirmųjų elementų didėjimo tvarka. Kanonis pavyzdyje minėto keitinio pavidalas būtų toks: $(2, 1)(3)(5)(6, 4)(9, 8, 7)$.

Yra įvairių būdų abipusiškai vienareikšmiškai susieti simetrinę grupę su aibės $\mathbb{N}_n$ kėlinių aibe. Bene paprasčiausias būdas taip užrašyti keitinį dviejų eilučių lentelę, kad pirmosios eilutės skaičiai sudarytų didėjančią seką. Tada antroje eilutėje esantis kėlinys abipusiškai vienareikšmiškai atitinka patį keitinį. Tokia atitiktis neatspindi keitinio ciklinės struktūros. Pasinaudoję kanoniniu skaidiniu, gauname patogesnę atitiktį.

4.6 teorema. Jei

$$\sigma = (i_1, \dots, i_s) \cdots (j_1, \dots, j_t)$$

yra kanoninis keitinio σ skaidinys ciklais ir

$$\bar{\sigma} := \{i_1, \dots, i_s, \dots, j_1, \dots, j_t\}$$

yra kėlinys, gautas praleidus ciklų skliaustus, tai atvaizdis

$$\sigma \mapsto \bar{\sigma}$$

yra bijekcinis.

Įrodymas. Kadangi ciklai yra nepriklausomi, tai skaičių sekoje

$$\{i_1, \dots, i_s, \dots, j_1, \dots, j_t\}$$

nėra pasikartojančių. Todėl seka yra pirmųjų n natūraliųjų skaičių kėlinys. Vadinasi, atvaizdis yra apibrėžtas korektiškai.

Bijektyvumui įrodyti pakanka įsitikinti, kad du keitiniai σ' ir σ'' nėra atvaizduojami į vieną, tarkime, $\bar{\sigma}$ kėlinį. Jei taip būtų, bet kurio iš šių keitinių pirmasis ciklas turi prasidėti i_1 ir šis skaičius turi būti didžiausias pirmuosiuose keitinių σ' ir σ'' cikluose. Galime net vienareikšmiškai atstatyti juos. Turėdami šį aibės $\mathbb{N}_n$ kėlinį $\bar{\sigma}$ ir jo pirmąjį elementą i_1 , galime nagrinėti iš eilės po jo einančius skaičius ir rinkti mažesnius už i_1 . Tegu $i_r < i_1$, bet jau $i_{r+1} > i_1$. Abiejų keitinių pirmasis ciklas yra tas pats, t. y.

$$(i_1, \dots, i_r),$$

nes skaičius i_{r+1} jau negali priklausyti ciklui, o anksčiau nei skaičius i_r ciklas baigtis negali. Priešingu atveju mažesnis už i_1 skaičius turėtų pradėti kitą ciklą. Tai prieštarautų ciklų išdėstymo tvarkai.

Patikrinę, kad pirmieji ciklai keitiniuose σ' ir σ'' sutampa, procesą tęsiame. Pri-taikę indukcijos principą, užbaigiame keitinių lygybės įrodymą.

Teorema įrodyta. $\diamond$

Keitiny, nagrinėtas 4.2 pavyzdyje, pavaizduotas 1.2 paveiksle. Iš jo vaizdžiai matyti skaidinio ciklais prasmė ir keitinio, kaip atvaizdžio, veikimas.

Jei (4.7) skaidinyje yra $k_1(\sigma) \geq 0$ vienetinio ilgio ciklų, $k_2(\sigma) \geq 0$ ciklų, kurių ilgis lygus 2, ir t. t., $k_n(\sigma) \geq 0$ ciklų, kurių ilgis lygus n , tai

$$\bar{k}(\sigma) := (k_1(\sigma), k_2(\sigma), \dots, k_n(\sigma))$$

yra vadinamas ciklų vektoriumi, arba ciklinės struktūros vektoriumi. Jis tenkina lygtį

$$1x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n = n. \quad (4.10)$$

Jei $\bar{k} \in \mathbb{Z}_+^n$ taip pat tenkina šią lygtį, tai visi keitiniai, kuriems $\bar{k}(\sigma) = \bar{k}$, sudaro klasę, charakterizuojamą vektoriumi $\bar{k}$. Ją žymėkime $\mathbb{S}_n(\bar{k})$. Išsiaiškinsime ciklų vektoriaus algebrinę prasmę.

Du simetrinės grupės $\mathbb{S}_n$ keitiniai σ ir σ_1 vadinami jungtiniais, jeigu egzistuoja toks $\tau \in \mathbb{S}_n$, kad

$$\sigma = \tau \sigma_1 \tau^{-1}; \quad (4.11)$$

čia τ^{-1} yra keitiniui τ atvirkštinis keitiny.

4.7 teorema. Du keitiniai yra jungtiniai tada ir tik tada, jei jų ciklų vektoriai sutampa.

Įrodymas. Tarkime, kad jungtiniai keitiniai σ ir σ_1 yra susieti (4.11) lygybe, o $\kappa = (i_1, \dots, i_k)$ yra keitinio σ_1 ciklas. Tuomet

$$i_1 = i_k \sigma_1, \quad i_2 = i_1 \sigma_1, \quad \dots, \quad i_k = i_{k-1} \sigma_1.$$

Pažymėkime $y_j = i_j \tau^{-1}$, $1 \leq j \leq k$. Įsitikiname, kad $(y_1, \dots, y_k)$ yra keitinio σ ciklas:

$$y_j \sigma = y_j (\tau \sigma_1 \tau^{-1}) = (y_j \tau) (\sigma_1 \tau^{-1}) = (i_j \sigma_1) \tau^{-1} = i_{j+1} \tau^{-1} = y_{j+1},$$

jei $j = 1, \dots, k-1$, ir

$$y_k \sigma = (i_k \sigma_1) \tau^{-1} = i_1 \tau^{-1} = y_1.$$

Išreiškę iš (4.11) lygybės keitinį σ_1 per σ , panašiai įsitikintume, kad ir bet koks σ ciklas atitinka σ_1 to paties ilgio ciklą. Vadinasi, $\bar{k}(\sigma) = \bar{k}(\sigma_1)$. Kitaip tariant, abu keitiniai priklauso tai pačiai klasei.

Tarkime dabar, kad $\bar{k}(\sigma) = \bar{k}(\sigma_1)$. Imkime keitinių išraiškas ciklais. Tegu $(i_1, i_2, \dots, i_s)$ yra bendrasis ciklas keitinyje σ , o $(y_1, y_2, \dots, y_s)$ – keitinyje σ_1 . Atitinkamai sutvarkę ciklų išdėstymo eilę, sudarykime keitinį

$$\tau = \begin{pmatrix} \cdots i_1 i_2 \cdots i_s \cdots \\ \cdots y_1 y_2 \cdots y_s \cdots \end{pmatrix}.$$

Kiti pažymėti daugtaškiais elementai išdėstomi taip pat. Patikrinkime (4.11) formulę. Du aibės atvaizdžiai lygūs, jei jų reikšmės tuose pačiuose taškuose sutampa. Kaip vaizduoja skaičių i_j atvaizdis σ , žinome, o į ką atvaizduoja tuos pačius skaičius $\tau \sigma_1 \tau^{-1}$, surandame:

$$i_j(\tau \sigma_1 \tau^{-1}) = (i_j \tau) \sigma_1 \tau^{-1} = (y_j \sigma_1) \tau^{-1} = y_{j+1} \tau^{-1} = i_{j+1},$$

jei $j = 1, \dots, s-1$. Panašiai gautume $i_k(\tau \sigma_1 \tau^{-1}) = i_1$. Rastosis reikšmės sutampa su i_j vaizdais pritaikius σ . Lygybė (4.11) įrodyta. $\diamond$

Vadinasi, apibrėžtos keitinių klasės gali būti vadinamos ir tarpusavyje jungtinių elementų klasėmis.

4.8 teorema. Tegul $\bar{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ ir $1k_1 + \dots + nk_n = n$. Simetrinės grupės $\mathbb{S}_n$ jungtinių elementų klasėje $\mathbb{S}_n(\bar{k})$ yra yra

$$|\mathbb{S}_n(\bar{k})| = n! \prod_{j=1}^n \frac{1}{k_j! j^{k_j}}$$

keitinių.

Įrodymas. Turėdami struktūros vektorių, pasidarykime k_j dėžučių, kuriose gali tilpti j , $1 \leq j \leq n$, skaičių:

$$\underbrace{(\cdot) \dots (\cdot)}_{k_1} \dots \underbrace{(\cdot, \dots, \cdot) \dots (\cdot, \dots, \cdot)}_{k_j} \dots \underbrace{(\cdot, \dots, \cdot) \dots (\cdot, \dots, \cdot)}_{k_n}.$$

$j \qquad j \qquad n \qquad n$

Jose bet kaip išdėstykite visus skaičius $1, 2, \dots, n$. Dabar į kiekvienos dėžutės skaičius žiūrėkime kaip į ciklą. Tada visos dėžutės apibrėžia nurodytos struktūros keitinį. Jei dėstysime visais įmanomais būdais, o jų yra $n!$, tai gausime visus tos pačios struktūros keitinius, netgi su pasikartojimais.

Atkreipkime dėmesį į pasikartojimų priežastis. Jų yra dvi:

- 1) ciklų tvarka keitinyje yra nesvarbi;
- 2) tą patį j -ojo ilgio ciklą galima užrašyti j būdų, keičiant cikliškai jo elementus.

Kitaip tariant, panaudojus įvairius kėlinius, vieną kartą kažkoks skaičių rinkinys galėjo atsirasti vienoje dėžutėje, o kitą kartą – kitoje tos pačios talpos dėžutėje. Tai atrodytų kaip to paties didumo dėžučių su įrašytais skaičiais tvarkos kitimas. Bet keitinys vis tiek būtų tas pats. Dėl 1) priežasties kiekvienas keitinys buvo pakartotas

$$k_1! \dots k_j! \dots k_n!$$

kartų.

Dėl 2) priežasties j -ojo didumo dėžutėje esantys skaičiai sudarė tą patį ciklą j kartų. Peržvelgę visas dėžutes, gauname

$$1^{k_1} \dots j^{k_j} \dots n^{k_n}$$

keitinio pasikartojimų. Padaliję $n!$ iš šių sandaugų, išvedame norimą formulę.

Teorema įrodyta. ◇

Ciklų skaičiaus

$$w(\sigma) = k_1(\sigma) + k_2(\sigma) + \dots + k_n(\sigma)$$

(4.7) skaidinyje savybes nagrinėsime kituose vadovėlio skyriuose. Kiek yra keitinių, turinčių m , $0 \leq m \leq n$, ciklų? Ieškomą skaičių pažymėkime $c(n, m)$ ir pastebėkime, kad $c(n, 0) = 0$, jei $n \geq 1$. Atkreipiame dėmesį, kad mokslinėje literatūroje vartojamas ir kitas patogus šių skaičių žymuo: $\left[\begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix} \right]$.

4.9 teorema. Skaičius n -osios eilės keitinių, turinčių m , $1 \leq m \leq n$, ciklų, tenkina rekurentųjį sąryšį

$$c(n+1, m) = c(n, m-1) + nc(n, m).$$

Įrodymas. Nagrinėjame visus aibės $\{1, 2, \dots, n, n+1\}$ keitinius, išskaidytus m ciklų sandauga. Juos suskirstome į du poaibius.

Tegul pirmojo poaibio keitiniuose simbolis $n+1$ generuoja vienetinio ilgio ciklą. Kadangi skaičiai, neviršijantys n , yra $m-1$ cikle, tai tokių keitinių yra $c(n, m-1)$.

Antrojo poaibio keitinius galime gauti iš visų aibės $\{1, 2, \dots, n\}$ keitinių, turinčių m ciklų. Jų yra $c(n, m)$. Imkime vieną iš tokių keitinių ir paeiliui įrašykime į jo ciklus skaičių $n+1$. Kiek yra pozicijų viename cikle, kad taip įrašydami $n+1$ gautume vis skirtingus ciklus? Jei $\alpha = (i_1, i_2, \dots, i_r)$ yra bet kuris iš r -ojo ilgio ciklų, tai turime r tokių pozicijų. Vadinasi, iš vieno r -ojo ilgio ciklo padarome r naujų ciklų su $n+1$. Visų ciklų ilgių suma yra lygi n . Vadinasi, iš kiekvieno n keitinio su m ciklų galime padaryti n antrosios klasės keitinių jau su $n+1$. Iš viso jų gauname $nc(n, m)$. Sudėję rastas abiejų klasių galias, gauname teoremoje nurodytą sąryšį.

Teorema įrodyta. ◇

Pastebėkime įdomių sąsajų su polinomų algebra. Pažymėkime $(x)_0 = 1$ ir

$$(x)_n = x(x-1) \cdots (x-n+1).$$

Šį polinomą išreikškime kanonine forma

$$(x)_n = \sum_{k=0}^n s(n, k) x^k. \quad (4.12)$$

Čia apibrėžti koeficientai $s(n, k)$, $0 \leq k \leq n$, $n \geq 0$, yra vadinami pirmosios rūšies Stirlingo¹⁶ skaičiais. Matome, kad $s(0, 0) = 1$, $s(n, 0) = 0$, jei $n \geq 1$, $s(n, n) = 1$, o $s(n, k) = 0$, jei $k > n$.

4.10 teorema. Pirmosios rūšies Stirlingo skaičiai $s(n, k)$ tenkina rekurentųjį sąryšį

$$s(n+1, k) = s(n, k-1) - ns(n, k).$$

Įrodymas. Iš (4.12) išplaukia

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} s(n+1, k) x^k &= (x)_{n+1} = (x-n)(x)_n = (x-n) \sum_{k=0}^n s(n, k) x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} (s(n, k-1) - ns(n, k)) x^k. \end{aligned}$$

Sulyginę koeficientus prie vienodų x laipsnių, baigiame teoremos įrodymą. $\diamond$

Pakeitę (4.12) lygybėje nežinomąjį x į $-x$ ir abiejų pusių ženklus, gauname

$$x(x+1) \cdots (x+n-1) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} s(n, k) x^k.$$

Samprotaudami kaip ir 4.10 teoremos įrodyme, gauname jau 4.9 teoremoje užrašytą rekurenčiąją formulę

$$(-1)^{n+1-k} s(n+1, k) = (-1)^{n+1-k} s(n, k-1) + n(-1)^{n-k} s(n, k).$$

Įsitikinkite savarankiškai! Iš čia išplaukia tokia išvada.

1 išvada. Skaičius n -osios eilės keitinių, turinčių $0 \leq k \leq n$ ciklų, lygus

$$c(n, k) = (-1)^{n-k} s(n, k) = |s(n, k)|;$$

čia $s(n, k)$ yra pirmosios rūšies Stirlingo skaičius.

¹⁶James Stirling (1692–1770) – škotų matematikas.

4.4. Siurjekcijų skaičius ir rutulių-dėžių uždavinys

Ankstesniame 4.2 skyrelyje įsitikinome, kad tam tikri atvaizdžiai gerai modeliuoja net skrybėlių gražinimo problemą. Dabar išnagrinėsime tokį uždavinį:

Keliais būdais n skirtingų rutulių galima taip sudėti į m , $m \leq n$, skirtingų dėžių, kad nė viena neliktų tuščia?

Tarkime, kad $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ yra rutulių aibė, o $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ – dėžės. Įdėdami rutulį x_i , jam priskiriame dėžės numerį. Todėl visų rutulių sudėjimas į dėžes yra ekvivalentus atvaizdžio $f: X \rightarrow Y$ apibrėžimui. Be to, uždavinio sąlyga reikalauja, kad atvaizdis f būtų siurjekcinis.

Tegul, kaip ir anksčiau, $\mathcal{F}_s = \mathcal{F}_s(n, m)$ žymi n aibės į m aibę siurjekcijų visumą. Jei $m > n$, tai $|\mathcal{F}_s(n, m)| = 0$.

4.11 teorema. Jei $m \leq n$, tai

$$|\mathcal{F}_s(n, m)| = \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n.$$

Įrodymas. Tegul $\mathcal{F} = \mathcal{F}(n, m)$ yra visų atvaizdžių aibė. Remiantis 1.7 teorema, $|\mathcal{F}| = m^n$.

Tegu $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$, o aibę A_j sudaro atvaizdžiai, neįgyjantys reikšmės y_j , $1 \leq j \leq m$. Remdamiesi ta pačia atvaizdžių skaičiaus teorema, gauname

$$|A_j| = (m-1)^n, \quad |A_i \cap A_j| = (m-2)^n, \quad \dots, \quad |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| = (m-k)^n;$$

čia $1 \leq i < j \leq m$, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m$. Pastebėkime, kad tokių k poaibių sankirtų iš viso yra $\binom{m}{k}$.

Kiekviena iš siurjekcijų įgyja visas reikšmes y_j , todėl

$$\mathcal{F}_s = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_m}.$$

Naudodamiesi praeito skyrelio teoremos 4.1 išvada, gauname

$$|\mathcal{F}_s| = |\mathcal{F}| - S_1 + S_2 - \dots + (-1)^m S_m;$$

čia

$$S_1 = \binom{m}{1} (m-1)^n, \quad S_2 = \binom{m}{2} (m-2)^n, \quad \dots, \\ S_{m-1} = \binom{m}{m-1} (m-m+1)^n, \quad S_m = 0.$$

Įstatę į prieš tai užrašytą formulę, baigiame įrodymą.

Teorema įrodyta. ◇

2 išvada. Visiems $n \geq 1$ yra teisinga lygybė

$$n! = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^n.$$

Irodymas. Kiekviena n aibės siurjekcija į ją pačią yra ir bijekcija, o bijekcijų skaičius sutampa su n keitinių skaičiumi. Toliau pritaikome teoremą, kai $n = m$.

4.5. Aibės skaidiniai

Aibės A skaidiniu (k skaidiniu) vadiname išraišką

$$A = A_1 \cup \dots \cup A_k, \quad A_j \subset A, \quad A_j \neq \emptyset, \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad 1 \leq i < j \leq k; \quad (4.13)$$

čia $\cup$ sujungiamų poaibių tvarką neatsižvelgiama. Tegul $S(n, k)$ yra visų (4.13) skaidinių aibė. Jos galia $S(n, k) := |\mathcal{S}(n, k)|$ vadinama antrosios rūšies Stirlingo skaičiumi. Susitarkime, kad $S(0, 0) = 1$ ir $S(n, 0) = 1$, jei $n \geq 1$. Kitų vadovėlių autoriai siūlo šiuos Stirlingo skaičius žymėti $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$. Mėgstantys rutulių dėliojimo į dėžes uždavinį turėtų išvelgti, kad $S(n, k)$ yra n skirtingų rutulių sudėjimo į k vienodų dėžių skaičius, kai reikalaujama, kad jokia dėžė neliktų tuščia.

Išveskime porą Stirlingo skaičių skaičiavimo formulę. Iš pradžių pasinaudokime siurjekcinių atvaizdžių savybėmis.

4.12 teorema. Tegul, kaip ir 4.11 teoremoje, $\mathcal{F}_s(n, k)$ yra aibė n aibės siurjekcinių atvaizdžių į k aibę. Tada

$$S(n, k) = \frac{|\mathcal{F}_s(n, k)|}{k!} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n.$$

Irodymas. Jei $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $f: A \rightarrow \{1, \dots, k\}$ ir $f \in \mathcal{F}_s(n, k)$, tai ši funkcija nurodo, kurie aibės elementai į kuri poaibį pateko. Pažymėję

$$A_j = \{a_i \in A: f(i) = j\}, \quad 1 \leq j \leq k,$$

gauname vienintelį skaidinį $A = A_1 \cup \dots \cup A_k$. Atvirkščiai, turėdami tokį skaidinį, įvairiais galimais būdais galime pernumeruoti aibes A_j ir apibrėžti $k!$ siurjekcijų. Taip iš vieno skaidinio gauname $k!$ siurjekcijų. Taigi $|\mathcal{F}_s(n, k)| = k! S(n, k)$. Toliau pakanka pritaikyti 4.11 teoremą. $\diamond$

Visų galimų n aibės A skaidinių skaičius vadinamas Belo skaičiumi. Tradiciškai jis žymimas raide B_n . Taigi

$$B_n = \sum_{k=1}^n S(n, k).$$

Dabar išvesime vieną rekurentųjį sąryšį.

4.13 teorema. Susitarkime žymėti $S(0, 0) = 1$ ir $S(n, 0) = 1$, jei $n \geq 1$. Tada

$$S(n+1, k) = kS(n, k) + S(n, k-1), \quad 1 \leq k < n+1.$$

Įrodymas. Panašiai kaip Paskalio lygybės (3.5 teoremos) arba 4.9 teoremos įrodymuose, visus aibės $A = \{1, 2, \dots, n, n+1\}$ skaidinius perskirkime į dvi dalis. Vieną dalį sudarykime iš tokių skaidinių, kuriuose vienas iš jungiamų poaibių yra $\{n+1\}$. Tai skaidiniai pavidalo

$$A = A_1 \cup \dots \cup A_{k-1} \cup \{n+1\};$$

čia poaibiuose A_j , $1 \leq k-1$, nėra $n+1$. Tokių skaidinių yra $S(n, k-1)$.

Kitą dalį sudarantys likusieji skaidiniai gali būti gauti tokiu būdu. Imkime aibės $\{1, 2, \dots, n\}$ skaidinius k poaibių sąjunga

$$\{1, 2, \dots, n\} = A'_1 \cup \dots \cup A'_k.$$

Jų yra $S(n, k)$. Pridėkime paeiliui $n+1$ prie A'_j , $1 \leq j \leq k$. Taip iš kiekvieno tokio skaidinio padarytume k pradinės aibės A skaidinių. Todėl antroje skaidinių klasėje yra $kS(n, k)$ aibės A skaidinių. Sudėję abiejų klasių galias, gauname $S(n+1, k)$.

Teorema įrodyta. $\diamond$

Kaip ir pirmosios, antrosios rūšies Stirlingo skaičiai yra aptinkami polinomų algebroje. Prisiminkime žymenį $(x)_k = x(x-1) \cdots (x-k+1)$, $(x)_0 = 1$.

4.14 teorema. Jei $S(n, 0) := 0$, kai $n \in \mathbb{N}$, ir $S(0, 0) = 1$, tai

$$x^n = \sum_{k=0}^n S(n, k)(x)_k, \quad n \geq 0, \quad 0^0 := 1. \quad (4.14)$$

Įrodymas. Atvejis $n = 0$ yra trivialus. Tegu toliau $n \in \mathbb{N}$. Abiejose įrodinėjamose lygybės pusėse yra n -ojo laipsnio polinamai, todėl pakanka ją patikrinti dėl daugiau negu n taškų. Įrodysime, kad ji teisinga su visais natūraliaisiais $x = m \geq n$. Tuo tikslu nagrinėjame atvaizdžius

$$g: A \rightarrow Y := \{1, 2, \dots, m\}.$$

Jų yra m^n . Šių skaičių randame kitu būdu klasifikuodami atvaizdžius pagal aibės A vaizdus $X := g(A) \subset Y$. Taip susiaurinę reikšmių aibę, pastebime, kad $g: A \rightarrow X$ yra siurjekcija. Tarp šių siurjekcijų ir atvaizdžių yra abipusiškai vienareikšmė atitiktis, todėl galime skaičiuoti tik siurjekcijas. Jas klasifikuojame į klases pagal tai, kiek elementų yra poaibiuose X ir kokie jie. Poaibyje X gali būti $1, 2, \dots, n$ elementų. Jei $|X| = k$ ir šio poaibio elementai yra fiksuoti, tai gauname $|\mathcal{F}_s(n, k)|$ skirtingų siurjekcijų. Pakeitę $X \subset Y$ kitu tos pačios galios poaibiu, vėl gautume tiek pat skirtingų siurjekcijų. Vadinasi, visų siurjekcijų (taip pat ir atvaizdžių g) skaičius gali būti užrašomas šitaip:

$$m^n = \sum_{k=1}^n \sum_{X \subset Y, |X|=k} |\mathcal{F}_s(n, k)|;$$

čia vidinėje sumoje yra sumuojama pagal visus k -osios galios poaibius X , kurių aibėje Y yra $\binom{m}{k}$. Pasinaudoję 4.11 teorema, gauname

$$\begin{aligned} m^n &= \sum_{k=1}^n \sum_{X \subset Y, |X|=k} S(n, k) k! \\ &= \sum_{k=1}^n S(n, k) k! \sum_{X \subset Y, |X|=k} 1 \\ &= \sum_{k=1}^n S(n, k) k! \binom{m}{k} \\ &= \sum_{k=1}^n S(n, k) (m)_k. \end{aligned}$$

Jei $n \in \mathbb{N}$, pagal susitarimą $S(n, 0) = 0$, todėl į pastarąją sumą galėtume įtraukti nulinių dėmenį, atitinkantį $k = 0$. Taip gautume teoremos formulę. $\diamond$

Naudodamiesi (4.12) polinomų lygybėmis, 4.3 skyrelyje apibrėžėme pirmosios rūšies Stirlingo skaičius $s(n, k)$ ir susiejome juos su tam tikrų keitinių skaičiumi. Dabar jau susipažinusiems su tiesine algebra paminėsime algebrinę Stirlingo skaičių prasmę. Kiti skaitytojai gali peršokti prie kito skyrelio.

Žinoma, kad polinamai, kurių laipsnis neviršija n , sudaro vektorinę erdvę $\mathbb{R}_n[x]$ virš realiųjų skaičių kūno $\mathbb{R}$. Polinamai

$$1, x, x^2, \dots, x^n$$

yra jos bazė. Pastebėkime, kad polinamai

$$(x)_0 = 1, \quad (x)_1 = x, \quad (x)_2 = x(x-1), \quad \dots, \quad (x)_n = x(x-1) \cdots (x-n+1)$$

taip pat sudaro bazę. Per juos vienareikšmiškai galime išreikšti bet kurį polinomą iš $\mathbb{R}_n[x]$. Vadinasi, (4.12) ir (4.14) lygybės yra ne kas kita, o tik vienos bazės pakeitimo kita formulės. Iš esmės šia idėja pasinaudosime įrodydami tolesnę teoremą, nors ir nevartosime vektorinių erdvių terminijos.

4.15 teorema. Stirlingo skaičiai tenkina tokį ortogonalumo sąryšį:

$$\sum_{k=m}^n S(n, k) s(k, m) = \delta_{mn}, \quad m, n \geq 0.$$

Įrodymas. Pasinaudoję tik polinomų savybėmis, gauname

$$x^n = \sum_{k=1}^n S(n, k) (x)_k$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n S(n, k) \left(\sum_{m=0}^k s(k, m) x^m \right) \\
&= \sum_{m=0}^n \left(\sum_{k=m}^n S(n, k) s(k, m) \right) x^m.
\end{aligned}$$

Palyginę polinomų koeficientus prie vienodų x laipsnių, baigiame teoremos įrodymą.

Teorema įrodyta. $\diamond$

Užduotys

- 4.1. Pritaikykite rėčio principą ir raskite skaičių lygties $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ sveikųjų sprendinių, tenkinančių sąlygas

$$-4 \leq x_1 \leq 3; \quad 0 < x_2 \leq 8; \quad 4 \leq x_3 \leq 5.$$

- 4.2. Pritaikykite rėčio principą ir suskaičiuokite natūraliuosius skaičius, neviršijančius 60 ir tarpusavyje pirminius su 60.

- 4.3. Raskite, kiek yra šešiaženklų skaičių, kurių skaitmenų suma lygi 27. Atsakymą sugretinkite su 1 skyriaus 1.2 užduotimi.

- 4.4. Pasinaudoję binominių koeficientų apgręžimo sąryšiu, iš (4.5) lygybės išveskite (4.3) formulę.

- 4.5. Įrodykite lygybę

$$n! = \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} s(n, k), \quad n \geq 1.$$

- 4.6. Keliais būdais 6 skirtingus rutulius galime taip sudėti į 3 vienodas dėžes, kad nė viena neliktų tuščia?

- 4.7. Išveskite rekurenčiąją Belo skaičių formulę

$$B_n = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} B_{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- 4.8. Pasinaudoję 4.8 teoremos įrodymo idėja, išveskite formulę

$$B_n = n! \sum_{\substack{k_1, \dots, k_n \geq 0 \\ 1k_1 + \dots + nk_n = n}} \prod_{j=1}^n \frac{1}{(j!)^{k_j} k_j!}.$$