

REMIGIJUS LEIPUS

Finansinės laiko eilutės

<http://mif.vu.lt/~remis>

Vilnius, 2010

Turinys

1	Kainos ir finansinės gražos	4
2	Finansinių duomenų stilizuoti faktai	4
3	Trendo ir sezoniškumo vertinimas bei eliminavimas	10
3.1	Trendo komponentės vertinimas ir eliminavimas	10
3.2	Trendo ir sezoninės dalies eliminavimas	16
4	Tikimybiniai modeliai	23
4.1	Atsitiktiniai procesai	23
4.2	Stacionarieji procesai	24
4.3	Stacionariosios sekos kovariacinės funkcijos savybės	27
5	Autoregresijos–slenkamojo vidurkio sekos	29
5.1	Stacionarūs ARSV modeliai	29
5.2	Asimptotinis stacionarumas	33
5.3	Kovariacinė generuojančioji funkcija	34
6	Vertinimas laiko srityje	36
6.1	Vidurkio įvertis	36
6.2	Kovariacinės funkcijos įvertis	38
7	ARSV sekos parametrų vertinimas	42
7.1	Sąlyginis mažiausių kvadratų metodas	42
7.2	Didžiausio tikėtimumo metodas	45
7.3	Dalinės autokoreliacijos funkcija	47
8	Spektrinė analizė	54
8.1	Spektrinė kovariacinės funkcijos išraiška	54
8.2	ARSV sekos spektrinis tankis	57
8.3	Periodograma	60
8.4	Spektrinės pasiskirstymo funkcijos įvertis	63
8.5	Suglodintasis spektrinio tankio įvertis	63
8.6	Kai kurie konkretūs spektrinio tankio įverčiai	67

9 Nestacionarūs modeliai	70
9.1 Nestacionarumas dispersijoje	70
9.2 Nestacionarumas vidurkyje	71
10 Sąlyginis heteroskedastiškumas	73
10.1 ARCH modeliai	73
10.2 GARCH modeliai	81
Literatūra	85

1 Kainos ir finansinės gražos

Kaip matysime, paprastai finansų ekonometrijoje analizuojama ne kainos, jų gražos. Tarp priežasčių, lemiančių tokių analizės objekto pasirinkimą, reikėtų paminėti pagrindines:

- vidutiniam investuotojui graža yra *pilna*, nepriklausanti nuo skalės (matavimo vienetų) informacija apie investavimo galimybes;
- dažnai gražos turi „gražesnes“ nei kainos statistikines savybes, todėl su jomis lengviau „dirbti“. Konkrečiau kalbant, kainos skirtingais laiko momentais yra žymiau stipriau koreliuotos nei (santykiniai) pokyčiai.

Bendrai kalbant, yra keletas gražos apibrėžimų. Dažnai finansų matematikoje (ypač tolydaus laiko) gražos sąvoka nėra intuityviai lengvai suvokiama, ekonometrijoje ir diskretaus laiko finansų matematikoje naudojama paprastosios arba logaritmionės finansinės gražos sąvoka.

2 Finansinių duomenų stilizuoti faktai

Paprastai finansinių laiko eilučių analizės objektu yra finansiniai duomenys, pavyzdžiui, akcijų ar obligacijų kainos, indeksų reikšmės, valiutų keitimo kursai ir pan. Kita vertus, svarbus faktorius yra jų periodiškumas – stebimi tiek žemo dažnio (kas savaitiniai, kas mėnesiniai, . . .) duomenys, tiek ir aukšto dažnio (kasdieniniai, kasvalandiniai) ar net ultra aukšto dažnio duomenys (kelių sekundžių trukmės laiko intervalai ar net nuosekliai fiksuojami visi kainų pokyčių momentai).

Neretai empirinis finansų rinkos tyrimas siekia paaiškinti stebimus duomenis ir jų savybes remiantis ekonominės, politinės ar kitokios informacijos pasirodymo aplinkybėmis. Atrodytų, jog tokių finansinių instrumentų, kaip, pavyzdžiui, grūdų ateities pardavimo sandoriai, IBM akcijos ar valiutų kursai, kainų savybės turėtų skirtis, nes yra sąlygojamos skirtingų aplinkybių. Iš tikrųjų gi, paskutiniojo šimtmečio empiriniai kainų kitimo tyrimai parodė, kad statistiniu požiūriu tokie finansiniai instrumentai (vertybiniai popieriai) turi daug bendrų bruožų. Šios skirtingiems finansiniams instrumentams būdingos savybės dažnai vadinamos *stilizuotais faktais*. Juos toliau ir aptarsime.

Tegul S_t žymi vertybinio popieriaus kainą momentu t . Matyt paprasčiausi finansinių duomenų (kaip ir kitų ekonominių duomenų) stilizuoti faktai yra pastovaus augimo ir sezoniškumo efektai. Pirmasis iš jų atspindi

vertybinių popierių kainų augimą, o antrasis – tokių faktorių, kaip metų laikai, Kalėdos ir pan., įtaką kainoms. Sezoniskumo efektas aprašomas periodine funkcija ir paprastai eliminuojamas iš kainos standartiniais metodais (žr. 3 skyrelį). Taigi, kaina priklauso nuo augimo efekto, vadinamo trendu m_t , ir nuo įvairiausių atsitiktinių poveikių, vadinamų triukšmu Z_t , arba tiksliau atsitiktinius svyravimus atspindinčia ciklo dalimi. Remiantis ekonominiais argumentais vertybinio popieriaus kainos $S = \{S_t: 0 \leq t \leq T\}$ elgesys aprašomas funkcija

$$S_t = m_t e^{Z_t}.$$

Išskiriami du pagrindiniai trendo funkcijos m_t modeliavimo būdai. Pagal pirmąjį iš jų, trendas nusakomas neatsitiktine funkcija $m_t = Ae^{\mu t}$, čia μ ir A yra konstantos. Tokiu atveju kainos logaritmas turi pavidalą

$$\ln S_t = \alpha + \mu t + Z_t,$$

čia $\alpha := \ln A$. Antruoju būdu trendas m_t modeliuojamas remiantis buvusia kainos reikšme $S_{t-\Delta}$ ir parametru μ taip, kad

$$m_t = S_{t-\Delta} e^{\mu \Delta}.$$

Šiuo atveju trendą aprašo atsitiktinė funkcija ir todėl ekonometrikoje šis modelis vadinamas stochastinio trendo modeliu. Stochastinio trendo atveju kainos logaritmas turi pavidalą

$$\ln S_t = \ln S_{t-\Delta} + \mu \Delta + Z_t.$$

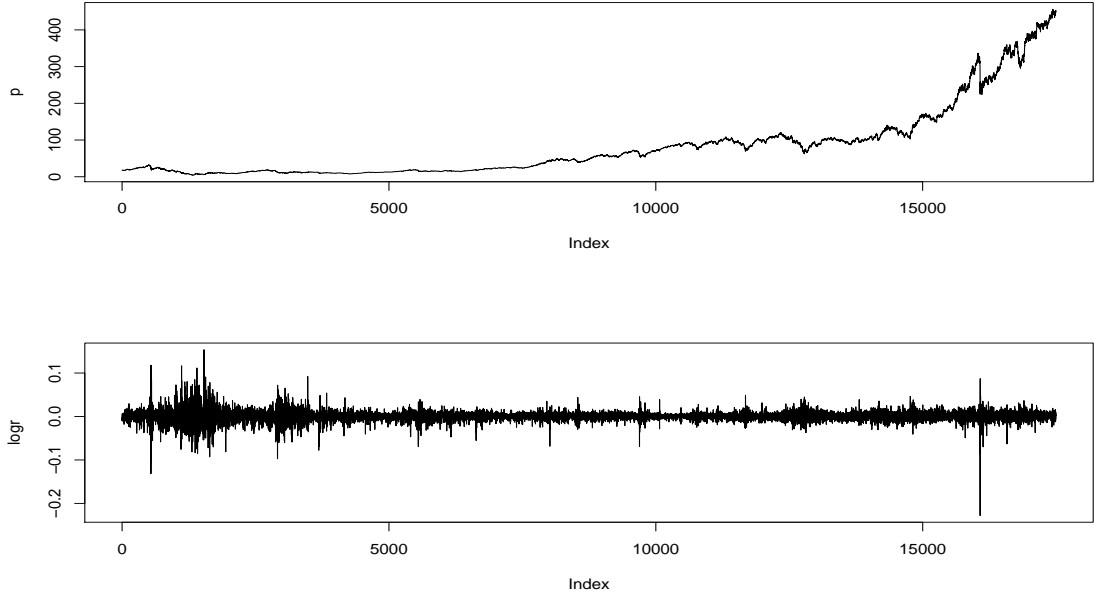
Kuris iš dviejų minėtų būdų geriau tinka realių duomenų modeliavimui, atsakoma, patikrinus atitinkamas statistines hipotezes.

1 paveiksle pavaizduoti S&P 500 indekso reikšmės ir jų logaritminės grąžos $r_t = \ln S_t - \ln S_{t-1}$.

Finansinių duomenų savybių analizei paprastai yra naudojamas stochastinio trendo modelis kadangi realūs duomenys neprieštarauja tam, kad $\ln S_t - \ln S_{t-\Delta}$ transformacija elgiasi kaip stacionaraus atsitiktinio proceso trajektorija. Be to, ši transformacija nepriklauso nuo kainos matavimo vienetų ir pasižymi kitomis „gražiomis“ savybėmis. Tolesnė kainos analizė reikalauja subtilesnių metodų triukšmo komponentei Z_t tirti.

Duotam laiko intervalui $\Delta \in (0, T]$, toliau vadinamam *dažniu*, *logaritmine grąža* arba tiesiog grąža, kai aišku pagal kontekstą, vadinsime kainos transformaciją

$$r(t, \Delta) := \ln S_{t\Delta} - \ln S_{(t-1)\Delta}, \quad t = 1, \dots, N, \quad N := [T/\Delta] \leq T/\Delta, \quad (2.1)$$



1 pav. S&P 500 indekso uždarymo kainos ir jų logaritminės gražos.

čia $[x]$ žymi realaus skaičiaus x sveikąją dalį. Daugelyje ekonometrinių modelių laikoma, kad $\Delta = 1$. Tokiu atveju naudosime žymėjimą $r_t := r(t, 1)$. Dažniausiai logaritminės gražos skaičiuojamos kasdieniams duomenims. Nors, kaip minėta, pastaraisiais metais atsirado techninės galimybės rinkti bei analizuoti ir vadinamuosius aukšto dažnio duomenis, kuomet Δ atitinka valandas ar minutes, bei ultra aukšto dažnio duomenis, kuomet fiksuojami visi kainų pokyčiai, t. y. duomenys neagreguojami. Svarbu pažymėti, kad minimos žemiau empirinės logaritminių gražų savybės priklauso nuo dažnio Δ .

Viena iš svarbiausių finansinių duomenų empirinės analizės sąlygų yra statistinių savybių invariantiškumas laiko atžvilgiu. Jei praeities duomenų savybės neturi nieko bendro su dabarties ir ateities kainų kitimu, tai tokių duomenų tyrimas būtų beprasmiškas. Todėl svarbia statistinės analizės prielaida yra funkcijos $r(\cdot, \Delta)$ *stacionarumo hipotezė*: bet kuriems t_1, \dots, t_k ir s , vektorių $\{r(t_1, \Delta), \dots, r(t_k, \Delta)\}$ ir $\{r(t_1 + s, \Delta), \dots, r(t_k + s, \Delta)\}$ tikimybinių skirstiniai yra lygūs. Jei ši prielaida teisinga, tai nuo t nepriklauso

nei funkcija $F_\Delta(u) := P(r(t, \Delta) > u)$, $u > 0$, vadinama skirstinio uodega, nei kovariacija vadinama funkcija $C_\Delta(s) := \text{Cov}(r(t, \Delta), r(t + s, \Delta))$ (jei egzistuoja antrasis gražos momentas). Stacionarumo prielaida nėra vienintelė būtina triukšmo komponentės tyrimo sąlyga. Detaliau nenagrinėdami, tik paminėsime, kad taip pat būtina tikrinti naudojamų statistinių įverčių konvergavimą į tiriamas triukšmo charakteristikas, nes priešingu atveju tos charakteristikos gali neegzistuoti. Pavyzdžiui, jei tokia charakteristika yra $Ef(r(t, \Delta))$, nepriklausanti nuo t pagal stacionarumo prielaidą, tai reiktų įsitikinti, jog, didinant N , suma $(1/N) \sum_{t=1}^N f(r(t, \Delta))$ kuria nors prasme artėja prie baigtinio skaičiaus.

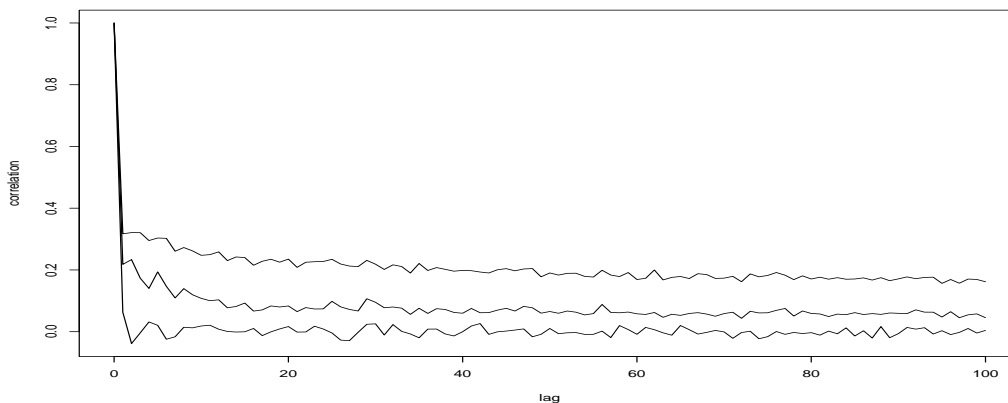
Toliau aprašomi keli svarbiausi stilizuoti faktai susiję su skirstinio uodegos ir kovariacijos elgesiu.

- *Sunkios uodegos*: Dideli kainų pokyčiai pasirodo žymiai dažniau nei tuo atveju, kai skirstinys yra normalusis. Toks efektas galėtų būti paaiškintas tuo, kad logaritminės gražos skirstinys turi sunkią uodegą, t. y. kuriam nors baigtiniam skaičiui $a > 0$, $F_\Delta(u) \approx u^{-a}$, kai $u \rightarrow \infty$. Palyginimui, Wiener'io proceso W pokyčiai $W(t) - W(t - \Delta)$ turi normalųjį skirstinį, kurio uodega $1 - \Phi(u/\sqrt{\Delta}) = ce^{-u^2/(2\Delta)}$ laikoma lengva. Vienas pirmųjų sunkių uodegų efektą finansiniuose duomenyse pastebėjo Mandelbrot (1963), dėl šios priežasties pasiūlęs vietoje $W(t)$ naudoti simetrinį α -stabilųjį procesą $X_\alpha(t)$. Mat X_α pokyčių skirstiniai turi sunkias uodegas, kurioms $a = \alpha < 2$. Tačiau vėlesni tyrimai parodė, kad finansinių duomenų logaritminės gražas geriau aproksimuoja tie skirstiniai turintys sunkias uodegas, kurių skaičius $a \in (2, 4)$. Taip pat pastebėta, kad uodegų charakteris keičiasi, pereinant nuo vieno logaritminės gražos dažnio prie kito. Išsamiausiai kol kas ištirtos kasdienių duomenų logaritminės gražos.
- *Asimetrija*. To paties absoliutinio dydžio gražas lydi nevienodo dydžio kintamumo reikšmės – kintamumas yra didesnis po neigiamos gražos (t.y. po kainos kritimo). Tai paprastai aiškinama tuo, kad investuotojai „jautriau“ reaguoja į neigiamą informaciją, nei į teigiamą informaciją. Dėl šios asimetrijos kovariacija tarp gražos ir būsimų kintamumo reikšmių yra *neigiama*. Šis efektas dar vadinamas sverto efektu (angl. leverage effect).
- *Kintamumo klasterizacija*. Tikėtina, kad finansiniuose duomenyse didelio kintamumo periodai ir mažo kintamumo periodai seka vienas

paskui kitą, t.y. stebima kintamųjų klasterizacija.

- *Taylor'o efektas.* Pačios gražos r_t tarpusavy yra beveik nekoreliuotos, o jų absoliutinių dydžių laipsniai $|r_t|^\delta$ ($\delta > 0$) turi nenulinę koreliaciją. ŠtIPRIAUSIA koreliacija stebima absoliutinėms gražoms, t. y. kai $\delta = 1$. Ši savybė pirmą kartą buvo paminėta Taylor'o (1986) ir dėl to kartais vadinama Taylor'o efektu.
- *Ilgalaikė atmintis.* Koreliacijos tarp $|r_t|^\delta$ ir $|r_s|^\delta$ įvertis, didėjant $|t - s|$, gęsta lėtai (panašiai kaip laipsninė funkcija). Tas pats teisinga ir koreliacijai tarp kintamumo įverčių. Dar sakoma, kad šie dydžiai pasižymi stipriu nuolatinumu (angl. persistency). Yra keletas hipotezių, bandančių pagrįsti ilgalaikės atminties efektą gražų kvadratuose ar absoliutiniuose dydžiuose. Daugelis jų remiasi įvairių nestacionarumų egzistavimu (trendų, šuolių buvimas ir pan., žr., pavyzdžiui, Lobato ir Savin (1998)). Tačiau vis tiek dar yra daug neaiškumų ir šio fenomeno paaiškinimas yra vienas aktualiausių šiuolaikinės finansų ekonometrijos uždavinių.

2 paveiksle pavaizduotos S&P 500 duomenų gražų, jų kvadratų ir absoliutinių dydžių koreliacinės funkcijos. Grafike aiškia matomas ilgalaikės atminties efektas.



2 pav. S&P 500 duomenų gražų, jų kvadratų ir absoliutinių dydžių koreliacinės funkcijos (iš apačios į viršų).

- *Suminis gausiškumas.* Žemesniems dažniams Δ , logaritminių gražų $r(t, \Delta)$ skirstinys (kuris, bendrai, įvairiems Δ yra skirtingas) vis labiau „panašėja“ į normalųjį skirstinį.

Faktas, jog kai kurie stilizuoti faktai skiriasi įvairiems dažniams Δ , reiškia, kad diskretaus laiko finansų rinkos modeliai nėra pakankami ir dėl to siūlomi įvairūs tolydaus laiko kainų modeliai, kurie čia nebus detaliau nagrinėjami.

Vienas pagrindinių finansinių laiko eilučių analizės uždavinių yra paieška tokių modelių, kurie kaip galima adekvačiau pasižymėtų savybėmis panašiomis į aptinkamus stilizuotus faktus. Priminsime, kad „laiko eilutės“ (angl. time series) sąvoka atspindi tai, kad duomenys yra interpretuojami kaip kryptinga atsitiktinių dydžių seka X_t , $t = 0, 1, 2, \dots$, kurioje t indeksas yra diskretaus laiko kintamasis.

3 Trendo ir sezoniškumo vertinimas bei eliminavimas

Paprastai pirmasis žingsnis finansinių duomenų analizėje yra duomenų grafinis pavaizdavimas. Duomenų vizualizacija leidžia „įtarti“ koks modelis turėtų būti naudojamas. Populiariausias, kaip minėjome, yra kainos (arba kokios nors jos transformacijos) išskaidymas į trendo, sezoninės komponentės ir triukšmo komponentes:

$$X_t = m_t + s_t + Z_t, \quad (3.1)$$

kur m_t yra lėtai besikeičianti funkcija (trendo komponentė), atspindinti vertybinių popierių kainų augimą; s_t yra periodinė funkcija su žinomu periodu d , atspindinti tokių sezoninių faktorių, kaip metų laikai, savaitės dienos ir pan., įtaką kainoms; Z_t yra atsitiktinė triukšmo komponentė, matematiškai aprašoma stacionaraus proceso pagalba (žr. 4.2 skyrelį).

3.1 Trendo komponentės vertinimas ir eliminavimas

Pradinis uždavinys – įvertinti ir eliminuoti trendo ir sezoniškumo komponentes, taip kad liekanos pasidarytų „panašios“ į stacionaraus proceso realizacijos elgesį. Aptarsime tris dažniausiai sutinkamus metodus.

Trendo eliminavimas mažiausių kvadratų metodu. Pirmuoju būdu (dar vadinamu determinuoto trendo metodu) “makroskopinė” komponentė aprašoma kaip tam tikra determinuota funkcija (pavyzdžiui, logaritminė, eksponentinė, polinominė ir t.t.), kurios parametrai įvertinami mažiausių kvadratų metodu.

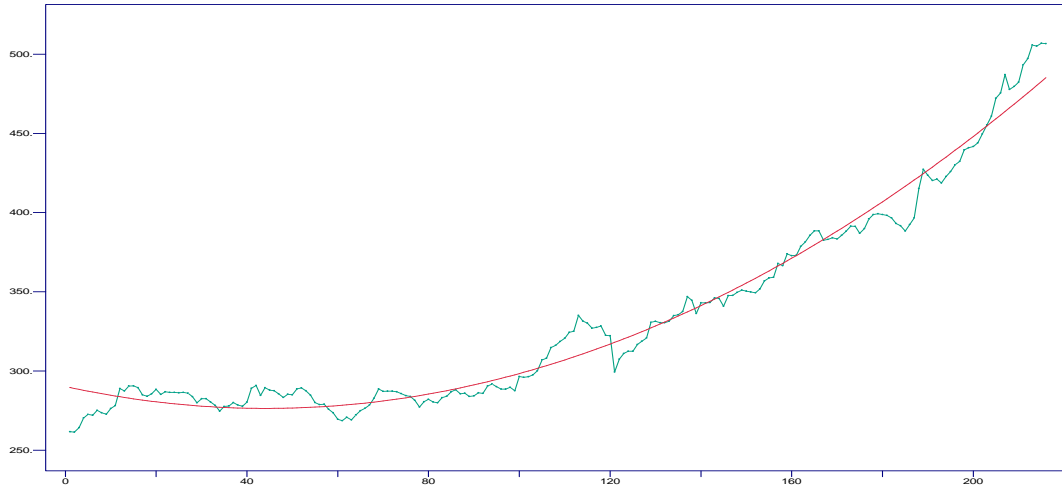
Tarkime, kad sezoninės dalies (3.1) išraiškoje nėra, t.y.

$$X_t = m_t + Z_t, \quad (3.2)$$

ir trendas m_t gali būti nusakytas kokia nors parametrine funkcija, pavyzdžiui, kvadratinė funkcija $m_t = a_0 + a_1t + a_2t^2$. Tuomet įverčiai $\hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2$ gaunami minimizuojant liekanų kvadratų sumą

$$\sum_{t=1}^n (X_t - m_t)^2 = \sum_{t=1}^n (X_t - (a_0 + a_1t + a_2t^2))^2. \quad (3.3)$$

3 paveiksle parodyta LITIN indekso kasdieninės reikšmės laikotarpyje nuo 2002.11.04 iki 2003.09.10 ir jų aproksimacija mažiausių kvadratų metodu.



3 pav. LITIN indekso kasdieninės reikšmės laikotarpyje nuo 2002.11.04 iki 2003.09.10 ir jų aproksimacija kvadratine funkcija $\hat{m}_t = 0,0070729t^2 - 0,62567t + 290,26$.

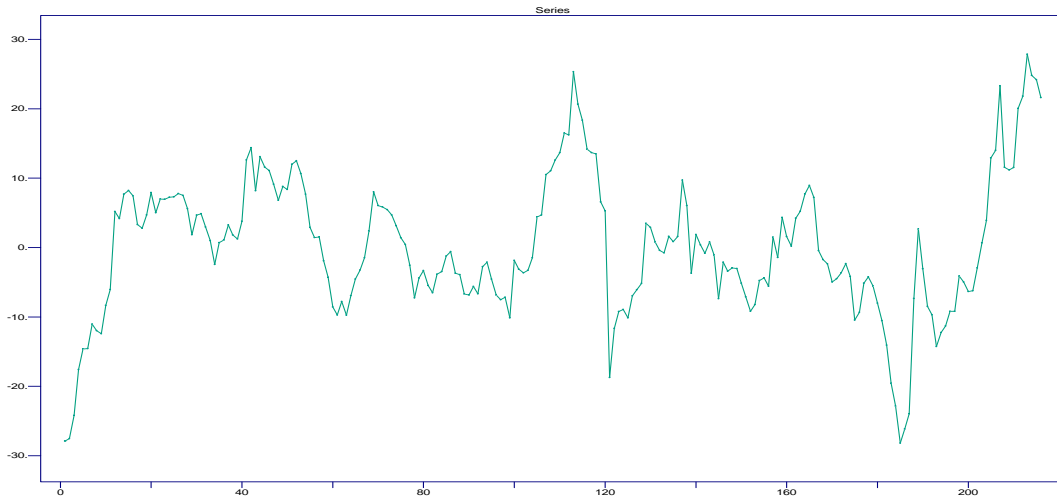
4 ir 5 paveiksle parodyta LITIN indekso (žr. 3 paveikslą) liekanos $\hat{Z}_t = X_t - \hat{m}_t$ ir jų koreliacinė bei dalinės autokoreliacijos funkcijos (jų apibrėžimai pateikiami 6.2 ir 7.3 skyreliuose). Vizualiai matome, kad gautos liekanos nėra nekoreliuotos. Remiantis 5 grafikais, kaip matysime vėliau, galima numatyti kokia turėtų būti Z_t komponentė Z_t .

Suglodinimas slenkamuoju vidurkiu. Tarkime, seka X_t nusakoma (3.2) lygybe. Tegul q yra neneigiamas sveikasis skaičius ir tegul Y_t yra empirinis $2q + 1$ dydžių X_t vidurkis

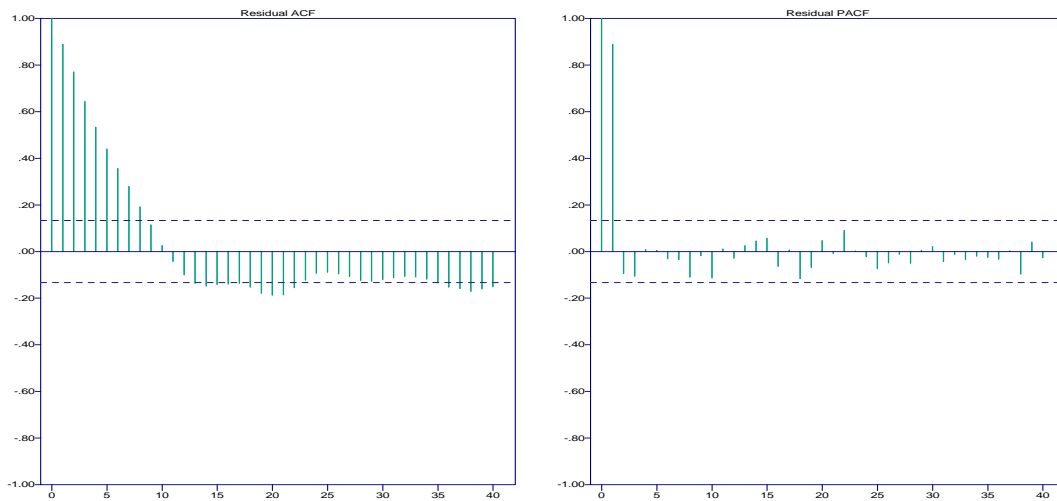
$$Y_t = \frac{1}{2q + 1} \sum_{j=-q}^q X_{t+j}.$$

Jeigu laikysime, kad m_t yra „panaši“ į tiesinę funkciją kiekviename intervale $[t - q, t + q]$ ir paklaidų vidurkis yra artimas nuliui, tai gausime

$$\begin{aligned} Y_t &= \frac{1}{2q + 1} \sum_{j=-q}^q m_{t+j} + \frac{1}{2q + 1} \sum_{j=-q}^q Z_{t+j} \\ &\approx m_t, \quad q + 1 \leq t \leq n - q. \end{aligned}$$



4 pav. LITIN indekso reikišmių aproksimacijos liekanos $\hat{Z}_t = X_t - \hat{m}_t$.



5 pav. LITIN indekso reikišmių aproksimacijos liekanų koreliacinė bei dalinės autokoreliacijos funkcijos.

Tokiu atveju laikysime, kad trendo m_t įvertis yra

$$\hat{m}_t = \frac{1}{2q+1} \sum_{j=-q}^q X_{t+j}, \quad q+1 \leq t \leq n-q. \quad (3.4)$$

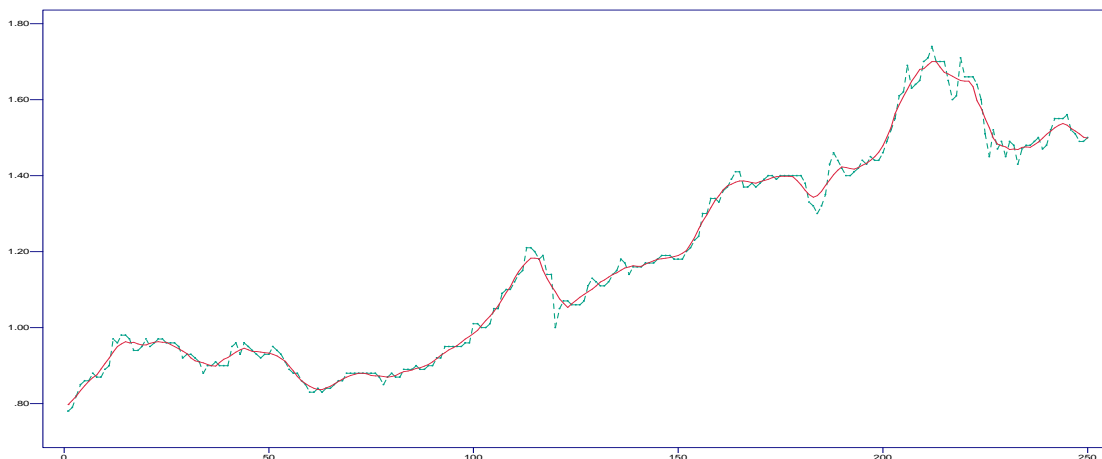
Likusioms X_t reikšmėms (kai $t \leq q$ ir $t > n - q$) (3.4) netinka ir šios reikšmės aproksimuojamos vienupusiu slenkamuoju vidurkiu

$$\hat{m}_t = \sum_{j=0}^{n-t} \alpha(1-\alpha)^j X_{t+j}, \quad t = 1, \dots, q,$$

$$\hat{m}_t = \sum_{j=0}^{t-1} \alpha(1-\alpha)^j X_{t-j}, \quad t = n - q + 1, \dots, n.$$

Empiriškai nustatyta, kad α reikėtų parinkti iš intervalo $[0,1;0,3]$.

6 pavaizduotos Lietuvos telekomo akcijų uždarymo kainos NVP biržoje laikotarpiu 2002.11.04 – 2003.10.28 ir slenkamojo vidurkio trendo įvertis su $q = 3$.



6 pav. Lietuvos telekomo akcijų kasdieninės uždarymo kainos NVP biržoje laikotarpiu 2002.11.04 – 2003.10.28 ir slenkamojo vidurkio trendo įvertis su $q = 3$.

Šį suglodinimo metodą galima laikyti „žemo dažnio“ filtru, kuris iš duomenų X_t „išima“ dažnai svyruojančią komponentę $\hat{Z}_t = X_t - \hat{m}_t$ ir palieka lėtai besikeičiančią dalį \hat{m}_t . Pastarąjį metodą galima interpretuoti kaip bendro tiesinio filtro $\hat{m}_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j X_{t+j}$ atskirą atvejį. Įdomus pavyzdys buvo pasiūlytas anglų aktuarijaus Spencer’io 1904 metais. Jis pasiūlė 15 taškų

filtrą, kuris neturi poveikio kūbiniam daugianariui. Tegul

$$\begin{aligned} a_i &= a_{-i}, \quad |i| \leq 7, \\ a_i &= 0, \quad |i| > 7, \\ (a_0, a_1, \dots, a_7) &= \frac{1}{320} (74; 67; 46; 21; 3; -5; -6; -3). \end{aligned}$$

Taikant jį daugianariui $m_t = c_0 + c_1t + c_2t^2 + c_3t^3$, turėsime

$$\sum_{i=-7}^7 a_i m_{t+i} = m_t.$$

Šis pavyzdys sako, kad idealiu atveju galima parinkti tokį tiesinį filtrą, kuris nepakeistų trendo dalies. Bendrai, Spencer'io pavyzdį galima lengvai suprasti šio gana trivialaus teiginio, kurį paliekame įrodyti skaitytojui, kontekste:

3.1 teiginys. $m_t = \sum_{i=-q}^q a_i m_{t+i}$ visiems k -os eilės daugianariams $m_t = c_0 + c_1t + \dots + c_k t^k$ tada ir tik tada, kai

$$\sum_{i=-q}^q a_i = 1$$

ir

$$\sum_{i=-q}^q i^l a_i = 0 \quad \text{su visais } l = 1, \dots, k.$$

Eksponentinis suglodinimas. Vienas iš suglodinimo metodo trūkumų yra tas, kad pagal (3.4) lygybę, šį filtrą galima taikyti tik tai duomenų daliai, kuri nėra arti imties kraštų. Minėtas suglodinimas imties galuose gali būti taikomas ir visai imčiai. Toks metodas vadinamas eksponentiniu suglodinimu. Nagrinėkime filtrą

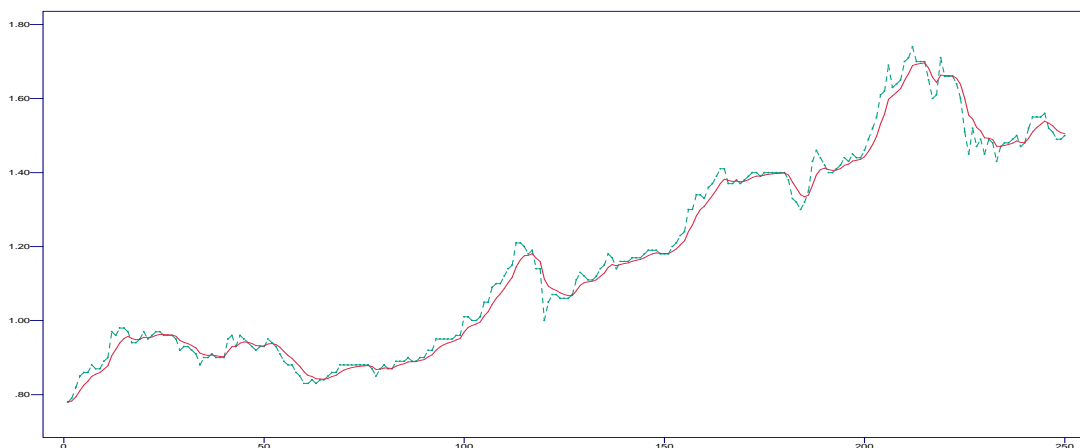
$$\hat{m} = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha(1-\alpha)^j X_{t-j},$$

kur $0 < \alpha < 1$. Aišku, norint jį taikyti imčiai X_1, \dots, X_n , reikia nagrinėti „nupjautas“ sumas. Praktiškai eksponentiškai suglodintas trendas gaunamas iš rekurentinių lygybių

$$\begin{aligned} \hat{m}_1 &= X_1, \\ \hat{m}_t &= \alpha X_t + (1-\alpha)\hat{m}_{t-1}, \quad t = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Iš šių lygybių matome, kad su $\alpha = 1$ eksponentinis suglodinimas „neveikia“, nes $\hat{m}_t = X_t$ su visais $t = 1, \dots, n$; tuo tarpu su $\alpha = 0$ gaunamas „maksimalus“ suglodinimas – $\hat{m}_t = X_1$ su visais $t = 1, \dots, n$. Dažnai parametą α siūloma parinkti optimaliai – minimizuojant liekanų sumą $\sum_{j=2}^n (X_j - \hat{m}_j)^2$.

7 pavaizduotos Lietuvos telekomo akcijų uždarymo kainos NVP biržoje laikotarpiu 2002.11.04 – 2003.10.28 ir eksponentinio suglodinimo metodu įvertintas trendas.



7 pav. Lietuvos telekomo akcijų kasdieninės uždarymo kainos NVP biržoje laikotarpiu 2002.11.04 – 2003.10.28 ir eksponentinio suglodinimo metodu įvertintas trendas su $\alpha = 0,3$.

Skirtumų panaudojimas. Tai yra vienas populiariausių metodų, naudojamas kaip alternatyva ankstesniems dviem metodams. Jo esmė – trendo eliminavimas nagrinėjant skirtumus („diferencijuojant“ duomenis) $X_t - X_{t-1}$. Šis metodas taikytinas tada, kai svarbu yra ne tiek įvertinti trendą, kiek, žinant jo iš anksto jo formą, jį eliminuoti ir toliau tirti „mikroskopinę“ komponentę.

Nusakysime šį metodą tiksliau. Apibrėžkime skirtuminių operatorių ∇ lygybe

$$\nabla_t = X_t - X_{t-1} = (1 - B)X_t,$$

kur B yra postūmio operatorius, t.y. $BX_t = X_{t-1}$. Operatorių B ir ∇ laipsniai apibrėžiami lygybėmis $B^j X_t = X_{t-j}$ ir $\nabla^j X_t = \nabla(\nabla^{j-1} X_t)$, $j \geq 1$ su

$\nabla^0 X_t \equiv X_t$. Pavyzdžiui,

$$\begin{aligned}\nabla^2 X_t &= \nabla(\nabla X_t) = (1 - B)(1 - B)X_t \\ &= (1 - 2B + B^2)X_t \\ &= X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}.\end{aligned}$$

Jei skirtuminių operatorių taikysime tiesinio trendo modeliui su $m_t = at + b$, tai gausime

$$\begin{aligned}\nabla X_t &= \nabla m_t + \nabla Z_t \\ &= a + \nabla Z_t.\end{aligned}$$

Panašiai gauname, kad bendro polinominio trendo atveju su $m_t = \sum_{j=0}^k a_j t^j$

$$\nabla^k X_t = k! a_k + \nabla^k Z_t.$$

Taigi, skirtumų panaudojimas gali būti interpretuojamas kaip aukšto dažnio filtras, kuris „nufiltruoja“ žemo dažnio signalą m_t (lėtai besikeičiančią dalį), palikdamas aukšto dažnio signalą. Tokiu būdu, atlikus „diferencijavimą“ pakankamą kartų skaičių, galima eliminuoti bet kokią polinominį trendą. Aišku, kad kiekvieną kartą panaudojus skirtumus, praradame vieną stebėjimą.

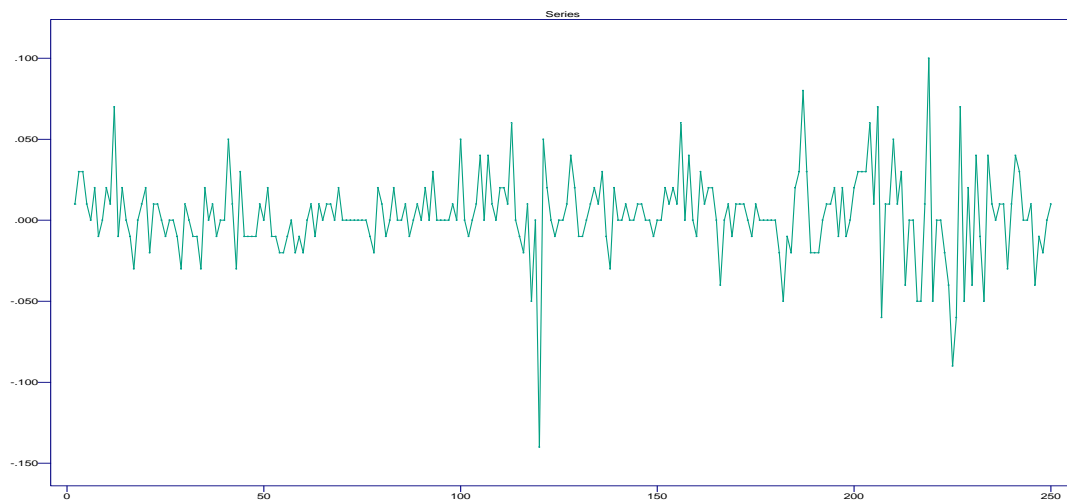
8 pavaizduotos Lietuvos telekomo akcijų uždarymo kainų transformacija, panaudojant skirtumus.

3.2 Trendo ir sezoninės dalies eliminavimas

Laikykime, kad duomenis norime aprašyti (3.1) modeliu, kur $EZ_t = 0$, o sezoninė dalis tenkina

$$s_{t+d} = s_t, \quad \sum_{t=1}^d s_t = 0.$$

Iliustracijai nagrinėkime tokį pavyzdį. Lentelėje žemiau pavaizduota Lietuvos BVP faktinėmis kainomis (milijonais litų) 1995–2002 metais. Atitinkamas grafikas pateiktas 9 paveiksle.



8 pav. Lietuvos telekomo akcijų kasdieninių uždarymo kainų NVP biržoje laikotarpiu 2002.11.04–2003.10.28 skirtumai.

	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
I	4851,5	6449,2	7957,4	9409,4	9471,5	10072,4	10524,4	11184,6
II	5796,6	7426,1	9389,9	10932,1	11099,8	11349,0	11943,5	12738,6
III	7172,4	9055,8	10639,9	11824,5	11213,3	11639,2	12449,8	13398,6
IV	6960,6	8598,2	10532,6	11388,5	10823,7	11637,3	12580,1	13356,8

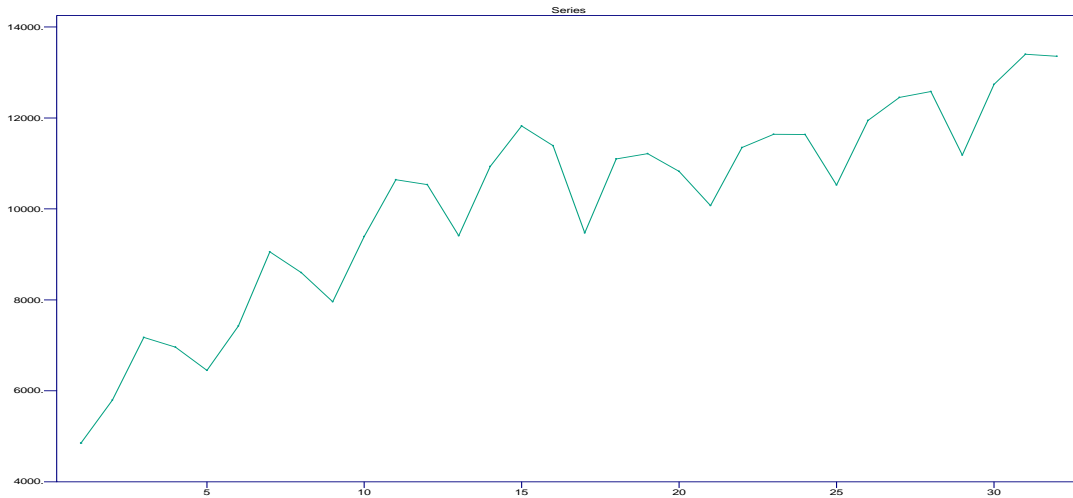
Tegul $X_{j,k}$, $j = 1, \dots, 8$, $k = 1, \dots, 4$, žymi j -ųjų metų k -ojo ketvirčio reikšmę. Turime $X_{j,k} = X_{k+4(j-1)}$.

1) Jeigu trendas yra nedidelis, tai galime laikyti, kad jis yra pastovus j -ųjų bėgyje ir gali būti įvertintas

$$\hat{m}_j = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 X_{j,k}.$$

Sezoninę komponentę tuomet įvertiname

$$\hat{s}_k = \frac{1}{8} \sum_{j=1}^8 (X_{j,k} - \hat{m}_j).$$



9 pav. BVP faktinėmis kainomis (milijonais litų) 1995–2002 metais.

Matome, kad tada $\sum_{k=1}^4 \hat{s}_k = 0$. Atėmus įvertintas trendo ir sezoniškumo komponentes, gauname liekanas

$$\hat{Z}_{j,k} = X_{j,k} - \hat{m}_j - \hat{s}_k.$$

2) Tuo atveju, kai trendas nėra pastovus kiekviename periode arba mes nenorime daryti šios prielaidos, taikytinas kitas, tikslesnis, metodas. Pirmiausia, žinant „ciklo“ ilgį d , galime eliminuoti sezoniškumo efektą, taikydami slenkamojo vidurkio metodą. Priklausomai nuo to, ar d yra lyginis ar nelyginis, įvertiname trendą:

$$\hat{m}_t = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{2} X_{t-q} + X_{t-q+1} + \cdots + X_{t+q-1} + \frac{1}{2} X_{t+q} \right), \text{ kai } d = 2q$$

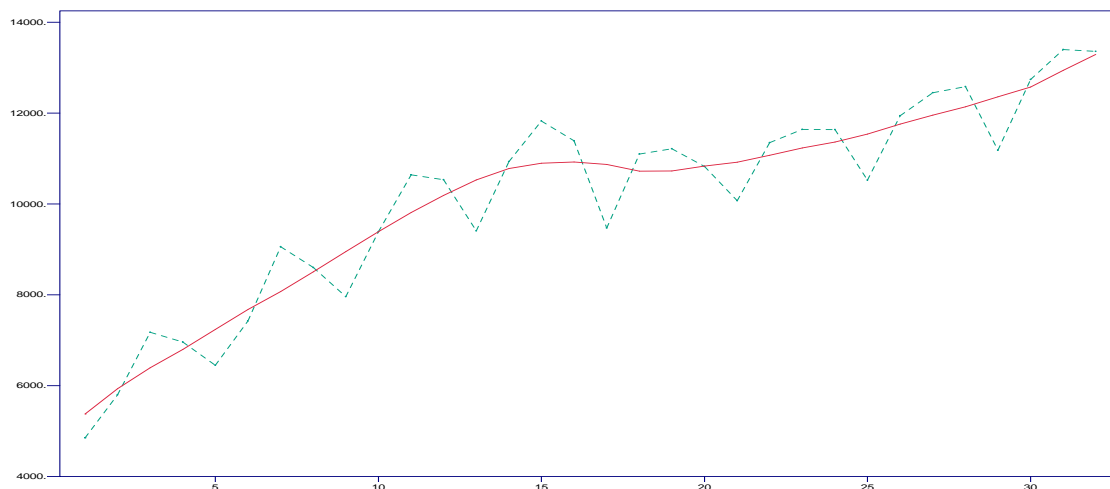
ir

$$\hat{m}_t = \frac{1}{d} (X_{t-q} + X_{t-q+1} + \cdots + X_{t+q}), \text{ kai } d = 2q + 1;$$

čia $q < t \leq n - q$.

10 paveiksle pavaizduotas trendo įvertis \hat{m}_t BVP duomenims su $d = 2q = 4$ (kraštiniais duomenimis taikomas eksponentinis suglodinimas):

$$\hat{m}_t = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} X_{t-2} + X_{t-1} + X_t + X_{t+1} + \frac{1}{2} X_{t+2} \right).$$



10 pav. BVP reikšmių trendo įvertis, taikant slenkamojo vidurkio įvertį su $q = 2$.

Toliau vertiname sezoninę dalį. Kiekvienam $k = 1, \dots, d$ skaičiuojame dydžių $\{X_{k+jd} - \hat{m}_{k+jd}, q < k + jd \leq n - q\}$ aritmetinį vidurkį. Mūsų pavyzdyje turėsime:

$$W_k = \frac{1}{7} \sum_{j=1}^7 (X_{k+4j} - \hat{m}_{k+4j}), \text{ kai } k = 1, 2,$$

$$W_k = \frac{1}{7} \sum_{j=0}^6 (X_{k+4j} - \hat{m}_{k+4j}), \text{ kai } k = 3, 4.$$

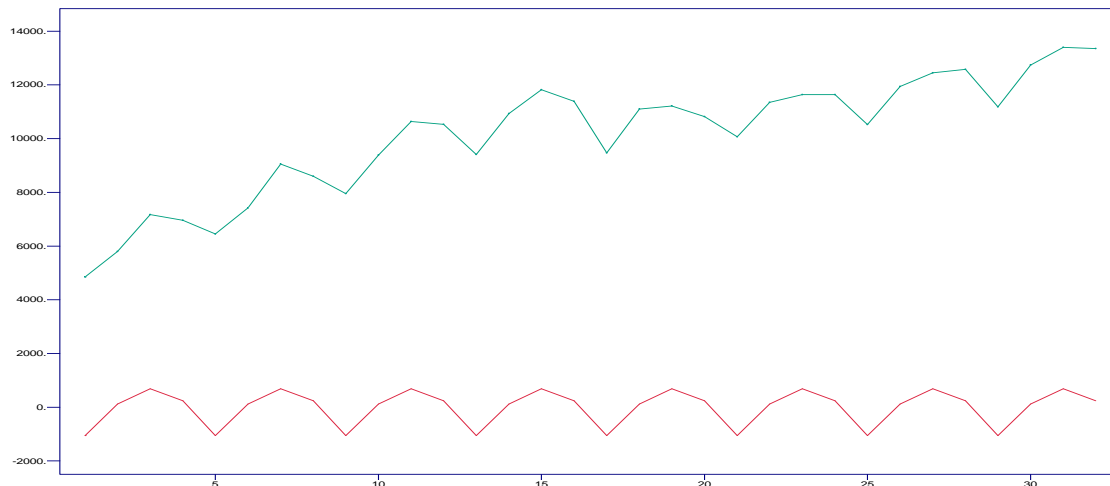
Taip gauti vidurkiai dar nėra sezoninės komponentės įverčiai, nes jų suma $\sum_{k=1}^d W_k$ nėra nulis. Sezoninę komponentę vertiname centruotomis W_k reikšmėmis:

$$\hat{s}_k = W_k - \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d W_i, \quad k = 1, \dots, d,$$

likusias reikšmes periodiškai pratęsiame, t.y. $\hat{s}_k = \hat{s}_{k-d}, k > d$. Pastebėsime, kad dabar

$$\sum_{k=1}^d \hat{s}_k = \sum_{k=1}^d \left(W_k - \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d W_i \right) = 0.$$

11 paveiksle pavaizduoti BVP duomenys ir trendo įvertis \hat{s}_t ($\hat{s}_1 = -1055,7$, $\hat{s}_2 = 120,3$, $\hat{s}_3 = 691,46$, $\hat{s}_4 = 243,98$).



11 pav. BVP reikšmės ir sezoninė dalis \hat{s}_t .

Toliau nagrinėjame liekanas, gautas atėmus sezoninę komponentę

$$d_t = X_t - \hat{s}_t, \quad t = 1, \dots, n.$$

Gautoji seka dar neatspindi trendo komponentės, kadangi joje lieka fluktuacijos. Toliau vertiname trendą „desezonizuotuose“ duomenys vienu iš anksčiau minėtų metodų. 12 paveiksle pavaizduoti BVP duomenys ir kreivė $\hat{d}_t + \hat{s}_t$, kur d_t įvertinti antros eilės daugianariu mažiausių kvadratų metodu (žr. (3.3)): $\hat{d}_t = -6,5852t^2 + 425,1t + 5460,5$. Liekanos

$$\hat{Z}_t = X_t - \hat{d}_t - \hat{s}_t = d_t - \hat{d}_t$$

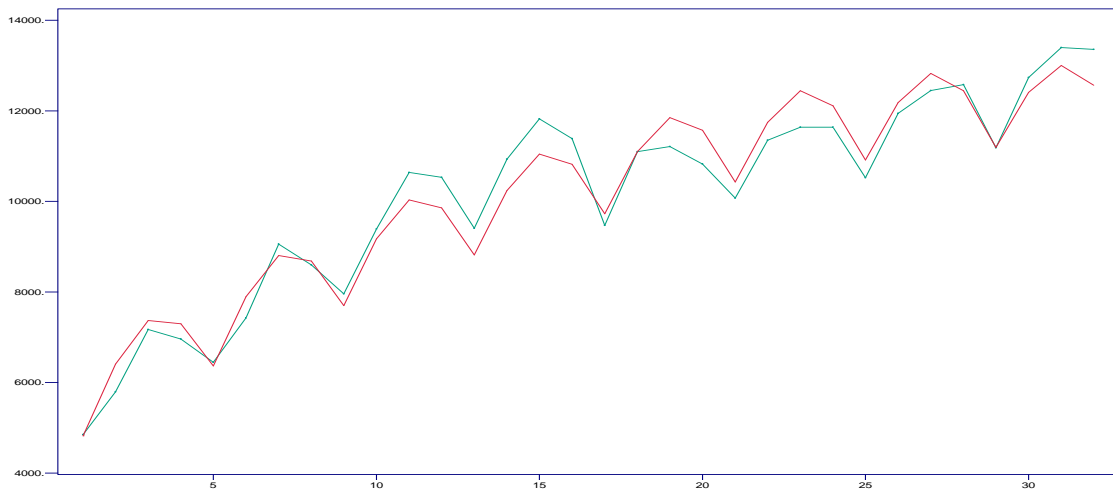
pavaizduotos 13 paveiksle.

Sezoninių skirtumų panaudojimas. Ankstesnis skirtumų metodas gali būti taikomas ir sezoninės komponentės eliminavimui. Tegul ∇_d yra d -skirtumų operatorius:

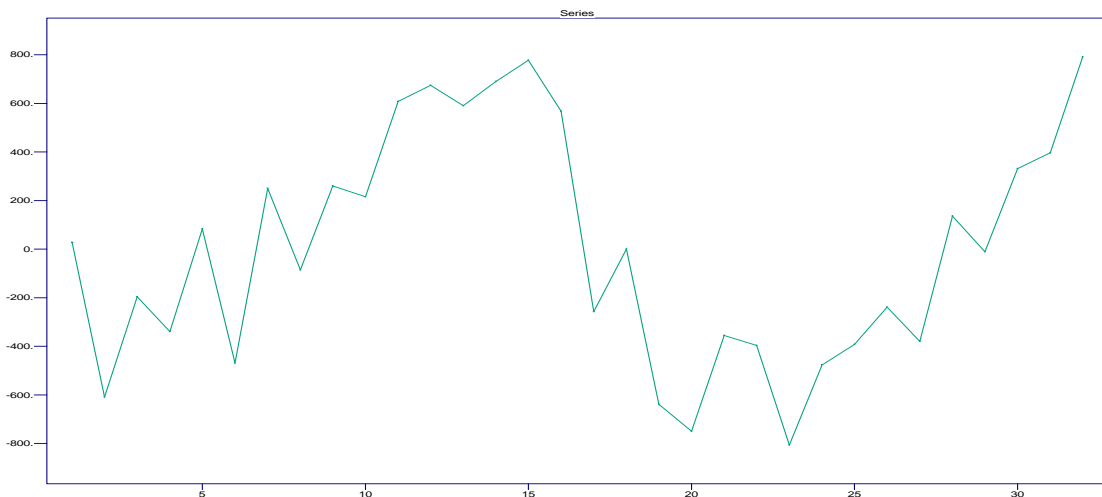
$$\nabla_d X_t = X_t - X_{t-d} = (1 - B^d)X_t.$$

Tuomet taikant šį operatorių modeliui

$$X_t = m_t + s_t + Z_t,$$



12 pav. BVP reikšmės ir seka $\hat{d}_t + \hat{s}_t$. Trendo įvertis \hat{d}_t gautas mažiausių kvadratų metodu, aproksimuojant jį antros eilės daugianariu.

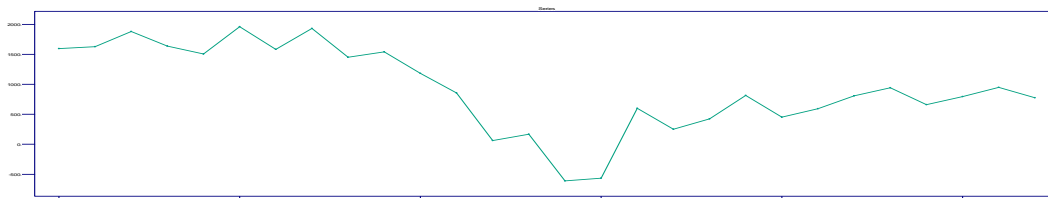


13 pav. Liekanos $\hat{Z}_t = X_t - \hat{d}_t - \hat{s}_t$ BVP duomenims.

kuriame s_t yra d -periodinė funkcija, gausime skirtumų $\nabla_d X_t$ išdėstymą į trendo $m_t - m_{t-d}$ ir triukšmo $Z_t - Z_{t-d}$ komponentes:

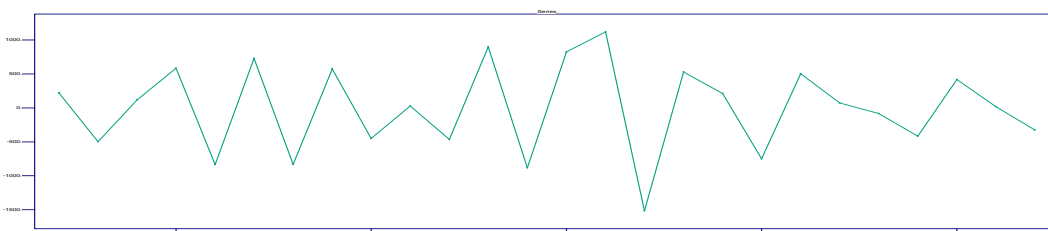
$$\nabla_d X_t = m_t - m_{t-d} + Z_t - Z_{t-d}.$$

Tolimesnė analizė atliekama vienu iš išvardintų 3.1 skyrelyje metodų. 14 paveiksle pavaizduoti BVP reikšmių skirtumai $\nabla_4 X_t$.



14 pav. BVP reikšmių skirtumai $\nabla_4 X_t$.

Jeigu eliminavus sezoninę komponentę matoma trendo komponentė, tikslinga dar kartą „diferencijuoti“ duomenis tiek kartų, kiek prireiks trendui „išnaikinti“. 15 paveiksle pavaizduoti BVP reikšmių skirtumai $\nabla^2 \nabla_4 X_t$.



15 pav. BVP reikšmių skirtumai $\nabla^2 \nabla_4 X_t$.

4 Tikimybiniai modeliai

4.1 Atsitiktiniai procesai

4.1 APIBRĖŽIMAS. Atsitiktiniu procesu vadinama atsitiktinių dydžių, apibrėžtų vienoje tikimybinėje erdvėje, šeima $\{X_t, t \in T\}$.

Laiko eilučių teorijoje kintamasis t vadinamas laiku ir jo reikšmių aibė T dažniausiai yra $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ (diskretaus laiko atvejis) arba $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ (tolydaus laiko atvejis).

4.1 PAVYZDYS. Tarkime, $\nu \geq 0$ ir $r > 0$ yra du fiksuoti skaičiai, o $A \geq 0$ ir Θ – nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, Θ – tolygiai pasiskirstęs intervale $[0, 2\pi)$. Apibrėžkime

$$X_t = r^{-1}A \cos(\nu t + \Theta).$$

Tokiu atsitiktiniu procesu aprašomas elektros srovės stiprio kitimas, kai įtampa turi atsitiktinę amplitudę A ir atsitiktinę fazę Θ ; r – rezistoriaus varža. Laikas t gali būti tiek tolydus, tiek ir diskretus.

4.2 PAVYZDYS. Standartiniu Brauno judesiu (arba Vynerio procesu) vadinamas procesas $\{W_t, t \geq 0\}$, tenkinantis sąlygas:

- $W_0 = 0$;
- su visais $n = 3, 4, \dots$ ir su visais rinkiniais $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ pokyčiai $W_{t_2} - W_{t_1}, W_{t_3} - W_{t_2}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ yra nepriklausomi;
- $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$, kai $t \geq s$.

A priori nėra akivaizdu, kad atsitiktinis procesas su tokiomis savybėmis egzistuoja. Jo egzistavimas išplaukia iš fundamentalios Kolmogorovo teoremos, kurią dabar suformuluosime.

Iš pradžių nusakysime atsitiktinio proceso $\{X_t\}$ daugiamatę pasiskirstymo funkciją. Taip vadinamas funkcijų

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = P\{X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n\}$$

rinkinys; čia: $n = 1, 2, \dots$, $t_1, \dots, t_n \in T \subset \mathbb{R}$, $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ ir $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

4.1 teorema. Funkcijos $\{F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n), t_1 < t_2 < \dots < t_n, n = 1, 2, \dots\}$ yra kokio nors atsitiktinio proceso daugiamatės pasiskirstymo funkcijos tada ir tik tada, kai su visais $n = 1, 2, \dots, t_1 < t_2 < \dots < t_n$ ir $k = 1, 2, \dots, n$ teisinga sąlyga

$$\lim_{x_k \rightarrow \infty} F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{t_1, \dots, t_{k-1}, t_{k+1}, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n). \quad (4.1)$$

4.1 PASTABA. Pastaroji lygybė vadinama suderinamumo sąlyga. Svarbu yra įsidėmėti, kad reikalavimas $T \subset \mathbb{R}$ (tada T yra tiesiškai sutvarkyta aibė) yra esminis. Jeigu T nėra sutvarkyta aibė, papildomai reikėtų reikalauti, kad būtų išpildyta „perstatos“ sąlyga.

4.2 PASTABA. Suderinamumo sąlygą galima suformuluoti ir charakteristinių funkcijų terminais. Jei

$$\varphi_{t_1, \dots, t_n}(u_1, \dots, u_n) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i \sum_1^n u_j x_j} F_{t_1, \dots, t_n}(dx_1, \dots, dx_n),$$

tai suderinamumo sąlyga ekvivalenti lygybei

$$\lim_{u_k \rightarrow 0} \varphi_{t_1, \dots, t_n}(u_1, \dots, u_n) = \varphi_{t_1, \dots, t_{k-1}, t_{k+1}, \dots, t_n}(u_1, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, \dots, u_n). \quad (4.2)$$

4.1 PRATIMAS. Parodykite, kad 4.2 pavyzdyje apibrėžtas Vynerio procesas tenkina suderinamumo sąlygą.

4.2 Stacionarieji procesai

4.2 APIBRĖŽIMAS. Atsitiktinio proceso $\{X_t, t \in T\}$, su visais $t \in T$ tenkinančio sąlygą $DX_t < \infty$, kovariacinė funkcija apibrėžiama lygybe

$$r(s, t) = \text{Cov}(X_s, X_t) = E(X_s - EX_s)(X_t - EX_t), \quad s, t \in T. \quad (4.3)$$

4.3 APIBRĖŽIMAS. Seka $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ vadinama stacionaria, jeigu:

- 1) $\forall t \in \mathbb{Z} \quad E|X_t|^2 < \infty$,
- 2) $\forall t \in \mathbb{Z} \quad EX_t = EX_0$,
- 3) $r(s, t) = r(s + h, t + h)$ su visais s, t, h iš \mathbb{Z} .

Dažnai literatūroje taip apibrėžtas stacionarumas vadinamas stacionarumu plačiąja (arba silpnąja) prasme.

Kadangi stacionariai sekai tesinga $r(s, t) = r(s - t, 0)$ su visais $s, t \in \mathbb{Z}$, tai patogiau kovariacinę funkciją traktuoti kaip vieno argumento funkciją ir rašyti (ką mes nuo šiol ir darysime) tiesiog $r(s) \equiv r(s, 0)$ visiems $s \in \mathbb{Z}$.

Stacionarios sekos *koreliacinė* funkcija apibrėžiama lygybe

$$\rho(h) = r(h)/r(0)$$

su $h \in \mathbb{Z}$.

Nors stacionarumo apibrėžimas duodamas $T = \mathbb{Z}$ atveju, aišku, kad analogiškas apibrėžimas gali būti pateiktas ir bendresnei aibei T . Tačiau mūsų tikslams (nagrinėjamos diskrečios laiko eilutės) pakanka duoto apibrėžimo.

Dažnai praktikoje susiduriama ir su poreikiu nagrinėti aukštesnės eilės stacionarumo sąvoką.

4.4 APIBRĖŽIMAS. Sakysime, kad $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ yra m -osios eilės stacionarioji seka, jeigu egzistuoja visi mišrieji vektorių

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$$

momentai iki m -os eilės ir jie yra invariantiški postūmio atývilgiu, t.y.

$$EX_{t_1}^{\alpha_1} X_{t_2}^{\alpha_2} \dots X_{t_n}^{\alpha_n} = EX_{t_1+h}^{\alpha_1} X_{t_2+h}^{\alpha_2} \dots X_{t_n+h}^{\alpha_n}$$

su visais $n \in \mathbb{N}$, $(t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{Z}^n$, $h \in \mathbb{Z}$ ir $\sum_1^n \alpha_j \leq m$.

4.5 APIBRĖŽIMAS. Seka $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ vadinama stacionariąja siaurąja (arba griežtąja) prasme, jeigu su visais $k \in \mathbb{N}$ t_1, t_2, \dots, t_k ir h iš \mathbb{Z} vektorių $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$ ir $(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_k+h})$ pasiskirstymai sutampa.

Nesunku matyti, jeigu seka $\{X_t\}$ yra stacionari siaurąja prasme ir $E|X_t|^2 < \infty$, tai ji yra stacionari ir plačiąja prasme. Atvirkščias gi teiginys nėra teisingas (4.5 pratimas). Tačiau Gauso sekų klasėje abu stacionarumo apibrėžimai yra ekvivalentūs. Iš pradžių apibrėšime Gauso procesą.

4.6 APIBRĖŽIMAS. Atsitiktinis procesas $\{X_t, t \in T\}$ vadinamas Gauso procesu, jeigu visi jo daugiamaciai pasiskirstymai yra normalieji.

Priminsime, kad atsitiktinis vektorius $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ vadinamas normaliai pasiskirsčiusiu su parametrais a ir Γ , jeigu jo n -matė charakteristinė funkcija $\varphi(\lambda) = Ee^{i(\lambda, \xi)}$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, yra tokio pavidalo:

$$\varphi(\lambda) = e^{i(\lambda, a) - (\Gamma\lambda, \lambda)/2}; \quad (4.4)$$

čia: $a = (a_1, \dots, a_n)$, $\Gamma = (\Gamma_{kl})$ – simetrinė ir neneigiamai apibrėžta matrica. Galima patikrinti (žr. 4.4), kad $a_k = E\xi_k$, $\Gamma_{kl} = E(\xi_k - a_k)(\xi_l - a_l)$.

4.2 teorema. *Stacionarioji plačiąja prasme Gauso seka $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ yra stacionari ir siaurąja prasme.*

Irodymas. Kadangi seka $\{X_t\}$ yra stacionari plačiąja prasme, tai vektorių $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$ ir $(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_k+h})$ vidurkiai ir kovariacinės matricos sutampa. Taigi šie vektoriai turi vieną ir tą patį pasiskirstymą. \square

4.3 PAVYZDYS. Apibrėžkime atsitiktinį procesą

$$X_t = A \cos(\theta t) + B \sin(\theta t);$$

čia: A ir B yra nekoreliuoti atsitiktiniai dydžiai su $EA = EB = 0$, $DA = DB = 1$ ir $\theta \in [-\pi, \pi]$. Nesunku įsitikinti, kad toks atsitiktinis procesas yra stacionarus ir $\text{Cov}(X_{t+h}, X_t) = \cos(\theta h)$.

4.4 PAVYZDYS. Tarkime $\{Z_t, t \in \mathbb{Z}\}$ yra nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių su nuliniu vidurkiu ir dispersija σ^2 seka. Seką $\{X_t\}$ apibrėžkime lygybe

$$X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}.$$

Tada $EX_t = 0$ ir

$$\text{Cov}(X_{t+h}, X_t) = \begin{cases} \sigma^2 + \theta^2\sigma^2, & \text{kai } h = 0, \\ \theta\sigma^2, & \text{kai } |h| = 1, \\ 0, & \text{kai } |h| > 1. \end{cases}$$

Vadinasi, seka $\{X_t\}$ yra stacionari.

4.2 PRATIMAS. Tarkime $X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$, $t \in \mathbb{N}$, čia Z_0, Z_1, \dots yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su generuojančiąja momentų funkcija $E \exp(\lambda Z_i) = m(\lambda)$. Išreikšdami generuojančiąją momentų funkciją $E \exp(\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i)$ funkcijos $m(\cdot)$ terminais, parodykite, kad $\{X_t\}$ yra stacionarioji siaurąja prasme seka.

4.3 PRATIMAS. Tegul atsitiktinė seka apibrėžta lygybe

$$X_t = \cos(\nu t + \Phi), \quad t \in \mathbb{Z}; \quad (4.5)$$

čia: Φ – tolygiai intervale $(0, 2\pi]$ pasiskirstęs atsitiktinis dydis, $\nu \geq 0$. Parodykite, kad (4.5) seka stacionari.

4.4 PRATIMAS. Tegul Gauso atsitiktinio vektoriaus $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ charakteristinė funkcija yra (4.4) pavidalo. Parodykite, kad $a_k = E\xi_k$, $\Gamma_{kl} = \text{Cov}(\xi_k, \xi_l)$.

4.5 PRATIMAS. Sukonstruokite atsitiktinių dydžių seką $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$, kuri būtų stacionari plačiąja prasme, bet nestacionari siaurąja prasme.

4.3 Stacionariosios sekos kovariacinės funkcijos savybės

4.1 teiginys. Tarkime, $r(\cdot)$ – stacionariosios sekos $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ kovariacinė funkcija. Tada:

- 1) $r(0) \geq 0$,
- 2) $|r(h)| \leq r(0)$ su visais h ,
- 3) $r(-h) = r(h)$ su visais h .

Irodymas. 1) ir 3) savybės išplaukia iš 4.3 apibrėžimo. Norint patikrinti 2) savybę, tereikia panaudoti Koši nelygybę. \square

Išvardintosios savybės tėra tik *būtin*os sąlygos, t.y. jeigu bent viena iš šių savybių nebūtų išpildyta, tai $r(\cdot)$ nebūtų kovariacinė funkcija. Būtina ir pakankama sąlyga nusakoma remiantis funkcijos neneigiamo apibrėžtumo sąvoka.

4.7 APIBRĖŽIMAS. Funkcija $r : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ vadinama neneigiamai apibrėžta, jeigu $\forall n \in \mathbb{N}$, $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{Z}^n$

$$\sum_{i,j=1}^n a_i a_j r(t_i - t_j) \geq 0.$$

4.3 teorema. Lyginė funkcija $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ yra stacionariosios sekos kovariacinė funkcija tada ir tik tada, kai ji yra neneigiamai apibrėžta.

Įrodytas. B ū t i n u m a s. Tarkime, $f(\cdot)$ yra stacionariosios sekos $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ kovariacinė funkcija. Tada

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n a_i a_j f(t_i - t_j) &= \sum_{i,j=1}^n a_i a_j E(X_{t_i} - EX_{t_i})(X_{t_j} - EX_{t_j}) \\ &= E\left(\sum_{i=1}^n a_i (X_{t_i} - EX_{t_i})\right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

P a k a n k a m u m a s. Sakykime $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ yra lyginė neneigiamai apibrėžta funkcija. Įrodydami, jog egzistuoja stacionarus procesas, kurio kovariacinė funkcija yra $f(\cdot)$, pasinaudosime Kolmogorovo teorema. Apibrėžkime funkciją

$$\varphi_{t_1, \dots, t_n}(u_1, \dots, u_n) = e^{-1/2 \sum_{i,j=1}^n u_i u_j f(t_i - t_j)}. \quad (4.6)$$

Kadangi $f(\cdot)$ yra lyginė ir neneigiamai apibrėžta, tai (4.6) yra normaliai pasiskirsčiusio vektoriaus charakteristinė funkcija. Akivaizdu, kad ši funkcija tenkina (4.2) suderinamumo sąlygą. Vadinas, egzistuoja toks atsitiktinis procesas, kurio baigtiniamačių pasiskirstymų charakteristinės funkcijos yra (4.6) funkcijos. Iš 4.4 pratimo išplaukia, kad $f(i - j) = \text{Cov}(X_i, X_j)$. \square

Iš 4.3 teoremos išplaukia, kad bet kokiai lyginei neneigiamai apibrėžtai funkcijai galima sukonstruoti stacionarų Gauso procesą, kurio kovariacinė funkcija būtų ši funkcija.

4.6 PRATIMAS. Parodykite, kad kovariacinei funkcijai teisinga nelygybė

$$|r(n) - r(m)|^2 \leq 2r(0)(r(0) - r(n - m)).$$

4.7 PRATIMAS. Parodykite, kad funkcija $r : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, apibrėžiama lygybėmis

$$r(h) = \begin{cases} 1, & h = 0, \\ \rho, & |h| = 1, \\ 0, & |h| > 1, \end{cases}$$

yra stacionarios sekos kovariacinė funkcija tada ir tik tada, kai $|\rho| \leq 1/2$.

5 Autoregresijos–slenkamojo vidurkio sekos

Pagrindinę praktikoje naudojamų laiko eilučių klasę sudaro vadinamieji autoregresijos–slenkamojo vidurkio modeliai. Šiame skyrelyje nusakysime šiuos modelius ir jų savybes.

5.1 Stacionarūs ARSV modeliai

Pirmiausia apibrėšime balto triukšmo seką.

5.1 APIBRĖŽIMAS. Seka $\{Z_t\}$ vadinama balto triukšmo seka su vidurkiu 0 ir dispersija σ^2 , jeigu $EZ_t = 0$ ir

$$r(h) = \begin{cases} \sigma^2, & h = 0, \\ 0, & h \neq 0. \end{cases}$$

Žymėsime $Z_t \sim BT(0, \sigma^2)$.

5.2 APIBRĖŽIMAS. Procesas $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ vadinamas autoregresijos–slenkamojo vidurkio seka, jeigu $\{X_t\}$ stacionarus ir su visais t

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p} = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \dots + \theta_q Z_{t-q}; \quad (5.1)$$

čia $Z_t \sim BT(0, \sigma^2)$. Tokią seką žymėsime ARSV(p, q).

(5.1) lygybę galima užrašyti trumpiau:

$$\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t, \quad t \in \mathbb{Z}; \quad (5.2)$$

čia:

$$\begin{aligned} \phi(z) &= 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p, \\ \theta(z) &= 1 + \theta_1 z + \dots + \theta_q z^q \end{aligned}$$

ir B yra postūmio operatorius, t.y. $B^j X_t = X_{t-j}$, $j \in \mathbb{Z}$. Daugianariai $\phi(\cdot)$ bei $\theta(\cdot)$ vadinami atitinkamai autoregresijos bei slenkamojo vidurkio daugianariais.

5.1 PAVYZDYS. (SV(q) procesas). Jei lygtyje (5.1) $\phi(z) \equiv 1$, t.y.

$$X_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \dots + \theta_q Z_{t-q},$$

tai seką $\{X_t\}$ vadinsime q -osios eilės slenkamojo vidurkio seka (SV(q)). Aki-
vaizdu, kad $EX_t = 0$ ir

$$\text{Cov}(X_{t+h}, X_t) = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{j=0}^{q-|h|} \theta_j \theta_{j+|h|}, & |h| \leq q, \\ 0, & |h| > q, \end{cases}$$

čia $\theta_0 = 1$. Taigi $\{X_t\}$ yra stacionari seka.

Detaliau panagrinėsime atvejį, kai (5.1) lygtyje $p = 1$, $\theta(z) \equiv 1$ ir $\phi(z) = 1 - \phi z$:

$$X_t - \phi X_{t-1} = Z_t, \quad t \in \mathbb{Z}. \quad (5.3)$$

Tada

$$\begin{aligned} X_t &= Z_t + \phi(Z_{t-1} + \phi X_{t-2}) \\ &= \dots = Z_t + \phi Z_{t-1} + \phi^2 Z_{t-2} + \dots + \phi^k Z_{t-k} + \phi^{k+1} X_{t-k-1}. \end{aligned}$$

Sakykime, $EX_t^2 \equiv \text{const} < \infty$. Tada, jeigu $|\phi| < 1$, tai

$$E\left(X_t - \sum_{j=0}^n \phi^j Z_{t-j}\right)^2 = \phi^{2n+2} EX_{t-n-1}^2 \rightarrow 0, \quad (5.4)$$

kai $n \rightarrow \infty$. Todėl rašysime

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \phi^i Z_{t-i}, \quad (5.5)$$

reiškinį dešinėje pusėje laikydami dalinių sumų riba kvadratinio vidurkio prasme. Nesunku matyti, kad taip apibrėžta seka yra stacionari su šiais vidurkiu ir kovariacija:

$$EX_t = 0, \quad \text{Cov}(X_{t+h}, X_t) = \sigma^2 \frac{\phi^{|h|}}{1 - \phi^2}.$$

Be to, (5.5) lygybė teisinga ir su tikimybe 1 ir šis sprendinys yra vienintelis (žr. 5.1 pratimą).

Jeigu $|\phi| > 1$, tai panašiai įsitikiname, kad

$$X_t = - \sum_{i=1}^{\infty} \phi^{-i} Z_{t+i}$$

yra vienintelis stacionarus (5.3) lygties sprendinys. Tuo tarpu, jei $|\phi| = 1$, tai AR(1) (5.3) lygtis stacionaraus sprendinio neturi (paliekame šį uždavinį kaip pratimą skaitytojui).

Aukščiau gautas AR(1) lygties su $|\phi| < 1$ sprendinys (5.5) priklauso nuo balto triukšmo sekos reikšmių momentais $t, t-1, t-2, \dots$, t.y. išreiškiamas „praeities“ stebėjimais. Tokia sąryšio su $\{Z_t\}$ savybė vadinama kauzalumu. Bendru atveju iš 5.1 pratimo išplaukia, kad operatoriai $\psi(B) \equiv \sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi_i B^i$ su $\sum_{-\infty}^{\infty} |\psi_i| < \infty$ stacionarias laiko eilutes perveda į stacionarias. Dažnai tokie operatoriai vadinami tiesiniais filtrais su svoriais $\{\psi_i\}$. Taikomoju požiūriu svarbūs vadinamieji realiai įgyvendinami filtrai, atitinkantys kauzalų išėjimo srautą. Pirmiausia duosime griežtą kauzalaus ARSV proceso apibrėžimą.

5.3 APIBRĖŽIMAS. ARSV(p, q) procesas, apibrėžtas (5.2) lygtimis, vadinamas kauzaliuoju, jeigu egzistuoja tokia absoliučiai sumuojama seka $\{\psi_i, i \geq 0\}$, kad

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i Z_{t-i}, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Dabar suformuluosime būtinas ir pakankamas sąlygas, su kuriomis ARSV(p, q) procesas yra kauzalus, bei pademonstruosime, kaip tokiu atveju apskaičiuoti koeficientus $\{\psi_i, i \geq 0\}$.

5.1 teorema. *Sakykime, $\{X_t\}$ – ARSV(p, q) seka, ir $\phi(\cdot)$ su $\theta(\cdot)$ neturi bendrų nulių. Laiko eilutė $\{X_t\}$ yra kauzali tada ir tik tada, kai $\phi(z) \neq 0$ su visais $z \in \mathbb{C}$, $|z| \leq 1$. Koeficientai $\{\psi_i, i \geq 0\}$ apskaičiuojami iš sąryšio*

$$\psi(z) \equiv \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i z^i = \frac{\theta(z)}{\phi(z)}, \quad |z| \leq 1.$$

Duali kauzalumo sąvokai yra laiko eilutės apgręžiamumo sąvoka.

5.4 APIBRĖŽIMAS. ARSV laiko eilutė $\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t$ vadinama apgręžiamą, jeigu egzistuoja tokia seka $\{\alpha_j\}$, $\sum_{j=0}^{\infty} |\alpha_j| < \infty$, kad

$$Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j X_{t-j}.$$

Panašiai kaip 5.1 teoremoje, turime:

5.2 teorema. Tarkime $\{X_t\}$ yra ARSV(p, q) seka ir $\phi(\cdot)$ su $\theta(\cdot)$ neturi bendrų nulių. Tuomet $\{X_t\}$ yra apgręžiama tada ir tik tada, kai $\theta(z) \neq 0$ skritulyje $|z| \leq 1$. Koeficientai $\{\alpha_j\}$ apibrėžiami lygybe

$$\alpha(z) \equiv \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j z^j = \frac{\phi(z)}{\theta(z)}, \quad |z| \leq 1.$$

Pasinaudojus kauzalumo sąvoka, galima apibrėžti slenkamojo vidurkio su begaline eile (žymėsime SV(∞)) sekas. Būtent, $\{X_t\}$ vadinamas SV(∞) procesu, jeigu egzistuoja tokia seka $\{\psi_j\}$, kad $\sum_0^{\infty} |\psi_j| < \infty$ ir $X_t = \sum_0^{\infty} \psi_j Z_{t-j}$; čia $Z_t \sim BT(0, \sigma^2)$. Panašiai apibrėžiamos AR(∞) sekos.

Sakykime, $\phi(\cdot)$ ir $\theta(\cdot)$ neturi bendrų nulių ir egzistuoja toks z , kad $|z| = 1$ ir $\phi(z) = 0$. Tokiu atveju ARSV lygtis stacionaraus sprendinio neturi. Kita vertus, jei $\forall z, |z| = 1 : \phi(z) \neq 0$, tai iš kompleksinio kintamojo funkcijų teorijos išplaukia, kad

$$\frac{\theta(z)}{\phi(z)} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j z^j \equiv \psi(z), \quad R^{-1} < |z| < R$$

su kažkokiu $R > 1$. Konvergavimas nurodytajame žiede yra absoliutus.

Taigi teisinga tokia teorema.

5.3 teorema. Tarkime, kad $\phi(\cdot)$ neturi nulių ant apskritimo $|z| = 1$ ir $\phi(\cdot)$ su $\theta(\cdot)$ neturi bendrų nulių. Tada ARSV(p, q) lygtis turi vienintelį stacionarų sprendinį

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Z_{t-j};$$

čia koeficientai $\{\psi_j\}$ apskaičiuojami iš lygybės

$$\psi(z) \equiv \frac{\theta(z)}{\phi(z)}, \quad R^{-1} < |z| < R.$$

5.1 PRATIMAS. Tegul $\{X_t\}$ – stacionari seka su kovariacine funkcija $r(\cdot)$, $\sum |\psi_i| < \infty$. Įrodykite, kad tai su visais $t \in \mathbb{Z}$ eilutė $\sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi_i X_{t-i}$ konverguoja absoliučiai su tikimybe 1 bei kvadratinio vidurkio prasme ir abiem atvejais ribos sutampa, o $Y_t := \psi(B)X_t \equiv \sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi_i X_{t-i}$ yra stacionari seka su kovariacine funkcija

$$r_Y(h) = \sum_{i,j=-\infty}^{\infty} \psi_i \psi_j r(h - i + j). \quad (4.7)$$

5.2 PRATIMAS. Tarkime, AR(2) seka $\{X_t\}$ apibrėžta lygtimis

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} = Z_t, \quad Z_t \sim BT(0, \sigma^2).$$

Įrodykite, kad $\{X_t\}$ kauzali tada ir tik tada, kai (ϕ_1, ϕ_2) patenka į sritį

$$\begin{cases} \phi_1 + \phi_2 < 1, \\ \phi_2 - \phi_1 < 1, \\ |\phi_2| < 1. \end{cases}$$

5.2 Asimptotinis stacionarumas

Praktikoje nagrinėjamosios laiko eilutės „startuoja“ iš tam tikros pradinės reikšmės. Tuomet jau stacionaraus proceso galime negauti, tačiau galime kalbėti apie asimptotiškai stacionarų procesą. Paaškinsime AR(1) modelio pavyzdžiu.

Tegul seka $X_t = \phi X_{t-1} + Z_t$ staruoja iš pradinės reikšmės X_0 , kuri gali būti ir atsitiktinis dydis. Tada

$$X_t = Z_t + \phi Z_{t-1} + \dots + \phi^{t-1} Z_1 + \phi^t X_0.$$

Jeigu $EX_0 \neq 0$, tai $EX_t = \phi^t EX_0$. Taigi, procesas nėra stacionarus „vidurkyje“.

Tegul $EX_0 = 0$, X_0 nepriklauso nuo dydžių Z_t ir $EY_0^2 < \infty$. Tada, jeigu $|\phi| < 1$,

$$\begin{aligned} DX_t &= \sigma^2(1 + \phi^2 + \dots + \phi^{2(t-1)}) + \phi^{2t} DY_0 \\ &= \frac{\sigma^2(1 - \phi^{2t})}{1 - \phi^2} + \phi^{2t} DY_0 \\ &\rightarrow \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}, \quad \text{kai } t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Taigi, abiem atvejais AR(1) procesas nėra stacionarus, tačiau jis „darosi stacionarus“ su dideliais t . Praktiškai generuojant tokio proceso *stacionarią* realizaciją, turime pradines reikšmes „nupjauti“.

5.3 Kovariacinė generuojančioji funkcija

Stacionaraus proceso $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ su kovariacija $r(\cdot)$ kovariacinė generuojančioji funkcija apibrėžiama lygybe

$$g(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} r(j)z^j; \quad (5.6)$$

čia eilutės konvergavimo sritis yra žiedas $\delta^{-1} < |z| < \delta$, $\delta > 1$.

Taigi $r(j)$ yra koeficientas prie z^j arba z^{-j} kovariacinės generuojančiosios funkcijos (5.6) skleidinyje.

Toliau tarkime, kad X_t yra dvipusio slenkamojo vidurkio seka

$$X_t = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi_i Z_{t-i}, \quad Z_t \sim BT(0, \sigma^2); \quad (5.7)$$

čia $\psi(z) \equiv \sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi_i z^i$ absoliučiai konverguoja žiede $\delta^{-1} < |z| < \delta$, $\delta > 1$. Tada

$$r(j) = \sigma^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi_i \psi_{i+|j|}$$

ir

$$g(z) = \sigma^2 \sum_{i,j=-\infty}^{\infty} \psi_i \psi_{i+|j|} z^j = \sigma^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi_i z^i \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j z^{-j}$$

arba

$$g(z) = \sigma^2 \psi(z) \psi(z^{-1}), \quad \delta^{-1} < |z| < \delta. \quad (5.8)$$

5.2 PAVYZDYS. Iš 5.3 teoremos žinome, kad bet kuri ARSV(p, q) seka $\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t$ su funkcija $\phi(z)$, neturinčia nulių ant apskritimo $|z| = 1$, gali būti užrašyta (5.7) pavidalu. Koeficientai $\{\psi_i\}$ apskaičiuojami iš lygybės

$$\psi(z) = \frac{\theta(z)}{\phi(z)}.$$

Iš (5.8) išplaukia, kad ARSV(p, q) sekos kovariacinė generuojančioji funkcija yra

$$g(z) = \sigma^2 \frac{\theta(z)\theta(z^{-1})}{\phi(z)\phi(z^{-1})}.$$

5.3 PRATIMAS. Duota SV(2) seka

$$X_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2}.$$

Užrašę kovariacinę generuojančiąją funkciją, apskaičiuokite šios sekos kovariacinę funkciją $r(k)$.

6 Vertinimas laiko srityje

Šiame skyrelyje nagrinėsime stacionarių laiko eilučių vidurkio, kovariacinės funkcijos įverčius, bei ARSV sekos parametrų įverčius.

6.1 Vidurkio įvertis

Tarkime, X_1, \dots, X_n yra imtis iš stacionarios sekos $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$. Pažymėkime

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

6.1 teorema. *Sakykime, $\{X_t\}$ yra stacionari seka su vidurkiu μ ir kovariacine funkcija $r(\cdot)$. Tada tvirtinimai*

$$(1) \quad E|\bar{X} - \mu|^2 \rightarrow 0$$

ir

$$(2) \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n r(k) \rightarrow 0$$

yra ekvivalentūs.

Irodymas. (1) \implies (2). Turime

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n r(k) \right|^2 &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(X_k - \mu)(X_0 - \mu) \right|^2 \\ &= \left| E\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \mu) \right) (X_0 - \mu) \right|^2 \\ &\leq E \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \mu) \right|^2 E|X_0 - \mu|^2 \\ &= E|\bar{X} - \mu|^2 E|X_0 - \mu|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

(2) \implies (1). Pažymėkime $s_n = \sum_1^n r(k)$ ir perrašykime

$$\begin{aligned} E|\bar{X} - \mu|^2 &= \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n r(i-j) = \frac{1}{n} \sum_{|m|<n} \left(1 - \frac{|m|}{n}\right) r(m) \\ &= \frac{1}{n^2} (nr(0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} s_i). \end{aligned}$$

Fiksuotam $\epsilon > 0$ imkime tokį N , kad su visais $n > N$ būtų teisinga nelygybė $n^{-1}|s_n| < \epsilon$. Tada su pakankamai dideliais n

$$\begin{aligned} E|\bar{X} - \mu|^2 &\leq \frac{r(0)}{n} + \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n-1} |s_i| = \frac{r(0)}{n} + \frac{2}{n^2} \left(\sum_{i=1}^N |s_i| + \sum_{i=N+1}^{n-1} |s_i| \right) \leq \\ &\leq \frac{r(0)}{n} + \frac{2}{n^2} \left(\sum_{i=1}^N |s_i| + \sum_{i=N+1}^{n-1} i\epsilon \right) \leq \frac{r(0)}{n} + \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^N |s_i| + 2\epsilon \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2\epsilon. \end{aligned}$$

Kadangi $\epsilon > 0$ buvo laisvai pasirinktas, tai $E|\bar{X} - \mu|^2 \rightarrow 0$. □

6.1 išvada. Tarkime, teisingos 6.1 teoremos prielaidos. Tuomet

(1) jeigu $r(n) \rightarrow 0$, tai $E|\bar{X} - \mu|^2 \rightarrow 0$,

(2) jeigu $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |r(k)| < \infty$, tai $nE|\bar{X} - \mu|^2 \rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} r(k)$.

Irodymas. (1) tiesiogiai išplaukia iš 6.1 teoremos, o (2) – iš sąryšių

$$nE|\bar{X} - \mu|^2 = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n r(i-j) = \sum_{|k|<n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) r(k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r(k).$$

□

Jeigu $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |r(k)| < \infty$, tai, pasirinkę šia išvada, galime teigti, jog egzistuoja spektrinis tankis $f(\cdot)$ ir

$$nE|\bar{X} - \mu|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r(k) = 2\pi f(0). \quad (6.1)$$

Dvipusio slenkamojo vidurkio sekos $X_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_k Z_{t-k}$ atveju, jeigu $\sum |\psi_k| < \infty$, turėsime $\sum |r(k)| < \infty$. Todėl dešinioji (6.1) pusė yra $2\pi f(0) = \sigma^2 \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_k \right|^2$.

6.1 PASTABA. Vietoje empirinio vidurkio \bar{X} galima nagrinėti ir kitokius įvertčius, pavyzdžiui, geriausią tiesinį nepaslinktą vidurkio įvertį (žr. 6.1. Tačiau yra žinoma, kad jo asimptotinės savybės yra labai panašios į \bar{X} savybes.

6.2 PASTABA. Norint sukonstruoti vidurkio μ pasikliautinąjį intervalą, reikia rezultatų apie \bar{X} asimptotinį normalumą. Juos galima rasti, pavyzdžiui, Anderson (1971) knygoje. Pastebėsime, kad tuo atveju, kai stebimoji imtis gauta iš stacionarios Gauso sekos, galima užrašyti tikslų \bar{X} skirstinį:

$$\sqrt{n}(\bar{X} - \mu) \sim N\left(0, \sum_{|m| < n} \left(1 - \frac{|m|}{n}\right) r(n)\right).$$

Taigi, jeigu kovariacinė funkcija yra žinoma, galime sukonstruoti tikslų vidurkio μ pasikliautinąjį intervalą. Nežinant kovariacinės funkcijos, imamas jos įvertis.

6.1 PRATIMAS. Tarkime $\{X_t\}$ yra stacionarus procesas su vidurkiu μ ir kovariacine funkcija $r(\cdot)$. Sakome, kad $\hat{\mu}_n$ yra geriausias nepaslinktas vidurkio μ įvertis, jeigu $\hat{\mu}_n = c_1 X_1 + \dots + c_n X_n$, $E\hat{\mu}_n = \mu$ ir c_1, \dots, c_n minimizuoja $E|\hat{\mu}_n - \mu|^2$. Parodykite, kad geriausias nepaslinktas μ įvertis yra užrašomas formule

$$\hat{\mu}_n = (\mathbf{1}' R_n^{-1} \mathbf{1})^{-1} \mathbf{1}' R_n^{-1} \mathbf{X}_n;$$

čia R_n yra vektoriaus-stulpelio $\mathbf{X}_n = (X_1, \dots, X_n)'$ kovariacinė matrica ir $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)'$.

6.2 Kovariacinės funkcijos įvertis

Tarkime, X_1, \dots, X_n yra imtis iš stacionarios sekos $\{X_t\}$ su nežinomais vidurkiu ir kovariacija.

Kovariacinės funkcijos įvertį apibrėžkime lygybe

$$\hat{r}(h) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-|h|} (X_k - \bar{X})(X_{k+|h|} - \bar{X}), \quad 0 \leq |h| < n. \quad (6.2)$$

Šis įvertis pasižymi tuo, kad su visais $n \geq 1$ matrica

$$\hat{R}_n = \begin{pmatrix} \hat{r}(0) & \hat{r}(1) & \dots & \hat{r}(n-1) \\ \hat{r}(1) & \hat{r}(0) & \dots & \hat{r}(n-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{r}(n-1) & \hat{r}(n-2) & \dots & \hat{r}(0) \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

yra neneigiamai apibrėžta.

6.1 teiginys. Matrica \hat{R}_n , apibrėžta (6.3) lygybe, yra neneigiamai apibrėžta su visais $n \geq 1$.

Irodymas. Turime

$$\hat{R}_n = \frac{1}{n} D_n D_n';$$

čia

$$D_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & Y_1 & Y_2 & \cdot & \cdot & \cdot & Y_{n-1} & Y_n \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & Y_1 & Y_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & Y_n & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & Y_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & Y_n & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

yra $n \times 2n$ matrica ir $Y_j = X_j - \bar{X}$, $1 \leq j \leq n$.

Tada su visais $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$

$$a' \hat{R}_n a = \frac{1}{n} a' D_n D_n' a = \frac{1}{n} (a' D_n) (a' D_n)' \geq 0.$$

□

Koreliacinės funkcijos $\rho(h)$ įverčiu laikysime

$$\hat{\rho}(h) = \frac{\hat{r}(h)}{\hat{r}(0)}.$$

Aišku, kad atitinkama empirinė koreliacinė matrica taip pat bus neneigiamai apibrėžta.

Dėl paprastumo nuo šiol nagrinėjamosios stacionariosios sekos vidurkį laikysime lygiu nuliui ($EX_t = 0$) ir

$$\hat{r}(h) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-|h|} X_k X_{k+|h|}, \quad 0 \leq |h| < n. \quad (6.4)$$

6.3 PASTABA. Kadangi $E\hat{r}(h) = (1 - |h|/n)r(h)$, tai $\hat{r}(h)$ yra tik asimptotiškai nepaslinktas $r(h)$ įvertis. Dėl šios priežasties daugiklis n^{-1} (6.2) ar (6.4) lygybėse dažnai keičiamas daugikliu $(n - |h|)^{-1}$. Tačiau tada matrica \hat{R}_n yra nebūtinai neneigiamai apibrėžta.

6.2 teorema. Tarkime, $\{X_t\}$ yra stacionarioji seka su vidurkiu 0 ir kovariacija $r(\cdot)$. Tarkime, be to, kad su visais h seka $\{X_{t+h}X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ taip pat yra stacionari. Tada yra ekvivalentūs tokie du teiginiai:

$$(1) \quad E|\hat{r}(h) - r(h)|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

ir

$$(2) \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(X_{k+h}X_k - r(h))(X_hX_0 - r(h)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Irodymas. Fiksuokime $h \geq 0$ ir pažymėkime $\xi_k = X_{k+h}X_k$. Tada su pakankamai dideliais n

$$\hat{r}(h) = \left(1 - \frac{h}{n}\right) \bar{\xi}_{n-h}; \quad (6.5)$$

čia $\bar{\xi}_m = m^{-1} \sum_1^m \xi_m$. Kadangi $\{\xi_k\}$ yra stacionari seka su vidurkiu $r(h)$, tai iš 6.1 teoremos išplaukia, jog teiginiai

$$E|\bar{\xi}_{n-h} - r(h)|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

ir

$$\frac{1}{n-h} \sum_{k=1}^{n-h} E(\xi_k - r(h))(\xi(0) - r(h)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

yra ekvivalentūs. Pasinaudoję (6.5) lygybe, gauname teoremos teiginį. \square

6.4 PASTABA. Pastarosios teoremos prielaida bus teisinga, jeigu, pavyzdžiui, $\{X_t\}$ – stacionarioji siaurąja prasme seka su nuliniu vidurkiu ir baigtiniu ketvirtuoju momentu ($E|X_0|^4 < \infty$) arba $\{X_t\}$ – 4-os eilės stacionarioji seka (žr. 4.4 apibrėžimą).

Jeigu nagrinėjamoji seka yra Gauso, tai gauname tokį rezultatą:

6.2 išvada. *Tarkime, $\{X_t\}$ yra stacionari Gauso seka su vidurkiu 0 ir kovariacija $r(\cdot)$. Tada yra ekvivalentūs šie du teiginiai:*

$$(1) \quad E|\hat{r}(h) - r(h)|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$(2) \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n r^2(k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Irodymas. Pasirėmę 6.2 pratimu, galime teigti, kad 6.2 teoremos (2) sąlyga yra ekvivalenti

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (EX_{k+h}X_kX_hX_0 - r^2(h)) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (EX_{k+h}X_kEX_hX_0 + EX_{k+h}X_hEX_kX_0 \\ &+ EX_{k+h}X_0EX_kX_h - r^2(h)) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (r^2(h) + r(k+h)r(k-h)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Pasinaudoję nelygybe

$$|r(k+h)r(k-h)| \leq r^2(k+h) + r^2(k-h),$$

gauname, kad (6.6) teisinga, kai

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n r^2(k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Kita vertus, iš (6.6) su $h = 0$ išplaukia $n^{-1} \sum_{k=1}^n r^2(k) \rightarrow 0$. □

Įdomu pastebėti, kad (2) sąryšis 6.2 išvadoje yra ekvivalentus prielaidai, jog spektrinė pasiskirstymo funkcija F , atitinkanti kovariaciją $r(\cdot)$ (žr. 8.1 skyrelį), yra tolydi. Kitaip sakant, stacionariai Gauso sekai su nuliniu vidurkiu $\hat{r}(h)$ yra suderintasis L^2 prasme $r(h)$ įvertis tada ir tik tada, kai spektrinė pasiskirstymo funkcija F yra tolydi.

6.2 PRATIMAS. Tarkime, $\{X_t\}$ yra Gauso atsitiktinė seka su nuliniu vidurkiu. Įrodykite, kad

$$EX_{t_1}X_{t_2}X_{t_3}X_{t_4} = EX_{t_1}X_{t_2}EX_{t_3}X_{t_4} + EX_{t_1}X_{t_3}EX_{t_2}X_{t_4} + EX_{t_1}X_{t_4}EX_{t_2}X_{t_3}. \quad (6.7)$$

7 ARSV sekos parametru vertinimas

7.1 Sąlyginis mažiausių kvadratų metodas

Autoregresijos procesas. Pirmiausia nagrinėkime kauzalų autoregresijos modelį

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + Z_t, \quad (7.1)$$

kur $Z_t \sim BT(0, \sigma^2)$. Šią lygtį galime perrašyti įprastine regresijos forma:

$$X_t = \mathbb{X}'_{t-1} \phi + Z_t, \quad (7.2)$$

čia $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_p)'$, $\mathbb{X}_{t-1} = (X_{t-1}, \dots, X_{t-p})'$.

Gerai žinoma, kad (7.2) regresijai mažiausių kvadratų ϕ įvertis yra

$$\hat{\phi} = \left(\sum_{t=1}^n \mathbb{X}_{t-1} \mathbb{X}'_{t-1} \right)^{-1} \left(\sum_{t=1}^n \mathbb{X}_{t-1} X_t \right).$$

Taigi, čia gali būti taikomi (su nedidelėmis modifikacijomis) standartinės regresinės analizės rezultatai. Tame tarpe, jeigu $\hat{Z}_t = X_t - \mathbb{X}'_{t-1} \hat{\phi}$ yra atitinkamos liekanos, tai joms galima taikyti klasikinę liekanų analizę.

Pastebėsime, kad tuo atveju kai Z_t yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę $N(0, \sigma^2)$ dydžiai, $\hat{\phi}$ yra ir didžiausio tikėtinumo įvertis. Paprasčiausiu AR(1) atveju, kai $X_t = \phi X_{t-1} + Z_t$, turime

$$\hat{\phi} = \frac{\sum_{t=1}^n X_t X_{t-1}}{\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2}.$$

Iš klasikinio rezultato taip pat išplaukia ir ši teorema apie asimptotinį įverčio pasiskirstymą.

7.1 teorema. *Jei Z_t – nepriklausomi, vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su vidurkiu 0 ir dispersija σ^2 , o $EZ_t^4 < \infty$, tai*

$$\sqrt{n}(\hat{\phi} - \phi) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2 \Gamma_p^{-1}),$$

kur \xrightarrow{d} žymi konvergavimą pagal pasiskirstymą, o

$$\Gamma_p = E\mathbb{X}\mathbb{X}' = \begin{pmatrix} r(0) & r(1) & \dots & r(p-1) \\ r(1) & r(0) & \dots & r(p-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(p-1) & r(p-2) & \dots & r(0) \end{pmatrix}.$$

7.1 PAVYZDYS. Tarkime $p = 1$. Tuomet AR(1) modeliui turime

$$\sqrt{n}(\hat{\phi} - \phi) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{\sigma^2}{r(0)}\right).$$

Kadangi $r(0) = \phi^2/(1 - \phi^2)$, tai $\sqrt{n}(\hat{\phi} - \phi) \xrightarrow{d} N(0, 1 - \phi^2)$, arba

$$\hat{\phi} \sim \text{AN}\left(\phi, \frac{1 - \phi^2}{n}\right).$$

Remiantis pastarąja teorema, galima konstruoti pasikliautinius intervalus bei kritines sritis atitinkamų hipotezių tikrinimui.

Kitas būdas, dažnai taikomas praktikoje, remiasi Julo–Uolkerio lygčių panaudojimu. Trumpai aprašysime jį. Padauginę skaliariškai lygtį $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + Z_t$ iš X_{t-k} , gausime lygybę $r(k) = \phi_1 r(k-1) + \dots + \phi_p r(k-p)$, kurią perrašę koreliacijoms turėsime

$$\rho(k) = \phi_1 \rho(k-1) + \dots + \phi_p \rho(k-p), \quad k = 1, \dots, p.$$

Šias lygtis galime perrašyti matriciniu pavidalu:

$$\begin{pmatrix} \rho(1) \\ \rho(2) \\ \vdots \\ \rho(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(0) & \rho(1) & \dots & \dots & \rho(p-1) \\ \rho(1) & \rho(0) & \dots & \dots & \rho(p-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \rho(p-1) & \rho(p-2) & \dots & \dots & \rho(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{pmatrix}.$$

Pakeitę koreliacijas į jų empirinius analogus, gausime parametro ϕ Julo–Uolkerio įvertį:

$$\hat{\phi} = \begin{pmatrix} 1 & \hat{\rho}(1) & \dots & \dots & \hat{\rho}(p-1) \\ \hat{\rho}(1) & 1 & \dots & \dots & \hat{\rho}(p-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hat{\rho}(p-1) & \hat{\rho}(p-2) & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_2 \\ \vdots \\ \hat{\rho}_p \end{pmatrix}.$$

Pastebėsime, kad AR(p) atveju atvirkštinės matricos, naudojamos aukščiau, yra neišsigimusios. (Gerai žinoma, kad tam pakanka, kad $r(0) > 0$ ir $r(h) \rightarrow 0$, kai $n \rightarrow \infty$.) Nors šiuo atveju įvertis turi gražų išreikštinį pavidalą, susiduriama su sunkumais, kai norima skaičiuoti atvirkštinę matricią dideliems p ir n . Tokiu atveju gelbsti žinomi algoritmai, kaip, pavyzdžiui, Durbino–Levinsono ar inovacijų algoritmas. Jų aprašymą galima rasti Brockwell ir Davis (1991).

Slenkamojo vidurkio procesas. SV modelio parametru vertinimas pasirodo nėra toks paprastas kaip autoregresijos atveju. Iliustracijai imkime SV(1) modelį $X_t = Z_t - \theta Z_{t-1}$. Ieškosime parametro θ įverčio momentų metodu. Kadangi

$$\rho(1) = -\frac{\theta}{1 + \theta^2},$$

arba $\rho(1)\theta^2 + \rho(1) + \theta = 0$. Vadinasi, įvertis θ randamas iš

$$\hat{\theta} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\hat{\rho}^2(1)}}{2\hat{\rho}(1)}.$$

Taigi, gauname netiesinį įvertį, kurio savybes nelengva tirti. Dar sudėtingesnė situacija SV(q) atveju.

Kita vertus, patogu taikyti šiek tiek modifikuotą mažiausių kvadratų metodą. Jei SV(1) procesas yra apgėžiamas, t.y. $|\theta| < 1$, tai

$$Z_t = X_t + \theta Z_{t-1} = X_t + \theta X_{t-1} + \theta^2 X_{t-2} + \dots$$

Pažymėkime $S(\theta) = \sum_{t=1}^n Z_t^2$. Aišku, ši išraiška dar nėra tinkama θ įverčiui rasti. Norint gauti įvertį, kuris remiasi stebėjimais X_1, \dots, X_n , laikykime kad $Z_0 = 0$; tuomet ant aibės $Z_0 = 0$ turėsime

$$\begin{aligned} Z_1 &= X_1 + \theta Z_0 = X_1, \\ Z_2 &= X_2 + \theta Z_1 = X_2 + \theta X_1, \\ Z_3 &= X_3 + \theta Z_2 = X_3 + \theta X_2 + \theta^2 X_1, \\ &\dots \\ Z_n &= X_n + \theta Z_{n-1} = X_n + \theta X_{n-1} + \dots + \theta^{n-1} X_1. \end{aligned}$$

Tegul $S_*(\theta) = \sum_{t=1}^n Z_t^2|_{Z_0=0}$. Išraiškos $S_*(\theta)$ minimumo taško galima ieškoti taikant skaitinį Niutono metodą. Tokia procedūra dar vadinama *sąlyginio mažiausių kvadratų metodu*. Pagal jį, pasirenkame kažkurį pradinį tašką θ^* , $Z_t \equiv Z_t(\theta)$ pakeičiame į dydį

$$\tilde{Z}_t(\theta) = Z_t(\theta^*) + (\theta - \theta^*) \frac{dZ_t(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta=\theta^*} \quad (7.3)$$

ir išraišką $\sum_{t=1}^n \tilde{Z}_t^2(\theta)$ minimizuojame pagal θ . (7.3) yra tiesinė pagal θ , todėl nesunku rasti analitinę šio minimumo taško (pažymėkime jį $\theta_{(1)}$) išraišką.

Toliau θ^* keičiame į $\theta_{(1)}$ ir kartojame procedūrą. Pastebėsime, kad (7.3) išraiškoje išvestines galima skaičiuoti rekurentiškai, nes

$$\begin{aligned} \frac{dZ_t(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta=\theta^*} &= \frac{d(X_t + \theta Z_{t-1}(\theta))}{d\theta} \Big|_{\theta=\theta^*} \\ &= \frac{d(\theta Z_{t-1}(\theta))}{d\theta} \Big|_{\theta=\theta^*} \\ &= Z_{t-1}(\theta^*) + \theta^* \frac{dZ_{t-1}(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta=\theta^*}, \quad \frac{dZ_0(\theta)}{d\theta} = 0. \end{aligned}$$

Bendru $SV(q)$ atveju sąlyginiame mažiausių kvadratų metode reikia taikyti daugiamatę Niutono procedūrą, kur į sumą $S_*(\boldsymbol{\theta})$ įeina dydžiai $Z_t = X_t + \theta_1 Z_{t-1} + \dots + \theta_q Z_{t-q}$, $Z_0 = Z_{-1} = \dots = Z_{1-q} = 0$, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_q)$.

Autoregresijos-slenkamojo vidurkio procesas. Pradėkime nuo paprasto kauzalaus ir apgręžiamo ARSV(1,1) modelio:

$$X_t - \phi X_{t-1} = Z_t - \theta Z_{t-1}.$$

Panašiai kaip aukščiau, parametro (ϕ, θ) įvertį galima rasti sąlyginio mažiausių kvadratų metodo pagalba, minimizuojant $S_*(\theta) = \sum_{t=1}^n Z_t^2$, čia dydžiai $Z_t \equiv Z(\phi, \theta)$ randami iš lygčių

$$Z_t(\phi, \theta) = X_t - \phi X_{t-1} + Z_{t-1}(\phi, \theta), \quad Z_0 = X_0 = 0.$$

Panašiai elgiamasi ir bendro ARSV(p, q) modelio atveju. Iš formulių

$$Z_t = X_t - \phi X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p} + \theta_1 Z_{t-1} + \dots + \theta_q Z_{t-q}$$

su $X_0 = X_{-1} = \dots = X_{1-p} = Z_0 = \dots = Z_{1-q} = 0$ randame $Z_t \equiv Z(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta})$, $t = p+1, \dots, n$, ir minimizuojame pagal $(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta})$ išraišką $S_*(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}) = \sum_{t=1}^n Z_t^2(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta})$.

7.2 Didžiausio tikėtinumo metodas

Tarkime, imtis X_1, \dots, X_n gauta stebint AR(1) seką $X_t = \phi X_{t-1} + Z_t$, čia Z_t yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę $N(0, \sigma^2)$ dydžiai. Z_2, \dots, Z_n tankio funkcija yra

$$f(Z_2, \dots, Z_n) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{\frac{n-1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=2}^n Z_t^2 \right\}.$$

Kadangi $Z_2 = X_2 - \phi X_1, \dots, Z_n = X_n - \phi X_{n-1}$, tai sąlyginis X_2, \dots, X_n tankis atžvilgiu X_1 yra

$$f(X_2, \dots, X_n | X_1) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{\frac{n-1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=2}^n (X_t - \phi X_{t-1})^2 \right\}.$$

Kita vertus, kadangi $Y_1 \sim N(0, \sigma^2/(1 - \phi^2))$, t.y.

$$f(X_1) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - \phi^2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (1 - \phi^2) X_1^2 \right\}.$$

tai

$$\begin{aligned} L(\phi, \sigma^2) &\equiv f(X_1, \dots, X_n) \\ &= f(X_2, \dots, X_n | X_1) f(X_1) \\ &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{\frac{n}{2}} \sqrt{1 - \phi^2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[\sum_{t=2}^n (X_t - \phi X_{t-1})^2 + (1 - \phi^2) X_1^2 \right] \right\} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{\frac{n}{2}} \sqrt{1 - \phi^2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} S(\phi) \right\}, \end{aligned}$$

kur $S(\phi) = \sum_{t=2}^n (X_t - \phi X_{t-1})^2 + (1 - \phi^2) X_1^2$. Tuomet logaritminė tikėtinumo funkcija yra

$$\lambda(\phi, \sigma^2) := \ln L(\phi, \sigma^2) = \frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 + \frac{1}{2} \ln(1 - \phi^2) - \frac{1}{2\sigma^2} S(\phi).$$

Iš čia, sprenddami lygtį $\frac{\partial \lambda(\phi, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = 0$, gaunam

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{S(\hat{\phi})}{n}.$$

Aprašysime kelis $\hat{\phi}$ radimo metodus. 1) Naudojant skaitinius metodus, galima rasti $\hat{\phi}$, kuris maksimizuoja tikslią log-tikėtinumo funkciją $\lambda(\phi, \sigma^2)$. 2) Skaičiavimus galima supaprastinti, minimizuojant tik narį $S(\phi)$ ir turint galvoje, kad atmetamame naryje $(1/2) \ln(1 - \phi^2)$ parametras ϕ nėra arti 1. 3) Paprasčiausia yra minimizuoti $S_*(\phi)$ išraiškoje $S(\phi) = S_*(\phi) + (1 - \phi^2) X_1^2$, turint galvoje, kad narys $(1 - \phi^2) X_1^2$ yra mažas palyginus su pirmuoju dėmeniu kai n dideli (galima gauti sprendinio išreikštinę formą).

Pastebėsime, kad visų trijų įverčių asimptotinės savybės yra vienodos. Panašiai elgiamasi ir bendro ARSV(p, q) modelio atveju. Teoremos apie įverčių asimptotinį elgesį yra gerai žinomos, žr. Brockwell ir Davis (1991).

LIEKANŲ ANALIZĖ

7.3 Dalinės autokoreliacijos funkcija

Kaip žinome, slenkamojo vidurkio modelio

$$X_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \cdots + \theta_q Z_{t-q}, \quad Z_t \sim BT(0, \sigma^2)$$

kovariacinė funkcija yra

$$r(h) = \begin{cases} 0, & |h| > q, \\ \sigma^2 \sum_{i=0}^{q-|h|} \theta_i \theta_{i+|h|}, & |h| \leq q, \end{cases}$$

t.y. iš koreliacinės funkcijos $\rho(h) = r(h)/r(0)$ eilės galima identifikuoti SV modelio eilę. Akivaizdu, kad analogiškas kelias netinka autoregresijos atveju. Žemiau paaiškinsime, kaip identifikaciją daryti autoregresijos modelio atveju.

Fiksuokime $k > 1$ ir nagrinėkime imtį $X_{t-k}, X_{t-k+1}, \dots, X_t$ iš stacionarios sekos $\{X_t\}$ su nuliniu vidurkiu. Tarkime, $\hat{X}_t := P_{\overline{\text{sp}}\{X_{t-k+1}, \dots, X_{t-1}\}} X_t$ yra vieno žingsnio X_t prognozė atžvilgiu $X_{t-k+1}, \dots, X_{t-1}$, čia $\overline{\text{sp}}\{X_t, t \in T\}$ žymi tiesinį uždara apvaskalą generuotą $X_t, t \in T$. Tuomet

$$\hat{X}_t = \beta_1 X_{t-1} + \cdots + \beta_{k-1} X_{t-k+1},$$

kur $\beta_1, \dots, \beta_{k-1}$ randami atitinkamo algoritmo pagalba. Pažymėkime liekaną

$$\hat{Z}_t = X_t - \hat{X}_t = X_t - \beta_1 X_{t-1} - \cdots - \beta_{k-1} X_{t-k+1}.$$

Dėl stacionarumo, vieno žingsnio X_{t-k} prognozė „atgal“ $\hat{\hat{X}}_{t-k} := P_{\overline{\text{sp}}\{X_{t-k+1}, \dots, X_{t-1}\}} X_{t-k}$ yra

$$\hat{\hat{X}}_{t-k} = \beta_1 X_{t-k+1} + \cdots + \beta_{k-1} X_{t-1},$$

o liekana

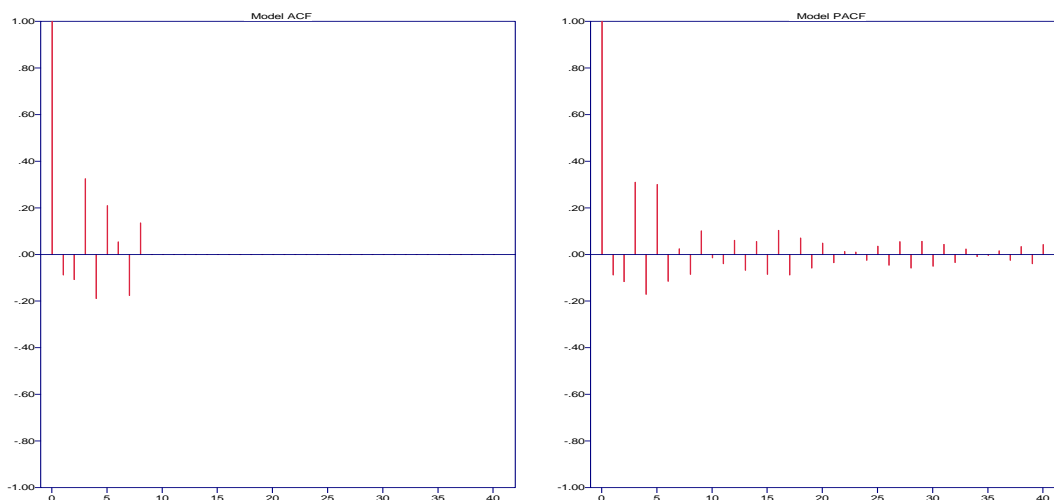
$$\hat{\hat{Z}}_{t-k} = X_{t-k} - \hat{\hat{X}}_{t-k} = X_{t-k} - \beta_1 X_{t-k+1} - \cdots - \beta_{k-1} X_{t-1}.$$

Koreliacija tarp liekanų \hat{Z}_t ir $\hat{\hat{Z}}_{t-k}$ vadinama *dalinės autokoreliacijos funkcija* (DAKF) (angl. PACF – partial autocorrelation function). Ją žymėsime $\alpha(k)$.

7.1 APIBRĖŽIMAS. Stacionarios sekos $\{X_t\}$ dalinės autokoreliacijos funkcija apibrėžiama

$$\begin{aligned} \alpha(k) &= \text{Corr}(\hat{Z}_t, \hat{\hat{Z}}_{t-k}) = \text{Corr}(\hat{Z}_{k+1}, \hat{\hat{Z}}_1) \\ &= \text{Corr}(X_{k+1} - P_{\overline{\text{sp}}\{X_2, \dots, X_k\}} X_{k+1}, X_1 - P_{\overline{\text{sp}}\{X_2, \dots, X_k\}} X_1), \quad k \geq 2, \\ \alpha(1) &= \rho(1). \end{aligned}$$

16 paveiksle pavaizduota slenkamojo vidurkio su $q = 8$ proceso koreliacija ir dalinė autokoreliacija.



16 pav. SV(8) proceso su koeficientais $(\theta_1, \dots, \theta_8) = (0, 2; -0, 3; 0, 4; -0, 1; 0, 1; 0, 2; -0, 3; 0, 2)$ koreliacija ir dalinė autokoreliacija, $Z_t \sim N(0, 1)$.

7.2 PAVYZDYS. Tegul X_1, X_2, X_3 yra imtis iš stacionarios sekos. Tuomet (patikrinkite, kad $\beta_1 = \rho(1)$)

$$\hat{X}_3 = \rho(1)X_2, \quad \hat{X}_1 = \rho(1)X_2.$$

Todėl,

$$\begin{aligned} \alpha(2) &= \text{Corr}(X_3 - \rho(1)X_2, X_1 - \rho(1)X_2) \\ &= \frac{\text{Cov}(X_3 - \rho(1)X_2, X_1 - \rho(1)X_2)}{\sqrt{D(X_3 - \rho(1)X_2)}\sqrt{D(X_1 - \rho(1)X_2)}} \\ &= \frac{\rho(2) - \rho^2(1)}{1 - \rho^2(1)}, \end{aligned}$$

nes

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_3 - \rho(1)X_2, X_1 - \rho(1)X_2) &= r(2) - \rho(1)r(1) - \rho(1)r(1) + \rho^2(1)r(0) \\ &= r(0)(\rho(2) - \rho^2(1)), \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned}
D(X_3 - \rho(1)X_2) &= D(X_1 - \rho(1)X_2) \\
&= DX_3 - 2\rho(1) \text{Cov}(X_3, X_2) + \rho^2(1)DX_2 \\
&= r(0)(1 - \rho^2(1)).
\end{aligned}$$

Jeigu tarsime, kad seka X_t aprašoma AR(1) lygtimi, tai turėsime $\rho(k) = \phi^k$. Vadinasi, $\alpha(2) = 0$. Nesunku matyti, kad $\alpha(k) = 0$, kai $k \geq 2$.

7.3 PAVYZDYS. Nagrinėkime SV(1) modelį $X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$, $|\theta| < 1$. Tuomet, kaip matėm,

$$\begin{aligned}
\alpha(1) &= \rho(1) = \frac{\theta}{1 + \theta^2}, \\
\alpha(2) &= \frac{\rho(2) - \rho^2(1)}{1 - \rho^2(1)} = \frac{-\rho^2(1)}{1 - \rho^2(1)} \\
&= -\frac{\theta^2}{1 + \theta^2 + \theta^4}.
\end{aligned}$$

Nesudėtingi skaičiavimai duoda bendrą DAKF formulę:

$$\alpha(k) = \frac{(-1)^{k+1} \theta^k (1 - \theta^2)}{1 - \theta^{2(k+1)}}.$$

Panašios išvados galioja ir bendru kauzalaus AR(p) proceso atveju, t.y. kai $X_n = \phi_1 X_{n-1} + \dots + \phi_p X_{n-p} + Z_n$. Pirmiausia pastebėsime, kad su $n > p$ teisinga

$$\begin{aligned}
\hat{X}_n &= P_{\overline{\text{sp}}\{X_2, \dots, X_{n-1}\}} X_n \\
&= P_{\overline{\text{sp}}\{X_2, \dots, X_{n-1}\}} (\phi_1 X_{n-1} + \dots + \phi_p X_{n-p} + Z_n) \\
&= \phi_1 P_{\overline{\text{sp}}\{X_2, \dots, X_{n-1}\}} X_{n-1} + \dots + \phi_p P_{\overline{\text{sp}}\{X_2, \dots, X_{n-1}\}} X_{n-p} + P_{\overline{\text{sp}}\{X_2, \dots, X_{n-1}\}} Z_n \\
&= \phi_1 X_{n-1} + \dots + \phi_p X_{n-p} \\
&= X_n - Z_n.
\end{aligned}$$

Iš kitos pusės, dėl stacionarumo,

$$\begin{aligned}
\hat{X}_1 &= P_{\overline{\text{sp}}\{X_2, \dots, X_{n-1}\}} X_1 \\
&= \phi_1 X_2 + \dots + \phi_p X_{p+1}.
\end{aligned}$$

Taigi, jei $n > p + 1$,

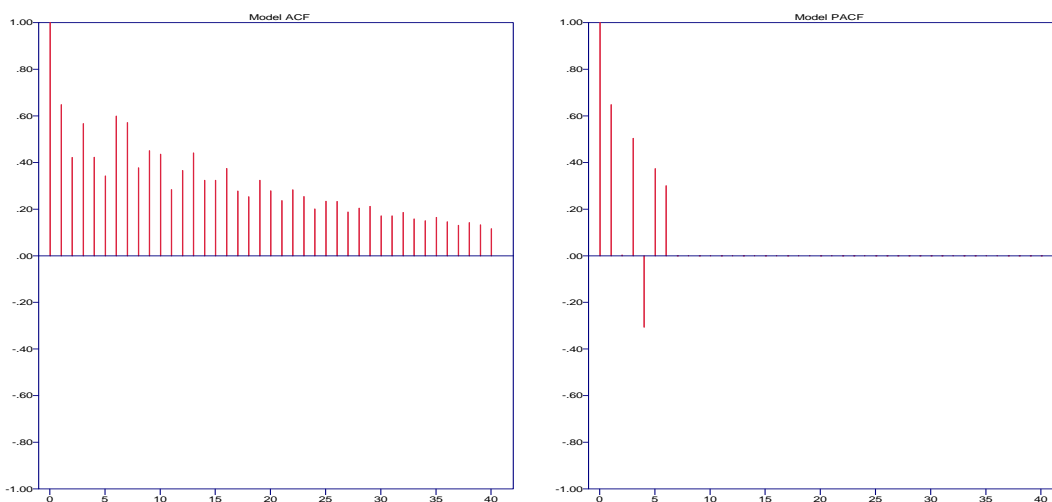
$$\begin{aligned}
 \alpha(n-1) &= \text{Corr}(\hat{Z}_n, \hat{Z}_1) \\
 &= \text{Corr}(X_n - \hat{X}_n, X_1 - \hat{X}_1) \\
 &= \text{Corr}(Z_n, X_1 - \phi_1 X_2 - \dots - \phi_p X_{p+1}) \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

nes dydis $X_1 - \phi_1 X_2 - \dots - \phi_p X_{p+1} \equiv f(Z_{p+1}, Z_p, \dots)$ nekoreliuoja su Z_n .
Taigi gavome:

7.1 teiginys. *Dalinės autokoreliacijos funkcija modeliui AR(p) tenkina*

$$\alpha(k) = 0, \quad k > p.$$

17 paveiksle pavaizduota autoregresijos proceso su $p = 6$ koreliacija ir dalinė autokoreliacija.



17 pav. AR(6) proceso su koeficientais $(\phi_1, \dots, \phi_6) = (0, 8; -0, 5; 0, 6; -0, 4; 0, 1; 0, 3)$ koreliacija ir dalinė autokoreliacija, $Z_t \sim N(0, 1)$.

Dalinės autokoreliacijos sąvoka, kaip jau minėjom, yra tampriai susijusi su prognozavimu. Tegul prognozės išraiškoje

$$P_{\text{sp}\{X_1, \dots, X_n\}} X_{n+1} = \phi_{n1} X_1 + \dots + \phi_{n1} X_n$$

koeficientai $\phi_{n1}, \dots, \phi_{nn}$ visiems n nustatomi vienareikšmiškai, t.y. kai kovariacijų matrica

$$\begin{pmatrix} r(0) & r(1) & \dots & r(n) \\ r(1) & r(0) & \dots & r(n-1) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ r(n) & r(n-1) & \dots & r(0) \end{pmatrix}$$

neišsigimusi su visais n (taip yra, jeigu $r(0) > 0$ ir $r(h) \rightarrow 0$ su $h \rightarrow \infty$). Tada iš prognozės lygties

$$\langle X_{n+1} - (\phi_{n1}X_1 + \dots + \phi_{nn}X_n), X_j \rangle = 0, \quad j = 1, \dots, n$$

gauname tokias Julo–Uolkerio tipo lygtis:

$$\begin{pmatrix} \rho(0) & \rho(1) & \dots & \rho(n-1) \\ \rho(1) & \rho(0) & \dots & \rho(n-2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \rho(n-1) & \rho(n-2) & \dots & \rho(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{n1} \\ \phi_{n2} \\ \vdots \\ \phi_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(1) \\ \rho(2) \\ \vdots \\ \rho(n) \end{pmatrix}.$$

Remiantis Durbino–Levinsono algoritmu (žr. Brockwell ir Davis (1991) parodoma, kad dalinė autokoreliacijos funkcija $\alpha(n)$ sutampa su ϕ_{nn} .

Iš lygybės

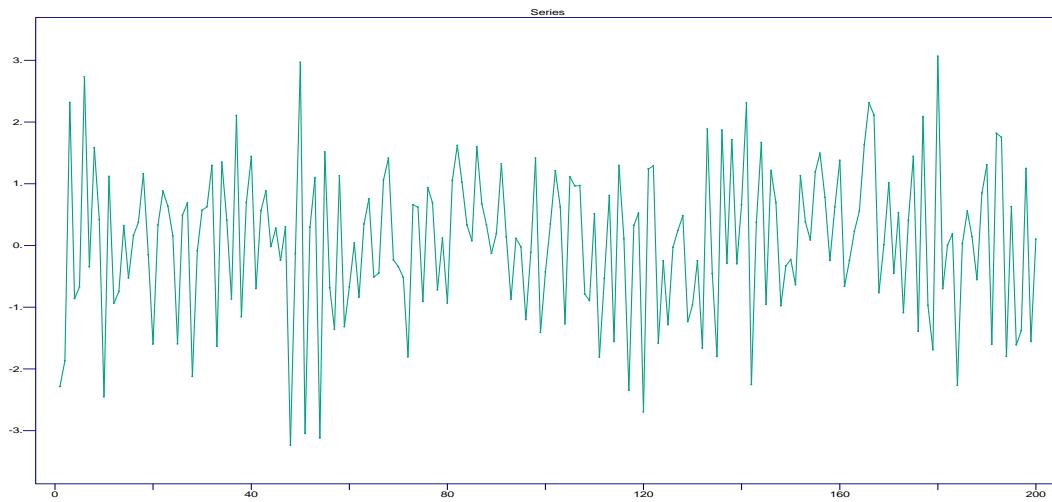
$$\begin{pmatrix} \phi_{n1} \\ \phi_{n2} \\ \vdots \\ \phi_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(0) & \rho(1) & \dots & \rho(n-1) \\ \rho(1) & \rho(0) & \dots & \rho(n-2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \rho(n-1) & \rho(n-2) & \dots & \rho(0) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \rho(1) \\ \rho(2) \\ \vdots \\ \rho(n) \end{pmatrix},$$

pakeitus koreliacijas $\rho(k)$ empirinėmis koreliacijomis $\hat{\rho}(k)$, galima gauti dalinės autokoreliacijos įvertį $\hat{\alpha}(k) = \hat{\phi}_{kk}$.

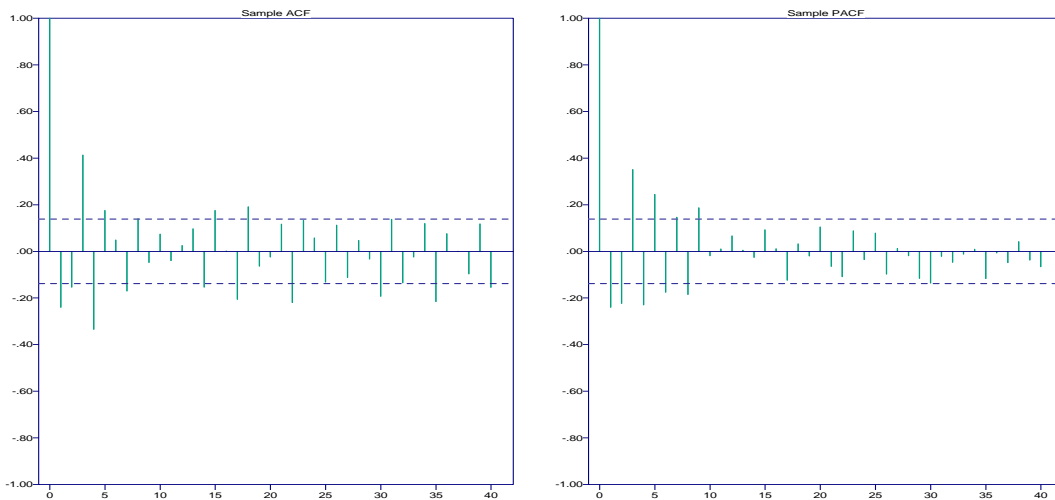
Panašiai kaip slenkamojo vidurkio atveju empirinė koreliacinė funkcija padeda nustatyti modelio eilę, autoregresijos modelio eilę gali padėti nustatyti empirinė dalinės autokoreliacijos funkcija. Pažymėtina, kad DAKF nėra informatyvi slenkamojo vidurkio atveju.

18 ir 19 paveiksluose pavaizduota slenkamojo vidurkio proceso su $q = 8$ generuota trajektorija, bei empirinės koreliacija ir dalinė autokoreliacija.

20 ir 21 paveiksluose pavaizduota autoregresijos proceso su $p = 6$ generuota trajektorija, bei empirinės koreliacija ir dalinė autokoreliacija.

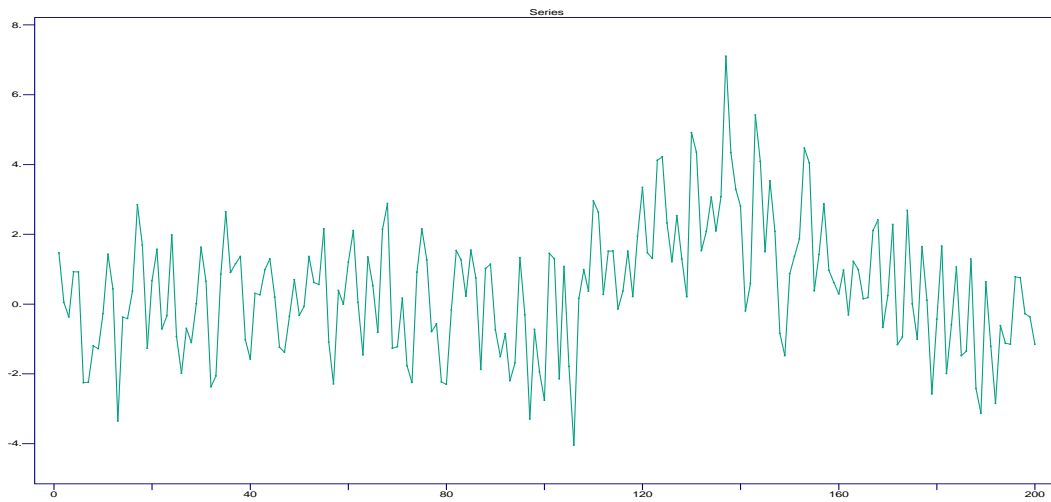


18 pav. SV(8) proceso (žr. 16 pav.) generuota realizacija, $Z_t \sim N(0, 1)$.

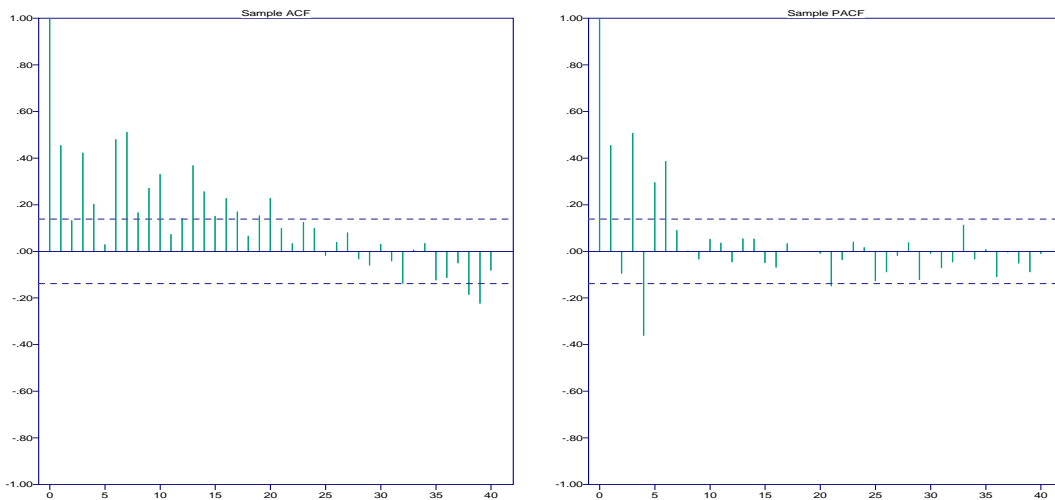


19 pav. SV(8) proceso (žr. 16 pav.) empirinė autokoreliacija ir empirinė dalinė autokoreliacija.

Kaip ir empirinei kovariacijai, žinomos teoremos apie asimptotinį empirinės dalinės autokoreliacijos skirstinį. Pavyzdžiui, AR(p) modelio atveju,



20 pav. AR(6) proceso (žr. 17 pav.) generuota realizacija, $Z_t \sim N(0, 1)$.



21 pav. AR(6) proceso (žr. 17 pav.) empirinė autokoreliacija ir empirinė dalinė autokoreliacija.

su $n \rightarrow \infty$

$$\sqrt{n}\hat{\phi}_{kk} \xrightarrow{d} N(0, 1), \text{ kai } k > p.$$

8 Spektrinė analizė

Stacionarių laiko eilučių analizę „laiko srityje“ patogiau suvesti į „dažnių sritį“, kuri daugeliu atveju yra patogesnė ir informatyvesnė. Pradžioje įvesime kompleksinio stacionaraus proceso sąvoką.

8.1 Spektrinė kovariacinės funkcijos išraiška

8.1 APIBRĖŽIMAS. $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ vadinamas kompleksine stacionaria seka, jeigu:

- 1) $\forall t \in \mathbb{Z} \quad E|X_t|^2 < \infty,$
- 2) $\forall t \in \mathbb{Z} \quad EX_t = EX_0,$
- 3) $\forall t, h \in \mathbb{Z} \quad \text{Cov}(X_{t+h}, X_t) \equiv E(X_{t+h} - EX_{t+h})(\overline{X_t - EX_t}) = \text{Cov}(X_h, X_0).$

Kaip ir anksčiau žymėsime $r(h) = \text{Cov}(X_h, X_0)$. Nesunku įsitikinti, kad $r(h)$ tenkina savybes:

- 1) $r(0) \geq 0,$
- 2) $|r(h)| \leq r(0)$ su visais $h,$
- 3) $r(h) = \overline{r(-h)}$ su visais h (tokia funkcija vadinama Ermito).

Panašiai kaip ir 4.3 teoremoje galėtume įrodyti, kad Ermito funkcija $r : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ yra kompleksinės stacionarios sekos kovariacinė funkcija tada ir tik tada, kai $r(\cdot)$ yra neneigiamai apibrėžta, t.y. $\forall n \in \mathbb{N}, (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n, (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{Z}^n$

$$\sum_{i,j=1}^n a_i \bar{a}_j r(t_i - t_j) \geq 0.$$

Dabar pateiksime pavyzdį, iliustruojantį pagrindinę šio skyrelio teoremą.

8.1 PAVYZDYS. Seką $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ apibrėžkime lygybe

$$X_t = \sum_{k=1}^N A_k e^{it\lambda_k}; \quad (8.1)$$

čia: $-\pi < \lambda_1 < \dots < \lambda_N \leq \pi$, A_1, \dots, A_N – nekoreliuoti atsitiktiniai dydžiai ir $EA_k = 0$, $E|A_k|^2 = \sigma_k^2 > 0$ su $k = 1, 2, \dots, N$. Taip apibrėžta seka yra stacionari su vidurkiu 0 ir kovariacine funkcija

$$r(h) = \sum_{k=1}^N \sigma_k^2 e^{ih\lambda_k}. \quad (8.2)$$

Apibrėžkime funkciją

$$F(\lambda) = \sum_{k:\lambda_k \leq \lambda} \sigma_k^2.$$

Tada kovariacinė funkcija (8.2) gali būti užrašyta kaip Lebego–Styltjeso integralas:

$$r(h) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ih\lambda} dF(\lambda). \quad (8.3)$$

Stacionarią seką (8.1) galima interpretuoti kaip harmonikų $e^{it\lambda_k}$ su atsitiktinėmis amplitudėmis A_k ir intensyvumais $\sigma_k^2 = E|A_k|^2$ sumą. Taigi, žinodami $F(\lambda)$, galime apskaičiuoti kovariacinę funkciją $r(h)$ ir kartu nustatyti kiekvieno dažnio λ_k intensyvumą.

Funkcija $F(\cdot)$, atitinkamai normuota, yra pasiskirstymo funkcija (šiam pavyzdyje ji dalimis pastovi). Jos nešėjas yra sukoncentruotas intervale $(-\pi, \pi]$, t.y. $F(\lambda) = 0$ su $\lambda \leq -\pi$ ir $F(\lambda) = F(\pi)$ su $\lambda > \pi$. Žemiau suformuluota 8.1 teorema sako, kad kiekvienos stacionarios sekos kovariacinė funkcija gali būti užrašyta (8.3) pavidalu. Kita vertus, žinoma, kad bet kuriam stacionariam procesui Y_t galima sukonstruoti (8.1) pavidalo procesą su atitinkamais $\sigma_1^2, \dots, \sigma_N^2$ ir pakankamai dideliu N , kurio spektrinė pasiskirstymo funkcija ir kovariacinė funkcija aproksimuotų atitinkamas Y_t charakteristikas koku norima tikslumu.

8.2 PAVYZDYS. Tarkime, $Z_t \sim BT(0, 1)$, t.y.

$$r(h) = \begin{cases} 1, & \text{kai } h = 0, \\ 0, & \text{kai } h \neq 0 \end{cases}$$

Tada

$$r(h) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ih\lambda} dF(\lambda) \quad \text{su} \quad F(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} f(\nu) d\nu;$$

čia $f(\nu) = \frac{1}{2\pi}$, $-\pi < \nu \leq \pi$.

Matome, kad balto triukšmo seka $\{Z_t\}$ yra sudaryta iš harmonikų, turinčių tą patį intensyvumą. Tai paaiškina tokios sekos pavadinimą – balta spalva yra gaunama iš vienodo intensyvumo spektro spalvų.

Pažymėkime raide \mathbb{F} aibę funkcijų $F : [-\pi, \pi] \rightarrow [0, \infty)$, kurios yra tolydžios iš dešinės, nemažėjančios, aprėžtos ir tenkina sąlygą $F(-\pi) = 0$.

8.1 teorema. *Kompleksinė funkcija $\{r(h), h \in \mathbb{Z}\}$ yra stacionaraus proceso kovariacinė funkcija tada ir tik tada, kai*

$$r(h) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ih\lambda} dF(\lambda) \quad (8.4)$$

su kažkuria (ir vienintele) $F \in \mathbb{F}$. F vadinama spektrine pasiskirstymo funkcija, o jeigu $F(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} f(\nu) d\nu$, tai $f(\cdot)$ – spektrinis tankis.

Sekanti teorema nusako spektrinio tankio sąryšį su kovariacine funkcija.

8.2 teorema. *Absoliučiai sumuojama kompleksinė funkcija $r(\cdot)$ yra stacionarios sekos kovariacinė funkcija tada ir tik tada, kai*

$$\sum_{h=-\infty}^{\infty} e^{-ih\lambda} r(h) \geq 0$$

su visais $\lambda \in [-\pi, \pi]$. Tokiu atveju funkcija $f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-ih\lambda} r(h)$ yra spektrinis tankis, atitinkantis kovariacinę funkciją $r(\cdot)$.

8.1 PASTABA. Tarkime, $\{X_t\}$ yra realus stacionarus procesas. Tada jo kovariacinė funkcija

$$r(h) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\lambda h) dF(\lambda).$$

Jeigu egzistuoja spektrinis tankis $f(\cdot)$, tai $f(\lambda) = f(-\lambda)$, $-\pi \leq \lambda \leq \pi$, ir todėl

$$r(h) = 2 \int_0^{\pi} \cos(\lambda h) f(\lambda) d\lambda.$$

Taigi funkcija $f(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$, yra realaus stacionaraus proceso spektrinis tankis tada ir tik tada, kai:

- 1) $\forall \lambda \in [-\pi, \pi] \quad f(\lambda) \geq 0$,
- 2) $\forall \lambda \in [-\pi, \pi] \quad f(\lambda) = f(-\lambda)$,

$$3) \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) d\lambda < \infty.$$

Tai leidžia patikrinti, ar duota absoliučiai sumuojama funkcija $r(\cdot)$ yra kovariacinė funkcija, naudojantis daug patogesniu ir informatyvesniu kriterijumi nei, pavyzdžiui, 4.3 teorema.

8.1 PRATIMAS. Pasirėmę 8.2 teorema, parodykite kad funkcija

$$r(h) = \begin{cases} 1, & \text{kai } h = 0, \\ \rho, & \text{kai } |h| = 1, \\ 0, & \text{kai } |h| > 1 \end{cases}$$

yra kovariacinė funkcija tada ir tik tada, kai $|\rho| \leq 1/2$.

8.2 PRATIMAS. Įrodyti, kad kiekviena neneigiamai apibrėžta funkcija yra Ermito funkcija.

8.2 ARSV sekos spektrinis tankis

Čia išvesime ARSV sekos spektrinio tankio formulę, kuri seka iš bendros teoremos apie stacionarios sekos tiesinės transformacijos spektrą.

8.3 teorema. *Tarkime, $\{Y_t\}$ yra stacionarus kompleksinis procesas su nuliniu vidurkiu, spektrine pasiskirstymo funkcija F_Y ir*

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Y_{t-j};$$

čia $\sum_{-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty$. Tada $\{X_t\}$ – stacionari seka su spektrine pasiskirstymo funkcija

$$F_X(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} |\psi(e^{-i\nu})|^2 dF_Y(\nu), \quad \lambda \in [-\pi, \pi];$$

čia $\psi(e^{-i\nu}) \equiv \sum_{-\infty}^{\infty} \psi_j e^{-i\nu j}$.

Iš pastarosios teoremos gauname, kad jeigu egzistuoja stacionarios sekos $\{Y_t\}$ spektrinis tankis f_Y ir $X_t = \sum_{-\infty}^{\infty} \psi_j Y_{t-j}$, kur $\{\psi_j\}$ yra absoliučiai sumuojama seka, tai $\{X_t\}$ spektrinis tankis nusakomas formule

$$f_X(\lambda) = |\psi(e^{-i\lambda})|^2 f_Y(\lambda).$$

Iš čia išplaukia ARSV(p, q) spektrinio tankio formulė.

8.1 išvada. Tarkime, $\{X_t\}$ yra ARSV(p, q) seka

$$\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t, \quad Z_t \sim BT(0, \sigma^2);$$

čia $\phi(z)$ su $\theta(z)$ neturi bendrų nulių ir $\phi(z) \neq 0$, kai $|z| = 1$. Tada egzistuoja sekos $\{X_t\}$ spektrinis tankis

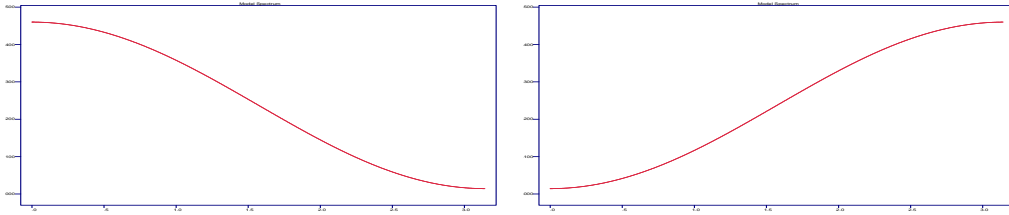
$$f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \frac{\theta(e^{-i\lambda})}{\phi(e^{-i\lambda})} \right|^2.$$

(Toks tankis vadinamas racionaliuoju spektriniu tankiu.)

8.3 PAVYZDYS. Tegul X_t aprašomas SV(1) lygtimi $X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$. Tuomet spektrinis tankis yra

$$f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} |1 + \theta e^{-i\lambda}|^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi} (1 + 2\theta \cos \lambda + \theta^2).$$

22 paveiksle pavaizduoti du SV(1) spektrinio tankio atvejai.



22 pav. SV(1) modelio spektrinis tankis su $\theta = 0,7$ (kairėje) ir $\theta = -0,7$ (dešinėje), $\sigma^2 = 1$.

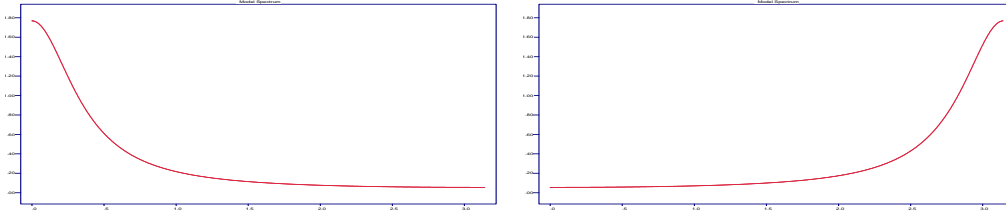
8.4 PAVYZDYS. Tegul X_t aprašomas AR(1) lygtimi $X_t = \phi X_{t-1} + Z_t$. Tuomet spektrinis tankis yra

$$f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} |1 - \phi e^{-i\lambda}|^{-2} = \frac{\sigma^2}{2\pi} (1 - 2\phi \cos \lambda + \phi^2)^{-2}.$$

23 paveiksle pavaizduoti du AR(1) spektrinio tankio atvejai.

8.2 PASTABA. Tarkime X_t tenkina lygtį

$$\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t, \quad Z_t \sim BT(0, \sigma^2);$$



23 pav. AR(1) modelio spektrinis tankis su $\phi = 0,7$ (kairėje) ir $\phi = -0,7$ (dešinėje), $\sigma^2 = 1$

čia $\phi(z) \neq 0$, kai $|z| = 1$. Toks procesas, bendrai, nėra kauzalus ir apgręžiamas, tačiau jį galima pakeisti kita ARSV seka, turinčia tą patį spektrinį tankį (ir, tuo pačiu, kovariacinę funkciją), kuris jau būtų kauzalus ir apgręžiamas ARSV procesas. Paaškinsime šią procedūrą.

Pažymėkime daugianario $\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p$ nulius a_1, \dots, a_p , o daugianario $\theta(z) = 1 + \theta_1 z + \dots + \theta_q z^q$ nulius b_1, \dots, b_q . Sunumeruokime juos taip, kad pirmieji būtų tie, kurie yra už skritulio $|z| \leq 1$, o likusieji – skritulyje $|z| < 1$, t.y.

$$|a_j| > 1, \quad j = 1, \dots, s, \quad |a_j| < 1, \quad j = s + 1, \dots, p;$$

$$|b_k| > 1, \quad k = 1, \dots, r, \quad |b_k| < 1, \quad k = r + 1, \dots, q;$$

Apibrėžkime

$$\tilde{\phi}(z) = \prod_{j=1}^s \left(1 - \frac{z}{a_j}\right) \prod_{j=s+1}^p (1 - \bar{a}_j z),$$

$$\tilde{\theta}(z) = \prod_{k=1}^r \left(1 - \frac{z}{b_k}\right) \prod_{k=r+1}^q (1 - \bar{b}_k z).$$

Tuomet visi $\tilde{\phi}(z)$ ir $\tilde{\theta}(z)$ nuliai yra už skritulio $|z| \leq 1$. Nagrinėkime ARSV(p, q) lygtį

$$\tilde{\phi}(B)\tilde{X}_t = \tilde{\theta}(B)\tilde{Z}_t, \quad \tilde{Z}_t \sim BT\left(0, \sigma^2 \frac{\prod_{j=s+1}^p |a_j|^2}{\prod_{k=r+1}^q |b_k|^2}\right).$$

Taip apibrėžtas procesas \tilde{X}_t bus kauzalus ir apgręžiamas ARSV(p, q) procesas, o jo spektrinis tankis sutaps su sekos $\{X_t\}$ spektriniu tankiu, t.y. $f_{\tilde{X}}(\lambda) = f_X(\lambda)$.

8.3 Periodograma

Tarkime, kad X_1, \dots, X_n yra imtis iš stacionarios sekos $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$, kurios vidurkis dėl paprastumo lygus nuliui ir kovariacija $r(n) = EX_n X_0$. Aptarsime, kaip šiuo atveju galima būtų vertinti sekos $\{X_t\}$ spektrinį tankį.

Apibrėžkime funkciją $f_n(\cdot)$ lygybe

$$f_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|m| < n} \left(1 - \frac{|m|}{n}\right) r(m) e^{-im\lambda}.$$

Nesunku matyti, kad jei $\sum_{-\infty}^{\infty} |r(m)| < \infty$ (tada egzistuoja spektrinis tankis), tai $f_n(\lambda)$ konverguoja į $(2\pi)^{-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} r(m) e^{-im\lambda} = f(\lambda)$ su visais λ iš intervalo $[-\pi, \pi]$. Todėl natūralus spektrinio tankio įvertis yra funkcija

$$I_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|m| < n} \left(1 - \frac{|m|}{n}\right) \tilde{r}_n(m) e^{-im\lambda}, \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi; \quad (8.5)$$

$$\tilde{r}_n(m) = \frac{1}{n - |m|} \sum_{k=1}^{n-|m|} X_k X_{k+|m|}, \quad |m| < n$$

yra nepaslinktasis kovariacinės funkcijos įvertis. Nesunku patikrinti, kad funkcija $I_n(\lambda)$ gali būti užrašyta

$$I_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi n} \left| \sum_{k=1}^n X_k e^{-i\lambda k} \right|^2, \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi. \quad (8.6)$$

Tokia imties X_1, \dots, X_n funkcija $I_n(\lambda)$ yra vadinama *periodograma*.

8.3 PASTABA. Tuo atveju, kai stacionaraus proceso $\{X_t\}$ vidurkis nėra žinomas, kovariacijos $r(m)$ įvertis turėtų būti imamas

$$\tilde{r}_n(m) = \frac{1}{n - |m|} \sum_{k=1}^{n-|m|} (X_k - \bar{X})(X_{k+|m|} - \bar{X}).$$

Tokiu atveju, remiantis faktu $\sum_{k=1}^n e^{ik\lambda_j} = \sum_{k=1}^n e^{-ik\lambda_j} = 0$, kai $\lambda_j \neq 0$, (8.5) lygybė teisinga Furje dažniuose $\lambda_j = 2\pi j/n$:

$$I_n(\lambda_j) = \frac{1}{2\pi n} \sum_{k,l=1}^n (X_k - \bar{X})(X_l - \bar{X}) e^{-i(k-l)\lambda_j} = \frac{1}{2\pi} \sum_{|m| < n} \left(1 - \frac{|m|}{n}\right) \tilde{r}_n(m) e^{-im\lambda_j}.$$

Kadangi $E\tilde{r}_n(m) = r(m)$, tai iš (8.5) išplaukia, kad $EI_n(\lambda) = f_n(\lambda)$. Detalesnis periodogramos asimptotinio elgesio nagrinėjimas yra glaudžiai susijęs su Fejerio branduolio savybėmis. Priminsime, kad *Fejerio branduoliu* vadinama funkcija

$$\Phi_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi n} \left| \sum_{m=1}^n e^{i\lambda m} \right|^2 = \begin{cases} \frac{1}{2\pi n} \left(\frac{\sin \frac{n\lambda}{2}}{\sin \frac{\lambda}{2}} \right)^2, & \lambda \neq 0, \\ \frac{n}{2\pi}, & \lambda = 0. \end{cases}$$

Pastebėsime, kad periodogramos vidurkis gali būti užrašytas $EI_n(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(\nu - \lambda) f(\nu) d\nu$, todėl, remiantis Fejerio branduolio savybėmis, jei $\{X_t\}$ turi spektrinį tankį, tai

$$EI_n(\lambda) \rightarrow f(\lambda) \text{ beveik visur Lebegeo mato atžvilgiu.}$$

Panašiai, kaip ir kovariacinės funkcijos atveju suformuluosime teiginį apie konvergavimo greitį.

8.1 teiginys. *Jeigu $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ yra stacionari seka su nuliniu vidurkiu ir patenkinta sąlyga*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |m r(m)| < \infty,$$

tai

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(EI_n(\lambda) - f(\lambda)) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |m| r(m) e^{-im\lambda}.$$

Irodymas. Turime

$$\begin{aligned} n(EI_n(\lambda) - f(\lambda)) &= \frac{n}{2\pi} \left(\sum_{|m| < n} r(m) \left(1 - \frac{|m|}{n}\right) e^{-im\lambda} - \sum_{m=-\infty}^{\infty} r(m) \left(1 - \frac{|m|}{n}\right) e^{-im\lambda} \right) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \left(\sum_{|m| < n} |m| r(m) e^{-im\lambda} + n \sum_{|m| \geq n} r(m) e^{-im\lambda} \right). \end{aligned}$$

Kadangi

$$\left| n \sum_{|m| \geq n} r(m) e^{-im\lambda} \right| \leq \sum_{|m| \geq n} n |r(m)| \leq \sum_{|m| \geq n} |m| |r(m)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

tai iš čia išplaukia įrodinėjamas teiginys. \square

Nors periodograma ir yra asimptotiškai nepaslinktas spektrinio tankio įvertis, tačiau praktikoje ji nėra naudojama $f(\lambda)$ vertinti. Priežastis ta, kad $I_n(\lambda)$ nėra suderintasis spektrinio tankio $f(\lambda)$ įvertis kvadratinio vidurkio prasme. Tai matyti iš žemiau pateikiamų pavyzdžių.

8.5 PAVYZDYS. Tarkime, $\{X_t\}$ yra nepriklausomų, normaliai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių $X_t \sim N(0, 1)$ seka. Imties X_1, \dots, X_n periodograma taške 0

$$I_n(0) = \frac{1}{2\pi n} \left| \sum_{t=1}^n X_t \right|^2$$

turi tą patį pasiskirstymą kaip ir $\frac{1}{2\pi} Y^2$ su $Y \sim N(0, 1)$. Kadangi sekos $\{X_t\}$ spektrinis tankis $f(\lambda) \equiv \frac{1}{2\pi}$ ir $EY^4 = 3$, tai

$$\begin{aligned} E|I_n(0) - f(0)|^2 &= E \left| \frac{1}{2\pi} Y^2 - \frac{1}{2\pi} \right|^2 \\ &= \frac{1}{4\pi^2} (EY^4 - 1) = \frac{1}{2\pi^2} > 0. \end{aligned}$$

Suformuluosime bendresnius teiginius apie periodogramų skirtinguose dažniuose kovariaciją ir asimptotinę periodogramos dispersiją tuo atveju, kai nagrinėjamoji seka yra Gauso.

8.2 teiginys. Tarkime, $\{X_t\}$ yra stacionari Gauso seka su nuliniu vidurkiu ir spektrine tankio funkcija $f(\lambda)$. Tada su visais λ, ν iš $[-\pi, \pi]$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(I_n(\lambda), I_n(\nu)) &= \frac{1}{4\pi^2 n^2} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin n(\lambda - x)/2}{\sin(\lambda - x)/2} \frac{\sin n(\nu - x)/2}{\sin(\nu - x)/2} f(x) dx \right|^2 \\ &+ \frac{1}{4\pi^2 n^2} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin n(\lambda - x)/2}{\sin(\lambda - x)/2} \frac{\sin n(\nu + x)/2}{\sin(\nu + x)/2} f(x) dx \right|^2. \end{aligned}$$

Remiantis 8.2 teiginiu ir pastebint, kad antrasis dėmuo pastarojoje sumoje nyksta atveju $\lambda \neq \pm\pi, 0$, galima įrodyti tokį rezultatą.

8.4 teorema. Jeigu teisingos 8.2 prielaidos ir funkcija f yra tolydi, tai

$$\lim_{n \rightarrow \infty} DI_n(\lambda) = \begin{cases} f^2(\lambda), & \lambda \neq \pm\pi, 0, \\ 2f^2(\lambda), & \lambda = \pm\pi, 0. \end{cases}$$

8.4 Spektrinės pasiskirstymo funkcijos įvertis

Tarkime, X_1, \dots, X_n yra imtis iš stacionarios sekos su vidurkiu 0. Pažymėkime

$$\hat{F}_n(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} I_n(\nu) d\nu, \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi;$$

čia $I_n(\nu)$ yra periodograma, apibrėžta (8.6). Jeigu $|k| < n$, tai

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k} d\hat{F}_n(\lambda) &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k} I_n(\lambda) d\lambda \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k} \frac{1}{2\pi} \sum_{|m| < n} \left(1 - \frac{|m|}{n}\right) \tilde{r}_n(m) e^{-i\lambda m} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{|m| < n} \left(1 - \frac{|m|}{n}\right) \tilde{r}_n(m) \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(k-m)} d\lambda \\ &= \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \tilde{r}_n(k). \end{aligned} \quad (8.7)$$

Vadinasi, jeigu

$$\tilde{r}_n(k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} r(k) \quad \text{su tikimybe } 1,$$

tai

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k} d\hat{F}_n(\lambda) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k} dF(\lambda) \quad \text{su tikimybe } 1.$$

Iš čia išplaukia, kad funkcijos F tolydumo taškuose

$$\hat{F}_n(\lambda) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F(\lambda) \quad \text{su tikimybe } 1.$$

Jeigu gi $\tilde{r}_n(k) \rightarrow r(k)$ pagal tikimybę, tai galima įrodyti (pereinant prie posekių), kad

$$\hat{F}_n(\lambda) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F(\lambda) \quad \text{pagal tikimybę funkcijos } F \text{ tolydumo taškuose.}$$

8.5 Suglodintasis spektrinio tankio įvertis

Kaip matėme 8.3 skyrelyje, periodograma

$$I_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|m| < n} \hat{r}_n(m) e^{-im\lambda}$$

su

$$\hat{r}_n(m) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-|m|} X_k X_{k+|m|}, \quad 0 \leq |m| < n,$$

nėra suderintas spektrinės tankio funkcijos įvertis vidutinių kvadratų prasme. Todėl praktikoje $I_n(\lambda)$ keičiamas "suglodintu" įverčiu $I_n^w(\lambda)$, turinčiu formą

$$I_n^w(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|m| \leq K_n} w\left(\frac{m}{K_n}\right) \hat{r}_n(m) e^{-im\lambda}; \quad (8.8)$$

čia

$$\begin{aligned} w(x) &- \text{lyginė,} \\ &\text{tolydi intervale } [-1, 1], \quad (W1) \\ w(x) &= 0, \text{ kai } |x| > 1. \end{aligned}$$

Tokia funkcija w vadinama *langu*, o atitinkamas įvertis $I_n^w(\lambda)$ – *suglodintuoju spektrinio tankio įverčiu*.

Apibrėžkime

$$W_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|m| \leq K_n} w\left(\frac{m}{K_n}\right) e^{-im\lambda}, \quad \lambda \in [-\pi, \pi].$$

Kadangi (žr. (8.7) lygybę)

$$\hat{r}_n(m) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda m} I_n(\lambda) d\lambda,$$

tai

$$\begin{aligned} I_n^w(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{|m| \leq K_n} w\left(\frac{m}{K_n}\right) \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\nu m} I_n(\nu) d\nu e^{-im\lambda} = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \sum_{|m| \leq K_n} w\left(\frac{m}{K_n}\right) e^{-i(\nu-\lambda)m} I_n(\nu) d\nu = \int_{-\pi}^{\pi} W_n(\lambda - \nu) I_n(\nu) d\nu. \end{aligned}$$

Funkcija $W_n(\lambda)$ vadinama *spektriniu langu*.

Suformuluosime teoremą apie suglodintojo spektrinio tankio įverčio asimptotinę dispersiją, kai nagrinėjamoji seka yra Gauso.

8.5 teorema. *Sakykime, kad $\{X_t\}$ yra stacionari Gauso seka su nuliniu vidurkiu ir absoliučiai sumuojama kovariacine funkcija. Jeigu $I_n^w(\lambda)$ apibrėžta (8.8) lygybe, $w(x)$ tenkina (W1) sąlygas, $K_n \nearrow \infty$, $K_n/n \rightarrow 0$, tai*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{K_n} DI_n^w(\lambda) = \begin{cases} 2f^2(\lambda) \int_{-1}^1 w^2(x) dx, & \lambda = \pm\pi, 0, \\ f^2(\lambda) \int_{-1}^1 w^2(x) dx, & \lambda \neq \pm\pi, 0, \end{cases}$$

ir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{K_n} \text{Cov}(I_n^w(\lambda), I_n^w(\nu)) = 0, \text{ kai } \nu \neq \pm\lambda.$$

Toliau suformuluosime sąlygas, su kuriomis pateiktasis suglodintasis spektrinio tankio įvertis (8.8) yra asimptotiškai nepaslinktas. Tegul langui $w(x)$ teisingos tokios prielaidos:

$$\begin{aligned} &w(x) - \text{lyginė,} \\ &w(0) = 1, \\ &\forall x \in [-1, 1] \quad |w(x)| \leq M, \\ &w(x) = 0, \quad |x| > 1, \\ &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - w(x)}{|x|^q} = k \text{ su kažkokiais } q > 0 \text{ ir } k > 0. \end{aligned} \tag{W2}$$

8.6 teorema. *Tarkime, $\{X_t\}$ – stacionari seka su nuliniu vidurkiu ir kovariacija $r(\cdot)$. Tegul $I_n^w(\lambda)$ yra apibrėžtas (8.8) lygybe su langu $w(x)$, tenkinančiu (W2) sąlygas, $K_n \nearrow \infty$ ir*

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |m|^p |r(m)| < \infty \text{ su kažkokiu } p > 0. \tag{8.9}$$

1) jei $p \geq q$ ir arba $p \geq 1$, $\frac{K_n^q}{n} \rightarrow 0$, arba $p \leq 1$, $\frac{K_n^{q+1-p}}{n} \rightarrow 0$, tai

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n^q (EI_n^w(\lambda) - f(\lambda)) = -\frac{k}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |m|^q e^{-im\lambda} r(m);$$

2) jei $p < q$ ir arba $p \geq 1$, $\frac{K_n^p}{n} \rightarrow 0$, arba $p \leq 1$, $\frac{K_n}{n} \rightarrow 0$, tai

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n^p (EI_n^w(\lambda) - f(\lambda)) = 0.$$

8.4 PASTABA. Tarkime k – sveikas teigiamas skaičius ir $k \leq p$. Tada

$$f^{(k)}(\lambda) = \frac{(-i)^k}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} m^s e^{-im\lambda} r(m)$$

yra k -oji spektrinio tankio $f(\lambda)$ išvestinė. Iš (8.9) išplaukia, kad visos k -os eilės ($k \leq p$) išvestinės yra aprėžtos ir tolydžios. Taigi parametrai p ir q nurodo funkcijų f ir w glodumo laipsnį.

Iš 8.5 ir 8.6 teoremų matome, kad įverčio $I_n^w(\lambda)$ vidutinė kvadratinė paklaida taške $\lambda \neq 0, \pm\pi$

$$E(I_n^w(\lambda) - f(\lambda))^2 = DI_n^w(\lambda) + (EI_n^w(\lambda) - f(\lambda))^2,$$

galiojant abiejų teoremų prielaidoms su $p \geq q$, yra

$$\frac{K_n}{n} f^2(\lambda) \int_{-1}^1 w^2(x) dx (1+o(1)) + \frac{k^2}{4\pi^2 (K_n^q)^2} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} |m|^q e^{-im\lambda} r(m) \right)^2 (1+o(1)).$$

Iš čia matyti, kad dispersija $DI_n^w(\lambda)$ ir poslinkis $(EI_n^w(\lambda) - f(\lambda))^2 K_n$ atžvilgiu elgiasi priešingai: kuo didesnis K_n , tuo didesnė dispersija ir tuo mažesnis poslinkis. Aišku, kad abu šie dėmenys bus tos pačios eilės, kai

$$\frac{K_n}{n} \sim \text{Const} \frac{1}{K_n^{2q}},$$

t.y. $K_n^{2q+1} \sim \text{Const} n$. Pavyzdžiui, paėmę $K_n = \left[\beta n^{\frac{1}{2q+1}} \right]$, čia β – konstanta, gausime (kai $\lambda \neq 0, \pm\pi$)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{2q}{2q+1}} E(I_n^w(\lambda) - f(\lambda))^2 \\ = \beta f^2(\lambda) \int_{-1}^1 w^2(x) dx + \frac{k^2}{4\pi^2 \beta^2} \left(\sum_{-\infty}^{\infty} |m|^q e^{-im\lambda} r(m) \right)^2. \end{aligned}$$

Pastaroji lygybė leidžia lyginti įvairius suglodintus spektrinio tankio įverčius tiek parametro q atžvilgiu (įverčiai su didesniu q yra „geresni“), tiek $\int_{-1}^1 w^2(x) dx$ ir k^2 atžvilgiu (esant vienodiems q).

8.6 Kai kurie konkretūs spektrinio tankio įverčiai

1. **Stačiakampis langas.** Tegul

$$w(x) = \begin{cases} 1, & \text{kai } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{kai } |x| > 1. \end{cases}$$

Tada atitinkamas spektrinis langas yra Dirichlė branduolys $D_{K_n}(\lambda)$:

$$W_n(\lambda) = D_{K_n}(\lambda);$$

čia

$$D_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|m| \leq n} e^{im\lambda} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\lambda}{\sin \frac{\lambda}{2}}, & \text{kai } \lambda \neq 0, \\ \frac{1}{2\pi} (2n + 1), & \text{kai } \lambda = 0. \end{cases} \quad (8.10)$$

Matome, kad $W_n(\lambda)$ gali įgyti ir neigiamas reikšmes, t.y. kai kuriuose dažniuose spektrinio tankio įvertis yra neigiamas. Kai teisingos 8.5 teoremos sąlygos, gauname (kai $n \rightarrow \infty$)

$$DI_n^w(\lambda) \sim \begin{cases} \frac{4K_n}{n} f^2(\lambda), & \text{kai } \lambda = \pm\pi, 0, \\ \frac{2K_n}{n} f^2(\lambda), & \text{kai } \lambda \neq \pm\pi, 0. \end{cases}$$

2. **Bartleto, arba trikampis, langas.** Šiuo atveju

$$w(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{kai } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{kai } |x| > 1, \end{cases}$$

ir atitinkamas spektrinis langas yra Fejerio branduolys:

$$W_n(\lambda) = \begin{cases} \frac{\sin^2 \frac{K_n \lambda}{2}}{2\pi K_n \sin^2 \frac{\lambda}{2}}, & \text{kai } \lambda \neq 0, \\ \frac{K_n}{2\pi}, & \text{kai } \lambda = 0. \end{cases}$$

Kadangi $W_n(\lambda) \geq 0$, tai šį langą atitinka neneigiami spektrinio tankio įverčiai. Jei teisingos 8.5 teoremos sąlygos, gauname

$$DI_n^w(\lambda) \sim \begin{cases} \frac{4K_n}{3n} f^2(\lambda), & \text{kai } \lambda = \pm\pi, 0, \\ \frac{2K_n}{3n} f^2(\lambda), & \text{kai } \lambda \neq \pm\pi, 0. \end{cases}$$

3. Danielo langas. Jei

$$w(x) = \begin{cases} \frac{\sin \pi x}{\pi x}, & \text{kai } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{kai } |x| > 1, \end{cases}$$

tai spektrinis langas yra

$$W_n(\lambda) = \begin{cases} \frac{K_n}{2\pi}, & |\lambda| \leq \frac{\pi}{K_n}, \\ 0, & \text{likusiais atvejais.} \end{cases}$$

Šiuo atveju iš 8.5 teoremos gauname

$$DI_n^w(\lambda) \sim \begin{cases} \frac{2K_n}{n} f^2(\lambda), & \text{kai } \lambda = \pm\pi, 0, \\ \frac{K_n}{n} f^2(\lambda), & \text{kai } \lambda \neq \pm\pi, 0. \end{cases}$$

4. Blekmeno–Tjuki langas. Sakykime

$$w(x) = \begin{cases} 1 - 2a + 2a \cos x, & \text{kai } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{kai } |x| > 1. \end{cases}$$

Tada

$$W_n(\lambda) = aD_{K_n}\left(\lambda - \frac{\pi}{K_n}\right) + (1 - 2a)D_{K_n}(\lambda) + aD_{K_n}\left(\lambda + \frac{\pi}{K_n}\right);$$

čia D_{K_n} yra Dirichlė branduolys (8.10). Šiuo atveju

$$DI_n^w(\lambda) \sim \begin{cases} \frac{4K_n}{n} (1 - 4a + 6a^2) f^2(\lambda), & \text{kai } \lambda = \pm\pi, 0, \\ \frac{2K_n}{n} (1 - 4a + 6a^2) f^2(\lambda), & \text{kai } \lambda \neq \pm\pi, 0. \end{cases}$$

Kai $a = 0,23$ ir $a = 0,25$, atitinkami įverčiai vadinami Tjuki–Hemingo ir Tjuki–Heningo įverčiais.

5. Parzeno langas. Sakykime

$$w(x) = \begin{cases} 1 - 6x^2 + 6|x|^3, & \text{kai } |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 2(1 - |x|)^3, & \text{kai } \frac{1}{2} < |x| \leq 1, \\ 0, & \text{likusiais atvejais.} \end{cases}$$

Jeigu K_n yra lyginis, tai

$$I_n^w(\lambda) = \frac{2}{2\pi} \sum_{|m| \leq K_n} \left(1 - \frac{|m|}{K_n}\right)^3 \hat{r}_n(m) e^{-im\lambda} - \frac{1}{2\pi} \sum_{|m| \leq \frac{K_n}{2}} \left(1 - 2\frac{|m|}{K_n}\right)^3 \hat{r}_n(m) e^{-im\lambda}$$

ir

$$W_n(\lambda) = \frac{6\pi}{K_n} \Phi_{\frac{K_n}{2}}^2(\lambda) - \frac{4}{K_n^2} \sin^2 \frac{K_n \lambda}{4} \Phi_{\frac{K_n}{2}}(\lambda);$$

čia $\Phi_n(\cdot)$ yra Fejerio branduolys. Be to, kai $n \rightarrow \infty$,

$$DI_n^w(\lambda) \sim \begin{cases} \frac{151}{140} \frac{K_n}{n} f^2(\lambda), & \text{kai } \lambda = \pm\pi, 0, \\ \frac{151}{280} \frac{K_n}{n} f^2(\lambda), & \text{kai } \lambda \neq \pm\pi, 0. \end{cases}$$

9 Nestacionarūs modeliai

Praktikoje, analizuojant ekonominius ir finansinius duomenis, dažnai nagrinėjami ir nestacionarūs laiko eilučių modeliai. Paprastai tokie modeliai naudojami, kai stebimas nepastovus vidurkio ar dispersijos elgesys. Šiame skyrelyje trumpai aptarsime metodus, kurie taikomi analizuojant tokias nestacionarias laiko eilutes.

9.1 Nestacionarumas dispersijoje

Tegul laiko eilutė nusakoma modeliu

$$X_t = m_t + Z_t,$$

kur m_t – neatsitiktinis dydis, X_t dispersijos kitimas priklauso nuo m_t :

$$DX_t = DZ_t = f^2(m_t)\sigma^2$$

su kažkuria funkcija f . Paprastai tokiu atveju ieškoma dispersiją stabilizuojanti transformacija $g(X_t)$, kuriai $Dg(X_t) \approx \text{const}$. Naudojant Teiloro išdėstymą,

$$\begin{aligned} Dg(X_t) &\approx D(g(m_t) + (X_t - m_t)g'(m_t)) = D(X_t - m_t)g'(m_t) \\ &= (g'(m_t))^2 DX_t = (g'(m_t))^2 f^2(m_t)\sigma^2. \end{aligned}$$

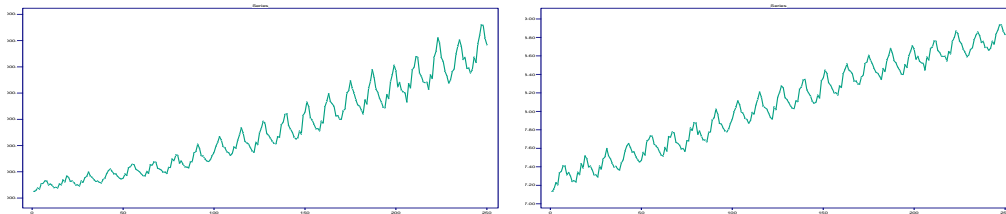
Taigi, jei $Dg(X_t) \approx \text{const}$, tai turėtų būti tenkinama

$$g'(m_t) = 1/f(m_t). \quad (9.1)$$

Jei, pavyzdžiui, dispersijai $Dg(X_t)$ elgiasi tiesiškai m_t atžvilgiu, t.y. $f(m_t) = m_t$, tai parinkus $g(m_t) = \ln m_t$, turėsime (9.1). Panašiai, jei $f(m_t) = \sqrt{m_t}$, tai $g(m_t) = 2\sqrt{m_t}$. Šie intuityvūs samprotavimai veda į populiariausią dispersiją stabilizuojančią transformaciją – Bokso–Kokso transformaciją:

$$g^{(\lambda)}(x) = \begin{cases} \frac{x^\lambda - 1}{\lambda}, & \lambda \neq 0, \\ \ln x, & \lambda = 0. \end{cases}$$

Pastebėsime, kad Bokso ir Kokso (1964) pasiūlyta transformacija buvo išnagrinėta, kai $g^{(\lambda)}(X_t)$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę normalieji atsitiktiniai dydžiai. Taip pat jie aprašė parametro λ didžiausio tikėtimumo įvertį. Vėliau įvairūs autoriai nagrinėjo įvairius šios transformacijos apibendrinimus. 24 pavaizduota Australijos kasmėnesinė elektros gamyba ir jos Bokso–Kokso transformacija su $\lambda = 0$.



24 pav. Australijos kas mėnesinė elektros gamyba (milijonais kilovatvalandžių) nuo 1956 metų sausio iki 1990 metų balandžio ir Bokso–Kokso transformacija ($\lambda = 0$)

9.2 Nestacionarumas vidurkyje

Tuo atveju, kai norima „stabilizuoti“ pagrindinę trendo komponentę, dažnai susiduriama su gana sudėtingais uždaviniais. Tai sąlygojama didžiulės įvairovės trendų modelių ir jų analizės būdų.

Pradžioje panagrinėsime du paprasčiausius nestacionarių laiko eilučių modelius, minėtus 2 skyrelyje: determinuoto (tiesinio) trendo modelį

$$X_t = \beta_0 + \beta_1 t + Z_t \quad (9.2)$$

ir stochastinio trendo modelį

$$X_t = X_{t-1} + \beta_1 + Z_t, \quad (9.3)$$

kur $\{Z_t\}$ yra stacionari seka. Šie modeliai dar vadinami TS (angl. trend stationary) ir DS (angl. difference stationary) modeliais. Abu jie leidžia aprašyti tiesinį vidurkio augimą, tačiau pirmu atveju, norint gauti stacionarią seką, natūraliausia būtų iš stebėjimų atimti tiesinę dalį; antru atveju stacionarumas pasiekiamas nagrinėjant skirtumus $\Delta X_t \equiv X_t - X_{t-1}$. Pastebėsime, kad (9.2) atveju $\Delta X_t = \beta_1 + \Delta Z_t$ yra stacionari seka, tačiau turi nepageidaujamą savybę – ji nėra apgrėžiama (žr. 5.4 apibrėžimą).

Svarbus ekonometrikos uždavinys yra atskirti šiuos du modelius (dažnai žymiai bendresniame pavidale). Vienas iš galimų sprendimo būdų – įvesti modelį, apimantį abi specifikacijas (9.2) ir (9.3), ir po to tikrinti atitinkamą parametrinę hipotezę.

Tegul

$$X_t = \beta_0 + \beta_1 t + Z_t,$$

kur $Z_t = \alpha Z_{t-1} + \varepsilon_t$, ε_t yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai

dydžiai su $N(0, \sigma^2)$ pasiskirstymu. Turime

$$\begin{aligned} X_t &= \beta_0 + \beta_1 t + \alpha Z_{t-1} + \varepsilon_t \\ &= \beta_0 + \beta_1 t + \alpha(X_{t-1} - \beta_0 - \beta_1(t-1)) + \varepsilon_t \\ &= \gamma_0 + \gamma_1 t + \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t, \end{aligned}$$

kur $\gamma_0 = \beta_0(1 - \alpha) + \beta_1\alpha$, $\gamma_1 = \beta_1(1 - \alpha)$. Matome, kad su $\alpha = 1$, $\gamma_0 = \beta_1$, $\gamma_1 = 0$ gaunamas (9.3) modelis, o su $|\alpha| < 1$ gauname TS modelį $X_t = \gamma_0 + \gamma_1 t + \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t$.

10 Sąlyginis heteroskedastiškumas

Kaip ir regresinėje analizėje, kur svarbią klasę sudaro heteroskedastinių paklaidų (t.y. su nepastovia dispersija) regresijos modeliai, aprašant finansinius duomenis svarbiausią vietą užima vadinamieji sąlyginio heteroskedastiškumo modeliai. Šiame skyriuje aptarsime finansinių duomenų modeliavimo aspektus šiek tiek detaliau.

Tarkime, kad r_t yra logaritminės gražos:

$$r_t = \ln P_t - \ln P_{t-1}.$$

Priminsime, kad finansinių duomenų laiko eilutės pasižymi tam tikromis savybėmis, dar vadinamomis stilizuotais faktais:

- r_t yra beveik nekoreliuoti dydžiai;
- gražų transformacijos $|r_t|$, r_t^2 arba $|r_t|^\delta$ ($\delta > 0$) yra stipriai koreliuotos;
- kintamumo klasterizacija;
- r_t skirstinys turi „sunkias uodegas“;
- asimetrija.

Šiame skyriuje aptarsime kai kuriuos populiarius modelius, kurie plačiai taikomi finansinių gražų modeliavimui ir daugiau ar mažiau atspindi išvardintuosius stilizuotus faktus.

10.1 ARCH modeliai

Vienas pirmųjų modelių, kuris plačiai taikomas finansinių gražų modeliavimui ir daugiau ar mažiau atspindi išvardintuosius stilizuotus faktus yra *autoregresijos sąlyginio heteroskedastiškumo* (angl. autoregressive conditional heteroskedasticity (ARCH)) modelis. Jį 1982 metais pasiūlė Engle. Jo ištakos slypi paprastame „istoriniame“ kintamumo įvertyje

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N r_{t-j}^2. \quad (10.1)$$

Pastarojo modelio pagrindiniai trūkumai yra tie, kad visos istorinės gražos turi tą patį svorį, be to, nėra aiškus skaičiaus N parinkimas. Kitas gerai žinomas kintamumo modelis remiasi eksponentiniu suglodinimu:

$$\sigma_t^2 = \lambda r_{t-1}^2 + (1 - \lambda)\sigma_{t-1}^2. \quad (10.2)$$

Pagrindinės (10.2) modelio savybės (trūkumai) yra tokie: koeficientai išdėstyje $\sigma_t^2 = \lambda \sum_{j=1}^{\infty} (1 - \lambda)^{j-1} r_{t-j}^2$ monotoniškai gęsta, suma yra begalinė, o λ nustatymas neaiškus.

Engle pasiūlytame modelyje gražos r_t išreiškiamos

$$r_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z} \quad (10.3)$$

kur dažniausiai laikoma, kad ε_t yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę $N(0,1)$ atsitiktiniai dydžiai, o σ_t nusakomas tokia lygybe

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_p r_{t-p}^2; \quad (10.4)$$

čia svoriai $\alpha_0 > 0$, $\alpha_j \geq 0$, $j = 1, \dots, p$, ir, skirtingai nei (10.1), gali būti įvertinti.

Tegul $\mathcal{F} = \sigma(r_{t-1}, r_{t-2}, \dots)$ yra σ algebra, generuota dydžių r_t, r_{t-1}, \dots . Tuomet (jeigu laikysime, kad su visais t triukšmai ε_t tenkina $E(\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}) = 0$ ir $E(\varepsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}) = 1$) gražos r_t sąlyginis vidurkis ir sąlyginė dispersija atžvilgiu \mathcal{F}_{t-1} yra

$$E(r_t | \mathcal{F}_{t-1}) = E(\sigma_t \varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \sigma_t E(\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}) = 0 \quad (10.5)$$

ir

$$E(r_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}) = E(\sigma_t^2 \varepsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}) = \sigma_t^2 E(\varepsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}) = \sigma_t^2. \quad (10.6)$$

Pastaroji dispersijos savybė ir atspindima „sąlyginio heteroskedastiškumo“ termine – sąlyginė gražos r_t dispersija atžvilgiu informacijos iki momento $t - 1$, panašiai kaip AR(p) modelyje, yra praėjusių gražų kvadratų tiesinė kombinacija. Vadinasi, sąlyginė dispersija σ_t^2 yra atsitiktinė bei priklausanti nuo laiko. Pastebėsime kad *besąlyginė* dispersija $Dr_t = E\sigma_t^2 = \text{const}$ (jei egzistuoja), taigi modelis gali būti stacionarus. (10.3)–(10.4) lygtys ir nusako vadinamąjį as *p-os eilės autoregresijos sąlyginio heteroskedastiškumo* arba, trumpiau, ARCH(p) modelį.

Toliau aprašysime kai kurias ARCH(p) modelio savybes. Tuo atveju, kai $E r_t^2 = \text{const} < \infty$ ($\{r_t\}$ yra stacionari seka) ir $\alpha_1 + \cdots + \alpha_p < 1$, turime

$$E r_t^2 = E \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 E r_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_p E r_{t-p}^2$$

arba

$$Er_t^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_p}.$$

Detaliau panagrinėkime ARCH(1) atvejį.

$$\begin{cases} r_t = \sigma_t \varepsilon_t, & t \in \mathbb{Z}, \\ \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2. \end{cases} \quad (10.7)$$

Taikant šias formules rekurentiškai, turėsime

$$\begin{aligned} r_t^2 &= (\alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2) \varepsilon_t^2 \\ &= \alpha_0 \varepsilon_t^2 + \alpha_1 \sigma_{t-1}^2 \varepsilon_t^2 \varepsilon_{t-1}^2 = \dots \\ &= \alpha_0 \varepsilon_t^2 + \alpha_0 \sum_{j=1}^n \alpha_1^j \varepsilon_t^2 \dots \varepsilon_{t-j}^2 + \alpha_1^{n+1} \varepsilon_t^2 \dots \varepsilon_{t-n}^2 r_{t-n-1}^2. \end{aligned}$$

Todėl, jeigu $\alpha_1 < 1$ ir egzistuoja stacionarus (10.7) sprendinys, tai antrojo dėmens pastarosios lygybės dešinėje vidurkis lygus

$$E[\alpha_1^{n+1} \varepsilon_t^2 \dots \varepsilon_{t-n}^2 r_{t-n-1}^2] = \alpha_1^{n+1} Er_{t-n-1}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Kita vertus, galima parodyti kad pirmasis dėmuo su tikimybe 1 į atsitiktinį dydį, užrašomą begaline suma

$$r_t^2 = \alpha_0 \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_1^j \varepsilon_t^2 \dots \varepsilon_{t-j}^2.$$

Reziumuojant, jei $0 \leq \alpha_1 < 1$, tai vienintelis (kauzalus) stacionarus (10.7) sprendinys yra

$$r_t = \varepsilon_t \sqrt{\alpha_0 \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_1^j \varepsilon_{t-1}^2 \dots \varepsilon_{t-j}^2\right)}. \quad (10.8)$$

Pastebėsime, kad r_t yra ir siaurąja prasme stacionarus procesas. Ši sprendinio išraiška dažnai yra patogi tolimesniam ARCH(1) teorinių savybių nagrinėjimui.

ARCH(1) modelio savybės. Remiantis (10.5), (10.6), turime

$$Er_t = E(E(r_t | \mathcal{F}_{t-1})) = 0,$$

$$Dr_t = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}.$$

Be to su $h > 0$

$$\begin{aligned} E(r_t r_{t+h}) &= EE(r_t r_{t+h} | \mathcal{F}_{t+h-1}) \\ &= E[r_t E(r_{t+h} | \mathcal{F}_{t+h-1})] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Pastarosios trys savybės sako, kad ARCH(1) seka yra balto triukšmo seka: $r_t \sim BT(0, \alpha_0/(1 - \alpha_1))$; be to ji yra stacionari ir stipriąja prasme. Svarbu, tačiau, pastebėti, kad $\{r_t\}$ nėra *nepriklausomų* dydžių seka. Tam, pavyzdžiui, pakanka pastebėti, kad

$$E(r_t^2 | r_{t-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2,$$

t.y. sąlyginis r_t skirstinys priklauso nuo r_{t-1} reikšmės, vadinasi r_t ir r_{t-1} negali būti nepriklausomi. Tai sąlygoja, kad r_t skirstinys negali būti normalusis (tas intuityviai matosi jau vien iš sudėtingos (10.8) struktūros – šaknis iš $\chi_{(1)}^2$ dydžių sandaugų sumos).

Tolimesnes modelio savybes nesunku išvesti, naudojantis tapatybe

$$\begin{aligned} r_t^2 &= \sigma_t^2 + r_t^2 - \sigma_t^2 \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \sigma_t^2 (\varepsilon_t^2 - 1) \\ &=: \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \nu_t. \end{aligned}$$

Čia

$$\begin{aligned} E(\nu_t | \mathcal{F}_{t-1}) &= E(\sigma_t^2 (\varepsilon_t^2 - 1) | \mathcal{F}_{t-1}) \\ &= \sigma_t^2 E(\varepsilon_t^2 - 1 | \mathcal{F}_{t-1}) = 0. \end{aligned}$$

Vadinasi $\{\nu\}$ yra *martingalinių skirtumų* seka. AR(1) reprezentacijos

$$r_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \nu_t \tag{10.9}$$

pagalba galima išvesti kitas svarbias gražų kvadratų r_t^2 savybes.

10.1 teiginys. Tegul ARCH(1) modelio parametrai tenkina $\alpha_0 > 0$, $0 \leq \alpha < \sqrt{3}/3$. Tada $\{r_t\}$ yra stacionari siaurąja prasme seka, $Er_t^4 < \infty$ ir

$$\begin{aligned} Dr_t^2 &= \frac{2\alpha_0^2}{(1 - \alpha_1)^2(1 - 3\alpha_1^2)}; \\ \text{Corr}(r_t^2, r_{t-s}^2) &= \alpha_1^s. \end{aligned}$$

Irodymas. Iš (10.9) turime

$$\begin{aligned} Dr_t^2 &= D(\alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \nu_t) \\ &= \alpha_1^2 Dr_{t-1}^2 + D\nu_t + 2\alpha_1 \text{Cov}(r_{t-1}^2, \nu_t), \end{aligned} \quad (10.10)$$

čia

$$\begin{aligned} \text{Cov}(r_{t-1}^2, \nu_t) &= Er_{t-1}^2 \nu_t \\ &= EE(r_{t-1}^2 \nu_t | \mathcal{F}_{t-1}) \\ &= E(r_{t-1}^2 E(\nu_t | \mathcal{F}_{t-1})) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Iš (10.10):

$$Dr_t^2 = \frac{D\nu_t}{1 - \alpha_1^2},$$

kur

$$\begin{aligned} D\nu_t &= D[\sigma_t^2(\varepsilon_t^2 - 1)] \\ &= E\sigma_t^4 E(\varepsilon_t^2 - 1)^2 \\ &= 2E\sigma_t^4. \end{aligned}$$

Kita vertus,

$$\begin{aligned} E\sigma_t^4 &= E(\alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2)^2 \\ &= E(\alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1 r_{t-1}^2 + \alpha_1^2 r_{t-1}^4) \\ &= \alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1 \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1} + \alpha_1^2 (Dr_{t-1}^2 + [Er_{t-1}^2]^2) \\ &= \alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1 \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1} + \alpha_1^2 \left(\frac{D\nu_{t-1}}{1 - \alpha_1^2} + \frac{\alpha_0^2}{(1 - \alpha_1)^2} \right) \\ &= \alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1 \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1} + \alpha_1^2 \left(\frac{2E\sigma_{t-1}^4}{1 - \alpha_1^2} + \frac{\alpha_0^2}{(1 - \alpha_1)^2} \right). \end{aligned}$$

Iš čia gauname (jeigu laikysime, kad $E\sigma_t^4 = E\sigma_{t-1}^4$):

$$E\sigma_t^4 \frac{1 - 3\alpha_1^2}{1 + \alpha_1} = \frac{\alpha_0^2}{1 - \alpha_1}.$$

Todėl, jeigu tik $1 - 3\alpha_1^2 > 0$, tai

$$E\sigma_t^4 = \frac{\alpha_0^2(1 + \alpha_1)}{(1 - \alpha_1)(1 - 3\alpha_1^2)}.$$

Telieka pasinaudoti lygybe

$$Dr_t^2 = \frac{2E\sigma_t^4}{1 - \alpha_1^2}.$$

Antroji teiginio dalis išplaukia iš AR(1) reprezentacijos (10.9). \square

Kadangi $\alpha_1 \geq 0$, tai ARCH(1) modeliu aprašomų gražų kvadratų kovariacija $\text{Cov}(r_0^2, r_t^2)$ yra neneigiama su visais t . Ši savybė yra būdinga ir bendresniems ARCH tipo modeliams.

Grįžkime prie finansinių gražų stilizuotų faktų ARCH(1) atveju. Paprastumo dėlei, tegul $Er_t^2 = \alpha_0/(1 - \alpha_1) = 1$. Tada

$$\begin{aligned} EX_t^4 &= 3E\sigma_t^4 \\ &= 3 \frac{\alpha_0^2}{(1 - \alpha_1)^2} \frac{1 - \alpha_1^2}{1 - 3\alpha_1^2} \\ &= 3 \frac{1 - \alpha_1^2}{1 - 3\alpha_1^2} \end{aligned}$$

Iš čia matome, kad $Er^4 \geq 3$, jeigu $3\alpha_1^2 \leq 1$, t.y. r_t pasiskirstymo uodegos yra sunkesnės nei normaliojo dėsnio. Apie sunkias uodegas liudija ir tas faktas, kad bet kuriam $\alpha_1 \in (0, 1)$, $EX^{2k} = \infty$ kuriam nors $k \geq 1$.

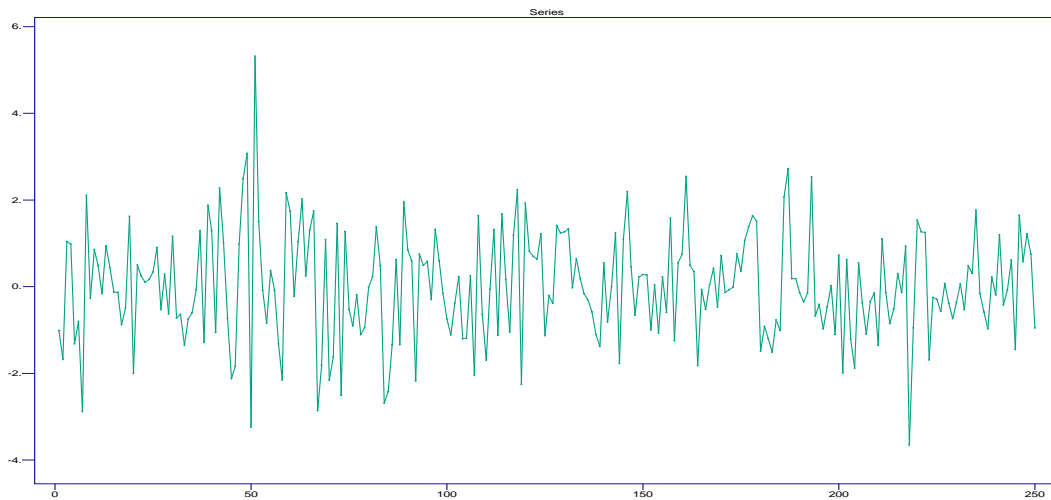
ARCH(1) modelio specifika taip pat leidžia (bent jau dalinai) aprašyti ir kintamumo klasterizacijos efektą, t.y. dideles gražų reikšmes seka didelės kintamumo reikšmės.

25 ir 26 paveiksluose pavaizduota ARCH(1) modelio realizacija ir jo AKF bei DAKF.

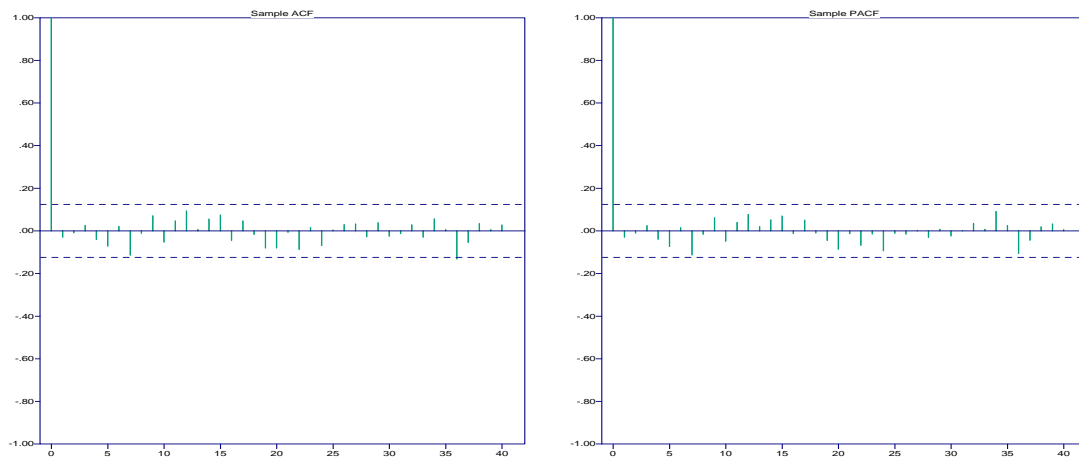
27 ir 28 paveiksluose pavaizduota ARCH(1) modelio kvadratų r_t^2 realizacija ir jos AKF bei DAKF. Iš jų matome, kad ARCH modeliu aprašomi gražų kvadratai r_t^2 nebesielgia kaip nekoreliuoti dydžiai (plg. su 26 paveikslu).

ARCH(1) modelio parametru vertinimas. Vienas iš didžiausių ARCH modelių pranašumų yra kad daugiamatis gražų tankis lengvai užrašomas, todėl, norint vertinti parametrus, nesunku taikyti didžiausio tikėtimumo metodą. Bendrai, bet kokiam rinkiniui atsitiktinių dydžių $\{X_1, \dots, X_n\}$ jų tankis gali būti užrašytas tokia sąlyginių tankių sandauga:

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \prod_{i=2}^n f_{X_i|X_{i-1}, \dots, X_1}(x_i|x_{i-1}, \dots, x_1).$$



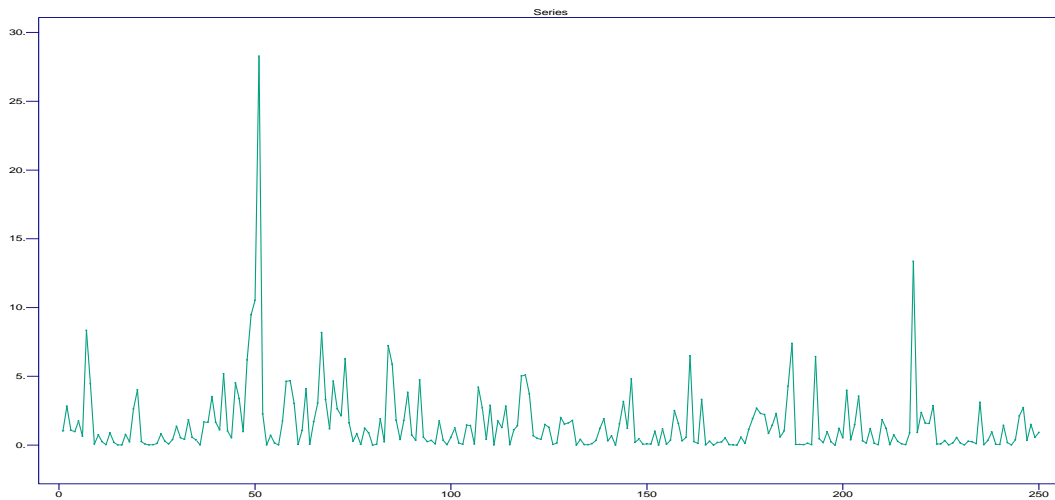
25 pav. ARCH(1) proceso realizacija



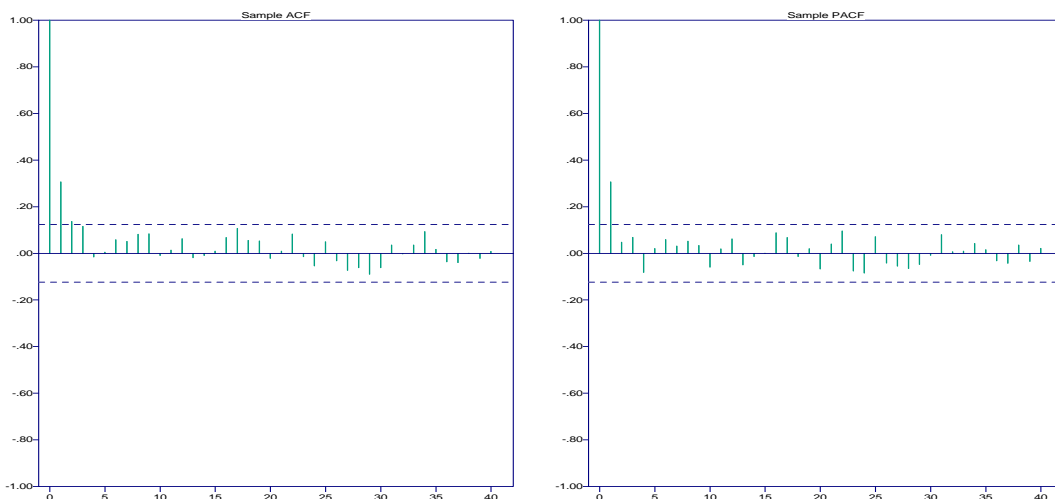
26 pav. ARCH(1) proceso AKF ir DAKF

ARCH(1) modelio (su $X_t = r_t$) atveju turime

$$\begin{aligned}
 f_{X_i|X_{i-1}, \dots, X_1}(x_i|x_{i-1}, \dots, x_1) &= f_{X_i|X_{i-1}}(x_i|x_{i-1}) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\alpha_0 + \alpha_1 x_{i-1}^2)}} \exp\left\{-\frac{x_i^2}{2(\alpha_0 + \alpha_1 x_{i-1}^2)}\right\}.
 \end{aligned}$$



27 pav. ARCH(1) proceso kvadratų realizacija.



28 pav. ARCH(1) proceso kvadratų AKF ir DAKF.

Taigi, esant fiksuotam $X_1 = x_1$, tikėtinumo funkcija yra

$$L(\alpha_0, \alpha_1) = \prod_{i=2}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi(\alpha_0 + \alpha_1 x_{i-1}^2)}} \exp \left\{ -\frac{x_i^2}{2(\alpha_0 + \alpha_1 x_{i-1}^2)} \right\} \quad (10.11)$$

arba

$$\ln L(\alpha_0, \alpha_1) = -\frac{n-1}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n \ln(\alpha_0 + \alpha_1 x_{i-1}^2) - \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n \frac{x_i^2}{\alpha_0 + \alpha_1 x_{i-1}^2}.$$

Pastaroji išraiška gali būti maksimizuota naudojant skaitinius netiesinio optimizavimo metodus.

10.2 GARCH modeliai

Jeigu ARCH modeliai yra analogas AR laiko eilučių modelių, tai GARCH (angl. Generalized ARCH) panašus į ARSV sekos modelį. Šis natūralus apibendrinimas buvo pasiūlytas Bollerslev'o (1986). Pagal jį gražos r_t turi (10.3) pavidalą, o kintamumas aprašomas lygtimi

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i r_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2; \quad (10.12)$$

čia $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$ su $i = 1, \dots, q$, $j = 1, \dots, p$.

Panašiai, kaip aukščiau, jeigu

$$\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1,$$

tai GARCH lygtis (10.3), (10.12) turi stacionarų ir kauzalų sprendinį ir besąlyginę dispersiją lygi

$$Dr_t = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i - \sum_{j=1}^p \beta_j} < \infty. \quad (10.13)$$

Toliau detaliau panagrinėsime GARCH(1,1) atvejį.

GARCH(1,1) modelis. Tegul

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2. \quad (10.14)$$

Jį patogiu perrašyti

$$\begin{aligned} r_t^2 &= \sigma_t^2 + (r_t^2 - \sigma_t^2) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + r_t^2 - \sigma_t^2 \\ &= \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) r_{t-1}^2 - \beta_1 (r_{t-1}^2 - \sigma_{t-1}^2) + r_t^2 - \sigma_t^2 \\ &= \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) r_{t-1}^2 + \nu_t - \beta_1 \nu_{t-1}; \end{aligned}$$

čia $\nu_t = r_t^2 - \sigma_t^2$. Taigi, panašiai kaip (10.9), kintamumas GARCH(1,1) modelyje gali būti interpretuojamas kaip ARSV(1,1) su triukšmu ν_t .

Bendru atveju, jeigu r_t yra GARCH(p, q) procesas, tai r_t^2 yra ARSV(m, p) procesas su triukšmu $\nu_t = r_t^2 - \sigma_t^2$, čia $m = \max\{p, q\}$, o $\alpha_i = 0$ su $i > q$, bei $\beta_j = 0$ su $j > p$.

Svarbu pastebėti, kad GARCH(1,1) procesas gali būti stacionarus siaurąja prasme net jeigu $\alpha_1 + \beta_1 = 1$, t.y. jei $Er_t^2 = \infty$, žr. (10.13). Nelson (1990) parodė, kad GARCH(1,1) lygtis (10.3), (10.14) turi stacionarų siaurąja prasme sprendinį tada ir tik tada, jei

$$E \ln(\beta_1 + \alpha_1 \varepsilon_t^2) < 0.$$

Kitas GARCH modelių savybes galima rasti, pvz., darbuose Teräsvirta (1996), He ir Teräsvirta (1999).

10.1 PASTABA. Taikant GARCH(1,1) modelį praktikoje, labai dažnai pasirodo, kad parametrų α_1 ir β_1 suma yra arti 1: $\alpha_1 + \beta_1 \approx 1$. Tuo atveju, kai $\alpha_1 + \beta_1 = 1$, (10.3), (10.14) lygtys nusako vadinamąjį *integruotą GARCH* (IGARCH(1,1)) procesą. Toks procesas neturi stacionaraus silpnąja prasme sprendinio, tačiau gali turėti siaurąja prasme sprendinį.

IGARCH(1,1) modelio atveju sąlyginė dispersija (kintamumas) turi tiesiškai augančią komponentę. Tam pakanka patikrinti, kad

$$\begin{aligned} E(\sigma_{t+1}^2 | \mathcal{F}_{t-1}) &= E(\alpha_0 + \alpha_1 r_t^2 + \beta_1 \sigma_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}) \\ &= \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) \sigma_t^2 \\ &= \alpha_0 + \sigma_t^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(\sigma_{t+2}^2 | \mathcal{F}_{t-1}) &= E(E(\sigma_{t+2}^2 | \mathcal{F}_{t-1}) | \mathcal{F}_{t-1}) \\ &= E(\alpha_0 + \sigma_{t+1}^2 | \mathcal{F}_{t-1}) \\ &= 2\alpha_0 + \sigma_t^2. \end{aligned}$$

Bendrai, turėsime

$$E(\sigma_{t+h}^2 | \mathcal{F}_{t-1}) = h\alpha_0 + \sigma_t^2.$$

Matome, kad IGARCH modelio atveju „šios dienos“ kintamumo reikšmė veikia „rytdienos“ kintamumo prognozę ir šis poveikis išlieka be galo ilgai (palyginkite su atveju $\alpha_1 + \beta_1 < 1$). Šiuo požiūriu, galima įžvelgti analogiją su atsitiktinio klaidžiojimo modeliu.

GARCH(1,1) modelio parametru vertinimas. Visų pirma pastebėsime, kad panašiai, kaip ARSV modelio atveju, galima gauti tokį σ_t^2 skleidinį begaline eilute:

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= (1 - \beta_1 B)^{-1}(\alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2) \\ &= \frac{\alpha_0}{1 - \beta_1} + \alpha_1 \sum_{j=1}^{\infty} \beta_1^{j-1} r_{t-j}^2.\end{aligned}$$

Kadangi teoriškai kintamumas σ_t^2 priklauso nuo be galo daug praėjusių reikšmių $r_{t-1}^2, r_{t-2}^2, \dots$, tai praktikoje vietoj r_t^2 įvedami “nupjauti” dydžiai $\tilde{r}_t^2 = 0$ su $t \leq 0$, $\tilde{r}_t^2 = r_t^2$ su $t > 0$, o vietoj σ_t^2 – rekurentiškai skaičiuojami dydžiai $\tilde{\sigma}_t^2$, $t = 1, 2, \dots$

$$\tilde{\sigma}_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \tilde{r}_{t-1}^2 + \beta_1 \tilde{\sigma}_{t-1}^2, \quad \tilde{\sigma}_t^2 = 0, \quad t \leq 0.$$

Gauname tokią rekurentinę procedūrą:

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_1^2 &= \alpha_0, \\ \tilde{\sigma}_2^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \tilde{r}_1^2 + \beta_1 \tilde{\sigma}_1^2 \\ &= \alpha_0 + \alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 r_{t-1}^2, \\ \tilde{\sigma}_3^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \tilde{r}_2^2 + \beta_1 \tilde{\sigma}_2^2 \\ &= \alpha_0 + \alpha_0 \beta_1 + \alpha_0 \beta_1^2 + \alpha_1 \beta_1 r_2^2 + \alpha_1 \beta_1 r_1^2, \\ &\vdots\end{aligned}$$

Įsistatę šias išraiškas į tikėtinumo funkciją (plg. su (10.11))

$$L(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1) = \prod_{i=2}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\tilde{\sigma}_i^2}} \exp \left\{ -\frac{x_i^2}{2\tilde{\sigma}_i^2} \right\}$$

ir maksimizuodami ją skaitiniais metodais, randame didžiausio tikėtinumo įverčius $(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1)$. Panašiai parametrai vertinami ir GARCH(p, q) modelyje.

Apie įverčių „kokybę” ARCH/GARCH modelių atveju galima spręsti, pavyzdžiui, remiantis ARSV reprezentacija. Taip pat, turint modelio r_t^2 liekanas e_t , galima naudoti klasikinę “portmanteau” statistiką

$$Q(h) = n(n+2) \sum_{j=1}^h \hat{\rho}_e(j)/(n-j),$$

kur $\hat{\rho}_e(j)$ yra liekanų empirinė koreliacija. Esant korektiškai nusakytam modeliui, $Q(h)$ turės asimptotinį $\chi^2_{(h-m)}$ skirstinį, kur m yra nepriklausomų modelio parametrų skaičius. Taigi, didelės $Q(h)$ reikšmėms nulinė hipotezė apie liekanų nepriklausomumą bus atmetama. Plačiai paplitęs ir Lagrange'o daugiklių testas.

Literatūra

- Anderson, T. W. (1971). *The Statistical Analysis of Time Series*. Wiley, New York.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, **31**, 307–327.
- Box, G. E. P. and Cox, D. R. (1964). An analysis of transformations (with discussion). *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **26**, 211–252.
- Brockwell, P. J. and Davis, R. A. (1991). *Time Series: Theory and Methods*. Springer-Verlag, 2nd ed. New York.
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*, **50**, 987–1008.
- He, C. and Teräsvirta, T. (1999). Fourth moment structure of the GARCH(p, q) process. *Econometric Theory*, **15**, 824–846.
- Lobato, I. N. and Savin, N. E. (1998). Real and spurious long-memory properties of stock-market data (with comments). *Journal of Business & Economic Statistics*, **16**, 261–283.
- Mandelbrot, B. (1963). The variation of certain speculative prices. *Journal of Business*, **36**, 394–419.
- Nelson, D. B. (1990). Stationarity and persistence in the GARCH(1,1) model. *Econometric Theory*, **6**, 318–334.
- Taylor, S. (1986). *Modelling Financial Time Series*. Wiley, New York.
- Teräsvirta, T. (1996). Two stylized facts and the GARCH(1,1) model. Stockholm School of Economics. SSE/EFI Working Paper Series in Economics and Finance, No. 96.