Bulio funkcijos

A. Medžiūnas

Diskrečioji matematika

2021 m. kovo 22 d.

Temos planas

Bulio funkcija

Apibrėžimas

Tegul $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \{0, 1\}^n$ - nepriklausomi kintamieji. Tada funkcija:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

yra Bulio funkcija.

Kiek Bulio funkcijų galima sudaryti su n kintamųjų?

Bulio funkcija

Apibrėžimas

Bulio funkcijos $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ kintamasis $x_j : 1 \leq j \leq n$ vadinamas fiktyviuoju, jei visoms $x_1, ...x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_n$ reikšmėms

$$f(..., x_{j-1}, 0, x_{j+1}, ...) = f(..., x_{j-1}, 1, x_{j+1}, ...).$$

Kintamieji, kurie nėra fiktyvieji, vadinami esminiais.

Bulio funkcija

Pavyzdys

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Bulio funkcija

Pavyzdys

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$$f(x, y, z) = y = y \wedge (x \vee \neg x) = y \wedge (y \vee \neg y) \vee x \wedge \neg x$$

Bulio funkcija

Vieno kintamojo funkcijų yra tik keturios.

Pavyzdys

x	$f(x)=?$	$f(x)=?$	$f(x)=?$	$f(x)=?$
0	?	?	?	?
1	?	?	?	?

Bulio funkcija

Vieno kintamojo funkcijų yra tik keturios.

Pavyzdys

x	$f(x) = 0$	$f(x) = x$	$f(x) = \neg x$	$f(x) = 1$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Kada x yra esminis, kada fiktyvusis kintamasis?

Bulio funkcija

Natūralu, kad bet kokią vieno kintamojo formulę galima suprastinti iki $0, 1, x, \neg x$.

Pavyzdys

$$(x \Rightarrow (x \Rightarrow \neg x)) \Rightarrow x.$$

Kai $x = 0$, gauname

$$(0 \Rightarrow (0 \Rightarrow 1)) \Rightarrow 0 = ?.$$

Kai $x = 1$, gauname

$$(1 \Rightarrow (1 \Rightarrow 0)) \Rightarrow 1 = ?.$$

Bulio funkcija

Natūralu, kad bet kokią vieno kintamojo formulę galima suprastinti iki $0, 1, x, \neg x$.

Pavyzdys

$$(x \Rightarrow (x \Rightarrow \neg x)) \Rightarrow x.$$

Kai $x = 0$, gauname

$$(0 \Rightarrow (0 \Rightarrow 1)) \Rightarrow 0 = 0.$$

Kai $x = 1$, gauname

$$(1 \Rightarrow (1 \Rightarrow 0)) \Rightarrow 1 = 1.$$

Taigi

$$((x \Rightarrow (x \Rightarrow \neg x)) \Rightarrow x) = x.$$

Temos planas

Bulio funkcija

Pabandykime išnagrinėti visas dviejų kintamųjų Bulio funkcijas $f(x_1, x_2)$.

Pavyzdys

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0

x_1	x_2	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Bulio funkcija

Pastebime, kad

Pavyzdys

f_3	f_5	f_8	f_9	f_{11}	f_{13}	f_{14}
$\neg x_1$	$\neg x_2$	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \Leftrightarrow x_2$	$x_1 \Rightarrow x_2$	$x_2 \Rightarrow x_1$	$x_1 \vee x_2$

f_1	f_2	f_4	f_6	f_7
$\neg(x_1 \vee x_2)$	$\neg(x_2 \Rightarrow x_1)$	$\neg(x_1 \Rightarrow x_2)$	$\neg(x_1 \Leftrightarrow x_2)$	$\neg(x_1 \wedge x_2)$

Naujos operacijos

Sudėtis moduliu du

$$x_1 \oplus x_2 \Leftrightarrow ((x_1 \vee x_2) \wedge ((\neg x_1) \vee (\neg x_2)))$$

Pyrso rodyklė

$$x_1 \downarrow x_2 \Leftrightarrow \neg(x_1 \vee x_2)$$

Šeferio brūkšnys

$$x_1 | x_2 \Leftrightarrow \neg(x_1 \wedge x_2)$$

Naujos operacijos

Pavyzdys

$$f_6(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$$

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 \downarrow x_2$$

$$f_7(x_1, x_2) = x_1 \mid x_2$$

Naujos operacijos

Pyrso rodyklė

$$x_1 \downarrow x_2 \Leftrightarrow \neg(x_1 \vee x_2)$$

Šeferio brūkšnys

$$x_1 | x_2 \Leftrightarrow \neg(x_1 \wedge x_2)$$

Teorema 2.1

Bet kuri loginė operacija gali būti užrašyta, taikant tik vieną loginę opearciją ($\downarrow$) arba ($|$).

Temos planas

Dualumo principas

Dualioji funkcija

Funkcija $f_1(x_1, x_2, ..., x_n)$ yra dualioji funkcijai $f_2(x_1, x_2, ..., x_n)$, jei

$$f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = \overline{f_2(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)}$$

Pavyzdys

Tegul

$$f(x) = 1 = \overline{x \vee \overline{x}},$$

tada

$$\overline{f(\overline{x})} = \overline{\overline{x} \vee \overline{\overline{x}}} = \overline{\overline{x}} \wedge \overline{x} = x \wedge \overline{x} = 0.$$

Pastebėjimas

$$f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = \overline{\overline{f_2(\overline{\overline{x_1}}, \overline{\overline{x_2}}, ..., \overline{\overline{x_n}})}} = \overline{f_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)}$$

Dualumo principas

Dualioji funkcija

Funkcija $f_1(x_1, x_2, ..., x_n)$ yra dualioji funkcijai $f_2(x_1, x_2, ..., x_n)$, jei

$$f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = \overline{f_2(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)}$$

Pavyzdys

Tegul

$$f_1(x, y) = x \vee y, \quad f_2(x, y) = x \wedge y.$$

tada

$$\overline{f_1(\overline{x}, \overline{y})} = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}} = \overline{\overline{x}} \wedge \overline{\overline{y}} = x \wedge y = f_2(x, y),$$

$$\overline{f_2(\overline{x}, \overline{y})} = \overline{\overline{x} \wedge \overline{y}} = \overline{\overline{x}} \vee \overline{\overline{y}} = x \vee y = f_1(x, y).$$

Pastebėjimas

$$f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = \overline{\overline{f_2(\overline{\overline{x_1}}, \overline{\overline{x_2}}, ..., \overline{\overline{x_n}})}} = \overline{f_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)}$$

Dualumo principas

Dualioji funkcija

Funkcijos $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ dualiąją funkciją $\overline{f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)}$ žymėsime $f^*(x_1, x_2, ..., x_n)$. Tada
$$f^{**} = (f^*)^* = f.$$

Dualumo principas

Apibrėžimas

Tegul funkcijos $F = F(f_1, f_2, ..., f_m)$ dualioji funkcija yra $F^*(f_1, f_2, ..., f_m)$, o funkcijų $f_1, f_2, ..., f_m$, dualiosios funkcijos $f_1^*, f_2^*, ..., f_m^*$. Tada galioja dualumo principas: sudėtinės funkcijos

$$G(x_1, x_2, ..., x_n) = F(f_1(x_1, x_2, ..., x_n), f_2(x_1, x_2, ..., x_n), ..., f_m(x_1, x_2, ..., x_n))$$

dualioji funkcija yra

$$F^*(f_1^*(x_1, x_2, ..., x_n), f_2^*(x_1, x_2, ..., x_n), ..., f_m^*(x_1, x_2, ..., x_n)).$$

Dualumo principas

Pavyzdys

Tegul funkcijos

$$F(u, v) = u \vee v, \quad u = u(x) = x, \quad v = v(y) = y$$

. Tada

$$F^*(u, v) = \overline{\overline{u} \vee \overline{v}} = u \wedge v,$$

$$u^*(x) = \overline{\overline{x}} = x,$$

$$v^*(y) = \overline{\overline{y}} = y.$$

Taigi

$$(F(u(x), v(y)))^* = F^*(u^*(x), v^*(y)) = x \wedge y.$$

Dualumo principas

Apibrėžimas

Funkcija $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ yra savidualioji funkcija, jei

$$f^*(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Pavyzdys

Funkcija

$$f(x, y, z) = x \wedge y \vee x \wedge z \vee y \wedge z$$

yra savidualioji.

Dualiosios funkcijos konstravimo algoritmas

Tegul $f(x_1, ..., x_n)$ yra išreikšta formule, kurioje yra: kintamieji, neigimas, ir operacijos $0, 1, \vee, \wedge$. Tada dualioji funkcija $f^*(x_1, ..., x_n)$ gaunama pakeitus:

- $0 \to 1$;
- $1 \to 0$;
- $\vee \to \wedge$;
- $\wedge \to \vee$;
- neigimo nekeičiame;
- funkcijų eiliškumą paveldime.

Pavyzdžiai

Tegul

$$f(x,y) = x \wedge y \vee \overline{x} \wedge \overline{y},$$

Tada

$$f^*(x,y) = (x \vee y) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y}).$$

Parodykite, kad

$$f(x,y,z) = x \wedge y \vee x \wedge z \vee y \wedge z$$

yra savidualioji.

Temos planas

Disjunkcinės ir konjunkcinės formos

Tegul
$$x^\sigma = \begin{cases} \overline{x}, & \text{jei } \sigma = 0 \\ x, & \text{jei } \sigma = 1. \end{cases}$$
T.y. $x^x = 1$ ir kai $x \neq y : x^y = 0$.
Pastebime įdomią šios funkcijos savybę, kad $\overline{x^\sigma} = \overline{x}^\sigma = x^{\overline{\sigma}}$.

Apibrėžimas

Formulė $x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge ... \wedge x_n^{\sigma_n}$ vadinama elementariąja konjunkcija.
Čia $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ yra nulių ir vienetų rinkinys, o x_j gali kartotis.
Dažnai Bulio funkcijoms konjunkcijos ženklas yra praleidžiamas.
Taigi
$$x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge ... \wedge x_n^{\sigma_n} = x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} ... x_n^{\sigma_n}.$$

Disjunkcinės ir konjunkcinės formos

Pavyzdžiai

Ar

$$x_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3, \quad x_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_1\overline{x}_2, \quad x_2 \wedge \overline{x}_4, \quad x_3x_1\overline{x}_2;$$

$$x_1 \wedge \overline{x_2 \wedge x_3}, \quad \overline{x_1x_1}, \quad x_3\overline{x_3 \wedge x_2 \wedge x_1}$$

yra elementariosios konjunkcijos?

Disjunkcinės ir konjunkcinės formos

Apibrėžimas

Elementariųjų konjunkcijų disjunkcija vadinama disjunkcine normaliąja forma.

Pavyzdžiai

Ar

$$x_1 \wedge 1 \wedge \overline{x}_4 \vee 0, \quad x_1\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee x_2 \vee \overline{x}_3;$$

$$\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \vee x_3 \wedge x_4 \wedge \overline{x}_5, \quad x_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_1\overline{x}_2, \quad x_2 \wedge \overline{x}_4, \quad x_3x_1\overline{x}_2;$$

yra disjunkcinės normaliosios formos?

Tarkime, kad Bulio funkcija $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ yra išreikšta disjunkcine normaliąja forma. Ši funkcija bus tapačiai lygi nuliui (bus prieštara) tada ir tik tada, kai kiekviena elementarioji konjunkcija turės kurį nors kintamąjį x_j ir jo neiginį $\overline{x}_j$.

Disjunkcinės ir konjunkcinės formos

Apibrėžimas

Elementarioji konjunkcija vadinama taisyklingąja, kai kiekvienas kintamasis $x_j^{\sigma_j}$ įeina į ją ne daugiau, kaip vieną kartą (skaičiuojant ir neiginius).

Pavyzdžiai

Ar

$$x_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3, \quad \overline{x}_5 \wedge x_3 \wedge \overline{x}_4;$$

$$x_2 \overline{x}_2 x_3, \quad \overline{x}_4 x_3 \overline{x}_3;$$

yra taisyklingos elementariosios konjunkcijos?

Disjunkcinės ir konjunkcinės formos

Apibrėžimas

Formulė $x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee ... \vee x_n^{\sigma_n}$ vadinama elementariąja disjunkcija.

Apibrėžimas

Elementariųjų disjunkcijų konjunkcija vadinama konjunkcine normaliąja forma.

Tarkime, kad Bulio funkcija $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ yra išreikšta konjunkcine normaliąja forma. Ši funkcija bus tapačiai lygi vienetui (bus tautologija) tada ir tik tada, kai kiekviena elementarioji disjunkcija turės kurį nors kintamąjį x_j ir jo neiginį $\overline{x}_j$.

Pavyzdžiai

Ar

$$x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_4, \quad \overline{x}_2 \vee \overline{x}_5 \vee x_4 \vee \overline{x}_7$$

yra taisyklingosios elementariosios disjunkcijos?

Disjunkcinės ir konjunkcinės formos

Apibrėžimas

Elementarioji disjunkcija vadinama taisyklingąja, kai kiekvienas kintamasis $x_j^{\sigma_j}$ įeina į ją ne daugiau, kaip vieną kartą (skaičiuojant ir neiginius).

Pavyzdžiai

Ar

$$x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_4, \quad \overline{x}_2 \vee \overline{x}_5 \vee x_4 \vee \overline{x}_7$$

yra taisyklingosios elementariosios disjunkcijos?

Tobuloji disjunkcinė normalioji forma

Apibrėžimas

Taisyklingoji elementarioji konjunkcija/disjunkcija vadinama pilnąja kintamųjų $x_1, x_2, \dots, x_n$ atžvilgiu, jei kiekvienas kintamasis $x_j^{\sigma_j}$ įeina į ją lygiai vieną kartą (įeina kiekvienas kintamasis arba jo neiginys).

Apibrėžimas

Disjunkcinė/konjunkcinė normalioji forma vadinama tobuląja, kai visos ją sudarančios elementariosios konjunkcijos/disjunkcijos yra pilnosios kintamųjų $x_1, x_2, \dots, x_n$ atžvilgiu ir nėra vienodų elementariųjų konjunkcijų/disjunkcijų.

Tobuloji disjunkcinė normalioji forma

Apibrėžimas

Disjunkcinė/konjunkcinė normalioji forma vadinama tobuląja, kai visos ją sudarančios elementariosios konjunkcijos/disjunkcijos yra pilnosios kintamųjų $x_1, x_2, \ldots, x_n$ atžvilgiu ir nėra vienodų elementariųjų konjunkcijų/disjunkcijų.

Pavyzdžiai

Ar ši disjunkcinė forma

$$x_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3 \vee \overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x}_3 \vee x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$$

yra tobuloji?

Tobuloji disjunkcinė normalioji forma

Bulio funkcijos tobulosios normaliosios disjunkcinės formos konstravimo algoritmas

1. Teisingumo lentelėje pasirenkame tas eilute (kintamųjų $x_1, x_2, ..., x_n$ realizacijas $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$), kai funkcijos reikšmė lygi 1.
2. Rašome disjunkcine forma tiek taisyklingų elementariųjų konjunkcijų $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} ... x_n^{\sigma_n}$, kiek teisingumo lentelėje yra vienetų.
3. Neigimus rašome su tais kintamaisiais x_j, kai $\sigma_j = 0$. Pavyzdžiui $x_1^0 x_2^0 x_3^1 x_4^1 = \overline{x}_1 \overline{x}_2 x_3 x_4$.

Tobuloji disjunkcinė normalioji forma

Pavyzdys

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Tobuloji disjunkcinė normalioji forma

Kiekvieną (išskyrus const=0) Bulio funkciją galima užrašyti tobuląja disjunkcine normaliąja forma:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigvee_{f(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} ... x_n^{\sigma_n}.$$

Tobuloji disjunkcinė normalioji forma

Taikant ekvivalenčiuosius loginius pertvarkius

$$x \vee xy = x(x \vee y) = x$$

$$xy \vee x\overline{y} = x$$

$$x \vee x\overline{y} = x \vee y$$

bet kurią disjunkcinę normaliąją formą galima pertvarkyti į tobuląją.

Pavyzdys

Turime

$$xy + \overline{x}\,\overline{z} =$$

Tobuloji disjunkcinė normalioji forma

Taikant ekvivalenčiuosius loginius pertvarkius

$$x \vee xy = x(x \vee y) = x$$

$$xy \vee x\overline{y} = x$$

$$x \vee x\overline{y} = x \vee y$$

bet kurią disjunkcinę normaliąją formą galima pertvarkyti į tobuląją.

Pavyzdys

Turime

$$xy + \overline{x}\,\overline{z} = xyz + xy\overline{z} + \overline{x}y\overline{z} + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}.$$

Tobuloji konjunkcinė normalioji forma

Bulio funkcijos tobulosios normaliosios konjunkcinės formos konstravimo algoritmas

1. Teisingumo lentelėje pasirenkame tas eilute (kintamųjų $x_1, x_2, ..., x_n$ realizacijas $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$), kai funkcijos reikšmė lygi 0.
2. Rašome konjunkcine forma tiek taisyklingų elementariųjų disjunkcijų $x_1^{\overline{\sigma}_1} x_2^{\overline{\sigma}_2} ... x_n^{\overline{\sigma}_n}$, kiek teisingumo lentelėje yra nulių.
3. Neigimus rašome su tais kintamaisiais x_j, kai $\sigma_j = 1$. Pavyzdžiui $x_1^{\overline{0}} \vee x_2^{\overline{0}} \vee x_3^{\overline{1}} \vee x_4^{\overline{1}} = x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3 \vee \overline{x}_4$.

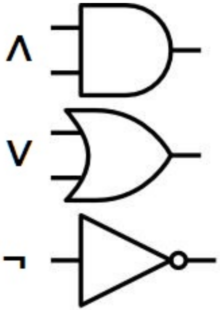
Tobuloji konjunkcinė normalioji forma

Pavyzdys

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Loginės schemos

Viena svarbiausių Bulio funkcijų taikymo sričių yra elektronika. Joje logines funkcijas vykdo loginiai elementai, kurių schemas sudaro jungikliai (raktai), valdomi schemos loginiais kintamaisiais.



Formų minizavimas

Pavyzdys

Turime tobuląją disjunkcinę formą

$$xy + x\overline{y}.$$

Minimizavimo formulės

$$F + \overline{F} = 1, \quad 1 \cdot F = F, \quad 0 + F = F.$$

Kitas būdas minimizuoti disjunkcines formas - Karno (Karnaugh) diagramos.
Pirmiausia, visas pilnasias elementariasias konjunkcijas surašome į lentelę.
Dviejų kintamųjų funkcijai, ši diagrama atrodys:

xy	$x\overline{y}$
$\overline{x}y$	$\overline{x}\,\overline{y}$

Tada $xy + x\overline{y}$ Karno diagrama galėsime pavaizduoti

	y	$\overline{y}$
x		
$\overline{x}$		

ir gausime, kad $xy + x\overline{y} = x$.

Karno diagramos

Trijų kintamųjų Karno diagrama atrodys:

	y	y	$\overline{y}$	$\overline{y}$
x				
$\overline{x}$				
	$\overline{z}$	z	z	$\overline{z}$

Pavyzdys

Turime tobuląją disjunkcinę formą

$$xyz + x\overline{y}z + xy\overline{z} + x\overline{y}\,\overline{z}.$$