Aibės

A. Medžiūnas

Diskrečioji matematika

2021 m. balandžio 12 d.

Temos planas

1. Aibės ir jų poaibiai
2. Veiksmai su aibėmis
3. Aibės galia

Aibės sąvoka

Aibė yra pirminė matematikos sąvoką ir mes ją suprantame intuityviai, kaip kažkokių objektų rinkinį.

Aibių pavyzdžiai

$$A = \{a_1, a_2, ...a_n\}$$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\} \text{ - natūraliųjų skaičių aibė}$$

$$\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19...\} \text{ - pirminių skaičių aibė}$$

$$L = \{n \in \mathbb{N} : n = 2k, k = 1, 2, ...\} \text{ - lyginių skaičių aibė}$$

$$C = \{\{1, 2\}, \{1\}, \{2\}\}$$

$$D = \{\mathbb{N}\}$$

Aibės sąvoka

Aibė yra pirminė matematikos sąvoką ir mes ją suprantame intuityviai, kaip kažkokių objektų rinkinį.

Aibių pavyzdžiai

$$A = \{a_1, a_2, ...a_n\}$$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\} \text{ - natūraliųjų skaičių aibė}$$

$$\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19...\} \text{ - pirminių skaičių aibė}$$

$$L = \{n \in \mathbb{N} : n = 2k, k = 1, 2, ...\} \text{ - lyginių skaičių aibė}$$

$$C = \{\{1, 2\}, \{1\}, \{2\}\}$$

$$D = \{\mathbb{N}\}$$

Aibės sąvoka

Aibių pavyzdžiai

$$A = \{a_1, a_2, ...a_n\}$$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\} \text{ - natūraliųjų skaičių aibė}$$

$$\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19...\} \text{ - pirminių skaičių aibė}$$

$$L = \{n \in \mathbb{N} : n = 2k, k = 1, 2, ...\} \text{ - lyginių skaičių aibė}$$

$$C = \{\{1, 2\}, \{1\}, \{2\}\}$$

$$D = \{\mathbb{N}\}$$

Aibės gali būti baigtinės - turėti baigtinį elementų skaičių. Aibės gali būti begalinės - turėti begalinį elementų skaičių. Aibės elementų skaičių n žymėsime $|A| = n$.

Apimties principas

Dvi aibės yra lygios tada ir tik tada, kai jas sudaro tie patys elementai.

Pavyzdžiai

Taigi,

$$\{a, a\} = \{a\}.$$

Todėl sutarsime aibėse elementų nekartoti.
Be to,

$$\{a, b\} = \{b, a\}.$$

Pavyzdžiai

Lyginių skaičių aibę

$$L = \{2, 4, 6, ...\}$$

galima apibrėžti ir taip

$$L = \{x\ :\ x \text{ - lyginis skaičius}\}$$

arba apibendrintai

$$\{x : P(x)\},$$

čia $P(x)$ yra tam tikra x savybė - predikatas.
T.y. x priklauso aibei $P(x) = t$ ir $P(x) = k$, jei x nepriklauso aibei.

Intuityvioji abstrakcija

Bet kuri forma $P(x)$ apibrėžia tam tikrą aibę A, taip nurodoma jos elementų a savybė, kad tik su šiais objektais $P(a)$ yra teisingas teiginys.

Intuicionistinė aibių teorija

Intuityvioji abstrakcija

Bet kuri forma $P(x)$ apibrėžia tam tikrą aibę A, taip nurodoma jos elementų a savybė, kad tik su šiais objektais $P(a)$ yra teisingas teiginys.

Raselo paradoksas

Apibrėžkime aibę Y, kurios elementai yra tokios aibės X, kad aibė X nėra savo aibės elementas:

$$Y = \{X : X \notin X\}.$$

Klausimas

Ar aibė $Y \in Y$?

Intuicionistinė aibių teorija

Intuityvioji abstrakcija

Bet kuri forma $P(x)$ apibrėžia tam tikrą aibę A, taip nurodoma jos elementų a savybė, kad tik su šiais objektais $P(a)$ yra teisingas teiginys.

Raselo paradoksas

Apibrėžkime aibę Y, kurios elementai yra tokios aibės X, kad aibė X nėra savo aibės elementas:

$$Y = \{X : X \notin X\}.$$

Klausimas

Ar aibė $Y \in Y$?

Norėdami išvengti šios ir panašių problemų - uždrausime nagrinėti visas aibes vienu metu. Taigi, jokia aibė negali būti jos pačios elementas.

Intuicionistinė aibių teorija

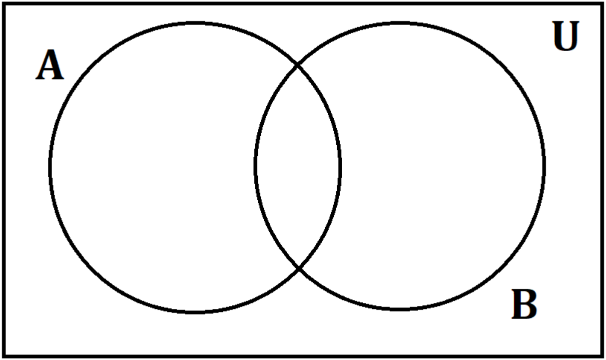
Patogu įvesti universaliosios (visatos) aibės U sąvoką ir nagrinėti tuos jos elementus $x \in U$, kurie turi tam tikrą savybę $p(x)$.

Pavyzdys

$$P = \{x \in U \; : \; p(x) = t\}$$

Tada visų aibių visus elementus išrenkame tik iš aibės U elementų. Jei nė vienas elementas $x \in U$ neturi savybės $p(x)$, tai sakysime, kad ši aibė neturi elementų. Ją vadinsime tuščiąja aibe ir žymėsime $\varnothing$.

Veno diagramos



Apibrėžimas

Aibė A vadinama aibės B poaibiu, jei visi aibės A elementai yra ir aibės B elementai. Žymėsime $A \subset B$ arba $B \supset A$.

Pastebėsime, kad bet kuriai aibei A, teisinga:

- $\varnothing \subset A$
- $A \subset A$

Taigi, bet kuri netuščioji aibė A turi du poaibius: $\varnothing$ ir A. Visi kiti aibės poaibiai vadinami tikriniais.

Aibės poaibiai

Apibrėžimas

Aibė A vadinama aibės B poaibiu, jei visi aibės A elementai yra ir aibės B elementai. Žymėsime $A \subset B$ arba $B \supset A$.

Apibrėžimas

Aibė $A = B$, jei $A \subset B$ ir $B \subset A$.

Aibės poaibiai

Turime baigtinę aibę $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ ($|A| = n$, $|\varnothing| = 0$). Kiek poaibių turi ši aibė?

Pavyzdžiai

Išvardinkite šių aibių poaibius

- $\varnothing$
- $A = \{a\}$
- $B = \{0, 1, \{0, 1\}\}$

Aibės $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ visų poaibių aibę žymėsime 2^A. Taigi

$$\left|2^A\right| = 2^{|A|}.$$

Temos planas

1. Aibės ir jų poaibiai
2. Veiksmai su aibėmis
3. Aibės galia

Operacijos su aibėmis

Aibių sąjunga

Aibių A ir B sąjunga vadinama aibė, kurios elementai priklauso bent vienai aibei. Žymėsime $A \cup B$.

Tarkime aibės A ir B apibrėžtos savybėmis $a(x), b(x)$:

$$A = \{x \in U \ : \ a(x)\}, \quad B = \{x \in U \ : \ b(x)\},$$

o $c^+ = \{x \in U \ : \ c(x) = t\}$ predikato teisingumo $c(x)$ teisingumo aibė. Tada

$$A \cup B = \{x \in U \ : \ a(x) \vee b(x)\} = (a \vee b)^+.$$

Aibių sankirta

Aibių A ir B sankirta vadinama aibė, kurios elementai priklauso kiekvienai aibei. Žymėsime $A \cap B$.

Tarkime aibės A ir B apibrėžtos savybėmis $a(x), b(x)$:

$$A = \{x \in U \,:\, a(x)\}, \quad B = \{x \in U \,:\, b(x)\},$$

o $c^+ = \{x \in U \,:\, c(x) = t\}$ predikato teisingumo $c(x)$ teisingumo aibė. Tada

$$A \cap B = \{x \in U \,:\, a(x) \wedge b(x)\} = (a \wedge b)^+.$$

Aibių skirtumas

Aibių A ir B skirtumu vadinama aibė, kurios elementai priklauso aibei A, bet nepriklauso B. Žymėsime $A \backslash B$.

Tarkime aibės A ir B apibrėžtos savybėmis $a(x), b(x)$:

$$A = \{x \in U \,:\, a(x)\}, \quad B = \{x \in U \,:\, b(x)\},$$

o $c^+ = \{x \in U \,:\, c(x) = t\}$ predikato teisingumo $c(x)$ teisingumo aibė. Tada

$$A \backslash B = \{x \in U \,:\, a(x) \wedge \overline{b(x)}\} = (a \wedge \overline{b})^+.$$

Aibės papildinys

Aibės A papildinys yra aibė $\overline{A}$, sudarytų iš tų (universaliosios aibės U) elementų, kurie nėra aibės A elementai.

Tarkime aibės A ir B apibrėžtos savybėmis $a(x), b(x)$:

$$A = \{x \in U \,:\, a(x)\}, \quad B = \{x \in U \,:\, b(x)\},$$

o $c^+ = \{x \in U \,:\, c(x) = t\}$ predikato teisingumo $c(x)$ teisingumo aibė. Tada

$$\overline{A} = \{x \in U \,:\, \overline{a(x)}\} = \overline{a}^+,$$

$$\overline{B} = \{x \in U \,:\, \overline{b(x)}\} = \overline{b}^+.$$

Apibrėžimas

Tegul $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ ir $B = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$. Tada aibių A ir B Dekarto sandauga vadinsime aibę

$$A \times B = \{(a_i, b_j),\ i = 1, ..., n,\ j = 1, ..., m\}.$$

Apibrėžimas

Begalinių aibių A ir B Dekarto sandauga vadinsime aibę

$$A \times B = \{(a, b)\ :\ a \in A, b \in B\}.$$

Pavyzdys

Tegul $A = \{a, b, c\}$ ir $B = \{1, 2\}$. Tada

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

Operacijos su aibėmis

Apibrėžimas

Tegul $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ ir $B = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$. Tada aibių A ir B Dekarto sandauga vadinsime aibę

$$A \times B = \{(a_i, b_j),\ i = 1, ..., n,\ j = 1, ..., m\}.$$

Apibrėžimas

Begalinių aibių A ir B Dekarto sandauga vadinsime aibę

$$A \times B = \{(a, b)\ :\ a \in A, b \in B\}.$$

Pavyzdys

Tegul $A = \{a, b, c\}$ ir $B = \{1, 2\}$. Tada

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}.$$

Dekarto sandaugos apibrėžimą galima apibendrinti.

Apibrėžimas

Aibių $A_1, A_2, ..., A_n$ Dekarto sandauga vadinsime aibę:

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \,:\, a_i \in A_i, i = 1, ..., n\}.$$

Apibrėžimas

Aibės kėlimu laipsniu vadinsime aibę:

$$A^n = A \times A \times ... \times A = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \,:\, a_i \in A, i = 1, ..., n\}.$$

Aibės kėlimą laipsniu taip pat galima apibrėžti rekurentiškai

$$A^n = A \times A^{n-1} = A^{n-1} \times A.$$

Temos planas

1 Aibės ir jų poaibiai

2 Veiksmai su aibėmis

3 Aibės galia

Ekvivalenčios aibės

Apibrėžimas

A ir B yra dvi aibės. Jei pagal tam tikrą taisyklę f kiekvienam aibės A elementui priskiriamas vienas ir tik vienas aibės B elementas, tai sakome, kad f yra funkcija arba atvaizdis. Rašome $f : A \to B$.
Aibės B elementas $b = f(a)$ vadinamas elemento a vaizdu, o pats elementas a - pirmavaizdžiu.

Vienas vaizdas gali turėti kelis pirmavaizdžius.

Apibrėžimas

Kai visi elementai turi skirtingus vaizdus, tai tokia funkcija vadinama injekcija.

Ekvivalenčios aibės

Apibrėžimas

A ir B yra dvi aibės. Jei pagal tam tikrą taisyklę f kiekvienam aibės A elementui priskiriamas vienas ir tik vienas aibės B elementas, tai sakome, kad f yra funkcija arba atvaizdis. Rašome $f : A \to B$.
Aibės B elementas $b = f(a)$ vadinamas elemento a vaizdu, o pats elementas a - pirmavaizdžiu.

Visų vaizdų aibė $f(A) = \{f(a), a \in A\} \subset B$ bendruoju atveju nesutampa su visa aibe B.

Apibrėžimas

Kai visų vaizdų aibė sutampa su B aibe ($f(A) = \{f(a), a \in A\} = B$), tai funkciją f vadinsime siurjekcija.

Ekvivalenčios aibės

Apibrėžimas

Kai visi elementai turi skirtingus vaizdus, tai tokia funkcija vadinama injekcija.

Apibrėžimas

Kai visų vaizdų aibė sutampa su B aibe ($f(A) = \{f(a), a \in A\} = B$), tai funkciją f vadinsime siurjekcija.

Apibrėžimas

Kai funkcija kartu ir siurjekcija, ir injekcija, tai ją vadinsime bijekcija.

Bijekcija yra abipusiškai vienareikšmiškas atvaizdis. Bijekcijoms egzistuoja atvirkštinis atvaizdis $f^{-1}(b)$, kurio apibrėžimo sritis yra aibė B. Taigi

$$f^{-1}(B) = A, \quad f(f^{-1}(B)) = B, \quad f^{-1}(f(A)) = A.$$

Ekvivalenčios aibės

Pavyzdžiai

- $f(x) = x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;
- $f(n) = 2n - 1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$;
- $f(n) = 2n - 1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}'$, čia $\mathbb{N}' = \{1, 3, 5, \ldots\}$;
- $g(n) = n^2 : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$, čia $\mathbb{K} = \{1, 4, 9, \ldots\}$.

Ekvivalenčios aibės

Apibrėžimas

Aibes A ir B vadinsime ekvivalenčiosiomis, jei egzistuoja bijekcija $f : A \to B$. Žymime $A \sim B$.

Lema 3.0

Dvi baigtinės aibės A ir B yra ekvivalenčios tada ir tik tada, kai $|A| = |B|$. Kitaip pasakius, turi tą patį skaičių elementų.

Begalinių aibių ekvivalentumui įrodyti reikia nurodyti abipus vienareikšmiškai apibrėžtą atvaizdį iš vienos aibės į kitą.

Ekvivalenčios aibės

Pavyzdys

$$\mathbb{R} \sim [0, 1]$$

Ekvivalenčios aibės

Pavyzdys

$$\mathbb{R} \sim [0, 1]$$

$$f(x) = \tan \frac{\pi}{2}(2x - 1) : [0, 1] \to \mathbb{R}$$

Ekvivalenčios aibės

Pavyzdys

$$\mathbb{R} \sim [0,1]$$

$$f(x) = \tan \frac{\pi}{2}(2x-1) : [0,1] \to \mathbb{R}$$

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{\pi}\arctan(y) + \frac{1}{2} : \mathbb{R} \to [0,1]$$

Ekvivalenčios aibės

Ekvivalentumo savybės

1. $A \sim A$ (refleksyvumas)
2. Jei $A \sim B$, tai $B \sim A$ (simetriškumas)
3. Jei $A \sim B$ ir $B \sim C$, tai $A \sim C$ (tranzityvumas)

Apibrėžimas

Aibės, ekvivalenčios natūraliųjų skaičių aibei $\mathbb{N}$ yra vaidinamos skaičiosiomis.

Turime aibę A. Tegul $A \sim \mathbb{N}$. Tada egzistuoja bijekcija $f(n) : \mathbb{N} \to A$. Kitaip pasakius, kiekvienas aibės A elementas a turi numerį $n : a = f(n)$. Taigi bet kurios skaičiosios aibės elementus galima sunumeruoti/suskaičiuoti: $A = \{a_1, a_2, ...\}$.

Pavyzdys

Sveikųjų skaičių aibė $\mathbb{Z}$ yra skaiti.

Skaičiosios aibės

Teorema 3.1

Jei aibė A yra skaičioji aibė ir $B \subset A$, tai B yra skaičioji arba baigtinė aibė.

Pastaba

Visi begaliniai natūraliųjų skaičių aibės $\mathbb{N}$ poaibiai yra skaičiosios aibės.

Skaičiosios aibės

Teorema 3.2

Skaičiųjų aibių skaičioji sąjunga yra skaičioji aibė.

Pastaba

Skaičiųjų aibių A ir B Dekarto sandauga $A \times B$ yra skaičioji aibė.

Skaičiosios aibės

Teorema 3.3

Racionaliųjų skaičių aibė $\mathbb{Q}$ yra skaičioji aibė.

Teorema 3.4

Aibė $2^{\mathbb{N}}$ nėra skaičioji.

Kontinuumo galios aibės

Apibrėžimas

Aibės A elementų skaičių apibūdina jos galia, kurią žymėsime $|A|$. Begalinių aibių galioms įvertinti taikomi simboliai, kurie vadinami kardinaliaisiais skaičiais. Begalinės aibės galią dažnai žymi $|A| = Card\ A$.

Susitarsime, kad ekvivalenčių aibių galios lygios. Natūraliųjų skaičių aibės $\mathbb{N}$ galią žymėsime $|\mathbb{N}| = \aleph_0$.

Kontinuumo galios aibės

Kardinaliųjų skaičių savybės

1. $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$
2. $\aleph_0 + n = \aleph_0$, čia $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
3. $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$
4. $\aleph_0 \cdot n = \aleph_0$, čia $n \in \mathbb{N}$

Kontinuumo galios aibės

Teorema 3.5

Realiųjų skaičių atkarpa $[0,1]$ yra neskaičioji aibė.

Apibrėžimas

Aibes, ekvivalenčias intervalui $[0,1]$, vadinsime kontinuumo galios aibėmis. Žymėsime $|[0,1]| = c$.

Pastebime, kad

$$\left|2^{\mathbb{N}}\right| = 2^{|\mathbb{N}|} = 2^{\aleph_0} = c > \aleph_0.$$

Taip pat

$$\mathbb{R} \sim [0,1].$$

Todėl

$$|\mathbb{R}| = c.$$

Kontinuumo galios aibės

Kontinumo savybės

1. $c + c = c$
2. $c + n = c$, čia $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
3. $c \cdot c = c$
4. $c \cdot n = c$, čia $n \in \mathbb{N}$

Pagrindiniai aibių teorijos rezultatai

Aibės galia visada mažesnė už visų jos poaibių aibės galią

$$\left|2^A\right| > |A|.$$

Pastebime, kad

$$\left|2^{[0,1]}\right| > |[0,1]| = c.$$

Todėl neegzistuoja didžiausias kardinalusis skaičius.

Pagrindiniai aibių teorijos rezultatai

Mažiausias kardinalusis skaičius yra $\aleph_0$. Už jį didesnis yra kontinuumas c.

Kontinumo hipotezė

Pažymėkime $\aleph_1$ mažiausią neskaičios aibės galią. Tada

$$\aleph_1 = 2^{\aleph_0} = c.$$