ELEMENTARIOJI TEORIJA

Pirmosios kombinatorikos žinios siekia senąsias Rytų šalis, kuriose mokėta suskaičiuoti kėlinius bei derinius ir sudarinėti magiškuosius kvadratus, ypač populiarius viduramžiais. Prancūzų matematikai B. Paskalis (*Blaise Pascal*, 1623–1662) ir P. Ferma (*Pierre de Fermat*, 1601–1665), nagrinėdami azartinius lošimus ir kartu klodami taką tikimybių teorijai, mokėjo suskaičiuoti kai kuriuos junginius ir skaidinius. Vokietis G. Leibnicas (*Gottfried Wilhelm von Leibniz*, 1646–1716) laiške į Šveicariją J. Bernuliui (*Jacob Bernoulli*, 1654–1705) pasiūlė ištirti natūraliojo skaičiaus išraiškų natūraliųjų dėmenų suma skaičių. G. Leibnicas 1666 m. publikavo *Dissertatio de arte combinatoria*. Šią datą pelnytai galėtume vadinti kombinatorikos gimimo metais. Iš kombinatorikos išsirutuliavusios grafų teorijos pradžia siejama su 1736 m., kai šveicarų matematikas L. Oileris (*Leonhard Euler*, 1707–1783) išnagrinėjo ir apibendrino senojo Karaliaučiaus septynių tiltų problemą ir nustatė maršrutų, einančių per visas grafo briaunas, egzistavimo sąlygas. Devynioliktojo amžiaus antroje pusėje iškilo žemėlapių spalvinimo problema. Dramatiškai rutuliota beveik visą šimtmetį, ji buvo išspręsta 1976 m. ir tik panaudojus kompiuterį. Dvidešimto amžiaus pirmojoje pusėje gauti kombinatorikos ir grafų teorijos rezultatai suformavo pagrindines tolesnių tyrimų kryptis. Jie tapo svarbūs chemijoje, fizikoje, matematikos kryptyse. Tada pasirodė pirmosios šios mokslo šakos knygos.

Bet apie viską iš pradžių...

1. Pagrindiniai principai

1.1. Aibė, atvaizdis, sąryšis

Viena iš svarbiausių matematikos sąvokų yra aibė. Ją įsivaizduojame kaip tam tikrų elementų, paimtų pagal kokį nors požymį, visumą. Šnekamojoje kalboje panašia prasme vartojamos sąvokos rinkinys, šeima, klasė ir kita. Išskirtinis aibės bruožas yra tas, kad jos elementai yra skirtingi. Kai kokiame nors rinkinyje yra pasikartojančių elementų, jį galima vadinti multiaibe. Aibes žymėsime didžiosiomis raidėmis, jos elementus – mažosiomis. Žymuo $a \in A$ skaitomas „a priklauso A“. Labai patogu turėti ir tuščiąją aibę $\emptyset$, kurioje nėra jokio elemento. Aibė B yra A poaibis, jei kiekvienas $b \in B$ priklauso ir aibei A. Tokį faktą žymėsime $B \subset A$. Visada $\emptyset \subset A$.

Pačias aibes galima apibrėžti išrašant jų elementus, o kai tai nepavyksta, galima naudoti figūrinius skliaustus ir nurodyti juose taisyklę, pagal kurią elementai priskiriami šiai aibei. Visi žinome natūraliųjų, sveikųjų ir realiųjų skaičių aibes, tradiciškai žymimas atitinkamomis raidėmis $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ir $\mathbb{R}$, arba pastarųjų poaibius $\mathbb{Z}_+$ ir $\mathbb{R}_+$, kuriuose yra tik neneigiami skaičiai. Vadinasi,

$$\mathbb{Z}_+ = \{x \in \mathbb{Z}\colon\ x \geqslant 0\}, \qquad \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}\colon\ x \geqslant 0\},$$

o aibė

$$\mathbb{N}_x\colon = \{m \in \mathbb{N}\colon\ m \leqslant x\}$$

yra sudaryta iš natūraliųjų skaičių, neviršijančių $x \in \mathbb{R}$. Jei $x < 1$, turime $\mathbb{N}_x = \emptyset$. Natūralusis skaičius, ne mažesnis už 2, vadinamas pirminiu, jei jis dalijasi tik iš 1 ir savęs. Pirminių skaičių aibę galėtume užrašyti taip:

$$\{n \in \mathbb{N}\colon\ n\ -\ \text{pirminis skaičius}\}.$$

Skaitytojui, nepamiršusiam Pitagoro teoremos, pateiksime kitą pavyzdį. Plokštumos taškų, nutolusių per vienetą nuo koordinačių pradžios, aibę, vadinamą vienetiniu apskritimu, užrašytume

$$\{(x,y)\colon\ x^2+y^2=1,\ x,y \in \mathbb{R}\}; \tag{1.1}$$

čia pora (x, y) žymi taško koordinates.

Įveskime veiksmus su aibėmis ir jų žymenis. Aibių A ir B sąjunga vadinama aibė

$$A \cup B := \{x\colon\ x \in A \text{ arba } x \in B\}.$$

Čia ir vėliau dvitaškis prie lygybės nurodo, kad apibrėžiami nauji objektai, šiuo atveju – nauja aibė. Aibių A ir B sankirta vadinama aibė

$$A \cap B := \{x\colon\ x \in A \text{ ir } x \in B\}.$$

Jei $A \cap B = \emptyset$, tai A ir B neturi bendrų elementų. Trumpai sakysime, kad jos nesikerta.

Jei $C = A \cup B$ ir $A \cap B = \emptyset$, tai sąjungą vadinsime tiesiogine. Išraišką tiesiogine sąjunga

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k, \quad A_i \neq \emptyset,\ 1 \leqslant i < j \leqslant k,$$

vadiname aibės A skaidiniu. Pridedant žodį tiesioginė, galima ir nebepriminti, kad $A_i \cap A_j = \emptyset$, $1 \leqslant i < j \leqslant k$.

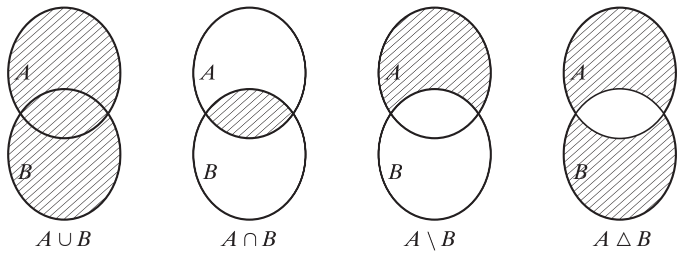
Aibė

$$A \setminus B := \{x\colon\ x \in A,\ x \notin B\}$$

vadinama A ir B skirtumu, o

$$A \triangleleft B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

– simetriniu skirtumu. Visos naujai įvestos aibės 1.1 paveiksle yra užbrūkšniuotos.



1.1 pav.

Matematikoje, ypač kombinatorikoje, dažnai turint vienus objektus apibrėžiami sudėtingesni. Iš dviejų aibių A ir B elementų galima sudarinėti sutvarkytąsias poras (a, b), čia $a \in A$ ir $b \in B$. Visų tokių porų aibė vadinama Dekarto[1] sandauga, žymima $A \times B$. Taip iš realiųjų skaičių tiesės (ją žymėsime $\mathbb{R}$) gaunamas Dekarto kvadratas $\mathbb{R} \times \mathbb{R} := \mathbb{R}^2$ – plokštuma. Apibrėždami Dekarto sandaugą galėjome įsivaizduoti, kad poros (a, b) elementai nepriklausomai vienas nuo kito perbėga (kinta) savąsias aibes.

Realiai gyvenime dviejų objektų sąryšis nieko nestebina. Sakydami „atitiko kirvis kotą“, turime omenyje kirvių ir kotų aibes, bet tik du elementus susiejame. Posakyje „studentai ir jų draugės“ iš jaunuolių ir merginų porų aibės išskiriame studentiškąsias. Formaliai dviejų aibių A ir B Dekarto sandaugos poaibis S vadinamas tų aibių binariuoju sąryšiu. Elementų susiejimą galima žymėti $(a, b) \in S$ ar net $a\,S\,b$.

Plačiau panagrinėkime Dekarto sandaugą $X^2 := X \times X$. Jos poaibis S susieja tos pačios aibės X elementus, todėl yra natūralu sakyti, kad sąryšis S yra apibrėžtas aibėje, nors formaliai $S \subset X^2$. Iš pirmo žvilgsnio tai truputį stebina: aibės viduje nustatytas sąryšis yra X^2 poaibis! Reikia apsiprasti ir tiek. Vienetinio apskritimo (1.1) apibrėžimas yra vaizdus sąryšio nusakymo realioje tiesėje pavyzdys.

Paminėkime keletą svarbesnių sąryšių savybių.

[1] René Descartes (1596–1650) – prancūzų matematikas ir filosofas.

Sakysime, kad:

1) S yra refleksyvusis, jei $(x,x) \in S$ visiems $x \in X$;
2) S yra simetrinis, jei visiems $x, y \in X$ iš $(x,y) \in S$ išplaukia $(y,x) \in S$;
3) S yra tranzityvusis, jei visiems $x, y, z \in X$ iš $(x,y) \in S$ ir $(y,z) \in S$ išplaukia $(x,z) \in S$.

Pavyzdžiui, realiųjų skaičių aibėje $\mathbb{R}$ lygybe apibrėžtas sąryšis turi visas išvardytas savybes, tačiau panaudoję ženklą $\leqslant$ gauname refleksyvų ir tranzityvų, bet nesimetrinį sąryšį.

Refleksyvus, simetrinis ir tranzityvus sąryšis vadinamas ekvivalentumo sąryšiu. Tada žymenį $(x,y) \in S$ patogu pakeisti ir tokiu: $x \sim y$. Skaitysime „x yra ekvivalentus y“. Aibę elementų, ekvivalenčių x, t. y.

$$\bar{x} := \{y \in X \colon y \sim x\},$$

vadiname ekvivalentumo klase, kurioje yra x. Ateityje ne kartą remsimės tokiu teiginiu.

1.1 teorema. Tegul S yra ekvivalentumo sąryšis aibėje X. Tada egzistuoja aibės X skaidinys

$$X = \cup_\alpha X_\alpha;$$

čia α perbėga tam tikrą indeksų aibę, o X_α yra skirtingos ekvivalentumo klasės.

Įrodymas. Pastebėkime, kad ekvivalentumo klasės arba sutampa, arba nesikerta. Iš tiesų, jei $x \in X_\alpha \cap X_\beta$, tai pagal tranzityvumo savybę bet kuris elementas iš vienos ar kitos aibės būtų ekvivalentus x. Todėl $X_\alpha \subset \bar{x}$, ir atvirkščiai, $\bar{x} \subset X_\alpha$. Taigi $\bar{x} = X_\alpha$. Panašiai $\bar{x} = X_\beta$. Vadinasi, $X_\alpha = X_\beta$.

Elementai, nepatekę į klasę $\bar{x}$, priklauso kitoms klasėms. Paėmę jų sąjungą, gauname norimą skaidinį. Teorema įrodyta. ◢

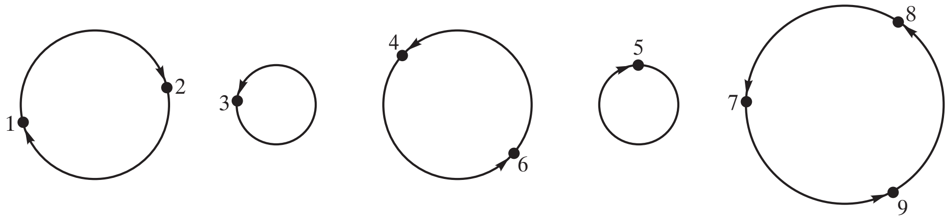
Kita svarbi matematikos sąvoka yra atvaizdis. Tarkime, kad X ir Y yra netuščios aibės. Taisyklė, pagal kurią kiekvienam X elementui priskiriamas vienintelis aibės Y elementas, vadinama aibės X atvaizdžiu aibėje Y. Jei atvaizdį pažymėtume raide f, tai toliau galėtume užrašyti vaizdžiau vienu iš būdų

$$f \colon X \to Y, \qquad y = f(x), \qquad x \mapsto y,$$

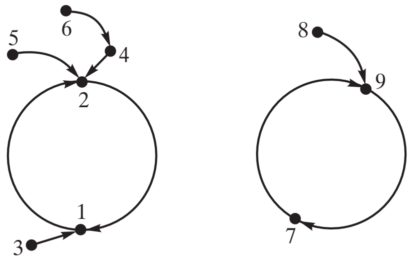
nurodydami, kad čia x kinta aibėje X, o $y \in Y$. Juose atsispindi ir atvaizdžio apibrėžimo sritis X, ir atvaizdžio reikšmių sritis Y, ir jo kryptis. Baigtinių aibių atveju patogu naudoti lenteles. Pavyzdžiui,

$$f := \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9 \\ 2\,1\,3\,6\,5\,4\,9\,7\,8 \end{pmatrix}, \qquad g := \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9 \\ 2\,1\,1\,2\,2\,4\,9\,9\,7 \end{pmatrix}.$$

Dar išraiškingesni yra tokie brėžiniai, kaip parodyta 1.2 ir 1.3 paveiksluose. Tai vadinamieji funkciniai digrafai.



1.2 pav.



1.3 pav.

Atvaizdis f yra pavaizduotas 1.2 paveiksle. Atvaizdžio g funkcinis digrafas pavaizduotas 1.3 paveiksle.

Aibė

$$f(X) = \{y \in Y\colon\ y = f(x),\ x \in X\} \subset Y$$

vadinama X vaizdu. Jį sudaro visi elementai y, kuriuos galime gauti iš lygybės $y = f(x)$, kai x perbėga visą aibę X. Jei $y = f(x)$, tai y yra x vaizdas, o x yra y pirmavaizdis. Vienas elementas y gali turėti ir daugiau pirmavaizdžių. Visą jų aibę pažymėkime $f^{-1}(y)$. Tada

$$f^{-1}(y) = \{x \in X\colon\ f(x) = y\} \subset X.$$

Skirtingų y aibės $f^{-1}(y)$ nesikerta. Pastebėkime dar vieną svarbią savybę.

1.2 teorema. Jei $f\colon\ X \to Y$ yra atvaizdis, tai egzistuoja skaidinys

$$X = \cup_y f^{-1}(y);$$

čia y perbėga tam tikrus aibės Y elementus.

Įrodymas. Sakykime, kad $x_1 \sim x_2$, jei $f(x_1) = f(x_2) = y$. Tai yra ekvivalentumo sąryšis. Toliau pakanka pritaikyti 1.1 teoremą.

Teorema įrodyta. ◢

Pastebėkime, kad 1.2 teoremoje pateikta lygybė išlieka teisinga ir tada, kai y perbėga visus aibės Y elementus. Šiuo atveju sąjungoje gali būti tuščių aibių.

Išskirkime keletą atvaizdžių tipų. Jeigu f skirtingus elementus atvaizduoja į skirtingus, tai jis vadinamas injekciniu atvaizdžiu, arba trumpai – injekcija. Tada kiekvienas

$y \in Y$ turi ne daugiau kaip vieną pirmavaizdį. Jeigu visi $y \in Y$ turi bent vieną pirmavaizdį, tai f vadinamas siurjekciniu aibės X atvaizdžiu į aibę Y, arba siurjekcija. Pasinaudoję mūsų žymenimis, tada turėtume $f(X) = Y$.

Dažniausiai pasitaikys atvaizdžiai, kurie kartu yra ir injekciniai, ir siurjekciniai. Juos vadinsime bijekciniais atvaizdžiais, arba bijekcijomis. Įsidėmėkime, kad bijekcinis atvaizdis kiekvienam x iš aibės X priskiria vieną ir tik vieną elementą iš Y, be to, kiekvienas $y \in Y$ turi vienintelį pirmavaizdį. Vadinasi, galime apibrėžti atvaizdį kita kryptimi:

$$y \mapsto x;$$

čia $y \in Y$, o $x \in X$. Jį žymėsime f^{-1} ir vadinsime atvirkštiniu atvaizdžiu. Taigi $f^{-1}\colon Y \to X$ ir $f^{-1}(y) = x$ tada ir tik tada, jei $f(x) = y$ su visais $x \in X$ ir $y \in Y$. Jeigu mums nesvarbi atvaizdžio kryptis, tai bijekcinį atvaizdį galime vaizduoti tokiu būdu:

$$x \leftrightarrow y, \quad x \in X,\ y \in Y.$$

Tada galima išvengti tarptautinių žodžių ir sakyti, kad tarp aibių X ir Y yra apibrėžta abipusiškai vienareikšmė atitiktis, arba aibėje X yra apibrėžtas abipusiškai vienareikšmis atvaizdis į aibę Y.

Dažnai vietoje atvaizdžio vartojamas žodis funkcija. Mes tai darysime, kai X ir Y bus skaičių aibės.

1.2. Matematinė indukcija

Žmonės abipusiškai vienareikšmius atvaizdžius naudoja nuo tada, kai išmoko skaičiuoti. Moksliškai kalbant, tada jie išmoko nustatyti aibės galią, t. y. jos elementų skaičių. Aibės A galią patogu žymėti $|A|$. Bet, šiukštu, nepainiokite su skaičiaus absoliučiuoju didumu, arba moduliu! Kitoje mokslinėje literatūroje rasite ir žymenis $\mathrm{card}\ A$ arba $\#A$. Aišku, kad nulinę galią turi tik tuščioji aibė ir $|\emptyset| = 0$. Dažnai n-osios galios aibę vadiname trumpai – n aibe.

Skaičiuodami aibės elementus bandome priskirti jiems numerius: 1 – vienam elementui, 2 – kitam ir taip paeiliui kitus natūraliuosius skaičius. Didžiausias numeris, jei jis egzistuoja (yra baigtinis), yra aibės galia. Pati aibė tada vadinama baigtine. Skaičiavimo procese apibrėžiame injekcinę funkciją $\mathrm{num}\colon A \to \mathbb{N}$, kurios reikšmių sritis yra aibė

$$\mathrm{num}(A) = \{1, 2, \ldots, |A|\}.$$

Aišku, kad $|A| = |\mathrm{num}(A)|$, o atvaizdis $\mathrm{num}\colon A \to \mathrm{num}(A)$ yra bijekcinis.

Jei A yra begalinė, bet vis tiek pavyksta apibrėžti abipusiškai vienareikšmę atitiktį $A \leftrightarrow \mathbb{N}$, tai ją vadiname skaičiąja aibe. Įžvelkime dar, kad skaičiuojant elementus aibėje įvedamas jų eiliškumas. Atvaizdis num surikiuoja aibės A elementus tam tikra tvarka.

Suskaičiuoti išmokome, bet apie patį instrumentą, natūraliuosius skaičus, nieko taip ir nepasakėme. Kombinatorikoje dažnai aibių elementai užkoduojami, t. y. jiems abipusiškai vienareikšmiškai priskiriami kokie nors kiti simboliai. Tada kodai atlieka

„skaičiuotojo“ vaidmenį. Kodėl ne, jei taip patogiau, bet prieš tai reikia gerai žinoti šių kodų savybes.

Skaičiavimo proceso, kai aibės galia n yra didelė, pabaigti nepavyks. Tada pasitelksime intuiciją ir bandysime atspėti: „su visais natūraliaisiais skaičiais n teisinga formulė...“. Čia slypi nemaža galimybė suklysti. Klaidos nepadarysime, jei sugebėsime tą formulę įrodyti. Dažnai gelbsti formalus patikrinimas, besiremiantis matematinės indukcijos principu. Jis kyla iš paties natūraliųjų skaičių aibės aksiominio apibrėžimo. L. Kronekeriui[2] priskiriamas toks pasakymas: „Dievas sukūrė natūraliuosius skaičius, visa kita yra žmogaus darbas“. Bet ir juos apibrėždamas žmogus įvedė savo tvarką. Natūraliųjų skaičių aksiomatika priklauso matematinei logikai, bet vis tiek ją verta čia prisiminti. Pateiksime bene populiariausią Dž. Peano[3] 1889 m. įvestą aksiomų sistemą. Beje, literatūroje aksiomos formuluojamos gana įvairiai, nors ekvivalenčiai. Pavyzdžiui, ir pats Dž. Peano antrame sistemos variante nulį priskyrė natūraliųjų skaičių aibei, nors anksčiau pradėdavo nuo vieneto.

Tegul, kaip įprasta matematinėje logikoje, simbolių $\Rightarrow$, $\forall$, $\wedge$ ir $\vee$ atitinkamos reikšmės yra išplaukia, kiekvienam, ir, arba.

1.1 apibrėžimas. Natūraliaisiais skaičiais vadiname aibės $\mathbb{N}$ elementus, jeigu $1 \in \mathbb{N}$ ir joje apibrėžta tokia funkcija $a \mapsto a'$, $a, a' \in \mathbb{N}$, kad:

1) $\{a \in \mathbb{N}\} \Rightarrow \{a' \neq 1\}$;
2) $\{a \in \mathbb{N}\} \wedge \{b \in \mathbb{N}\} \wedge \{a' = b'\} \Rightarrow \{a = b\}$;
3) $\{M \subset \mathbb{N}\} \wedge \{1 \in M\} \wedge \{\{a \in M\} \Rightarrow \{a' \in M\}\} \;\Rightarrow\; M = \mathbb{N}$. ◀

Galime įsivaizduoti, kad apibrėžime minima funkcija pasako, jog a' eina po a. Pirmoji sąlyga reikalauja, kad 1 neitų po jokio kito elemento, o antroji – nurodo, kad elementas gali eiti tik po vieno elemento. Mums svarbiausias yra paskutinis reikalavimas. Perfrazuokime jį dar kartą.

Indukcijos aksioma. Jei natūraliųjų skaičių aibės poaibyje M yra vienetas ir kartu su kiekvienu $n \in \mathbb{N}$ poaibyje M yra ir po jo einantis n', tai $M = \mathbb{N}$.

Indukcijos aksiomą pirmąkart 1888 m. suformulavo J. Dedekindas[4], nors panašiu tvirtinimu naudojosi ir B. Paskalis.

Aibės $\mathbb{N}$ elementus $1, 1', (1')', \ldots$ naujai pažymėkime $1, 2, 3, \ldots$. Sąryšį, nurodantį, kas po ko eina, galime žymėti $1 < 2 < 3 < \cdots$.

Žvilgtelėkime, kaip aibėje $\mathbb{N}$ galėtume įvesti sudėties operaciją. Turėdami $a, a' \in \mathbb{N}$, apibrėžkime

$$a + 1 := a'.$$

[2]Leopold Kronecker (1823–1891) – vokiečių matematikas.

[3]Giuseppe Peano (1858–1932) – italų matematikas.

[4]Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831–1916) – vokiečių matematikas.

Toliau tarę, kad $a+n$ su $n \in \mathbb{N}$ yra jau apibrėžtas skaičius, įveskime

$$a+n+1 := a+n' := (a+n)'.$$

Aibė M, sudaryta iš skaičių n, kuriuos jau mokame pridėti prie a, tenkina abu indukcijos aksiomos reikalavimus. Vadinasi, M sutampa su visa natūraliųjų skaičių aibe. Kitaip tariant, suma $a+n$ yra apibrėžta visiems $n \in \mathbb{N}$.

Tęsiant gaunama algebrinė struktūra $\mathbb{N}$, t. y. aibė su joje apibrėžtomis algebrinėmis sudėties ir daugybos operacijomis. Aksiomos, žinoma, užsimiršta ir natūraliuosius skaičius naudojame kaip Dievo duotus.

Indukcijos principas dažniausiai bus taikomas tokia forma:

Tegu $P(n)$ yra koks nors teiginys apie natūralųjį skaičių n. Tarkime, $P(1)$ yra teisingas ir kiekvienam n iš prielaidos, jog $P(n)$ teisingas, sugebame išvesti, kad $P(n+1)$ taip pat yra teisingas. Darome išvadą, kad teiginys $P(n)$ yra teisingas visiems $n \in \mathbb{N}$.

Kitas galimas variantas:

Tarkime, $P(n_0)$ yra teisinga su $n_0 \in \mathbb{N}$ ir kiekvienam $n \geqslant n_0$ iš prielaidos, kad $P(n)$ teisingas, sugebame išvesti, jog $P(n+1)$ taip pat yra teisingas. Darome išvadą, kad teiginys $P(n)$ yra teisingas visiems $n \geqslant n_0$.

Klaidos nebus, nes skaičius $n \geqslant n_0$ galime pernumeruoti pradėdami nuo vieneto ir pritaikyti ankstesnį principą.

Indukcijos aksiomoje teiginys $P(n)$ išvedamas iš $P(n-1)$. Tai nėra būtina, galima jį išvesti iš didesnio skaičiaus prielaidų $P(1), P(2), \ldots, P(n-1)$. Suformuluosime dar vieną indukcijos aksiomos variantą.

Indukcijos aksioma*. Tegul $1 \in M \subset \mathbb{N}$ ir bet kokiam $n \in \mathbb{N}$ iš prielaidos $\{\forall m < n\,, m \in M\}$ išplaukia $\{n \in M\}$. Tada $M = \mathbb{N}$.

Atrodytų, kad čia naudojama sąlyga yra platesnė, nes vietoje pirmojo varianto sąlygos $n-1 \in M$ dabar turime daugiau informacijos, net apie visus $m < n$. Iš tiesų antroji aksiomos formuluotė nėra bendresnė. Pakanka apibrėžti teiginį

$$P(n-1) = \{\forall m < n,\ m \in M\}.$$

Dabar turime tik prielaidą $P(n-1)$ ir tik iš jos išvedame $P(n)$.

Matematinė indukcija yra rekursyviųjų apibrėžimų pagrindas. Visi yra girdėję apie aritmetinę progresiją $\{a_n\}$, $n \geqslant 1$, apibrėžiamą pirmuoju nariu $a_1 \in \mathbb{R}$, skirtumu $d \in \mathbb{R}$ ir formule $a_{n+1} = a_n + d$, kai $n \geqslant 1$. Iš tiesų čia jau pasinaudota indukcija, nes apibrėžiant a_{n+1} tariama, kad prieš tai buvęs sekos narys a_n yra apibrėžtas.

Panašiai įvesdami sumas

$$s_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

naudojame daugtaškį. Jis sutrumpina indukcinį apibrėžimą, kuris susidėtų iš dviejų etapų:

$$s_1 := a_1, \qquad s_n := s_{n-1} + a_n.$$

Naudojantis indukcijos principu apibrėžiama n aibių Dekarto sandauga

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n := (A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{n-1}) \times A_n,$$

kai $n \in \mathbb{N}$ yra bet koks. Toliau panašius apibrėžimus įvesime be atskiro komentaro.

Kaip matematinę indukciją taikome spręsdami uždavinius? Iš pradžių išveskime aritmetinės progresijos n-ojo nario formulę $a_n = a_1 + (n-1)d$. Kai $n = 1$, tai akivaizdu. Tarę, kad $a_{n-1} = a_1 + (n-2)d$ yra teisinga, tikriname

$$a_n = a_{n-1} + d = (a_1 + (n-2)d) + d = a_1 + (n-1)d.$$

Remdamiesi indukcijos aksioma, darome išvadą: formulė yra teisinga su visais $n \in \mathbb{N}$.

Imkime kitą pavyzdį. Įrodinėjant teiginį, kad $n^2 - 5n \geqslant -4$ kiekvienam natūraliajam skaičiui $n \geqslant 4$, vargu ar tikslinga taikyti indukciją. Tačiau tikrinant, ar

$$n^3 - 6n^2 + 9n \geqslant 4$$

kiekvienam $n \geqslant 4$, taikyti indukcijos principą, manyčiau, yra tikslinga. Iš tiesų, kai $n = 4$, nelygybė virsta lygybe. Tarę, kad nelygybė jau įrodyta dėl n, skaičiuojame

$$(n+1)^3 - 6(n+1)^2 + 9(n+1) = n(n^2 - 6n + 9) + 3n(n-3) + 1 \geqslant 4,$$

nes kvadratinis trinaris yra teigiamas, jei $n \geqslant 4$. Tuo baigiame įrodymą.

Išnagrinėkime porą sudėtingesnių pavyzdžių.

1.1 pavyzdys. Įrodysime, kad n plokštumos tiesių, tarp kurių nėra dviejų lygiagrečių ir bet kurios trys iš jų nesikerta viename taške, dalija plokštumą į

$$p_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2} \tag{1.2}$$

sričių.

Sprendimas. Brėždami tieses, randame $p_0 = 1$, $p_1 = 2$, $p_2 = 4$, $p_3 = 7$ ir t. t. Greitai įsitikiname, kad ši seka nėra nei aritmetinė, nei geometrinė progresija. Jei pavyktų susieti du gretimus sekos narius, tai galėtume taikyti indukcijos principą. Pabandykime.

Tarkime, kad jau išvedėme $(n-1)$-ą tiesę ir nustatėme plokštumos sričių skaičių p_{n-1}. Vedame n-ąją tiesę. Keliaukime ja nuo taško, esančio dar iki pirmojo susikirtimo su viena iš išvestųjų tiesių. Pastebėkime, kad vieną sritį naujoji tiesė padalijo į dvi. Keliaudami toliau matome, kad už kiekvieno susikirtimo su tiesėmis esančios sritys taip pat dalijamos į dvi. Kadangi n-oji tiesė dalija n sričių, gauname norimą sąryšį

$$p_n = p_{n-1} + n.$$

Kadangi $p_0 = 1$, vadovaudamiesi indukcijos principu matome, kad seka $\{p(n)\}$, $n \geqslant 0$, yra apibrėžta. Dar kartą pritaikę indukcijos prielaidą, t. y. (1.2) formulę dėl $n-1$, ir ką tik įrodytą sąryšį, gauname

$$p_n = 1 + \frac{n(n-1)}{2} + n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Vadinasi, p_n formulė yra teisinga su visais $n \geqslant 0$.

1.2 pavyzdys. Triušių pora per antrą mėnesį atsivedė naują porelę jauniklių ir vėliau kas mėnesį dar po porelę. Kitos porelės elgėsi taip pat. Pažymėkime F_n – triušių porų skaičių n-ojo mėnesio pabaigoje. Įrodykime, kad

$$F_n = \frac{(\sqrt{5}+1)^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}}, \quad n \geqslant 0. \tag{1.3}$$

Sprendimas. Tegul $n \geqslant 2$. Per n-ąjį mėnesį prie $(n-1)$-ojo mėnesio pabaigoje buvusių triušių porų prisidėjo $(n-2)$-ojo mėnesio triušių jaunikliai, todėl

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geqslant 2.$$

Be to, $F_0 = F_1 = 1$. Tarę, kad (1.3) formulė yra teisinga dėl F_{n-2} ir F_{n-1}, apskaičiuojame F_n. Trumpumo dėlei įvedę vadinamąjį „auksinį skaičių“

$$\alpha := \frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

gauname $\alpha^{-1} = (\sqrt{5}-1)/2$ ir

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{\alpha^n - (-\alpha)^{-n}}{\sqrt{5}} + \frac{\alpha^{n-1} - (-\alpha)^{-(n-1)}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\alpha^n(1+\alpha^{-1}) - (-\alpha)^{-n}(1-\alpha)\Big] \\ &= \frac{\alpha^{n+1} - (-\alpha)^{-(n+1)}}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Vadinasi, (1.3) lygybė yra teisinga visiems $n \geqslant 0$.

Seka $\{F_n\}$, $n \geqslant 0$, yra vadinama Fibonačio[5] vardu.

Grįžkime prie teorinių samprotavimų. Pastebėkime, kad apibrėžiant $\mathbb{N}$ kartu įvedamas ir tvarkos sąryšis šioje aibėje. Sakome, kad $a < b$ (skaitome „a mažiau už b“), jei egzistuoja toks $d \in \mathbb{N}$, kad $a + d = b$.

Be Peano, galimos ir kitos aksiomų sistemos, apibrėžiančios $\mathbb{N}$. Kai kuriose iš jų randame tokį teiginį.

Archimedo aksioma. Bet kuriai natūraliųjų skaičių porai a, b galima rasti tokį natūralųjį skaičių n, kad $an > b$.

Šis teiginys išplaukia iš Peano aksiomų, todėl jį reiktų vadinti teorema, tačiau taip ir liko istoriškai susiklostęs pavadinimas. Panašiai prigijo ir kiti beveik akivaizdūs teiginiai. Mes jų neišvedinėsime.

Mažiausiojo elemento principas. Kiekvienas netuščias natūraliųjų skaičių aibės poaibis turi mažiausią elementą.

[5] Leonardo Pisano Fibonacci (1170–1250) – italų matematikas.

Didžiausiojo elemento principas. Kiekvienas netuščias baigtinis natūraliųjų skaičių aibės poaibis turi didžiausią elementą.

Analogiškus teiginius galima suformuluoti ir sveikųjų skaičių aibėje $\mathbb{Z}$. Jais remdamiesi, galime apibrėžti realiojo skaičiaus x sveikąją dalį

$$[x] := \max\{k \in \mathbb{Z}\colon\ k \leqslant x\}$$

ir „lubas“:

$$\lceil x \rceil := \min\{k \in \mathbb{Z}\colon\ k \geqslant x\}.$$

1.3. Dirichlė dėžučių principas

Paradoksas, bet tiriant sudėtingas situacijas, kai kada pakanka paprastų ir beveik akivaizdžių teiginių. Vieną iš tokių yra suformulavęs L. Dirichlė[6].

Dirichlė principas. Jei n rutulių yra sudėti į $m < n$ dėžučių, tai bent vienoje dėžutėje yra 2 ar daugiau rutulių.

Ne visada šio principo pritaikymas yra toks akivaizdus. Išnagrinėkime elementariosios skaičių teorijos teiginį. Teiginį „a dalija b“ trumpumo dėlei žymėkime $a|b$.

1.3 pavyzdys. Bet kokiame $m+1$ elementų poaibyje, išrinktame iš $\{1, 2, \ldots, 2m\}$, yra bent du vienas kitą dalijantys skaičiai.

Įrodymas. Tegul A yra išrinktasis poaibis ir $|A| = m + 1$. Kiekvieną $a \in A$ galime išreikšti $a = 2^k d$, čia $k \geqslant 0$ ir d yra nelyginis. Todėl $d \in \{1, 3, \ldots, 2m - 1\}$. Yra tik m galimybių šiai nelyginei skaičiaus a daliai. Vadinasi, pagal Dirichlė principą bent du aibės A skaičiai turės tą pačią nelyginę dalį. Tegu $b = 2^l d \in A$, $l \geqslant 0$, yra antrasis skaičius. Jei $k \leqslant l$, tai $a|b$, o jei $k \geqslant l$, tai $b|a$. Įrodyta.

Matome, kad „dėžutės“ turi alegorinę prasmę. Nelyginės dalies priskyrimas yra įsivaizduojamas „dėjimu į dėžutę“. Savarankiškai įsitikinkite, kad pavyzdyje minimas poaibis turi bent du tarpusavyje pirminius skaičius. Kokios „dėžutės“ bus tada?

Dar labiau netikėtas yra toks pavyzdys.

1.4 pavyzdys. Tegu $a_1, \ldots, a_m$ yra seka galbūt pasikartojančių natūraliųjų skaičių. Joje egzistuoja toks gretimų narių posekis $a_k, \ldots, a_l$, $1 \leqslant k < l \leqslant m$, kad suma $a_k + \cdots + a_l$ yra skaičiaus m kartotinis.

Įrodymas. Imkime aibes

$$N := \{0, a_1, a_1 + a_2, \ldots, a_1 + \cdots + a_m\}, \qquad R = \{0, 1, \ldots, m - 1\}$$

ir apibrėžkime funkciją $f\colon N \to \mathbb{R}$, skaičiui $a \in N$ priskirdami jo dalybos iš m liekaną. Kadangi $|N| = m + 1 > m = |R|$, tai pagal Dirichlė principą aibėje N egzistuoja dvi sumos $a_1 + \cdots +$

[6] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) – vokiečių matematikas.

a_{k-1} ir $a_1 + \cdots + a_l$ su ta pačia dalybos iš m liekana. Jei čia $1 \leqslant k < l \leqslant m$, tai šių sumų skirtumas $a_k + \cdots + a_l$ dalysis iš m.

Kaip matėme, yra labai patogu naudoti atvaizdžius. Performuluodami Dirichlė principą jiems, patį teiginį šiek tiek sustiprinsime.

1.3 teorema. Tegu M, N yra aibės, $|M| = m < n = |N|$, o $f\colon N \to M$ – atvaizdis. Tada egzistuoja toks $b \in M$, kad

$$|f^{-1}(b)| \geqslant \lceil n/m \rceil;$$

čia $\lceil x \rceil$ – anksčiau apibrėžtos skaičiaus $x \in \mathbb{R}$ „lubos“.

Įrodymas. Pastebėkime, kad iš ankstesnio dėžučių principo išplauktų tik nelygybė $|f^{-1}(b)| \geqslant 2$.

Jei $|f^{-1}(b)| < n/m$ kiekvienam $b \in N$, tai pasinaudoję 1.2 teorema gautume prieštarą:

$$n = \sum_b |f^{-1}(b)| < \frac{n}{m} \sum_b 1 = \frac{n}{m} m = n.$$

Taigi bent vienam b turi būti $|f^{-1}(b)| \geqslant \frac{n}{m}$. Kadangi $|f^{-1}(b)|$ yra natūralusis skaičius, tai teoremos teiginys išplaukia iš skaičiaus „lubų“ apibrėžimo. ◢

Kaip ši teorema taikoma, galima iliustruoti tokiu pavyzdžiu. Pradedančiajam programuotojui dažnai pasiūloma iš baigtinės skirtingų realiųjų skaičių sekos išrinkti monotoninį posekį. Kaip galėtume įvertinti tokio posekio ilgį?

1.4 teorema. Tegu $m, n \in \mathbb{N}$ ir $a_1, a_2, \ldots, a_{mn+1}$ yra bet kokia skirtingų realiųjų skaičių seka iš $mn + 1$ narių. Joje egzistuoja monotoniškai didėjantis $m + 1$ narių posekis arba monotoniškai mažėjantis $n + 1$ narių posekis. Galimi ir abu variantai.

Įrodymas. Dabar Dirichlė principo taikymo galimybė vargu ar įžiūrima. Reikia įrodyti posekio

$$a_{i_1} < a_{i_2} < \cdots < a_{i_{m+1}}, \quad 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_{m+1} \leqslant mn + 1,$$

arba

$$a_{j_1} > a_{j_2} > \cdots > a_{j_{n+1}}, \quad 1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_{n+1} \leqslant mn + 1,$$

egzistavimą.

Imkime bet kurį sekos narį a_i, $1 \leqslant i \leqslant mn + 1$. Tegu t_i – ilgiausio didėjančio posekio, prasidedančio a_i, ilgis. Jei kuris nors $t_i \geqslant m + 1$, teoremos teiginys yra teisingas.

Tegu dabar $t_i \leqslant m$ visiems $1 \leqslant i \leqslant mn + 1$. Atvaizdžiui $f\colon a_i \mapsto t_i$, vaizduojančiam aibę $A := \{a_1, a_2, \ldots, a_{mn+1}\}$ aibėje $M := \{1, 2, \ldots, m\}$, galime pritaikyti šio skyrelio 1.3 teoremą. Vadinasi, egzistuoja toks $s \in M$, kad $f(a_i) = s$ dėl

$$\left\lceil \frac{mn+1}{m} \right\rceil = n + 1$$

skaičių $a_i \in A$. Nekeisdami jų išsidėstymo tvarkos sekoje, sužymėkime

$$a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_{n+1}}, \quad 1 \leqslant j_1 < j_2 < \dots < j_{n+1} \leqslant mn + 1.$$

Imkime du gretimus šio posekio narius a_{j_k} ir $a_{j_{k+1}}$. Jei $a_{j_k} < a_{j_{k+1}}$, tai pradėję a_{j_k}-uoju ir prijungdami didėjantį posekį, prasidedantį $a_{j_{k+1}}$ ir turintį s narių, gautume didėjantį posekį, prasidedantį a_{j_k}, jau iš $s+1$ nario. Bet tai prieštara. Vadinasi, $a_{j_k} > a_{j_{k+1}}$ su bet kokais $1 \leqslant k \leqslant n+1$. Taigi išrinkome mažėjantį $n+1$ elementų posekį.

Teorema įrodyta. ◢

1.4. Dauginimo ir „dukart skaičiuok“ taisyklės

Kaip suskaičiuoti žinomos baigtinės aibės elementus? Pirma ateinanti į galvą mintis: „skaldyk ir valdyk“. Tai išreiškiama tokiu akivaizdžiu teiginiu, jau pritaikytu 1.3 teoremos įrodyme.

1.5 teorema. Jei $|A| < \infty$ ir

$$A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$$

yra jos skaidinys, tai

$$|A| = \sum_{i=1}^{k} |A_i|.$$

Įrodymas akivaizdus. ◢

Nesunku suvokti ir vadinamąją dauginimo taisyklę.

1.6 teorema. Jei $A_1, A_2, \dots, A_k$ yra baigtinės aibės, čia k – bet koks natūralusis skaičius, tai

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k| = |A_1||A_2| \cdots |A_k|.$$

Įrodymas. Atvejis $k = 1$ yra akivaizdus. Jei $k = 2$, pakanka visas sutvarkytąsias poras $(a, b) \in A_1 \times A_2$ surašyti į lentelę – matricą. Ji turės $|A_1|$ eilučių ir $|A_2|$ stulpelių ir todėl – $|A_1||A_2|$ elementų.

Jei lygybė įrodyta dėl mažesnio nei $k \geqslant 2$ skaičiaus aibių, pažymėję

$$B = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{k-1},$$

iš indukcijos prielaidos gauname

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k| = |B \times A_k| = |B||A_k| = |A_1||A_2| \cdots |A_{k-1}||A_k|.$$

Teorema įrodyta. ◢

Daug kalbėjome apie atvaizdžius. Suskaičiuokime juos.

1.7 teorema. Jei $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ ir $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$, tai atvaizdžių aibės

$$\mathcal{F}(n, m) := \{f \colon X \to Y\}$$

galia $|\mathcal{F}(n, m)| = m^n$.

Įrodymas. Kiekvieną funkciją $f \in \mathcal{F} := \mathcal{F}(n, m)$ galime apibrėžti vektoriumi

$$f \mapsto (f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)) \in Y \times Y \times \cdots \times Y = Y^n.$$

Ši atitiktis $\mathcal{F} \leftrightarrow Y^n$ yra abipusiškai vienareikšmė, tad remiantis 1.6 teorema

$$|\mathcal{F}| = |Y^n| = m^n.$$

Teorema įrodyta. ◢

Įrodyme panaudotas funkcijos kodavimas vektoriumi. Tai labai vaisinga idėja. Išnagrinėkime dar vieną atvejį.

1.8 teorema. Jei A yra n aibė, tai visų jos poaibių, įskaitant ir tuščiąjį, aibės galia lygi 2^n.

Įrodymas. Tegu

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \supset B = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}\}, \quad 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n.$$

Poaibiui B sudarykime kodą – n-ojo ilgio vektorių $(0, \ldots, 1, 0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, kuriame vienetai įrašyti i_1-oje, i_2-oje, $\ldots$, i_k-oje pozicijose, o kitos vietos yra užpildytos nuliais. Kadangi kodas priskirtas abipusiškai vienareikšmiškai, tai poaibių aibės galia lygi kodų aibės galiai. Ją iš tiesų jau radome 1.7 teoremoje, kai $m = 2$. Taigi gauname $|\mathcal{F}| = 2^n$.

Teorema įrodyta. ◢

Sunkiau ieškoti sąryšio $S \subset A \times B$ galios. Formaliai ją galima išreikšti dvilype suma, sudedant tiek vienetų, kiek elementų yra poaibyje S, t. y.

$$|S| = \sum_{(a,b) \in S} 1;$$

čia sumuojama pagal tokius $a \in A$ ir $b \in B$, kuriems $(a, b) \in S$. Tarkime, kad fiksavę pirmąjį poros narį $a \in A$, mokame rasti porų iš S skaičių r_a su tokiu a. Tada

$$r_a = \sum_{\substack{b \in B \\ (a,b) \in S}} 1.$$

Vadinasi,

$$|S| = \sum_{a \in A} r_a = \sum_{a \in A} \sum_{\substack{b \in B \\ (a,b) \in S}} 1.$$

Tokiu būdu dvilypę sumą išreiškėme kartotine. Panašiai, jei

$$q_b := \sum_{\substack{a\in A\\(a,b)\in S}} 1$$

yra skaičius porų, turinčių fiksuotą antrąjį narį b ir priklausančių S, tai

$$|S| = \sum_{b\in B} q_b = \sum_{b\in B} \sum_{\substack{a\in A\\(a,b)\in S}} 1.$$

Sulyginę abi $|S|$ išraiškas, gauname labai svarbų dukart skaičiuok principą:

$$\sum_{a\in A} \sum_{\substack{b\in B\\(a,b)\in S}} 1 = \sum_{b\in B} \sum_{\substack{a\in A\\(a,b)\in S}} 1.$$

Iš tiesų tai tik sumavimo tvarkos pakeitimas kartotinėje sumoje, bet jis labai svarbus kombinatorikoje. Tad perskaičiuodami pinigus, antrą kartą skaičiuokite juos pagal kitokią sistemą. Tada neapsiriksite!

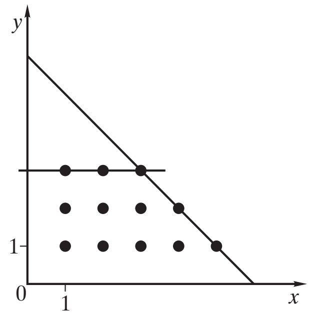
1.5 pavyzdys. Kiek yra taškų, turinčių natūraliąsias koordinates ir esančių uždarame daugiakampyje D, apribotame tiesių

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad y = 3, \qquad y = -x + 6\,?$$

Sprendimas. Reikia apskaičiuoti sumą

$$s := \sum_{\substack{(x,y)\in D\\x,y\in\mathbb{N}}} 1.$$

Nusibraižome paveikslą.



1.4 pav.

Iš jo aiškiai matyti, kad tokie taškai yra horizontaliose atkarpose. Pirmoji iš jų yra, kai $y = 1$. Joje yra 5 taškai. Panašiai 4 taškai yra antroje ir 3 – trečioje. Iš viso yra 12 taškų. Nenurodydami, kad $x, y \in \mathbb{N}$, formaliai tą patį galėjome gauti tokiu būdu:

$$s = \sum_{1\leqslant y\leqslant 3} \sum_{1\leqslant x\leqslant 6-y} 1 = \sum_{1\leqslant y\leqslant 3} (6-y) = 6\cdot 3 - \frac{1+3}{2}\,3 = 18 - 6 = 12.$$

Apskaičiuodami y-ų sumą, pasinaudojome aritmetinės progresijos sumos formule.

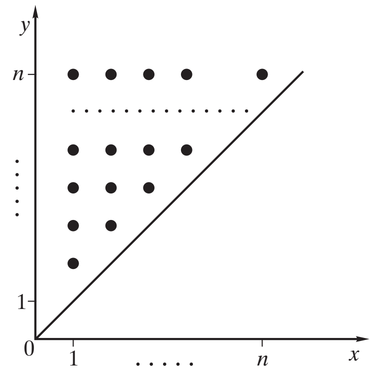
Sukeiskite sumavimo tvarką šiuose skaičiavimuose ir patikrinkite rezultatą. Įsitikinkite, kad taip skaičiuodami, pirmiau surandate skaičių taškų, esančių vertikaliose atkarpose.

Išmokime sukeisti sumavimo tvarką ir bendresnėse formulėse.

1.6 pavyzdys. Tegul a_{ij}, $i, j \in \mathbb{N}$, yra bet kokie skaičiai. Tada

$$\sum_{j>i\geqslant 1} a_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=i+1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{j-1} a_{ij}.$$

Sprendimas. Pakanka suvokti, kad dvilypėje sumoje indeksai (i, j) perbėga plokštumos taškus su natūraliosiomis koordinatėmis, esančius pirmajame ketvirtyje virš pusiaukampinės ir nepriklausančius jai (žr. 1.5 pav.).



1.5 pav.

1.7 pavyzdys. Tegu $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, $N^2 = N \times N$, o

$$S = \{(d, m)\colon\ d|m,\ d, m \in N\}$$

yra dalumo sąryšis. Perskaičiuokime dukart šios aibės elementus.

Sprendimas. Dabar

$$\sum_{\substack{d\leqslant n \\ d|m}} 1 =: d(m)$$

yra skaičiaus m skirtingų natūraliųjų daliklių kiekis. O

$$\sum_{\substack{m\leqslant n \\ d|m}} 1 = \left[\frac{n}{d}\right]$$

– skaičiaus d kartotinių, neviršijančių n, kiekis. Vadinasi,

$$\sum_{m\leqslant n} d(m) = \sum_{d\leqslant n} \left[\frac{n}{d}\right].$$

Toliau remdamiesi šia įdomia formule ištirtume reikšmių $d(m)$, $1 \leqslant m \leqslant n$, aritmetinio vidurkio elgseną, kai $n \to \infty$.

Šis ir jau minėti principai yra taikomi ne tik skaičių teorijoje. Ir mes praplėsime savo objektų lauką grafais.

Užduotys

1.1. Tegul $A, A_i \subset X$ ir $\overline{A} := X \setminus A$, $1 \leqslant i \leqslant n$ ir $n \in \mathbb{N}$. Įrodykite, kad:

$$\overline{\bigcup_{i \leqslant n} A_i} = \bigcap_{i \leqslant n} \overline{A}_i; \qquad \overline{\bigcap_{i \leqslant n} A_i} = \bigcup_{i \leqslant n} \overline{A}_i.$$

1.2. Šešiaženklis troleibuso bilietas vadinamas laiminguoju, jeigu pirmųjų trijų skaitmenų suma lygi antrojo trejeto skaitmenų sumai. Pavyzdžiui, bilietas, kurio numeris yra 111003, – laimingas, o 111002 – ne. Apibrėžkite abipusiškai vienareikšmę atitiktį tarp laimingųjų bilietų aibės ir aibės bilietų, kurių visų skaitmenų suma lygi 27.

1.3. Aibėje $\mathbb{N}$ aksiominiu būdu įveskite daugybą. Tada įrodykite sudėties ir daugybos asociatyvumo, komutatyvumo ir jų distributyvumo savybes.

1.4. Visiems $n \in \mathbb{N}$ įrodykite formules:
a) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
b) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$;
c) $(\alpha - \beta)(\alpha^{n-1}\beta^0 + \alpha^{n-2}\beta^1 + \cdots + \alpha^0\beta^{n-1}) = \alpha^n - \beta^n, \quad \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$.

1.5. Įrodykite šias Fibonačio skaičių savybes:
a) $F_0 + F_1 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$;
b) $F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^n$.

1.6. Teatro eilėje yra n sėdimų vietų. Kiek joje yra vietų poaibių, kuriuose bet kurios dvi vietos nėra šalia? Atraskite sąryšį su Fibonačio skaičiais.

1.7. Apie apskritą stalą yra n numeruotų sėdimų vietų. Kiek yra vietų poaibių, kuriuose bet kurios dvi vietos nėra šalia? Atraskite sąryšį su Fibonačio skaičiais.

1.8. Įvedę papildomą sąlygą $1 \leqslant i < j \leqslant n$, dvilypę sumą

$$\sum_{\substack{i,j \in \mathbb{N} \\ i+j \leqslant n}} a_{ij}$$

užrašykite kartotine ir sukeiskite sumavimo tvarką.