Logika

A. Medžiūnas

Diskrečioji matematika

2021 m. kovo 8 d.

Temos planas

1. Pradinės sąvokos
2. Loginės operacijos
3. Teiginių algebros formulės
4. Logikos formulių semantika
5. Formalizuotas teiginių skaičiavimas
6. Predikatų logika
7. Predikatų skaičiavimo dėsniai

Teiginio sąvoka

Teiginys

Sakinys, tvirtinimas, reiškimas, kuris visada arba **teisingas**, arba **klaidingas**.

Pavyzdžiai

- $2 > 5$;
- $\alpha = \beta$;
- π yra iracionalusis skaičius;
- *-Užtai, vaike, dabar mokykis gyventi!* (Žemaitė).

Teiginiai logikoje

Logikoje samprotavimų turinys mums nėra svarbus: domina teisingų samprotavimų sudarymo *formos*. Svarbios tik teiginių reikšmės: *teisingas* arba *klaidingas*.

Loginių konstantų žymėjimo pavyzdžiai

- TRUE, FALSE;
- T,F; t,f;
- **T,K; t,k**;
- **1,0**.

Loginių kintamųjų žymėjimo pavyzdžiai

- $A, B, C, D, \ldots$
- $a, b, c, d, \ldots$
- $f_1, h_2, \ldots$

Loginiai kintamieji

Loginis kintamasis

Kintamasis x, kuris įgyja dvi reikšmes t - tiesa arba k - klaida $(x \in t, k)$.

Pavyzdys

- $T_1 =$„atsitiktinai parinkto studento gimimo dienos skaičius bus pirminis skaičius"

Temos planas

1. Pradinės sąvokos
2. Loginės operacijos
3. Teiginių algebros formulės
4. Logikos formulių semantika
5. Formalizuotas teiginių skaičiavimas
6. Predikatų logika
7. Predikatų skaičiavimo dėsniai

Loginė operacija

Naujiems teiginiams sudaryti apibrėžiamos **loginės operacijos**, kurios formalizuoja matematinių teoremų įrodymą.

Pavyzdys

Tegul x ir y yra teiginiai/loginiai kintamieji. Atliekant **logines operacijas** su x ir y gausime naujus teiginius.

Operacijos atliekamas su: vienu kintamuoju vadinsime **unariosiomis**(vienvietėmis), su dviem - **binariosiomis**(dvivietėmis), su trim - **ternariosiomis**(trivietėmis) ir t.t.

Neigimo operacija

Apibrėžimas

Teiginio T **neigimu** vadinamas naujas teiginys, kurį žymime $\overline{T}$ arba $\neg T$ ir skaitome *ne* T, *netiesa, kad* T.

T	$\overline{T}$
1	0
0	1

Teisingumo reikšmių lentelė: neigimas

Disjunkcijos operacija

Apibrėžimas

Pažymėkime **disjunkciją** simboliu $\vee$. Tada teiginys $x \vee y$ (x arba y) yra teisingas, jei teisingas **bent vienas** iš teiginių x, y

x	y	$x \vee y$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Teisingumo reikšmių lentelė: disjunkcija

Disjunkciją kartais dar vadiname *logine suma*.

Konjunkcijos operacija

Apibrėžimas

Pažymėkime **konjunkciją** simboliu $\wedge$. Tada teiginys $x \wedge y$ (x ir y) yra teisingas, jei teisingi **abu** teiginiai x, y

x	y	$x \wedge y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Teisingumo reikšmių lentelė: konjunkcija

Konjunkciją kartais dar vadiname *logine sandauga*.

Implikacijos operacija

Apibrėžimas

Pažymėkime **implikaciją** simboliu $\Rightarrow$. Tada teiginys $x \Rightarrow y$ (jei x, tai y) yra **klaidingas** tik tuo atveju, jei teisingas x, o y - klaidingas.

x	y	$x \Rightarrow y$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Teisingumo reikšmių lentelė: implikacija

Iš teisingos prielaidos išplaukia tik teisinga išvada, o klaidinga išvada išplaukia tik iš klaidingos prielaidos.

Ekvivalentumo operacija

Apibrėžimas

Pažymėkime **ekvivalentumą** simboliu $\Leftrightarrow$. Tada teiginys $x \Leftrightarrow y$ (x tada ir tik tada, kai y) yra teisingas tik tuo atveju, jei abu teiginiai x, y yra teisingi arba abu klaidingi.

x	y	$x \Leftrightarrow y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Teisingumo reikšmių lentelė: ekvivalentumas

Temos planas

1. Pradinės sąvokos
2. Loginės operacijos
3. Teiginių algebros formulės
4. Logikos formulių semantika
5. Formalizuotas teiginių skaičiavimas
6. Predikatų logika
7. Predikatų skaičiavimo dėsniai

Teiginių algebros formulės

Mes vadiname formules **propozicinėmis** norėdami pabrėžti, kad mums rūpi tik:

- bendroji formulės struktūra
- pavidalas
- sudedamųjų dalių (simbolių) vietos (pozicijos)

Abėcėlė

Aibė

$$\mathfrak{U} = \{a, b, ..., A, B, ..., x_1, ..., Y_2, ...,$$
$$\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow,$$
$$(\,,\,)\}$$

Aibės $\mathfrak{U}$ elementai - loginiai kintamieji, loginės operacijos ir skliaustai vadinami **raidėmis**.

Formulės

Formulės logikoje apibrėžiamos jų sudarymo taisyklėmis.

Formulės

- $a, b, ..., A, B, ...x_1, ..., Y_2, ...$ yra formulės
- jei A - formulė, tai $(\neg A)$ - formulė
- jei A ir B yra formulės, tai $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \Rightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow B)$ - formulės
- kitų formulių nėra

Pavyzdžiai

- $x_1 = A \wedge \neg B$
- $x_2 = A \wedge (\neg B)$
- $x_3 = (A \wedge (\neg B))$

Formulės

Formulės logikoje apibrėžiamos jų sudarymo taisyklėmis.

Formulės

- $a, b, ..., A, B, ...x_1, ..., Y_2, ...$ yra formulės
- jei A - formulė, tai $(\neg A)$ - formulė
- jei A ir B yra formulės, tai $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \Rightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow B)$ - formulės
- kitų formulių nėra

Pavyzdžiai

- $y_1 = A \vee B \wedge C$
- $y_2 = (A \vee B) \wedge C$
- $y_3 = A \vee (B \wedge C)$

Temos planas

1. Pradinės sąvokos
2. Loginės operacijos
3. Teiginių algebros formulės
4. Logikos formulių semantika
5. Formalizuotas teiginių skaičiavimas
6. Predikatų logika
7. Predikatų skaičiavimo dėsniai

Tautologijos

Tarkime, kad $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ yra loginių kintamųjų rinkinys. $F(X)$ loginė formulė.

Interpretacija

Loginių kintamųjų $x_j : j \in [1, n]$ reikšmių $\{t, k\}$ rinkinys $\nu = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n)$.

Pavyzdžiai

- $\nu^{(1)} = (k, t, k)$
- $\nu^{(2)} = (t, t, k)$

yra kintamųjų (x, y, z) interpretacijos.

Tautologijos

Įvykdomoji formulė

Formulė, kuriai egzistuoja tokia interpretacija ν, kad $F(\nu) = t$.

Pavyzdžiai

$$f(x, y) = x \vee y,$$

Tautologija (tapačiai teisinga)

Formulė, kuri įgyja t reikšmę bet kuriai interpretacijai. Žymėsime $\vDash$.

Prieštara (tapačiai klaidinga)

Formulė, kuri įgyja k reikšmę bet kuriai interpretacijai. Pastebime, kad F yra prieštara tada ir tik tada, kai $\neg F$ - tautologija.

Tautologijos

Įvykdomoji formulė

Formulė, kuriai egzistuoja tokia interpretacija ν, kad $F(\nu) = t$.

Pavyzdžiai

$$f(x, y) = x \vee y,$$

$$g(x) = x \wedge (\neg x).$$

Tautologija (tapačiai teisinga)

Formulė, kuri įgyja t reikšmę bet kuriai interpretacijai. Žymėsime $\vDash$.

Prieštara (tapačiai klaidinga)

Formulė, kuri įgyja k reikšmę bet kuriai interpretacijai. Pastebime, kad F yra prieštara tada ir tik tada, kai $\neg F$ - tautologija.

Tautologijos

Įvykdomoji formulė

Formulė, kuriai egzistuoja tokia interpretacija ν, kad $F(\nu) = t$.

Tautologija (tapačiai teisinga)

Formulė, kuri įgyja t reikšmę bet kuriai interpretacijai. Žymėsime $\vDash$.

Prieštara (tapačiai klaidinga)

Formulė, kuri įgyja k reikšmę bet kuriai interpretacijai. Pastebime, kad F yra prieštara tada ir tik tada, kai $\neg F$ - tautologija.

Ekvivalentumas

Formulės F ir G vadinamos **ekvivalenčiomis**, jei visoms interpretacijoms $\nu : F(\nu) = G(\nu)$. Žymėsime $\cong$.

Tautologijos

Ekvivalentumo savybės

- *refleksyvumas* $F \cong F$;
- *simetriškumas* jei $F_1 \cong F_2$, tai $F_2 \cong F_1$;
- *tranzityvumas* jei $F_1 \cong F_2$ ir $F_2 \cong F_3$, tai $F_1 \cong F_3$.

Šventė!!!

Tautologijos

Teorema 1.1

Formulės F ir G yra ekvivalenčios tada ir tik tada, kai formulė $(F \Leftrightarrow G)$ yra tautologija.

Ekvivalentumas

Formulės F ir G vadinamos **ekvivalenčiomis**, jei visoms interpretacijoms $\nu : F(\nu) = G(\nu)$. Žymėsime $\cong$.

Tautologija (tapačiai teisinga)

Formulė, kuri įgyja t reikšmę bet kuriai interpretacijai. Žymėsime $\models$.

Apibrėžimas

Teiginys $x \Leftrightarrow y$ yra teisingas tik tuo atveju, jei abu teiginiai x, y yra teisingi arba abu klaidingi.

Tautologijos

Ekvivalenčiųjų formulių pavyzdžiai

$$\neg\neg F \cong F$$

$$F \Rightarrow G \cong \neg G \Rightarrow \neg F$$

$$F \Leftrightarrow G \cong \neg F \Leftrightarrow \neg G$$

$$F \vee F \cong F$$

$$F \Rightarrow G \cong \neg F \vee G$$

$$F \wedge t \cong F$$

$$F \vee t \cong t$$

Tautologijos

Ekvivalenčiųjų formulių pavyzdžiai

Įrodysime, kad $\neg\neg F \cong F$

kai $F = t$, turime $\neg\neg F = \neg\neg t = t$;

kai $F = k$, turime $\neg\neg F = \neg\neg k = k$.

Dėmesio!

Lygybės ženklas reiškia konkrečią formulės reikšmę esant konkrečiai realizacijai.

Logikos dėsniai

Logikos dėsniais vadinsime formules, kurios yra tautologijos.

Negalimo trečio dėsnis

$$x \vee \neg x$$

Dvigubasis neigimas

$$\neg\neg x \Leftrightarrow x$$

Prieštaravimas

$$\neg(\neg x \wedge x)$$

Tapatybės dėsnis

$$x \Rightarrow x$$

Logikos dėsniai

Logikos dėsniais vadinsime formules, kurios yra tautologijos.

Modus ponens

$$x \wedge (x \Rightarrow y) \Rightarrow y$$

Modus tollens

$$(x \Rightarrow y) \wedge \neg y \Rightarrow \neg x$$

Silogizmas

$$(x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow z) \Rightarrow (x \Rightarrow y)$$

Kontrapozicija

$$x \Rightarrow y \Leftrightarrow \neg y \Rightarrow \neg x$$

Logikos dėsniai

Logikos dėsniais vadinsime formules, kurios yra tautologijos.

de Morgano dėsniai

$$\neg(x \wedge y) \Leftrightarrow \neg x \vee \neg y$$

$$\neg(x \vee y) \Leftrightarrow \neg x \wedge \neg y$$

Konjunkcijos ir disjunkcijos savybės

Idempotentumas

$$x \vee x \Leftrightarrow x$$

$$x \wedge x \Leftrightarrow x$$

Komutatyvumas

$$x \vee y \Leftrightarrow y \vee x$$

$$x \wedge y \Leftrightarrow y \wedge x$$

Asociatyvumas

$$(x \vee y) \vee z \Leftrightarrow x \vee (y \vee z)$$

$$(x \wedge y) \wedge z \Leftrightarrow x \wedge (y \wedge z)$$

Konjunkcijos ir disjunkcijos savybės

Distributyvumas

$$x \wedge (y \vee z) \Leftrightarrow (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

$$x \vee (y \wedge z) \Leftrightarrow (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

Absorbcija

$$x \wedge (x \vee y) \Leftrightarrow x$$

$$x \vee (x \wedge y) \Leftrightarrow x$$


KAI DĖSTYTOJA TIKRINA TAVO TEISINGUMO LENTELĘ
-ČIA GI TRUE, O
NE FALSE TURI BŪTI...
imgflip.com

Tautologijų nustatymo taisyklės

Teorema 1.2

Tarkime, kad formulės F ir $F \Rightarrow G$ yra tautologijos. Tada formulė G irgi yra tautologija (t.y. iš $\vDash F$ ir $\vDash F \Rightarrow G$ išplaukia $\vDash G$).

Teorema 1.2 *kitaip*

Jei $F \Rightarrow G$ yra tautologija, o F pasirodo taip pat tautologija, tada formulė G irgi yra tautologija (t.y. iš $\vDash F \Rightarrow G$ ir $\vDash F$ išplaukia $\vDash G$).

Pavyzdžiai

Iš $\vDash X \Rightarrow Y \vee X$ ir $\vDash X \Rightarrow X$ gauname $\vDash Y \vee (X \Rightarrow X)$.
Iš $\vDash X \Rightarrow Y \vee X$ ir $\vDash X \wedge Y \Rightarrow Y$ gauname $\vDash Y \vee (X \wedge Y \Rightarrow Y)$.

Tautologijų nustatymo taisyklės

Prieštaros metodas

Įrodykite prieštaros metodu, kad formulė $F = (A \Rightarrow (B \Rightarrow A))$ yra tautologija.

Ekvivalenčiųjų pertvarkių metodas

Įrodykite, kad

$$F = A \wedge B \vee (\neg A \vee \neg B)$$

yra tautologija.

Įrodymas

$$A \wedge B \cong \neg\neg(A \wedge B) \text{ (dvigubas neigimas)}$$

$$\neg A \vee \neg B \cong \neg(A \wedge B) \text{ (de Morganas)}$$

$$(\neg\neg(A \wedge B)) \vee (\neg(A \wedge B)) \cong t \text{ (negalimas trečias)}$$

Loginė išvada

Formulė $H(x_1, x_2, ..., x_n)$ yra loginių formulių $F_1(x_1, x_2, ..., x_n), F_2(x_1, x_2, ..., x_n), ..., F_m(x_1, x_2, ..., x_n)$ loginė išvada, jei H įgyja reikšmę t, kai visos formulės F_j įgyja reikšmę t.
Žymėsime

$$F_1, F_2, ..., F_m \models H.$$

Taigi, jei prielaidos $F_1(x_1, x_2, ..., x_n), F_2(x_1, x_2, ..., x_n), ..., F_m(x_1, x_2, ..., x_n)$ yra tautologijos, tai ir loginė išvada H irgi yra tautologija.

1.3 Teorema (loginės išvados požymis)

Formulė H yra formulės F loginė išvada tada ir tik tada, kai implikacija $F \Rightarrow H$ yra tautologija.

Temos planas

1. Pradinės sąvokos
2. Loginės operacijos
3. Teiginių algebros formulės
4. Logikos formulių semantika
5. Formalizuotas teiginių skaičiavimas
6. Predikatų logika
7. Predikatų skaičiavimo dėsniai

1.3 Teorema (loginės išvados požymis)

Formulė H yra formulės F loginė išvada tada ir tik tada, kai implikacija $F \Rightarrow H$ yra tautologija.

Panaudoję šią ir kitas tautologijas (teoremas apie tautologijas) galime išskirti teisingų samprotavimų struktūras. T.y. rasti, kas iš ko išplaukia.

Išvados atskyrimo nuo prielaidos taisyklė

Turime tautologiją

$$\models (F \wedge (F \Rightarrow G)) \Rightarrow G.$$

Pagal 1.3 teoremą, jei turime teisingas formules F ir $F \Rightarrow G$, tai gauname ir teisingą formulę G. Rašysime

$$\frac{F, F \Rightarrow G}{\therefore G}$$

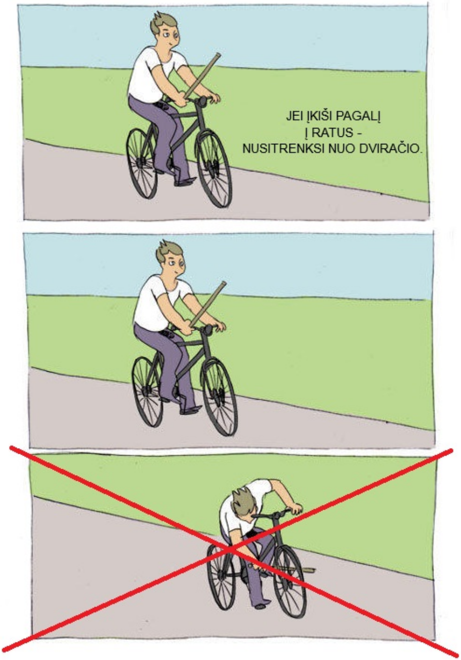

JEI ĮKIŠI PAGALĮ
Į RATUS -
NUSITRENKSI NUO DVIRAČIO.
imgflip.com

Prielaidos atskyrimo nuo išvados taisyklė

Turime tautologiją
$$\models (\neg G \wedge (F \Rightarrow G)) \Rightarrow \neg F.$$

Pagal 1.3 teoremą, jei turime teisingas formules $\neg G$ ir $F \Rightarrow G$, tai gauname ir teisingą formulę $\neg F$. Rašome

$$\frac{\neg G, F \Rightarrow G}{\therefore \neg F}$$


JEI ĮKIŠI PAGALĮ
Į RATUS -
NUSITRENKSI NUO DVIRAČIO.

Teisingų samprotavimų taisyklės

Konstrukcinė dilema

$$\models ((x \Rightarrow y) \land (z \Rightarrow w)) \land (x \lor z) \Rightarrow y \lor w$$

$$\frac{(x \Rightarrow y) \land (z \Rightarrow w), (x \lor z)}{\therefore y \lor w}$$

Kontrapozicija

$$\models (x \Rightarrow y) \Rightarrow (\neg y \Rightarrow \neg x)$$

$$\frac{x \Rightarrow y}{\therefore \neg y \Rightarrow \neg x}$$

Silogizmas

$$\vDash (x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow z) \Rightarrow (x \Rightarrow z)$$

$$\frac{x \Rightarrow y, y \Rightarrow z}{\therefore x \Rightarrow z}$$

Prielaidų perstata

$$\vDash x \Rightarrow (y \Rightarrow z) \Leftrightarrow y \Rightarrow (x \Rightarrow z)$$

$$\frac{x \Rightarrow (y \Rightarrow z)}{\therefore y \Rightarrow (x \Rightarrow z)}$$

Teisingų samprotavimų taisyklės

Prielaidų sujungimas

$$\vDash x \Rightarrow (y \Rightarrow z) \Leftrightarrow x \wedge y \Rightarrow z$$

$$\frac{x \Rightarrow (y \Rightarrow z)}{\therefore x \wedge y \Rightarrow z}$$

Prielaidų atskyrimas

$$\vDash (x \wedge y \Rightarrow z) \Rightarrow (x \Rightarrow (y \Rightarrow z))$$

$$\frac{x \wedge y \Rightarrow z}{\therefore x \Rightarrow (y \Rightarrow z)}$$

Temos planas

1. Pradinės sąvokos
2. Loginės operacijos
3. Teiginių algebros formulės
4. Logikos formulių semantika
5. Formalizuotas teiginių skaičiavimas
6. Predikatų logika
7. Predikatų skaičiavimo dėsniai

Ar šie loginiai samprotavimai yra teiginiai?

$$x > \pi, \; x \in \mathbb{R}$$

$$\alpha = \beta$$

Kaip suprantate šiuos samprotavimus?

- Visos Aldonos draugės yra studentės. Bronė yra Aldonos draugė. Todėl Bronė yra studentė.
- Kai kurių šalių sostinės yra miestai. Todėl yra sostinių, kurios yra kaimai.

Kvantoriai

Egzistavimo kvantorius

Loginė operacija, kuri rodo, kad egzistuoja tam tikras objektas.
Žymėsime - $\exists$.

Pavyzdys

$$\exists\alpha : p(\alpha)$$

Skaitome: *egzistuoja* α*, tokia kad turi savybę* p.

Bendrumo kvantorius

Loginė operacija, kuri rodo, kad visi objektai turi tam tikrą savybę. Žymėsime - $\forall$.

Pavyzdys

$$\forall \alpha \, p(\alpha)$$

Skaitome: *visiems α, galioja sąlyga p*.

Predikatai

Apibrėžimas

Dalykinių kintamųjų (arba tiesiog kintamųjų) $x, y, z, ..., x_1, y_2, ...$ reikšmes $\alpha, \beta, ..., \alpha_1, \beta_3$ vadinsime konstantomis.

Predikatas

Funkcija $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, kuri bet kuriai kintamųjų $x_1, x_2, ..., x_n$ realizacijai $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ yra teiginys.

Predikatų pavyzdžiai

$$P(x, y) = „x^2 > y“$$

$$G(x) = „\sin x > \cos x“$$

$$R(y) = „y^2 = e^{-y}“$$

Predikatų pavyzdžiai

$$P(x, y) = „x^2 > y“$$

$$G(x) = „\sin x > \cos x“$$

$$R(y) = „y^2 = e^{-y}“$$

Taikydami kvantorius ir predikatus, galime sudaryti naujus teiginius.

Pavyzdžiai

- $\forall x \exists y P(x, y)$, $\exists x G(x)$ - teisingi teiginiai.
- $\forall y R(y)$ - klaidingas teiginys.

Bronę prisiminus...

Pavyzdys

- Visos Aldonos draugės yra studentės. Bronė yra Aldonos draugė. Todėl Bronė yra studentė.

Tegul, predikatai:

$$D(x, y) = \text{„}x \text{ ir } y \text{ yra draugės“},$$

$$S(y) = \text{„}y \text{ yra studentė“},$$

dalykinės konstantos:

$$A \text{ - Aldona},$$
$$B \text{ - Bronė}.$$

Tada:

$$\frac{\forall y(D(A, y) \Rightarrow S(y)),\ D(A, B)}{\therefore S(B)}$$

Apibrėžimo sritis

Predikatas $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ įgyja reikšmes t ir k, priklausomai nuo $x_1, x_2, ..., x_n$ reikšmių.

Predikato apibrėžimo sritis

Aibė M_j, kuriai priklauso kintamasis x_j.

Tada:

$$(x_1, x_2, ..., x_n) \in M_1 \times M_2 \times ... \times M_n.$$

Pastebime, kad priklausomai nuo predikato apibrėžimo srities, jo savybės gali iš esmės pasikeisti.

Apibrėžimo sritis

Teisingumo aibė

Predikato $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, apibrėžimo srityje $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$ esantis poaibis $P^+ \subset M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$, toks kad predikatas P įgyja reikšmę t su visais $(x_1, x_2, ..., x_n) \in P^+$ ir reikšmę k, kai $(x_1, x_2, ..., x_n) \notin P^+$. T.y.

$$\begin{cases} P(x) = t, & \text{kai } x \in P^+, \\ P(x) = k, & \text{kai } x \notin P^+. \end{cases}$$

Apibrėžimas

Predikatas $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ vadinamas:

- tautologija, kai $P^+ = M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$,
- prieštara, kai $P^+ = \varnothing$,
- įvykdomuoju, kai $P^+ \neq \varnothing$,
- paneigiamuoju, kai $P^+ \neq M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$.

Lygiaverčiai predikatai

Apibrėžimas

Du predikatai $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ ir $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$ yra vadinami lygiaverčiais (ekvivalenčiais $P \cong Q$), kai

1. jie apibrėžti toje pačioje srityje $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$,
2. jų teisingumo aibės sutampa $P^+ = Q^+$.

Pavyzdys

$$P(x, y) = „\sqrt{xy} = 9“$$

$$Q(x, y) = „\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 9“$$

Predikatai ir loginiai teiginiai

Pastebime, kad jei predikatai P ir Q turi tą pačią apibrėžimo sritį, tai dalykinių konstantų rinkiniui $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ iš šios srities/aibės $P^0 = P(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ ir $Q^0 = Q(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ yra teiginiai. Taigi, jiems galioja visos teiginių savybės.

Apibrėžimas

Predikatas $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$ vadinamas predikato $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ logine išvada ($P \vDash Q$), jei predikato P reikšmė lygi t su visais tais $x_1, x_2, ..., x_n$, kai Q įgyja reikšmę t. Kitaip pasakius $P^+ \subset Q^+$.

Pavyzdys

Aibėje $\mathbb{N}$, turime predikatus:

$$D_3(n) = \text{„}n\text{ - dalus iš 3“}$$

$$D_9(n) = \text{„}n\text{ - dalus iš 9“}$$

Predikatai ir teiginiai

Predikatų savybės

Tegul P ir Q yra predikatai. Tada:

- $P \cong Q$ tada ir tik tada, kai predikatas $P \Leftrightarrow Q$ yra tautologija.
- $P \cong Q$ tada ir tik tada, kai predikatai $P \Rightarrow Q$ ir $Q \Rightarrow P$ yra tautologijos.
- $P \vDash Q$ tada ir tik tada, kai predikatas $P \Rightarrow Q$ yra tautologija.
- Tegul predikatai P ir Q yra apibrėžti toje pačioje srityje ir Q yra tautologija. Tada bet kokiam P, galioja $P \vDash Q$.
- Tegul $P \Rightarrow Q$ ir P yra tautologijos. Tada predikatas Q irgi yra tautologija.

Operacijos su predikatais

Apibrėžimas

Predikatas $\neg P$ yra vadinamas predikato P neiginiu, jei:

1. jis turi tą pačią apibrėžimo sritį,
2. įgyja, reikšmę k, kai P lygus t, ir reikšmę t priešingu atveju.

Pavyzdys

1. $P(x) =$ „$x \geq 0$“ ir $\neg P(x) =$ „$x < 0$“
2. - $L(f) =$ „$f(x)$ yra lyginė realiojo kintamojo funkcija“
   - $\neg L(f) =$ „$f(x)$ yra nelyginė realiojo kintamojo funkcija“

Operacijos su predikatais

Apibrėžimas

Predikatas $\neg P$ yra vadinamas predikato P neiginiu, jei:

1. jis turi tą pačią apibrėžimo sritį,
2. įgyja, reikšmę k, kai P lygus t, ir reikšmę t priešingu atveju.

Pavyzdys

1. $P(x) =$ „$x \geq 0$" ir $\neg P(x) =$ „$x < 0$"
2.
   - $L(f) =$ „$f(x)$ yra lyginė realiojo kintamojo funkcija"
   - $\neg L(f) =$ „$f(x)$ nėra lyginė realiojo kintamojo funkcija"

Operacijos su predikatais

Apibrėžimas

Predikatų $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ ir $Q(y_1, y_2, ..., y_m)$ apibrėžtų aibėse $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$ ir $K_1 \times K_2 \times ... \times K_m$, konjunkcija vadinamas predikatas

$$P(x_1, x_2, ..., x_n) \wedge Q(y_1, y_2, ..., y_m),$$

apibrėžtas srityje $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n \times K_1 \times K_2 \times ... \times K_m$ ir įgyjantis t tik ir tik tuo atveju, jei abu predikatai P ir Q lygūs t.

Pavyzdys

Tegul aibėje $[-1, 1] \subset \mathbb{R}$ apibrėžti predikatai:

- $P(x) =$ „$|x| < 1$“
- $Q(x) =$ „$x \neq 0$“

Tada $(P \wedge Q)^+ = (-1, 0) \cup (0, 1)$.

Operacijos su predikatais

Apibrėžimas

Predikatų $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ ir $Q(y_1, y_2, ..., y_m)$ apibrėžtų aibėse $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$ ir $K_1 \times K_2 \times ... \times K_m$, disjunkcija vadinamas predikatas

$$P(x_1, x_2, ..., x_n) \vee Q(y_1, y_2, ..., y_m),$$

apibrėžtas srityje $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n \times K_1 \times K_2 \times ... \times K_m$ ir įgyjantis t tik ir tik tuo atveju, jei kai bent vienas predikatas P ir Q lygūs t.

Pavyzdys

Tegul aibėje $[-1, 1] \subset \mathbb{R}$ apibrėžti predikatai:

- $P(x) =$ „$|x| < 1$“
- $Q(x) =$ „$x \neq 0$“

Tada $(P \vee Q)^+ = [-1, 1]$.

Temos planas

1. Pradinės sąvokos
2. Loginės operacijos
3. Teiginių algebros formulės
4. Logikos formulių semantika
5. Formalizuotas teiginių skaičiavimas
6. Predikatų logika
7. Predikatų skaičiavimo dėsniai

Egzistavimo ir bendrumo kvantorių reiškimas vienas kitu

De Morgano dėsniai predikatams

$$\neg(\exists x P(x)) \Leftrightarrow \forall x(\neg P(x))$$

$$\neg(\forall x P(x)) \Leftrightarrow \exists x(\neg P(x))$$

Egzistavimo ir bendrumo kvantorių reiškimas vienas kitu

Kvantorių sąveika su konjunkcija ir disjunkcija

$$\forall(P(x) \wedge Y) \Leftrightarrow (\forall x P(x)) \wedge Y$$

$$\forall(P(x) \vee Y) \Leftrightarrow (\forall x P(x)) \vee Y$$

$$\exists(P(x) \wedge Y) \Leftrightarrow (\exists x P(x)) \wedge Y$$

$$\exists(P(x) \vee Y) \Leftrightarrow (\exists x P(x)) \vee Y$$

Egzistavimo ir bendrumo kvantorių reiškimas vienas kitu

Kvantorių sąveika su konjunkcija ir disjunkcija

$$\forall(P(x) \wedge Y) \Leftrightarrow (\forall x P(x)) \wedge Y$$

$$\forall(P(x) \vee Y) \Leftrightarrow (\forall x P(x)) \vee Y$$

$$\exists(P(x) \wedge Y) \Leftrightarrow (\exists x P(x)) \wedge Y$$

$$\exists(P(x) \vee Y) \Leftrightarrow (\exists x P(x)) \vee Y$$

Egzistavimo ir bendrumo kvantorių reiškimas vienas kitu

Kvantorių sąveika su konjunkcija ir disjunkcija

$$\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$$

$$\exists x(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x P(x)) \vee (\exists x Q(x))$$

$$(\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x)) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$$

$$(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \Rightarrow \forall x(P(x) \vee Q(x))$$

Kvantorių sąveika su implikacija

$$\forall x(P(x) \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\exists x P(x)) \Rightarrow Q$$

$$\exists x(P(x) \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\forall x P(x)) \Rightarrow Q$$

$$\forall x(Q \Rightarrow P(x)) \Leftrightarrow Q \Rightarrow (\forall x P(x))$$

$$\exists x(Q \Rightarrow P(x)) \Leftrightarrow Q \Rightarrow (\exists x P(x))$$

Egzistavimo ir bendrumo kvantorių reiškimas vienas kitu

Kvantorių pašalinimo ir įvedimo dėsniai

$$\forall x P(x) \Rightarrow P(y)$$

$$P(y) \Rightarrow \exists x P(x)$$

Kvantorių komutatyvumas

$$\forall x \forall y P(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall x P(x, y)$$

$$\exists x \exists y P(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x P(x, y)$$

$$\exists x \forall y P(x, y) \Leftrightarrow \forall y \exists x P(x, y)$$