Sąryšiai

A. Medžiūnas

Diskrečioji matematika

2021 m. gegužės 12 d.

Temos planas

Sąryšių pavyzdžiai

Apibrėžimas

Aibių A ir B binariuoju sąryšiu S vadinamas bet kuris jų dekarto sandaugos $A \times B$ poaibis:

$$S \subset A \times B.$$

Aibėms $A_1, A_2, ..., A_n$ elementų sąryšį apibrėšime:

$$S \subset A_1 \times A_2 \times ... \times A_n.$$

Apibrėžimas

Sąryšiu aibėje A vadinamas bet kuris poaibis:

$$S \subset A^n = A \times A \times ... \times A.$$

Sąryšių pavyzdžiai

Bendrieji pavyzdžiai

1. Tapatumo (lygybės) sąryšiu vadinamas bet koks apibrėžtas aibėje A sąryšis:
$$I_A = \{(a, ..., a) : a \in A\} \subset A^n;$$
2. Universaliuoju sąryšiu vadinama aibių A ir B Dekarto sandauga:
$$U_{A \times B} = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\} = A \times B;$$
3. Tuščiuoju sąryšiu vadinama tuščioji aibė $\varnothing \subset A^n$.

Sąryšių pavyzdžiai

Pavyzdžiai

Sveikųjų skaičių aibėje $\mathbb{Z}$ galime apibrėžti sąryšius

$$D_1 = \{(x, y) : x \text{ dalus iš } y)\} \subset \mathbb{Z}^2;$$

$$M_1 = \{(x, y) : x \leq y)\} \subset \mathbb{Z}^2;$$

$$L_3 = \{(x, y) : x = 2y)\} \subset \mathbb{Z}^2.$$

Sąryšių pavyzdžiai

Pavyzdžiai

Tegul K-studentų pažymėjimų numerių aibė, P-studentų pavardžių aibė, V-studentų vardų aibė, G-grupių aibė, M-gimimo metai. Tada sąryšis

$$R \subset K \times P \times V \times G \times M$$

sudaro tam tikrą duomenų bazę.

Sąryšių pavyzdžiai

Apibrėžimai

Binariojo sąryšio $S \subset A \times B$ apibrėžimo sritimi vadinama aibė

$$\mathcal{D}(S) = \{x : \exists y\,(x,y) \in S\} \subset A.$$

Apibrėžimai

Sąryšio $S \subset A \times B$ reikšmių sritimi vadinama aibė

$$\mathcal{R}(S) = \{y : \exists x\,(x,y) \in S\} \subset B.$$

Sąryšių pavyzdžiai

Pavyzdys

Apibrėžto aibėje $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ sąryšio

$$S = \{(1, 1), (2, 1), (6, 1), (6, 2)\} \subset A^2$$

apibrėžimo sritis

Sąryšių pavyzdžiai

Pavyzdys

Apibrėžto aibėje $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ sąryšio

$$S = \{(1, 1), (2, 1), (6, 1), (6, 2)\} \subset A^2$$

apibrėžimo sritis

$$\mathcal{D} = \{1, 2, 6\},$$

reikšmių sritis

Sąryšių pavyzdžiai

Pavyzdys

Apibrėžto aibėje $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ sąryšio

$$S = \{(1,1), (2,1), (6,1), (6,2)\} \subset A^2$$

apibrėžimo sritis

$$\mathcal{D} = \{1, 2, 6\},$$

reikšmių sritis

$$\mathcal{R} = \{1, 2\}.$$

Pavyzdys

Matrica $M_S = ||m_{ij}||_{n \times m}$, kurios elementai apibrėžti

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{kai } (a_i, b_j) \in S, \\ 0, & \text{kai } (a_i, b_j) \notin S. \end{cases}$$

vadinama binariojo sąryšio $S \subset A \times B$ (charakteristine) matrica, čia $n = |A|, m = |B|$.

Sąryšių pavyzdžiai

Pavyzdys

Tegul sąryšis $S_1 = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_3)\}$. Tada jo matrica

$$M_{S_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Binariųjų sąryšių tipai/savybės

Apibrėžimas

Sąryšis S aibėje A vadinamas refleksyviuoju, jei

$$\forall a \in A\, (a, a) \in S.$$

Pastebime, kad refleksyviojo sąryšio charakteristinės matricos įstrižainėje yra tik vienetai.

Binariųjų sąryšių tipai/savybės

Apibrėžimas

Sąryšis S aibėje A vadinamas refleksyviuoju, jei

$$\forall a \in A\, (a, a) \in S.$$

Pastebime, kad refleksyviojo sąryšio charakteristinės matricos įstrižainėje yra tik vienetai. Tapatumo (lygybės) sąryšis $I_A \subset A^2$ yra minimalus refleksyvusis sąryšis.

Teorema 4.1

Sąryšis $S \subset A^2$ yra refleksyvusis tada ir tik tada, kai

$$I_A \subset S.$$

Binariųjų sąryšių tipai/savybės

Pavyzdžiai

$$S_1 = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,3)\} \subset A \times A,$$

čia $A = \{1,2,3\}$;

$$S_2 = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,2)\} \subset A \times A.$$

Binariųjų sąryšių tipai/savybės

Apibrėžimas

Sąryšis S aibėje A vadinamas antirefleksyviuoju, jei

$$\forall a \in A\,(a, a) \notin S.$$

Pastebime, kad antirefleksyviojo sąryšio charakteristinės matricos įstrižainėje yra tik nuliai.

Apibrėžimas

Sąryšis S aibėje A vadinamas antirefleksyviuoju, jei

$$\forall a \in A\,(a, a) \notin S.$$

Pastebime, kad antirefleksyviojo sąryšio charakteristinės matricos įstrižainėje yra tik nuliai. Sąryšis $U_A \backslash I_A \subset A^2$ yra maksimalus antirefleksyvusis sąryšis.

Teorema 4.2

Sąryšis $S \subset A^2$ yra antirefleksyvusis tada ir tik tada, kai

$$S \cap I_A = \varnothing.$$

Pavyzdžiai

$$S_3 = \{(1,2),(2,3)\} \subset A^2,$$

čia $A = \{1,2,3\}$;

$$S_4 = \{(1,2),(2,3),(3,3)\} \subset A^2.$$

Pavyzdžiai

$$S_3 = \{(1,2),(2,3)\} \subset A^2,$$

čia $A = \{1,2,3\}$;

$$S_4 = \{(1,2),(2,3),(3,3)\} \subset A^2.$$

Sąryšis nebūtinai turi būti refleksyvusis arba antirefleksyvusis.

Pavyzdžiai

$$S_3 = \{(1,2),(2,3)\} \subset A^2,$$

čia $A = \{1,2,3\}$;

$$S_4 = \{(1,2),(2,3),(3,3)\} \subset A^2.$$

Sąryšis nebūtinai turi būti refleksyvusis arba antirefleksyvusis.
Sąryšis negali būti refleksyvusis ir antirefleksyvusis vienu metu.

Binariųjų sąryšių tipai/savybės

Apibrėžimas

Sąryšis S vadinamas simetriniu, jei $\forall a, b \in A$

$$(a, b) \in S \Rightarrow (b, a) \in S.$$

Apibrėžimas

Sąryšis S vadinamas simetriniu, jei $\forall a, b \in A$

$$(a, b) \in S \Rightarrow (b, a) \in S.$$

Pastebime, kad $\varnothing$ yra minimalus simetrinis sąryšis.

Binariųjų sąryšių tipai/savybės

Apibrėžimas

Sąryšis S vadinamas simetriniu, jei $\forall a, b \in A$

$$(a, b) \in S \Rightarrow (b, a) \in S.$$

Pastebime, kad $\varnothing$ yra minimalus simetrinis sąryšis.
Sąryšis U_A yra maksimalus simetrinis sąryšis.

Apibrėžimas

Sąryšis

$$S^{-1} = \{(a, b) : (b, a) \in S\}$$

vadinamas atvirkštiniu sąryšiui $S \subset A^2$.

Atvirkštinio sąryšio S^{-1} charakteristinę matricą gausime transponuodami sąryšio S matricą M_S. Taigi

$$M_{S^{-1}} = (M_S)^T$$

Pavyzdys

Tegul sąryšis $S_1 = \{(a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_2)\}$. Tada jo matrica

$$M_{S_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$M_{S^{-1}} = (M_S)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pastebime, kad $\left(M_S^T\right)^T = M_S$. Taigi

$$\left(S^{-1}\right)^{-1} = S.$$

Binariųjų sąryšių tipai/savybės

Pastaba

Tegul $S^{-1} \subset A^2$ yra atvirkštinis sąryšis. Tada

$$\mathcal{D}\left(S^{-1}\right) = \mathcal{R}\left(S\right), \quad \mathcal{R}\left(S^{-1}\right) = \mathcal{D}\left(S\right).$$

Teorema 4.3

Sąryšis $S \subset A^2$ yra simetrinis tada ir tik tada, kai

$$S^{-1} = S.$$

Pastebime, kad visos sąryšių savybių teoremos galioja ir nebūtinai baigtinėms aibėms A.

Apibrėžimas

Sąryšis S vadinamas antisimetriniu, jei $(\forall a, b, c \in A)$

$$(a, b) \in S \land (b, a) \in S \Rightarrow a = b$$

Teorema 4.4

Sąryšis $S \subset A^2$ yra antisimetrinis tada ir tik tada, kai

$$S \cap S^{-1} \subset I_A.$$

Pavyzdžiai

$$S_5 = \{(1,1),(2,2)\} \subset \{1,2,3,4\}^2$$

$$S_6 = \{(1,2),(1,3),(2,3),(3,1)\} \subset \{1,2,3,4\}^2$$

Binariųjų sąryšių tipai/savybės

Apibrėžimas

Sąryšis $S \subset A^2$ vadinamas pilnuoju, jei

$$\forall a, b \in A \wedge a \neq b \Rightarrow (a, b) \in S \vee (b, a) \in S.$$

Teorema 4.5

Sąryšis $S \subset A^2$ yra pilnasis tada ir tik tada, kai

$$S \cup S^{-1} \cup I_A = U_A = A^2.$$

Pavyzdžiai

$$\{(1,2),(1,3),(2,3)\} \subset \{1,2,3,4\}^2$$

$$\{(1,2),(1,3),(2,3)\} \subset \{1,2,3\}^2$$

Pastebime, kad jei S nėra pilnasis sąryšis, tai ir $\forall T \subset S$ irgi nėra pilnasis.

Temos planas

Sąryšių sąjunga ir sankirta

Tarkime, kad $S_1 \subset A^2$ ir $S_2 \subset A^2$ yra sąryšiai. Tada:

- $S_1 \cap S_2 \subset A^2$
- $S_1 \cup S_2 \subset A^2$
- $S_1 \backslash S_2 \subset A^2$
- $\overline{S}_1 = U_A \backslash S_1 \subset A^2$

yra sąryšiai.

Pavyzdžiai

$$\varphi_1 = \{(m, n) : m \geq n\}$$

$$\varphi_2 = \{(m, n) : m > n\}$$

$$\varphi_3 = \{(m, n) : m < n\}$$

Sąryšių kompozicija

Apibrėžimas

Tarkime, kad $\varphi \subset A \times B$ ir $\psi \subset B \times C$. Tada sąryšis $\varphi \circ \psi \subset A \times C$ vadinamas sąryšių φ ir ψ kompozicija

$$\varphi \circ \psi = \{(a, c) : \exists b \in B \quad (a, b) \in \varphi \wedge (b, c) \in \psi\}.$$

Pavyzdžiai

$$\alpha = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$$

$$\beta = \{(1, 3), (2, 4), (3, 2), (4, 1)\}$$

Sąryšių kompozicija

Tarkime, kad $M_\varphi = ||\varphi_{ik}||_{|A|\times|B|}$ ir $M_\psi = ||\psi_{kj}||_{|B|\times|C|}$ yra sąryšių φ ir ψ matricos. Nustatyti ar elementas (a_i, c_j) priklauso kompozicijai $\varphi \circ \psi$ galime pasinaudoję formule:

$$m_{ij} = \bigvee_{k=1}^{|B|} \varphi_{ik} \wedge \psi_{kj},$$

čia $i = 1, 2, ..., |A|, \quad j = 1, 2, ..., |C|$.

Sąryšių kompozicija

Pavyzdžiai

$$M_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_\psi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ar $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$?

Pavyzdžiai

$$M_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_\psi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ar $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$?

Sąryšių kompozicija

Sąryšių kompozicijos savybės

Tegul $\varphi, \psi, \rho \subset A^2$ sąryšiai. Tada:

1. $\varphi \circ I_A = I_A \circ \varphi = \varphi$
2. $\varphi \circ \varnothing = \varnothing \circ \varphi = \varnothing$
3. $(\varphi \circ \psi) \circ \rho = \varphi \circ (\psi \circ \rho)$ (asociatyvumas)
4. $(\varphi \circ \psi)^{-1} = \varphi^{-1} \circ \psi^{-1}$

Sąryšio tranzityvumas

Apibrėžimas

Sąryšis $S \subset A^2$ vadinamas tranzityviuoju, jei

$$(a, b) \in S \wedge (b, c) \in S \Rightarrow (a, c) \in S, \quad \forall a, b, c \in A.$$

Teorema 4.6

Sąryšis $S \subset A^2$ yra tranzityvusis tada ir tik tada, jei

$$S \circ S \subset S.$$

Pavyzdžiai

$$S_a = \{(1,2),(1,3)\},\ S_b = \{(2,1),(3,1)\},\ S_c = \{(1,2),(2,3)\}.$$

Sąryšio tranzityvumas

Apibrėžimas

Sąryšis $S \subset A^2$ vadinamas tranzityviuoju, jei

$$(a, b) \in S \wedge (b, c) \in S \Rightarrow (a, c) \in S, \quad \forall a, b, c \in A.$$

Teorema 4.6a

Sąryšis $S \subset A^2$ yra tranzityvusis tada ir tik tada, jei

$$S \cup S \circ S = S.$$

Pavyzdžiai

$$S = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$$

Apibrėžimas

Sąryšio $S \subset A^2$ atitinkamais laipsniais vadinsime sąryšius

$$S^0 = I_A, \quad S^1 = S,$$

$$S^2 = S \circ S, \quad S^n = S^{n-1} \circ S = S \circ S^{n-1}.$$

Apibrėžimas

Sąryšio $S \subset A^2$ tranzityviuoju uždariniu vadinsime sąryšį

$$S^+ = S \cup S^2 \cup S^3 \cup \ldots$$

Jei A yra baigtinė tai

$$S^+ = \bigcup_{k=1}^{|A|-1} S^k.$$

Apibrėžimas

Sąryšio $S \subset A^2$ tranzityviuoju uždariniu vadinsime sąryšį

$$S^+ = S \cup S^2 \cup S^3 \cup \ldots$$

Jei A yra baigtinė tai

$$S^+ = \bigcup_{k=1}^{|A|-1} S^k.$$

Pastebime, kad sąryšis S^+ yra minimalusis tranzityvusis sąryšis, kai $S \subset S^+$.

Sąryšio uždarinys

Apibrėžimas

Sąryšio $S \subset A^2$ refleksyviuoju tranzityviuoju uždariniu vadinsime sąryšį

$$S^* = S^+ \cup I_A.$$

Pavyzdžiai

$$S = \{(1,2),(2,3),(3,1)\} \subset \{1,2,3,4\}^2$$

Temos planas

Ekvivalentumo sąryšiai

Apibrėžimas

Sąryšis $S \subset A^2$ yra vadinamas ekvivalentumo sąryšiu, jei jis yra

1. refleksyvusis;
2. simetrinis;
3. tranzityvusis.

Pavyzdžiai

Ekvivalentumo sąryšiai

Apibrėžimas

Sąryšis $S \subset A^2$ yra vadinamas ekvivalentumo sąryšiu, jei jis yra

1. refleksyvusis;
2. simetrinis;
3. tranzityvusis.

Pavyzdžiai

- Tapatumo sąryšis I_A;

Ekvivalentumo sąryšiai

Apibrėžimas

Sąryšis $S \subset A^2$ yra vadinamas ekvivalentumo sąryšiu, jei jis yra

1. refleksyvusis;
2. simetrinis;
3. tranzityvusis.

Pavyzdžiai

- Tapatumo sąryšis I_A;
- Universalusis sąryšis U_A;
- $\tau = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\}$.

Ekvivalentumo klasės

Apibrėžimas

Tegul $S \subset A^2$ yra ekvivalentumo sąryšis. Aibės A poaibis

$$[a]_S = \{b \in A : (a, b) \in S\}$$

vadinamas elemento $a \in S$ ekvivalentumo klase.

Ekvivalentumo klasių savybės

1. $\forall a \in A : [a]_S \neq \varnothing$;
2. $(a, b) \in A \Rightarrow [a]_S = [b]_S$;
3. $\forall (a, b) \notin \Rightarrow [a]_S \cap [b]_S = \varnothing$.

Pavyzdžiai

$$(x, y) \in S,\ \text{kai } \exists k \in \mathbb{Z} : x - y = 3k, \quad x, y \in \mathbb{Z}.$$

Temos planas

Tvarkos sąryšiai

Apibrėžimas

Sąryšio savybės	Sąryšio pavadinimas
antisimetrinis ir tranzityvusis	tvarkos sąryšis
refleksyvusis	negriežtosios tvarkos
antirefleksyvusis	griežtosios tvarkos
pilnasis	visiškos tvarkos
nėra pilnasis	dalinės tvarkos

Pavyzdžiai

$$\{(a,b),(a,c),(a,d),(b,c),(b,d),(c,d)\} \subset \{a,b,c,d\}^2$$

Sutvarkytos aibės

Apibrėžimas

Sutvarkytos aibės $(A, \prec)$ elementas $m \in A$ vadinamas minimaliuoju, jei

$$\overline{\exists} a \in A : a \prec m \wedge a \neq m.$$

Pavyzdžiai

Tegul $S \subset \{2, 3, 4, 6\}^2 : (x, y) \in S$ yra skaičiai x yra skaičiaus y daliklis.

Sutvarkytos aibės

Apibrėžimas

Sutvarkytos aibės $(A, \prec)$ elementas $m \in A$ vadinamas minimaliuoju, jei

$$\overline{\exists} a \in A : a \prec m \wedge a \neq m.$$

Pavyzdžiai

Tegul $S \subset \{2, 3, 4, 6\}^2 : (x, y) \in S$ yra skaičiai x yra skaičiaus y daliklis. Tada

$$S = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (6, 6)\}$$

Teorema 4.8

Bet kuri netuščioji iš dalies sutvarkytoji baigtinė aibė turi minimalųjį elementą.

Sutvarkytos aibės

Apibrėžimas

Baigtinė aibė, kurioje apibrėžtas visiškos tvarkos sąryšis, vadinama visiškai sutvarkyta.

Teorema 4.9

Visiškai sutvarkytoji baigtinė aibė turi vienintelį minimalųjį elementą.