

3. Junginiai

3.1. Gretiniai, kėliniai ir deriniai

Iš aibės elementų galime sudaryti įvairius rinkinius, kurie skiriasi elementų išdėstymo tvarka arba nors vienu elementu. Rinkinių elementai gali kartotis arba būti skirtingi. Tokius rinkinius vadiname junginiais. Išmokime juos rasti. Aišku, kad skaičiuojant elementų prigimtis yra nesvarbi. Tarkime, kad pradinės aibės galia yra n , o junginio elementų skaičius lygus k . Jį vadiname k junginiu, išrinktu iš n aibės. Iš pradžių aptarkime atvejį, kai junginyje elementai yra skirtingi.

Aibės $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ skirtingų elementų sutvarkytąjį junginį $(a_{i_1}, \dots, a_{i_k})$ vadiname gretiniu, o pabrėždami jo ilgį – k gretiniu iš n aibės. Jų skaičių pažymėkime A_n^k . Nenustebkite pamatę ir žymenį $(n)_k$.

3.1 teorema. Kai $1 \leq k \leq n$, gretinių skaičius

$$A_n^k = n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1).$$

Įrodymas. Pirmąjį gretinio elementą, tegul a_{j_1} , imame iš visos aibės, todėl yra n galimybių. Darykime indukcinę prielaidą ir tarkime, kad gretinio pradžioje jau parašyta i skirtingų elementų, t. y. vienu iš $n(n-1) \cdots (n-i+1)$ būdų yra sudarytas gretinys $\alpha := (a_{j_1}, \dots, a_{j_i})$; čia $1 \leq i < k$. Iš likusių $n-i$ elemento renkamam $a_{j_{i+1}}$ turime $n-i$ galimybių. Ir taip yra visada, nepriklausomai nuo to, koks yra α ir koks elementas yra renkamas $(i+1)$ -uoju gretinio nariu. Pagal daugybos principą gretinių $(a_{j_1}, \dots, a_{j_i}, a_{j_{i+1}})$ yra $n(n-1) \cdots (n-i+1) \cdot (n-i)$. Dabar pasinaudoję indukcijos principu matome, kad pastarosios sekos pavidalas išlieka, kai $i = 1, 2, \dots$. Kai $i = k$, gauname teoremoje nurodytą k gretinių skaičiaus formulę.

Teorema įrodyta. ▲

Jau žinome funkcijų, atvaizduojančių aibę $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ aibėje $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, skaičių. Remiantis 1.7 teorema, jis lygus n^k . Raskime injekcinių funkcijų skaičių.

3.2 teorema. Pažymėkime

$$\mathcal{F}_{inj} := \mathcal{F}_{inj}(k, n) := \{f: X \rightarrow Y: f \text{ – injekcija}\}.$$

Tada $|\mathcal{F}_{inj}| = A_n^k$.

Įrodymas. Injekcinę funkciją vienareikšmiškai apibrėžia sutvarkytasis jos reikšmių vektorius $(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_k))$, kurio koordinatės yra skirtingos ir imamos iš aibės Y . Vadinasi, šie vektoriai yra gretiniai. Jų skaičius yra A_n^k . ▲

Aišku, kad dviejose pastarosiose teoremose nagrinėjamos ekvivalenčių aibių galios. Injekcinėmis funkcijomis labai patogu naudotis, nes išryškėja skaičiuojami atvejai.

3.1 pavyzdys. Keliais būdais dešimt studentų galima susodinti teatro salės eilėje, kurioje yra 20 sunumeruotų vietų?

Sprendimas. Pakanka sunumeruoti studentus ir pastebėti, kad susodinimo būdų yra tiek, kiek injekcinių funkcijų $f: \{1, 2, \dots, 10\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 20\}$, t. y. $A_{20}^{10} = 11 \cdot 12 \cdot \dots \cdot 20$.

Gretinius iš n elementų po n vadiname kėliniais.

3.3 teorema. Iš viso yra $n! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ kėlinių, sudarytų iš n aibės.

1 išvada. Iš viso yra $n!$ bijekcinių n aibės funkcijų į n aibę.

Raidžių tvarka k žodyje arba gretinyje yra svarbi. Panagrinėkime junginius, kai elementų tvarka juose yra nesvarbi ir skaičiuojant į ją neatsižvelgiama.

Nesutvarkytasis skirtingų elementų rinkinys (poaibis) yra vadinamas deriniu. Nurodydami aibės ir poaibio galias, sakysime, kad skaičiuojame k derinius iš n aibės. Tokių derinių skaičius mokslinėje literatūroje žymimas dvejopai:

$$C_n^k \quad \text{arba} \quad \binom{n}{k}.$$

Jis vadinamas binominiu koeficientu iš n po k . Mes vartosime antrąjį žymenį. Taip pat susitarkime sandaugas, kuriose nėra daugiklių, t. y. tuščiąsias sandaugas, visada prilyginti vienetui. Taigi turime ir reikšmes $A_n^0 = 1$ bei $0! = 1$.

3.4 teorema. Derinių iš n aibės po k elementų skaičius

$$\binom{n}{k} = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Įrodymas. Teiginys išplaukia iš 3.1 ir 3.3 teoremų, nes, sutapatinę tik tvarka besiskiriančius gretinius, iš $k!$ gretinių gauname tik vieną derinį. Paskutinė lygybė patikrinama tiesiogiai. $\blacktriangleleft$

Susitarkime, kad $\binom{n}{k} = 0$, jei $k > n$. Tai yra natūralu, nes didesnės galios negu n poaibio nėra nė vieno. Įrodysime porą paprasčiausių binominių koeficientų savybių.

3.5 teorema. (Paskalio). Tegul $1 \leq k \leq n$. Tada

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Įrodymas. Pasinaudokime dukart skaičiuok principu. Suma, esanti įrodinėjamos lygybės dešinėje, nuteikia nagrinėti visos k derinių iš n aibės skaidinį į dvi klases.

Tarkime, kad deriniai buvo sudaromi iš skaičių $\{1, 2, \dots, n\}$. Vienuose deriniuose skaičius n buvo, kituose – ne. Galime įsivaizduoti, kad pirmosios klasės deriniai gauti sudarius $k-1$ derinių iš aibės $\{1, 2, \dots, n-1\}$ ir vėliau į juos įrašius n . Taigi iš viso tokių derinių yra $\binom{n-1}{k-1}$. Antrosios klasės k deriniai sudaromi tik iš skaičių $\{1, 2, \dots, n-1\}$. Iš viso jų yra $\binom{n-1}{k}$. Sudėję abiejų klasių galias, gauname visą derinių skaičių. $\blacktriangleleft$

Iliustruosime, kaip skaičiuojant junginius galima atskleisti grafų savybes. Štai pritaikę 3.4 teoremą, randame pilnojo grafo K_n didumą, t. y. jo briaunų skaičių. Jis lygus $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$, nes tiek jame yra briaunų porų. Suskaičiuokime visus n -osios eilės numeruotuosius grafus.

3.6 teorema. Iš viso galima sudaryti 2^s , čia

$$s = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2},$$

numeruotųjų n -osios eilės grafų.

Irodymas. Įsivaizduojame pilnąjį numeruotąjį grafą K_n . Visus n -osios eilės grafus galima gauti iš jo atėmus tam tikrą skaičių briaunų. Neatimtųjų briaunų poaibiai vienareikšmiškai apibrėžia skaičiuojamus numeruotuosius grafus. Pilnasis K_n grafas turi $s = n(n-1)/2$ briaunų. Remiantis 1.8 teorema, yra 2^s jų poabių. Tai ir yra ieškomasis grafų skaičius. $\blacktriangleleft$

Iš toliau pateikiamos teoremos matyti, kad grafo parametrai tarpusavyje yra susiję. Iš pradžių išspręskime nesunkų ekstremalųjį uždavinį.

3.1 lema. Tegul $n \geq 2$ yra fiksuotas ir $n = n_1 + n_2$, $1 \leq n_1 \leq n_2$. Suma

$$g(n_1, n_2) := \binom{n_1}{2} + \binom{n_2}{2} = \frac{n_1(n_1-1) + n_2(n_2-1)}{2}$$

yra didžiausia, kai $n_1 = 1$ ir $n_2 = n - 1$.

Irodymas. Jei didesnysis dėmuo $n_2 < n - 1$, padidinkime jį vienetu, tuo pačiu mažesnįjį n_1 pakeisdami $n_1 - 1$. Nagrinėjama binominių koeficientų suma tampa

$$\begin{aligned} g(n_1 - 1, n_2 + 1) &= \frac{(n_1 - 1)(n_1 - 2) + (n_2 + 1)n_2}{2} \\ &= g(n_1, n_2) + n_2 - n_1 + 1 \\ &> g(n_1, n_2). \end{aligned}$$

Po baigtinio skaičiaus žingsnių pasieksime funkcijos maksimumą:

$$\max_{n_1+n_2=n} g(n_1, n_2) = g(1, n-1) = (n-1)(n-2)/2.$$

Lema įrodyta. $\blacktriangleleft$

3.7 teorema. Jei $n \geq 1$ yra grafo eilė, m – jo didumas, o k – jo komponentių skaičius, tai

$$n - k \leq m \leq \frac{1}{2}(n - k)(n - k + 1).$$

Įrodymas. Pirmąją nelygybę įrodome taikydami matematinę indukciją $m \geq 0$ atžvilgiu. Kai $m = 0$, turime nulinį grafą su n komponentų. Tad nelygybė yra triviali.

Tegu $m_1 < m_2 < \dots$ yra n -osios eilės grafų didumai, tenkinantys sąlygą: atėmus vieną briauną iš G , jo komponentų skaičius padidėja. Kai $m_{j-1} < m < m_j$, visi m didumo grafai turi „perteklinių“ briaunų, kurias atėmus komponentų skaičius nesikeičia. Jie turi tą patį komponentų skaičių, kaip ir grafas, kurio didumas yra m_{j-1} . Todėl kairiąją iš įrodinėjamų nelygybių pakanka įrodyti grafams, kurių didumai sudaro seką $\{m_j\}$, $j \geq 1$.

Tarkime, nelygybė jau įrodyta grafiui su m_{j-1} briauna ir nagrinėkime atvejį $|E| = m_j$. Dabar atėmę bet kurią iš briaunų gauname grafą, kuriam galioja indukcijos prielaida. Tegu tai yra grafas

$$G' = (V', E'), \quad |V'| = n, \quad |E'| = m_j - 1.$$

Jis turi $k + 1$ komponentų, todėl

$$n - (k + 1) \leq m_j - 1.$$

Iš čia išplaukia nelygybė dėl m_j .

Vertindami briaunų skaičių m iš viršaus, nagrinėkime patį „blogiausią“ atvejį, kai kiekviena iš komponentų sudaro pilnuosius pografus K_{n_i} , $1 \leq i \leq k$. Tada viso grafo didumas yra

$$\binom{n_1}{2} + \binom{n_2}{2} + \dots + \binom{n_k}{2}.$$

Pritaikę 3.1 lemą kiekvienai binominių koeficientų porai, gauname maksimalų galimą grafo didumą:

$$0 + 0 + \dots + \binom{n-k+1}{2} = \frac{(n-k+1)(n-k)}{2}.$$

Teorema įrodyta. ▲

2 išvada. Jei n -osios eilės grafas turi daugiau nei $(n-1)(n-2)/2$ briaunų, tai jis yra jungus.

Derinių skaičius $\binom{n}{k}$ nurodo, kiek k poaibių galime išrinkti iš n aibės. Skirtingiems $k = 0, 1, \dots, n$ poaibių aibės nesikerta, todėl iš 1.5 ir 1.8 teoremų išplaukia tokia tapatybė:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n; \quad (3.1)$$

čia n yra bet koks natūralusis skaičius.

Išvedant šią lygybę pasinaudota jau minėtu dukart skaičiuok principu: 1.8 teoremoje poaibių aibės galią radome naudodamiesi kodais, dabar – derinių apibrėžimu. Gautas naujas sąryšis. Panašiai elgsimės ir ateityje.

3.2. Junginiai su pasikartojimais

Nagrinėkime junginius, kuriuose gali būti pasikartojančių elementų. Sutvarkytuose junginiuose, kuriuos vadiname ir gretiniais su pasikartojimais, elementų tvarka yra svarbi, todėl skaičiuojant į ją turi būti atsižvelgiama. Situacija labai primena žodžių sudarymą iš abėcėlės raidžių, todėl dažnai toks įvaizdis ir naudojamas. Žinoma, tada raidė įsivaizduojama kaip bet koks pradinės aibės, kurią vadiname abėcėle, elementas, o sutvarkytasis junginys tampa žodžiu. Atsakymą į klausimą, kiek iš viso yra k -ojo ilgio žodžių, jau žinome iš 1.6 teoremos. Štai jis:

Jei abėcėlėje yra n raidžių, tai galima sudaryti n^k žodžių, kurių ilgis lygus k .

Vadinasi, perfrazavę 1.6 teoremą, turime tokį teiginį.

3.8 teorema. Iš n aibės elementų galima sudaryti n^k ilgio k gretinių su pasikartojimais.

◇

Anksčiau turėdami n aibę ir keisdami jos elementus vietomis, gaudavome visus $n!$ kėlinių. Galėjome juos vadinti netgi aibės kėliniais.

Imkime dabar multiaibę (rinkinį su pasikartojančiais elementais), kurioje yra $p_1 \geq 1$ vienos rūšies vienodų, $p_2 \geq 1$ – kitos rūšies vienodų ir t. t., $p_k \geq 1$ – k -osios rūšies vienodų elementų. Visų multiaibės elementų dėstinių tam tikra tvarka (seką) vadiname kėliniu su pasikartojimais. Juos skaičiuodami reikalaujame, kad kėlinys nuo kėlinio skirtųsi bent dviejų elementų išdėstymo tvarka. Kėlinyje su pasikartojimais vienodus elementus sukeitus vietomis, kėlinys nepasikeičia, todėl skaičiuojant reikia būti atidiems.

3.9 teorema. Jei multiaibėje yra $k \geq 1$ rūšių elementai, kurie atitinkamai pasikartoja $p_1, p_2, \dots, p_k \geq 1$ kartų, ir

$$p_1 + p_2 + \dots + p_k = n,$$

tai iš viso galima sudaryti

$$\frac{n!}{p_1! p_2! \dots p_k!}$$

n kėlinių su pasikartojimais.

Įrodymas. Atlikime visas galimas $n!$ multiaibės elementų tvarkos perstatas ir išrašykime gautas sekas. Pastebėkime, kad perstatant vietomis vienodus elementus sekos nepasikeičia, jos apibrėžia tą patį kėlinį. Vadinasi, dėl visų i -osios rūšies vienodų elementų perstatų (o jų yra $p_i!$) kėliniai pakartojami $p_i!$ kartų. Ir taip atsitinka dėl kiekvieno $1 \leq i \leq k$. Padaliję $n!$ iš faktorialų sandaugos $p_1! \dots p_k!$, gauname ieškomą skirtingų kėlinių su pasikartojimais skaičių. ▴

Prisiminę susitarimą $0! = 1$, pastebėkime, kad ką tik įrodytą formulę galime taikyti ir tada, kai $p_i \geq 0$, $1 \leq i \leq k$.

Nesutvarkytuosius junginius su galimais pasikartojimais pradėkime nagrinėti nuo praktiško uždavinio.

3.2 pavyzdys. Kiek skirtingų pirkinių iš k prekių sudarytume, jei galėtume rinktis iš n prekių rūšių be apribojimų?

Sprendimas. Aišku, kad prekių tvarka krepšyje yra nesvarbi, bet deriniu pirkinių nepavardinsi, nes sąlygoje nėra uždrausta pirkti kelias vienos rūšies prekes. Spręsdami vėl pasinaudokime kodais.

Sunumeruokime visas n prekių rūšis ir sudarykime pirkinio kodą: rašykime tiek pliusų, kiek imame pirmosios rūšies prekių, dėkime skirtuką — vertikalų brūkšnį — ir tęskime šį procesą. Baigsime parašę tiek pliusų, kiek yra imama n -osios rūšies prekių. Taigi kodas atrodys maždaug taip:

$$(+ + + || + + | \cdots | +).$$

Nuėję į parduotuvę ir turėdami tokį mamos nurodytą kodą, matome, kad reikia nupirkti tris pirmosios rūšies prekes, nė vienos antrosios rūšies prekės ir t. t. Namo parnešime viską, ko buvo prašoma.

Vadinasi, tarp galimų pirkinių ir jų kodų nustatyta abipusiškai vienareikšmė atitiktis. Lieka tik rasti tokių kodų skaičių.

Kodą sudarys k pliusų ir $n - 1$ vertikalų brūkšnių. Kodai yra $n - 1 + k$ žodžiai, kai abėcėlė yra aibė $\{+, |\}$, tačiau ne visi. Jie tenkina vieną sąlygą: pliusų skaičius yra lygus k . Kadangi pliusų padėtis kode vienareikšmiškai jį nusako, o tokių padėčių galime išrinkti $\binom{n+k-1}{k}$ būdais, tai šis binominis koeficientas ir yra uždavinio atsakymas.

Paimtas iš n aibės k elementų rinkinys su galimais pasikartojimais vadinamas deriniu su pasikartojimais. Jų skaičius dažnai žymimas H_n^k . Kadangi elementų prigimtis nesvarbi, spręsdami uždavinį, mes įrodėme tokią teoremą.

3.10 teorema. Jei $k \geq 0$, tai imamų iš k aibės derinių su galimais pasikartojimais skaičius

$$H_n^k = C_{n+k-1}^k = \binom{n+k-1}{k}.$$

Pastebėkime, kad spręsdami pirkinio uždavinį, mes ieškojome lygties

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$$

sprendinių skaičiaus; čia $x_i \geq 0$ žymi i -osios rūšies prekių, imamų į pirkinį, skaičių. Jei sveikųjų neneigiamų skaičių aibę pažymėtume $\mathbb{Z}_+$, o $\mathbb{Z}_+^n$ — Dekarto sandaugą, tai nežinomasis vektorius $\bar{x} := (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}_+^n$. Akcentuodami šį svarbų pastebėjimą suformuluosime teoremą.

3.11 teorema. Lygtis $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$ turi $H_n^k = \binom{n+k-1}{k}$ sprendinių sveikais neneigiamais skaičiais.

Palyginkime su tokiu teiginiu.

3.12 teorema. Jei $k \geq n$, tai lygtis $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$ turi $\binom{k-1}{n-1}$ sprendinių natūraliaisiais skaičiais.

Įrodymas. Pakeiskime nežinomuosius

$$x_1 = y_1 + 1, \quad x_2 = y_2 + 1, \quad \dots, \quad x_n = y_n + 1.$$

Nagrinėjamas sprendinių skaičius lygus lygties

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n = k - n$$

sveikųjų neneigiamų sprendinių skaičiui. Vadinas, remiantis 3.11 teorema, jis lygus

$$H_n^{k-n} = \binom{k-1}{k-n} = \frac{(k-1)!}{(n-1)!(k-n)!} = \binom{k-1}{n-1}.$$

Teorema įrodyta. ▲

3.3. Multinominiai koeficientai

Prisimename, kad derinių skaičius yra išreiškiamas binominiu koeficientu. Toks pavadinimas kilo iš Niutono binomo formulės

$$(x + y)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} x^p y^{n-p}, \quad n \geq 1,$$

kurią siūlome įsirodyti savarankiškai. Rekomenduojame pritaikyti matematinę indukciją ir 3.5 (Paskalio) teoremą.

Apibendrinkime šią formulę, keldami k nežinomųjų sumą bet koku $n \geq 1$ laipsniu. Dauginant sumas panariui, reikia iš pradžių dauginti bendruosius narius, o po to gautąsias sandaugas sudėti:

$$\begin{aligned} (x_1 + \dots + x_i + \dots + x_k)^n &= (x_1 + \dots + x_{i_1} + \dots + x_k) \dots \\ &\quad \times (x_1 + \dots + x_{i_j} + \dots + x_k) \dots \\ &\quad \times (x_1 + \dots + x_{i_n} + \dots + x_k) \\ &= \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_j, \dots, i_n \leq k} x_{i_1} \dots x_{i_j} \dots x_{i_n}. \end{aligned}$$

Dabar sudėkime panašius narius, t. y. su vienodais x_i , $1 \leq i \leq k$, laipsniais. Šie laipsniai sudaro vektorių $\bar{p} = (p_1, \dots, p_k)$ su sveikosiomis neneigiamomis koordinatėmis, tenkinančiomis sąlygą $p_1 + \dots + p_k = n$. Vadinas, anksčiau gautą sumą galime perrašyti:

$$(x_1 + \dots + x_i + \dots + x_k)^n = \sum_{\bar{p}} \binom{n}{p_1, \dots, p_k} x_1^{p_1} \dots x_k^{p_k}. \quad (3.2)$$

Čia sumuojama pagal visus minėtus vektorius $\bar{p}$, o

$$\binom{n}{p_1, \dots, p_k}, \quad p_1, \dots, p_k \geq 0, \quad p_1 + \dots + p_k = n,$$

yra tam tikri koeficientai. Juos vadiname multinominiais. Kai $n = 2$, jie turi sutapti su jau įvestais binominiais koeficientais. Todėl susitarkime dėl dvigubo žymėjimo:

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{p, n-p}.$$

3.13 teorema. Tegu $n \geq 1$, $(p_1, \dots, p_k) \in \mathbb{Z}_+^k$ ir $p_1 + \dots + p_k = n$. Tada

$$\binom{n}{p_1, \dots, p_k} = \frac{n!}{p_1! \dots p_k!}.$$

Įrodymas. Jei sandauga $x_{i_1} \dots x_{i_j} \dots x_{i_n}$ yra panaši nariui $x_1^{p_1} \dots x_k^{p_k}$, tai raidė x_i užima $p_i \geq 0$ pozicijų, $1 \leq i \leq k$. Vadinasi, šios sandaugos nežinomieji $x_1, \dots, x_k$ sudaro n multiaibės kėlinį. Tokių kėlinių skaičius yra lygus nagrinėjamų panašiųjų dėmenų skaičiui sumoje. Jį jau esame radę 3.9 teoremoje. Pritaikę šį rezultatą, gauname

$$\binom{n}{p_1, \dots, p_k} = \frac{n!}{p_1! \dots p_k!}.$$

Teorema įrodyta. ◇

Atkreipkite dėmesį į tokią (3.2) lygybės išvadą:

$$k^n = \sum_{\bar{p}} \binom{n}{p_1, \dots, p_k}.$$

Ji gaunama įstačius $x_j \equiv 1$. Čia, kaip ir anksčiau, sumuojama pagal visus vektorius $\bar{p} = (p_1, \dots, p_k)$ su neneigiamomis koordinatėmis ir tenkinančius sąlygą $p_1 + \dots + p_k = n$.

3.4. Binominio koeficiento savybės

Knygose yra apstu įvairių binominių koeficientų sąryšių. Vieni iš jų (pvz., (3.1)) išplaukia iš pačios binominio koeficiento prasmės, kiti yra įrodomi taikant matematinę indukciją. Kai kada pakanka pritaikyti koeficientų skaičiavimo formulę. Galima derinti keletą metodų arba naudotis anksčiau gautomis lygybėmis. Visų jų neįmanoma pateikti viename vadovylyje. Mes truputį pasimokysime įrodymų technikos ir išvesime keletą naudingų savybių.

Tegul $i, j, k, m, n \in \mathbb{Z}_+$, be to, $0! = 1$, $\binom{n}{0} := 1$ ir $\binom{n}{k} := 0$, jei $k > n$.

3.14 teorema. Jei $0 \leq m \leq k \leq n$, tai

$$\binom{n}{k} \binom{k}{m} = \binom{n}{m} \binom{n-m}{k-m}.$$

Įrodymas. Pasinaudojus binominių koeficientų skaičiavimo formule, dydis, esantis kairioje pusėje, lygus

$$\begin{aligned} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{k!}{m!(k-m)!} &= \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{m!(k-m)!} \cdot \frac{(n-m)!}{(n-m)!} \\ &= \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{(n-m)!}{(k-m)!((n-m)-(k-m))!} \\ &= \binom{n}{m} \binom{n-m}{k-m}. \end{aligned}$$

Teorema įrodyta. $\diamond$

3.15 teorema. Jei $k, m, n \in \mathbb{Z}_+$, tai

$$\sum_{k=0}^n \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n}, \quad \sum_{m=0}^n \binom{m}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Įrodymas. Pakanka pritaikyti matematinę indukciją n atžvilgiu ir 3.5 Paskalio teoremos lygybę. $\diamond$

Palyginkite ką tik įrodytas formules su (3.1) sąryšiu, kuriame binominiai koeficientai buvo sumuojami pagal apatinį indeksą. Antroji 3.15 teoremos lygybė padeda skaičiuoti natūraliųjų skaičių laipsnių sumas. Tam pakanka pastebėti, kad

$$m^2 = 2\binom{m}{2} + \binom{m}{1}, \quad m^3 = 6\binom{m}{3} + 6\binom{m}{2} + \binom{m}{1}, \dots$$

Todėl laipsnių m^j sumos pagal $0 \leq m \leq n$ pakeičiamos binominių koeficientų sumomis pagal viršutinį indeksą. Tada pasinaudojame ką tik įrodyta teorema. Pavyzdžiui,

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^n m^2 &= 2 \sum_{m=1}^n \binom{m}{2} + \sum_{m=1}^n \binom{m}{1} = 2\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1). \end{aligned}$$

3.16 teorema. Jei $0 \leq m \leq k \leq n$, tai

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{j=0}^k \binom{n}{j} \binom{m}{k-j}.$$

Įrodymas. Dabar skaičiuojame dukart. Reiškinyje kairiojoje lygybės pusėje yra k derinių iš $m+n$ aibės skaičius. Pastarąją galime išivaizduoti kaip dviejų aibių tiesioginę sąjungą $A \cup B$, be to, $|A| = n$ ir $|B| = m$. Klasifikuojame tuos k derinius į klases

pagal tai, kiek derinyje yra elementų iš A aibės. Tegul šis skaičius yra $j \in \{0, 1, \dots, n\}$. Derinių su j elementų iš aibės A ir $k - j$ iš aibės B yra

$$\binom{n}{j} \binom{m}{k-j}.$$

Sudėję pagal j , gauname visų derinių skaičių. ◇

Ypač svarbūs yra tokiau įrodomi vadinamieji ortogonalumo ir apgręžimo sąryšiai. Įveskime labai patogią santrumpą – Kronekerio simbolį δ_{mn} . Jis lygus vienetui, jei $m = n$, ir nuliui – kitais atvejais.

3.17 teorema. (Ortogonalumo sąryšis). Jei $m \leq n$, tai

$$S_{mn} = \sum_{k=m}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{m} = (-1)^m \delta_{mn}.$$

Įrodymas. Remdiantis 3.14 teorema,

$$\begin{aligned} S_{nm} &= \sum_{k=m}^n (-1)^k \binom{n}{m} \binom{n-m}{k-m} \\ &= \binom{n}{m} \sum_{k=m}^n (-1)^k \binom{n-m}{k-m}. \end{aligned}$$

Pažymėkime $j = k - m$. Jei $m \neq n$, tai

$$\begin{aligned} S_{nm} &= \binom{n}{m} \sum_{j=0}^{n-m} (-1)^{j+m} \binom{n-m}{j} \\ &= (-1)^m \binom{n}{m} (1-1)^{n-m} = 0. \end{aligned}$$

Jei $m = n$, įrodinėjama lygybė triviali.

Teorema įrodyta. ▲

3.18 teorema. (Apgręžimo sąryšis). Tegu $\{a_k\}, \{b_k\}$, $k \geq 0$, yra dvi skaičių sekos. Jei kiekvienam $n \geq 0$

$$b_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} a_k,$$

tai kiekvienam $n \geq 0$

$$a_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} b_k.$$

Atvirkščiai, iš antrosios lygybės išplaukia ir pirmoji.

Įrodymas. Jei teisinga pirmoji lygybė, tai įstatę b_n išraišką patikriname antrąją. Skaičiuojame keisdami sumavimo tvarką. To mokėmės 1.4 skyrelyje. Gauname

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} b_k &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \left(\sum_{m=0}^k (-1)^m \binom{k}{m} a_m \right) \\ &= \sum_{m=0}^n (-1)^m a_m \sum_{k=m}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{m} \\ &= a_n \delta_{nn} = a_n. \end{aligned}$$

Paskutiniame žingsnyje pritaikėme 3.17 teoremą. ▲

Apgręžimo sąryšį pritaikykime harmoninių skaičių sekai:

$$h_n := 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}, \quad n \geq 1.$$

3.19 teorema. Kiekvienam $n \geq 1$ galioja lygybės

$$h_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{1}{k}$$

ir

$$\frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} h_k.$$

Įrodymas. Nagrinėkime pirmąją iš šių lygybių. Dešiniojoje lygybės pusėje esančiam binominiam koeficientui pritaikome Paskalio lygybę. Gauname

$$\begin{aligned} a_n &:= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \left(\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right) \frac{1}{k} \\ &= a_{n-1} + (-1)^{n+1} \binom{n-1}{n} \binom{1}{n} + \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n-1}{k-1} \frac{1}{k}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Antrasis dėmuo lygus nuliui. Skaičiuojame trečiąjį:

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{(n-1)!}{k!(n-k)!} = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} - \frac{1}{n} [(1-1)^n - 1] = \frac{1}{n}.$$

Įstatę į (3.3) lygybę, gauname rekurentųjį sąryšį

$$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{n}.$$

Kadangi $a_1 = 1$, pagal matematinės indukcijos principą iš jo išplaukia

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = h_n.$$

Vadinasi, pirmoji iš teoremos lygybių yra teisinga.

Pažymėkime $b_n = -1/n$, kai $n \geq 1$, ir $b_0 = 0$. Panašiai tegul $a_0 = 0$. Pastebėkime, kad galime pritaikyti apgręžimo formulę, kai $a_n = h_n$, $n \geq 1$. Iš jos išplaukia antrasis mūsų teoremos sąryšis.

Teorema įrodyta. 

Ateityje mes dar kartą sugrįšime prie binominio koeficiento savybių. Joms išvesti naudosimės polinomų algebra ir Niutono binomo formule.

Užduotys

3.1. Kiek skirtingų skaičių galima sudaryti iš skaitmenų 2, 2, 2, 1, 1, 1, 3, 3, 5, 5? Keliuose iš jų vienetai yra greta?

3.2. Kiek komitetų iš 7 asmenų galima sudaryti 20 studentų grupėje, kurioje yra 12 merginų ir 8 vaikinai? Atlikite šią užduotį skirtingais būdais; pavyzdžiui, klasifikuodami komitetus pagal merginų skaičių juose.

3.3. Nesinaudodami matematine indukcija įrodykite tapatybę

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2.$$

Atraskite šio uždavinio sąryšį su 3.3 užduotimi.

3.4. Keliais būdais n žmonių kolektyve galima išrinkti komitetą ir jo pirmininką? Atlikite šią užduotį rinkdami pirmininką ir likusius komiteto narius. Raskite komitetų skaičių juos klasifikuodami pagal dydį. Palyginkite rezultatus.

3.5. Išveskite lygties $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$ natūraliųjų sprendinių, tenkinančių sąlygą $x_1 \geq 2, x_2 \geq 2, \dots, x_n \geq 2$, skaičiaus formulę.

3.6. Keliais būdais 20 skirtingų knygų galima taip blogai išdėstyti lentynoje, kad J. Marcinkevičiaus tritomio bet kurios dvi knygos knygos neatsidurtų greta?

3.7. Futbolo komandai iš 11 žaidėjų apgyvendinti buvo pasiūlyti 7 skirtingi triviečiai kambariai. Treneris nusprendė dviejuose kambariuose apgyvendinti po 3, viename kambaryje - 2, ir trijuose kambariuose - po 1. Kiek yra skirtingų komandos apgyvendinimo būdų?