# Tikimybių teorija
# (Užduotis Nr.1)

Aidas Medžiūnas

2022 m. kovo 10 d.

1. Patikrinkite ar šios $\Omega$ aibės poaibių sistemos yra aibių algebros:
   (a) Sistema iš $\varnothing$ ir $\Omega$, tokių kad $\Omega \neq \varnothing$;
   (b) Tegul $A \subset \Omega, A \neq \varnothing, A \neq \Omega$. Sistema - $\{A, A^c, \Omega, \varnothing\}$.

2. Įrodykite šias aibių algebros $\mathcal{A}$ savybes:
   (a) $\varnothing \in \mathcal{A}$;
   (b) Jei $A \in \mathcal{A}$ ir $B \in \mathcal{A}$, tai $A \cap B \in \mathcal{A}$;
   (c) Jei $A \in \mathcal{A}$ ir $B \in \mathcal{A}$, tai $A \backslash B \in \mathcal{A}$;
   (d) Jei $A_1, A_2, ..., A_n$ yra $\mathcal{A}$ aibės,
   tai $(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) \in \mathcal{A}$ ir $(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) \in \mathcal{A}$.

3. Įrodykite šias tikimybės $P$ savybes:
   (a) $P(\varnothing) = 0$;
   (b) $P\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} P\left(A_k\right)$.
   (c) $P(B \backslash A) = P(B) - P(A \cap B)$
   (d) jei $A \subset B$, tai $P(B \backslash A) = P(B) - P(A)$
   (e) jei $A \subset B$, tai $P(A) \leq P(B)$
   (f) kiekvienam atsitiktiniam įvykiui $A$ teisinga lygybė $P(A^c) = 1 - P(A)$
   (g) $P(A) \leq 1$ kiekvienam atsitiktiniam įvykiui $A$
   (h) jei $A_1, A_2, ...$ yra bet kokių įvykių seka, tai
   $$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P\left(A_k\right)$$
   .
   (i) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

4. Tegul $X$ yra a.d., o $c$ yra const. Įrodykite, kad:
   (a) $c$ yra a.d.
   (b) $X + c$ yra a.d.

(c) $cX$ yra a.d.

(d) $|X|$ yra a.d.

(e) $X^2$ yra a.d.

(f) $1/X$ yra a.d.

(g) $X - X$

(h) $X + X$

5. Tegul $X$ ir $Y$ yra a.d. Įrodykite, kad:

   (a) $X - Y$ yra a.d.

   (b) $X + Y$ yra a.d.

   (c) $XY$ yra a.d.

   (d) $X/Y$, kai $Y \neq 0$ yra a.d.

6. Tegul $F_X(x)$ yra pasiskirstymo funkcija. Įrodykite, kad:

   (a) $P(X > x) = 1 - F(x)$;

   (b) $P(x < X \leq y) = F(y) - F(x)$;

   (c) $P(X = x) = F(x) - \lim\limits_{y \to x^-} F(y)$.

7. Tegul $F_X$ yra a.d. $X$ pasiskirstymo funkcija. Raskite a.d. $Y = aX + b$ pasiskirstymo funkciją.

8. Parodykite, kad jei $F$ ir $G$ pasiskirstymo funkcijos ir $0 \leq \lambda \leq 1$, tai $\lambda F + (1 - \lambda)G$ yra pasiskirstymo funkcija. Ar šių funkcijų sandauga $FG$ yra pasiskirstymo funkcija?

9. Tegul $X$ yra a.d., o $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - tolydi ir griežtai didėjanti funkcija. Parodykite, kad:

   (a) $g(X)$ yra a.d.

   (b) $g^{-1}(X)$ yra a.d.

   Ar funkcija $g$ būtinai turi būti tolydi ir gireždai didėjanti?

10. Tegul $f$ ir $g$ yra tankio funkcijos, $0 \leq \lambda \leq 1$. Parodykite ar:

    (a) $\lambda f + (1 - \lambda)g$ yra tankis;

    (b) $fg$ yra tankis?

11. Kada šios funkcijos yra tankio funkcijos:

    (a) $f(x) = \begin{cases} cx^{-d}, & \text{jei } x > 1 \\ 0 & \text{kitur.} \end{cases}$

    (b) $f(x) = \frac{ce^x}{(1+e^x)^2}$?

12. Tegul $X$ yra a.d. su tolydžia pasiskirstymo funkcija $F$. Raskite pasiskirstymo funkcijas šiems atsitiktiniams dydžiams:

    (a) $X^2$;

(b) $\sqrt{X}$;

(c) $G^{-1}(X)$;

(d) $F(X)$;

(e) $G^{-1}(F(X))$.

čia $G$ tolydi ir griežtai didėjanti funkcija.

13. Kokioms $\alpha$ reikšmėms $\mathbb{E}(|X|^{\alpha})$ - baigtinis, jei a.d. X tankis:

    (a) $f(x) = e^{-x},$ kai $x \geq 0$;

    (b) $f(x) = C(1+x^2)^{-m},$ kai $x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z}$.

14. Tegul $X_1, ..., X_n$ - nepriklausomi vienodai pasiskirstę a.d. Parodykite, kad jei $m \leq n$, tai
$$\mathbb{E}\left(\frac{S_m}{S_n}\right) = \frac{m}{n},$$
čia $S_m = X_1 + X_2 + ... + X_m$.

15. Tegul $X$ - neneigiamas a.d. su tankiu $f$. Parodykite, kad:
$$\mathbb{E}(X^r) = \int_0^{\infty} r x^{r-1} P(X > x) dx.$$

16. Tegul $X$ $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Parodykite, kad:
$$\mathbb{E}\left((X-\mu)g(X)\right) = \sigma^2 \mathbb{E}(g'(X)).$$