Grafai

A. Medžiūnas

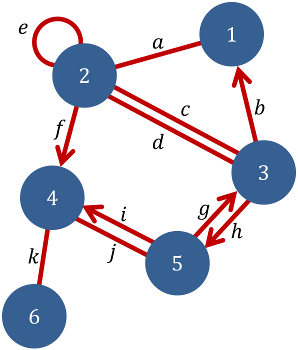
Diskrečioji matematika

2021 m. gegužės 24 d.

Temos planas

Multigrafas

Aibės elementus vadinsime grafo viršūnėmis $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$, skirtingų elementų ryšius - lankais $(a, b, c, d, f, g, h, i, j, k)$, o elemento ir jo pačio ryšį - kilpa (e).



Jeigu galimi keli tų pačių elementų ryšiai, tai šitoks grafas vadinimas multigrafu.

Multigrafas

Apibrėžimas

Tarkime $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ yra multigrafo viršūnių aibė. Tada jo lankus apibrėšime, kaip sąryšį

$$l = (v_i, v_j, z_k) \in V \times V \times N,$$

čia v_i-lanko pradžia, v_j-lanko galas, z_k-lanko numeris/žymė.

Lankai su tomis pačiomis pradžiomis ir su tais pačiais galais vadinami lygiagrečiaisiais.

Pavyzdžiai

$$l_1 = (v_1, v_2, 1), l_2 = (v_1, v_2, 2), l_3 = (v_1, v_1, z).$$

Pastebime, kad nelygiagrečių lankų galima nenumeruoti.

Paprastasis grafas

Apibrėžimas

Multigrafas be kilpų ir lygiagrečių lankų vadinimas paprastuoju orientuotuoju grafu.

Kadangi paprastojo grafo lankų numeruoti nėra būtina, tai jis sudaro aibės $V \times V$ poaibį, kurį (kaip prisimename) vadiname binariuoju sąryšiu.

Apibrėžimas

Sąryšis S aibėje A vadinamas antirefleksyviuoju, jei

$$\forall a \in A \, (a, a) \notin S.$$

Matome, kad kilpų nebuvimą galime apibrėžti antirefleksyvumu.

Paprastasis grafas

Apibrėžimas

Sąryšis S aibėje A vadinamas antirefleksyviuoju, jei

$$\forall a \in A \, (a, a) \notin S.$$

Matome, kad kilpų nebuvimą galime apibrėžti antirefleksyvumu.

Apibrėžimas

Apibrėžkime G kaip aibių porą $G = (V, L)$. Tada G vadinsime paprastuoju orientuotuoju grafu, kai

$$L \subset V \times V$$

bus antireflesyvusis sąryšis.

Paprastasis grafas

Pavyzdys

Viršūnių aibė

$$V = \{a, b, c, d\}.$$

Lankų aibė

$$L = \{(a, b), (a, c), (a, d), (c, d), (d, c)\}.$$

Neorientuotieji grafai

Apibrėžimas

Sąryšis S vadinamas simetriniu, jei $\forall a, b \in A$

$$(a, b) \in S \Rightarrow (b, a) \in S.$$

Tegul sąryšis L yra simetriškas. Tada kiekvieną dviejų lankų porą $\{(v_i, v_j), (v_j, v_i)\}$ pakeisime viena pora $\{v_i, v_j\}$ ir ją pavadinsime grafo briauna.
Grafus $G = (V, B)$ vadinsime neorientuotaisiais grafais, čia B yra briaunų aibė.

Neorientuotieji grafai

Apibrėžimas

Grafo $G = (V, B)$ eile vadinsime skaičių $n = |V|$.
Grafas $G = (V, \varnothing)$ vadinamas tuščiuoju. Žymimas O_n.
Grafas $G = (\varnothing, \varnothing)$ vadinamas nuliniu.
Grafas $G = (\{v\}, \varnothing)$ vadinamas trivialiuoju.
Jeigu $|V| = n$, tai grafas turintis $\frac{n(n-1)}{2}$ briaunas, vadinamas pilnuoju ir žymimas K_n.

Pavyzdžiai

$$K_2 = (\{a, b\}, \{\{a, b\}\});$$

$$K_3 = (\{a, b, c\}, \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}).$$

Neorientuotieji grafai

Apibrėžimas

Grafo $G = (V, B)$ viršūnės v_i ir v_j vadinamos gretimomis, kai $\{v_i, v_j\} \in B$. Viršūnės v_i ir v_j vadinamos incidenčiosiomis briaunai $\{v_i, v_j\}$.

Pavyzdys

$$G = (\{a, b, c\}, \{\{a, b\}, \{b, c\}\})$$

Apibrėžimas

Briaunos turinčios bendrą incidenčią viršūnę, vadinamos gretimomis.

Pavyzdys

$$H = (\{1, 2, 3, 4\}, \{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\})$$

Grafo viršūnių laipsniai

Apibrėžimas

Grafo $G = (V, B)$ viršūnės $v \in V$ aplinka vadinama visų jai gretimų viršūnių aibė:

$$\Gamma(v) = \{w \in V : \{v, w\} \in B\}.$$

Orientuotojo grafo aibė $\Gamma(v)$ suskaidoma į du poaibius:

$$\Gamma(v) = \Gamma^-(v) \cup \Gamma^+(v),$$

atitinkamai išeinančius ir įeinančius lankus.

Apibrėžimas

Skaičius $p(v) = |\Gamma(v)|$ yra vadinamas viršūnės v laipsniu. Orientuotojo grafo viršūnės laipsniui galioja:

$$p(v) = p(v)^- + p(v)^+ = |\Gamma^-(v)| + |\Gamma^+(v)|,$$

čia $p(v)^-$ ir $p(v)^+$ vadinami išėjimo ir įėjimo puslaipsniais.

Grafo viršūnių laipsniai

Apibrėžimas

Skaičius $p(v) = |\Gamma(v)|$ yra vadinamas viršūnės v laipsniu. Orientuotojo grafo viršūnės laipsniui galioja:

$$p(v) = p(v)^- + p(v)^+ = |\Gamma^-(v)| + |\Gamma^+(v)|,$$

čia $p(v)^-$ ir $p(v)^+$ vadinami išėjimo ir įėjimo puslaipsniais.

Apibrėžimas

Orientuotojo grafo viršūnė v vadinama jo įėjimu/išėjimu, kai

$$p^+(v) = 0, p^-(v) > 0 \quad (p^+(v) > 0, p^-(v) = 0).$$

Grafo viršūnių laipsniai

Skaičiuojant grafo briaunas, incidenčiąsias kiekvienai jo viršūnei, gausime grafo briaunų skaičių, padaugintą iš dviejų.

Oilerio teorema

Grafo briaunų (lankų) skaičius lygus

$$|B| = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p(v_i),$$

čia n-grafo eilė, $p(v_i)$-viršūnės v_i laipsnis.

Grafo viršūnių laipsniai

Apibrėžimas

Grafo $G = (V, B)$ viršūnės $v \in V$ aplinka vadinama visų jai gretimų viršūnių aibė:

$$\Gamma(v) = \{w \in V : \{v, w\} \in B\}.$$

Orientuotojo grafo aibė $\Gamma(v)$ suskaidoma į du poaibius:

$$\Gamma(v) = \Gamma^{-}(v) \cup \Gamma^{+}(v),$$

atitinkamai išeinančius ir įeinančius lankus.

Apibrėžimas

Skaičius $p(v) = |\Gamma(v)|$ yra vadinamas viršūnės v laipsniu. Orientuotojo grafo viršūnės laipsniui galioja:

$$p(v) = p(v)^{-} + p(v)^{+} = |\Gamma^{-}(v)| + |\Gamma^{+}(v)|,$$

čia $p(v)^{-}$ ir $p(v)^{+}$ vadinami išėjimo ir įėjimo puslaipsniais.

Grafo viršūnių laipsniai

Oilerio teorema

Grafo briaunų (lankų) skaičius lygus

$$|B| = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p(v_i),$$

čia n-grafo eilė, $p(v_i)$-viršūnės v_i laipsnis.

Pastebime, kad

Pastabos

1. Grafo viršūnių laipsnių suma yra

Grafo viršūnių laipsniai

Oilerio teorema

Grafo briaunų (lankų) skaičius lygus

$$|B| = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p(v_i),$$

čia n-grafo eilė, $p(v_i)$-viršūnės v_i laipsnis.

Pastebime, kad

Pastabos

1. Grafo viršūnių laipsnių suma yra lyginis skaičius;
2. Viršūnių su nelyginiais laipsniais skaičius yra

Grafo viršūnių laipsniai

Oilerio teorema

Grafo briaunų (lankų) skaičius lygus

$$|B| = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p(v_i),$$

čia n-grafo eilė, $p(v_i)$-viršūnės v_i laipsnis.

Pastebime, kad

Pastabos

1. Grafo viršūnių laipsnių suma yra lyginis skaičius;
2. Viršūnių su nelyginiais laipsniais skaičius yra lyginis;
3. Pilnojo neorientuotojo grafo K_n visų viršūnių laipsniai yra $n-1$, o pilnojo orientuoto yra $2(n-1)$.

Grafo viršūnių laipsniai

Apibrėžimas

Grafo viršūnė v vadinama izoliuotąja, kai $p(v) = 0$.
Viršūnė v vadinama nusvirusiąja, jei $p(v) = 1$.
Grafas vadinamas homogeniniu, kai visų jo viršūnių laipsniai yra lygūs.
Grafas, kurio visų viršūnių laipsniai yra lygūs dviem vadinamas ciklu ir žymimas C_n.

Apibrėžimas

$$G = (\{1,2,3,4\}, \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{1,4\}\});$$

$$H = (\{1,2,3\}, \{\{1,2\}, \{1,3\}\}).$$

Temos planas

Maršrutai ir grandinės

Apibrėžimas

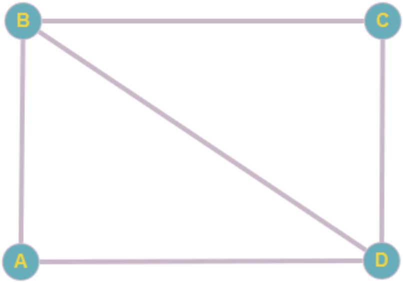
Grafo maršrutu vadinama bet kuri poromis gretimų jo briaunų seka.

Maršrutas - baigtinė seka, sudaryta iš grafo $G = (V, B)$ viršūnių ir briaunų

$$v_{i_0}, b_{i_1}, v_{i_1}, b_{i_2}, ..., v_{i_{k-1}}, b_{i_k}, v_{i_k}$$

taip, kad $\forall b_{i_j} = \{v_{i_{j-1}}, v_{i_j}\} \in B$.

Maršrutai ir grandinės



Pavyzdys

$$M = (A, \{A, B\}, B, \{B, D\}, D, \{D, C\}, C)$$

$$M = (A, B, D, C)$$

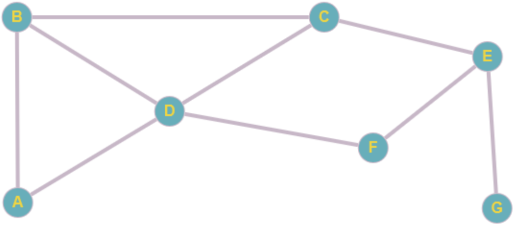
$$M = (D, C, B, D, A)$$

Maršrutai ir grandinės

Apibrėžimas

- Maršruto viršūnės v_{i_0} ir v_{i_k} vadinamos galinėmis, kitos viršūnės - vidinėmis.
- Maršrutas vadinamas atviruoju, jei jo galinės viršūnės yra skirtingos. Priešingu atveju - uždaruoju.
- Maršrutas, kurio viso briaunos skirtingos, vadinamas grandine.
- Atviroji grandinė vadinama keliu.
- Uždaroji grandinė vadinam ciklu.
- Grandinė, kurios visos vidinės viršūnės yra skirtingos, vadinama paprastąja.

Maršrutai ir grandinės



Pavyzdys

$$M_1 = (A, B, C, D, F)$$

$$M_2 = (C, E, G)$$

$$M_3 = (B, C, E, F, D, B)$$

$$M_4 = (A, B, D, C, E, F, D, A)$$

Grafo jungiosios komponentės

Apibrėžimas

Grafas vadinamas jungiuoju, jei bet kurias jo viršūnės galima sujungti keliu.

Jeigu grafas $G = (V, B)$ nėra jungusis, tai jo viršūnių aibę V galima suskaidyti į blokus $V_1, V_2 : V = V_1 \cup V_2, V_1 \cap V_2 = \varnothing$, taip kad

$$\forall v_1, v_2 \in V : v_1 \in V_1 \wedge v_2 \in V_2 \Rightarrow \overline{\exists}\{v_1, v_2\} \in B.$$

Akivaizdu, kad šį procesą galima kartoti baigtinį skaičių kartų, kol gausime skaidinį:

$$V = V_1 \cup V_2 \cup ... \cup V_k, \quad V_i \cap V_i \cap V_j = \varnothing, \forall i \neq j,$$

kuriame bet kurio poaibio $V_s \subset V$ visas viršūnes galima sujungti keliu.

Grafo jungiosios komponentės

Dabar pažymėkime $B_j \subset B$ grafo $G = (V, B)$ briaunų aibės poaibį, sudaryta iš visų briaunų, incidenčiųjų bent vienai viršūnei $v \in V_j$.

Apibrėžimas

Grafą $G_j = (V_j, B_j)$ vadiname grafo $G = (V, B)$ incidenčiąja komponente.

Pastabos

1. Bet kuris n-osios eilės grafas turi ne daugiau kaip n jungiųjų komponenčių;
2. Jei n-osios eilės grafas turi n jungiųjų komponenčių, tai jos yra izoliuotosios grafo viršūnės. Taigi, šiuo atveju turime tuščiąjį grafą;
3. Antrosios eilės jungusis grafas turi bent vieną briauną;
4. Trečiosios eilės jungusis grafas turi dvi arba tris briaunas.

Grafo jungiosios komponentės

Dabar pažymėkime $B_j \subset B$ grafo $G = (V, B)$ briaunų aibės poaibį, sudarytą iš visų briaunų, incidenčiųjų bent vienai viršūnei $v \in V_j$.

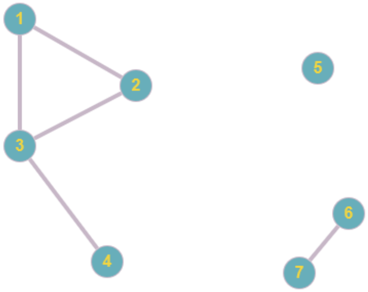
Apibrėžimas

Grafą $G_j = (V_j, B_j)$ vadiname grafo $G = (V, B)$ incidenčiąja komponente.

Pastabos

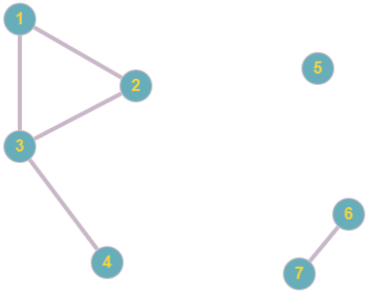
1. Bet kuris n-osios eilės grafas turi ne daugiau kaip n jungiųjų komponenčių;
2. Jei n-osios eilės grafas turi n jungiųjų komponenčių, tai jos yra izoliuotosios grafo viršūnės. Taigi, šiuo atveju turime tuščiąjį grafą;
3. Antrosios eilės jungusis grafas turi bent vieną briauną;
4. Trečiosios eilės jungusis grafas turi dvi arba tris briaunas.

Grafo jungiosios komponentės



Pavyzdys

Grafo jungiosios komponentės



Pavyzdys

$$G_1 = (\{1, 2, 3, 4\}, \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\})$$

$$G_2 = (\{5\}, \varnothing)$$

$$G_3 = (\{6, 7\}, \{\{6, 7\}\})$$

Jungumo sąryšis

Tarkime, kad $G = (V, B)$ bet kuris grafas. Jo viršūnių aibėje apibrėžkime grafo jungumo sąryšį $\rho \subset V^2$:

$$(u, w) \in \rho \Leftrightarrow u = w \vee \exists (u, v_{i_1}, ..., v_{i_k}, w),$$

kitaip pasakius, (u, w) priklauso sąryšiui, jei u ir v galima sujungti grandine.
Šis sąryšis yra ekvivalentumo sąryšis.
Taigi, viršūnių aibę galima suskaidyti į ekvivalentumo klases, kurios yra grafo jungiosios komponentės.

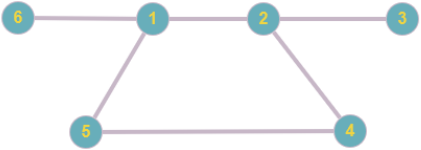
Ilgiausias grafo kelias

Apibrėžimas

Kelio ilgiu vadinamas įeinančių į jį briaunų skaičius.

Teorema 6.2

Du maksimalaus ilgio jungiojo grafo keliai turi bent vieną bendrą viršūnę.



Grafo metrinės charakteristikos

Tegul $G = (V, B)$ yra jungusis grafas. Sunumeruokime visus šio grafo viršūnes $u, w \in V$ jungiančius kelius:

$$P_k = (u, v_{i_1}, v_{i_2}), ..., v_{i_{l_k}}, w).$$

Apibrėžimas

Atstumu tarp grafo viršūnių vadinamas trumpiausio jas jungiančio kelio ilgis:

$$\rho(u, w) = \min_k |P_k(u, ..., w)|.$$

Grafo metrinės charakteristikos

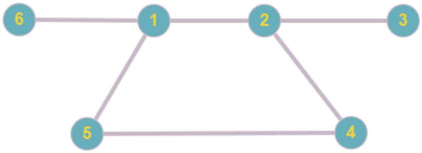
Apibrėžimas

Atstumu tarp grafo viršūnių vadinamas trumpiausio jas jungiančio kelio ilgis:

$$\rho(u, w) = \min_k |P_k(u, ..., w)|.$$

Pastebime, kad taip apibrėžtas atstumas turi metrikos savybes:

1. $\rho(u, w) \geq 0 \wedge \rho(u, w) = 0 \Leftrightarrow u = w$;
2. $\rho(u, w) = \rho(w, u) \quad \forall u, w \in V$;
3. $\rho(u, v) + \rho(v, w) \geq \rho(u, w) \quad \forall v, u, w \in V$.



Grafo metrinės charakteristikos

Apibrėžimai

1. Grafo skersmeniu vadinsime maksimalų atstumą tarp grafo viršūnių:

$$d(G) = \max_{v,w \in V} \rho(v, w)$$

2. Viršūnės u ekscentricitetu vadinamas jos atstumų nuo kitų grafo viršūnių maksimumas:

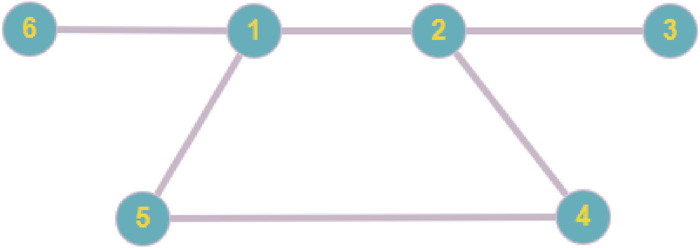
$$e(u) = \max_{v \in V} \rho(v, u)$$

3. Viršūnė c vadinama grafo centru, jei jos ekscentricitetas yra minimalus:

$$e(c) = \min_{v \in V} e(v)$$

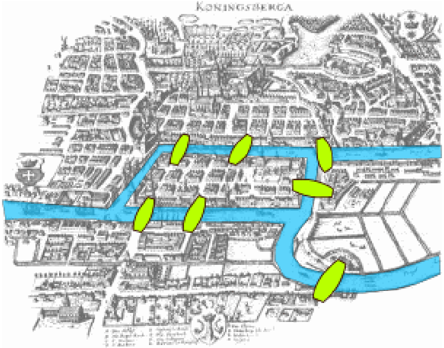
4. Centro ekscentricitetas vadinamas grafo spinduliu.

Grafo metrinės charakteristikos



Temos planas

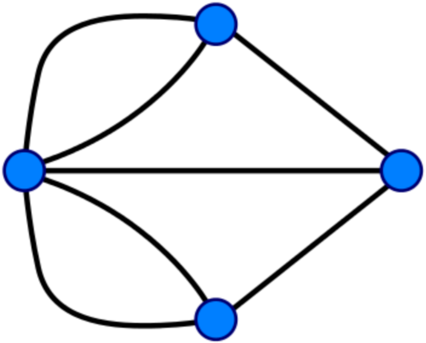
Karaliaučiaus tiltų uždavinys



Uždavinys

Ar egzistuoja toks maršrutas, kad išėjus iš namų būtų galima grįžti namo perėjus per kiekvieną tiltą lygiai po vieną kartą?

Karaliaučiaus tiltų uždavinys



Uždavinys

Ar egzistuoja toks maršrutas, kad išėjus iš namų būtų galima grįžti namo perėjus per kiekvieną tiltą lygiai po vieną kartą?

Oilerio grafas

Apibrėžimas

Grafo ciklas, einantis per visas grafo briaunas yra vadinamas Oilerio ciklu. Grafą turinį Oilerio ciklą, vadinsime Oilerio grafu.

Lema

Jei visų grafo viršūnių laipsniai yra ne mažesni už 2, tai grafas turi bent vieną ciklą.

Teorema

Jungusis neorientuotas grafas turi Oilerio ciklą tada ir tik tada, kai visų grafo viršūnių laipsniai yra lyginiai skaičiai.

Apibrėžimas

Oilerio keliu vadinama per visas grafo briaunas einanti atviroji grandinė.

Temos planas

Grafo chromatinis skaičius

Apibrėžkime spalvinimo funkciją $f_k : G(V,B) \Rightarrow \{1,2,...,k\}$, t.y.

$$(\forall v \in V)\, f_k(v) \in \{1,2,...,k\}, k \in \mathbb{N}.$$

Apibrėžimas

Grafo $G = (V,B)$ spalvinimas f_k vadinamas taisyklinguoju, jei

$$(\forall v_i, v_j \in V)\, \{v_i, v_j\} \in B \Rightarrow f_k(v_i) \neq f_k(v_j).$$

Apibrėžimas

Grafo $G = (V,B)$ chromatiniu skaičiumi vadinamas

$$\chi(G) = \min_{f_k \in \mathcal{F}} k,$$

čia $\mathcal{F}$ - visų grafo taisyklingųjų spalvinimų aibė.

Grafo chromatinis skaičius

Apibrėžimas

Grafo $G = (V, B)$ chromatiniu skaičiumi vadinamas

$$\chi(G) = \min_{f_k \in \mathcal{F}} k,$$

čia $\mathcal{F}$ - visų grafo taisyklingųjų spalvinimų aibė.

Sakysime, kad grafas G yra bichromatusis, kai $\chi(G) = 2$. Netuščias grafas yra bichromatusis tada ir tik tada, kai jis neturi nelyginio ilgio ciklų.

Teorema

Jei G bet kuris planarusis grafas (grafas kurį plokštumoje galima išdėstyti taip, kad jo briaunos nesikirstų), tai

$$\chi(G) = 5.$$

Grafo chromatinis skaičius

Apibrėžimas

Grafo $G = (V, B)$ chromatiniu skaičiumi vadinamas

$$\chi(G) = \min_{f_k \in \mathcal{F}} k,$$

čia $\mathcal{F}$ - visų grafo taisyklingųjų spalvinimų aibė.

Sakysime, kad grafas G yra bichromatusis, kai $\chi(G) = 2$. Netuščias grafas yra bichromatusis tada ir tik tada, kai jis neturi nelyginio ilgio ciklų.

Hipotezė

Jei G bet kuris planarusis grafas (grafas kurį plokštumoje galima išdėstyti taip, kad jo briaunos nesikirstų), tai

$$\chi(G) = 4.$$