# ATSITIKTINIAI PROCESAI

**(paskaitų konspektas 2014[1] )**

Alfredas Račkauskas

Vilniaus universitetas
Matematikos ir Informatikos fakultetas
Ekonometrinės analizės katedra

Vilnius, 2014

Iš dalies rėmė Projektas VP1-2.2-ŠMM-07-K-02-008

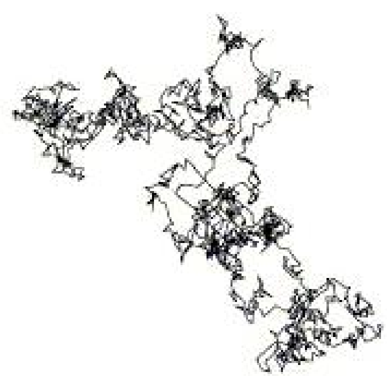
# Turinys

# Įvadas

*Teorija be praktikos - sausa*
*Praktika be teorijos - akla. (E. Kantas)*

Su neapibrėžtumais susiduriame nuolatos. Koks bus rytoj oras? Kaip keisis JAV dolerio kursas Euro atžvilgiu? Kiek kitą mėnesį išleisime maistui? Didės ar mažės kitais metais Lietuvos bendrasis vidaus produktas (BVP)? Tokie ir panašūs klausimai domina kiekvieną. Aišku, tikslaus atsakymo į juos negali pasakyti niekas. Todėl dažnai į pagalbą pasitelkiame tikimybių teoriją, kuri tiria neapibrėžtumus, jų pobūdį, dėsningumus ir gali pasiūlyti įvairių priemonių jiems nustatyti bei modeliuoti. Sistemos būsenai vienu kuriuo nors laiko momentu aprašyti paprastai naudojami atsitiktiniai dydžiai. Norėdami suprasti sistemos kitimą (evoliuciją) laike, atsitiktinį dydį turime priskirti kiekvienam laiko momentui. Gautas atsitiktinių dydžių rinkinys yra atsitiktinis procesas (terminas „stochastinis procesas" yra lygiavertis). Jų pagalba sukonstruoti matematiniai modeliai sutinkami įvairiose srityse: economikoje, finansuose, fizikoje, klimatologijoje, telekomunikacijoje, biologijoje ir t.t.

Atsitiktinių procesų teorija yra labai turininga ir gerai išvystyta, o jos užuomazgos siekia net 1827 metus, kai Anglų botanikas R. Brown'as stebėjo žiedadulkės chaotišką judėjimą skystyje (vėliau pavadint1 Brauno judesiu).



1 pav. Chaotiškas dalelės judėjimas skystyje

Šį nereguliarų tolydų judėjimą Einstein'as 1905 metais paaiškino šilumine molekulių osciliacija ir pirmasis jį aprašė matematiškai. Pagal jo modelį dalelės pozicija kiekvienu laiko momentu yra atsitiktinis dydis, o jos trajektorija turi būti nagrinėjama kaip atsitiktinės laiko funkcijos grafikas. Dabar tai plačiai žinomas ir daug pritaikymų sulaukęs Brauno judesio procesas. Vėliau Einstein'o modelį apibendrino Wiener'is. Todėl dažnai Brauno judesio procesas dar vadinamas Wiener'io vardu. Šis procesas yra bene plačiausiai taikomas modeliuojant įvairias reiškinius.

Modeliavimas yra neatsiejama bet kurio mokslo dalis - tiek socialinio, tiek gamtos. Realaus pasaulio sistemos paprastai yra labai sudėtingos. Norėdami šias sistemas suprasti, prognozuoti jų elgesį ar kontroliuoti, turime jas supaprastinti, t.y. sukurti modelį. Modelis – originalo atvaizdas, tapatus pasirinktu struktūros lygmeniu arba pasirinktomis funkcijomis (TŽŽ). Egzistuoja daug modelio formų: pavyzdžiui, verbaliniai/logistiniai (sistemų veiklos aiškinimas paradigmomis, kaip antai, nematomos rankos paradigma), fikiniai (sumažinto mastelio ir supaprastintos veiklos modeliai), geometriniai (lentelės, diagramos), algebriniai (algebrinės lygtys) ir pan. Sukurti matematinį modelį reiškia nagrinėjamai sistemai suteikti matematinę išraišką. Čia gali pasireikšti du kraštutinumai: realistinis ir idealistinis. Realistinis modelis paprastai gana tiksliai aprašo tiriamą sistemą, bet būna toks sudėtingas, kad neįmanoma jo nei ištirti, nei įvertinti. Idealistinis modelis, su kuriuo lengva dirbti, gali būti gerokai nutolęs nuo realaus tiriamo fenomeno. Todėl geras modelis yra tam tikras kompromisas tarp realaus ir idealaus. Rasti tinkamą kompromisą yra menas, kurio rezultatus nulemia žinios, įgūdžiai ir, be abejo, talentas.

Matematiniai modeliai būna arba deterministiniai, arba stochastiniai. Pirmieji postuluoja tikslią nagrinėjamų sistemų funkcinę priklausomybę ir neatsižvelgia į galimus neapibrėžtumus. Taigi deterministiniai matematiniai modeliai nėra pats geriausias įrankis, pavyzdžiui, ekonominėms ar socialinėms sistemoms tirti. Modeliai aprašomi lygtimis, į kurias įeina atsitiktiniai procesai, vadinami stochastiniais. Ekonometristams jie yra pagrindinis įrankis tiriant ekonomines sistemas, finansų makleriams padeda spręsti atsargų problemas ar sekti finansinių biržų būseną, komunikacijų specialistams – atskirti informatyvius signalus nuo natūralių ar dirbtinų triukšmų, atpažinti vaizdus, o biologams – suprasti genų mutacijos principus, augmenijos ir gyvūnijos populiacijų pasiskirstymus, epidemijų plitimą ir t.t.

Šios paskaitos apima įvadinį atsitiktinių procesų teorijos kursą. Jų tikslas yra ugdyti stochastinio modeliavimo, taikant atsitiktinius procesus, kompetencijas bei vystyti stochastinį mąstymą. Šiame kurse supažindinama su pagrindinėmis atsitiktinių procesų sąvokomis bei savybėmis. Tarp jų yra stacionarumas, ergodiškumas, reguliarumas. Pristatomos svarbiausios atsitiktinių procesų klasės: diskretaus ir tolydaus laiko Markovo procesai, diskretaus ir tolydaus laiko martingalai, Puasono, atstatymo bei Brauno judesio procesai. Pateikti įvairių pritaikymų pavyzdžiai padės pasinaudoti atsitiktinių procesų teorija identifikuojant, formuluojant ir sprendžiant įvairius taikomuosius uždavinius.

# 1 skyrius

# Mato teorijos elementai

Intervalo $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ (atviro, uždaro ar pusiau atviro), kurio kraštiniai taškai yra $a < b \in \mathbb{R}$ ilgis lygus $\ell(\mathcal{I}) = b - a$. O koks yra bet kurios kitos (ne intervalo) aibės $A \subset \mathbb{R}$ ilgis $\ell(A)$? Kaip jį apskaičiuoti? Bandymai atsakyti į šiuos klausimus matematikams padovanojo Lebego matą (pavadintą Henri Lebesgue (1875–1941) garbei). O poreikis pamatuoti dar sudėtingesnius objektus (ir ne tik plotą, tūrį ar pan.) išsivystė į turiningą mato teoriją. Šiame skyriuje jos pristatyta tiek, kiek reikės geresniam atsitiktinių procesų teorijos supratimui. Jei kam pasirodys, kad pateiktas žinių bagažas yra skurdokas, papildomam skaitymui rekomenduojame [5] vadovėlio bei [6], [2] knygų skyrius, skirtus mato teorijai.

## 1.1 Aibės ir funkcijos

### Veiksmai su aibėmis

*Aibe* vadiname tam tikrų matematinių objektų rinkinį, visumą ir dažniausiai aprašome kokiu nors būdu nusakydami jos elementus. Raide $\mathbb{R}$ įprasta žymėti realiųjų skaičių aibę, $\mathbb{C}$ – kompleksinių, $\mathbb{N}$ – natūraliųjų, $\mathbb{Z}$ – sveikųjų, $\mathbb{Q}$ – racionaliųjų skaičių aibes, o $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Jei $A$ – kažkokia aibė, tai $x \in A$ reiškia, kad $x$ yra tos aibės elementas, o $x \notin A$ – elementas $x$ nepriklauso aibei $A$. Norėdami išskirti aibės $A$ elementus, turinčius savybę $P$, rašysime $\{x \in A : P\}$ arba, jei aišku apie kokios aibės elementus kalbame, trumpiau $\{x : P\}$.

*Tuščia aibe* vadiname aibę neturinčią nei vieno elemento. Ją žymėsime simboliu $\emptyset$. Aibė, susidedanti iš vieno elemento $x$, žymima $\{x\}$ (atkreipkite dėmesį, kad $x$ ir $\{x\}$ skiriasi, pvz., $\{\emptyset\} \neq \emptyset$). Jei kiekvienas $x \in A$ yra kartu ir aibės $B$ elementas, tai sakome, kad $A$ yra $B$ *poaibis* (arba $B$ yra aibės $A$ *viršaibis*) ir rašome $A \subseteq B$ (arba $B \supseteq A$). Jei $A \subseteq B$ ir $B \subseteq A$, tai aibės $A$ ir $B$ sutampa: $A = B$. Aibė $A$ yra *tikrinis* aibės $B$ *poaibis* (arba $B$ yra $A$ *tikrinis viršaibis*) (žymime $A \subset B$ arba $B \supset A$), jei $A \subseteq B$ ir $A \neq B$. Aibė $2^A$ yra sudaryta iš visų aibės $A$ poaibių:

$$2^A = \{B : \quad B \subseteq A\}.$$

Atlikdami veiksmus su aibėmis neakivaizdžiai tariame, kad jos yra vienos kurios nors (universalios) aibės poaibiai. Dviejų aibių $A$ ir $B$ *sankirta* $A \bigcap B$ yra aibė $\{x : x \in A \text{ ir } x \in B\}$, o *sąjunga* $A \bigcup B = \{x : x \in A \text{ arba } x \in B\}$. Analogiškai bet kokiai indeksų aibei $I$ ir aibių sistemai

$\{A_\alpha, \alpha \in I\}$ apibrėžiame sąjungą

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : x \in A_\alpha \text{ kuriam nors } \alpha \in I\}$$

ir sankirtą

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : x \in A_\alpha \text{ su visais } \alpha \in I\}.$$

Jei aibės $A_i, i \in I$ poromis nesikerta, t.y. $A_i \cap A_j = \emptyset$, kai $i \neq j$, tai vietoj sąjungos ženklo $\bigcup$ naudosime sumos – $\sum$, t.y. $\sum_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} A_i$, kai $(A_i)$ yra poromis nesikertančių aibių šeima.

Kiti svarbesni veiksmai su aibėmis yra aibių *skirtumas*

$$A \backslash B = \{x : \ x \in A, \ x \notin B\}$$

bei *simetrinis skirtumas*

$$A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A).$$

Jei $B \subset A$ tai skirtumas $A \backslash B$ dar vadinamas aibės $B$ *papildiniu* (iki aibės $A$) ir, tuo atveju, kai aibė $A$ aiški iš konteksto, žymimas $B^c$.

Aibių sąjungai ir sankirtai galioja De Morgan'o dėsniai:

(1.1)
$$\Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c; \quad \Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$$

Aibių $A_1, A_2, \ldots, A_d$ *Dekarto sandauga* yra sudaryta iš sutvarkytų rinkinių $(x_1, x_2, \ldots, x_d)$, $x_1 \in A_1, \ x_2 \in A_2, \ \ldots, x_d \in A_d$ ir žymima

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_d; \quad A^d = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{d \text{ kartų}}.$$

Svarbus pavyzdys yra $\mathbb{R}^d = \{(x_1, \ldots, x_d) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, d\}$. Aibę $\mathbb{R}^d$ dar vadiname $d$-mate vektorine erdve, o jos elementus tuomet reiškiame vektoriais stulpeliais.

## Binariniai sąryšiai

Aibės $S$ elementų *binariniu sąryšiu* $\sim$ vadinamas bet kuris aibės $S \times S$ poaibis $E \subset S \times S$. Jei $(x, y) \in E$ tai sakome, kad elementas $x \in S$ susijęs su elementu $y \in S$ sąryšiu $\sim$ . Norėdami tai pažymėti, rašome $x \sim y$ arba $x \sim_E y$, jei reikia pabrėžti aibę $E$. Aibės $S$ elementų binarinis sąryšis $\sim$ yra *refleksyvusis*, jei $x \sim x$ su kiekvienu $x \in S$, *asimetrinis*, jei kartu $x \sim y$ ir $y \sim x$ gali būti tik tuomet, kai $x = y$, *tranzityvusis*, jei iš $x \sim y$, $y \sim z$ gauname $x \sim z$. Sąryšis $E$ vadinamas *simetriniu*,jei $y \sim x$, kai tik $x \sim y$.

Refleksyvus simetrinis tranzityvus sąryšis vadinamas *ekvivalentumo sąryšiu*. Štai porą paprasčiausių pavyzdžių.

***1.1 pavyzdys.*** $\mathbb{S} = \mathbb{Z}$, $n$ - duotas sveikasis skaičius. Sąryšis $x \sim y$ reiškia $x = y (\mathrm{mod}\ n)$.

***1.2 pavyzdys.*** $\mathbb{S} = \mathbb{R}$. Sąryšis $x \sim y$ reiškia, kad $x - y$ yra sveikasis skaičius.

Jei $\sim$ – aibės $S$ ekvivalentumo sąryšis ir $x \in S$, tai aibė $\{y \in S : y \sim x\}$ vadinama elementą $x$ atitinkančia *ekvivalentumo klase* ir dažnai žymima $[x]$.

***1.1 teiginys.*** *Dvi ekvivalentumo klasės yra arba lygios, arba nesikerta.*

*Įrodymas.* Tarkime, $[x]$ ir $[y]$ - dvi aibės $S$ ekvivalentumo klasės, atitinkančios sąryšį $\sim$. Jei $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, tai $[x] = [y]$. Tikrai, tegu $u \in [x]$ ir $v \in [x] \cap [y]$. Tuomet $u \sim v$ ir $v \sim y$. Remiantis tranzityvumo savybe, $u \sim y$, taigi $u \in [y]$. Vadinasi, $[x] \subset [y]$. Taip pat samprotaudami įsitikiname, kad $[y] \subset [x]$. ■

Šis teiginys leidžia aibę suskaidyti į ekvivalentumo klases, kurių šeima vadinama faktor-aibe atžvilgiu nagrinėjamo ekvivalentumo sąryšio $\sim$ arba tiesiog faktor-aibe ir žymima $\mathbb{S}/\sim$ :

$$\mathbb{S}/\sim = \{[x] : x \in \mathbb{S}\}.$$

Galima įsitikinti, kad 1.1 pavyzdyje $\mathbb{R}/\sim = \{[0], [1], \ldots, [n-1]\}$.

## Funkcijos

Visur toliau terminai *atvaizdis* ir *funkcija* vartojami kaip sinonimai ir užrašas

$$f : U \to V$$

žymi vienareikšmę funkciją, apibrėžtą aibėje $U$ su reikšmių sritimi aibėje $V$: kiekvienam elementui $u \in U$ funkcija $f$ priskiria vienintelį elementą $f(u) = v \in V$.

Funkcija su reikšmėmis realiųjų skaičių aibėje $\mathbb{R}$ vadinama *realiaja*, o su reikšmėmis išplėstinėje skaičių tiesėje $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ – *skaitine*.

Įprasta $V^U$ žymėti aibę visų funkcijų $f : U \to V$,

$$V^U := \{f : U \to V\}.$$

Svarbūs pavyzdžiai yra aibė $\mathbb{R}^T = \{f : T \to \mathbb{R}\}$, kai $T$ bet kuri aibė ir atskiras jos atvejis, intervale $[a, b]$ apibrėžtų realiųjų funkcijų aibė $\mathbb{R}^{[a,b]} = \{f : [a, b] \to \mathbb{R}\}$.

Aibė

$$G_f = \{(u, f(u)) : \ u \in U\} \subset U \times V$$

vadinama funkcijos $f$ *grafiku*. Jei $A \subset U$, tai $f(A) := \{f(u) \in V : u \in A\}$ yra *aibės $A$ vaizdas*, o $f^{-1}(B) = \{u \in U : f(u) \in B\}$, vadinama *aibės $B \subset V$ pirmavaizdžiu*. Atvaizdis $f : U \to V$ vadinamas *siurjekcija* arba aibės $U$ atvaizdžiu *į aibę* $V$, jei $f(U) = V$ ir *injekcija*, jei $f(x_1) \neq f(x_2)$, kai $x_1 \neq x_2$. Atvaizdis $f : U \to V$ vadinamas *bijekcija*, jei $f$ yra ir injekcija, ir siurjekcija.

Jei $f : U \to V$ yra bijekcija, tai su kiekvienu $v \in V$ egzistuoja tik vienas toks elementas $u \in U$, kad $v = f(u)$. Šiuo atveju sakome, kad egzistuoja funkcijos $f$ *atvirkštinė funkcija*, kuri žymima $f^{-1}$ ir kuri aibę $V$ atvaizduoja į aibę $U$ pagal šią taisyklę:

$$f^{-1}(v) = u, \quad \text{jei} \quad f(u) = v.$$

Atvaizdžio $f$ apibrėžimo sritį ir reikšmių sritį įprasta žymėti atitinkamai $D(f)$ ir $R(f)$. Funkcija $f$ vadinama funkcijos $g$ *tęsiniu*, o $g$ – $f$ *siauriniu*, jei $D(g) \subset D(f)$ ir $f(x) = g(x)$, kai $x \in D(g)$. Dvi funkcijos yra lygios, jei sutampa jų apibrėžimo sritys ir reikšmės:

$$f = g, \text{ jei } D(f) = D(g) \text{ ir } f(x) = g(x) \text{ su visais } x \in D(f).$$

Jeigu $f : U \to V, \ g : V \to Z$, tai funkcija

$$g \circ f : U \to Z, \ g \circ f(u) = g(f(u)), \text{ kai } u \in U,$$

vadinama funkcijų $f$ ir $g$ *kompozicija*, arba *sudėtine funkcija*.

Jei $A \subset U$, tai aibės $A$ *indikatorinė funkcija* $\mathbf{1}_A : U \to \mathbb{R}$ yra apibrėžta šia formule:

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{kai } x \in A; \\ 0, & \text{kai } x \notin A. \end{cases}$$

Funkciją $f : \mathbb{N} \to V$, kurios apibrėžimo sritis yra natūralieji skaičiai, vadiname aibės $V$ elementų seka ir vietoj $f(n)$ rašome $f_n$. Sekas įprasta žymėti $(f_n, n \in \mathbb{N}), (f_n)_{n \in \mathbb{N}}, (f_1, f_2, \dots)$ arba trumpiau – $(f_n)$.

Aibių $A_1, A_2, \dots$ Dekarto sandaugą $A_1 \times A_2 \times \cdots$ sudaro sekos $(x_i, i \in \mathbb{N})$, kai $x_i \in A_i$ :

$$A_1 \times A_2 \times \cdots = \{(x_1, x_2, \dots) : x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots\}.$$

Kai visos aibės $A_i$ yra lygios, tarkime, $A_i = A$ su visais $i = 1, 2, \dots$, begalinę sandaugą $A_1 \times A_2 \times \cdots$ žymėsime $A^{\mathbb{N}}$ arba $A^\infty$. Visų realiųjų skaičių sekų aibė yra $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(x_n, n \in \mathbb{N}) : x_n \in \mathbb{R} \quad \text{su visais} \quad n \in \mathbb{N}\}.$$

Aibė yra *baigtinė*, jei ji turi $n$ elementų su kuriuo nors baigtiniu $n \in \mathbb{N}$. Priešingu atveju aibė yra *begalinė*. Pavyzdžiui, natūraliųjų skaičių aibė $\mathbb{N}$ yra begalinė. Aibė $B$ vadinama *skaičia*, jei egzistuoja funkcija $f$, atvaizduojanti $B$ į $\mathbb{N}$ abipus vienareikšmiškai. Jei aibė nėra nei baigtinė nei skaiti, tai ji vadinama *neskaičia*. Pavyzdžiui, norint įsitikinti, kad $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ yra skaiti aibė, užtenka pastebėti, kad $f(n, m) = 2^m(2n+1) - 1$ atvaizduoja $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ į $\mathbb{N}$ abipus vienareikšmiškai. Atvaizdis $n \to 2n + 1, \quad \text{kai} \quad n \geq 0$ ir $n \to 2|n|, \quad \text{kai} \quad n < 0$, nustato abipus vienareikšmę atitinkamybę tarp aibių $\mathbb{Z}$ ir $\mathbb{N}$.

Racionaliųjų skaičių aibė yra skaiti, o bet kuris netuščias atviras realiųjų skaičių intervalas – neskaiti. Be to, galima įsitiktinti, kad skaiti skaičių aibių sąjunga yra skaiti aibė (žr. 1.6 pratimą).

## 1.2 Mačios erdvės ir erdvės su matu

### Mačios erdvės

Tarkime, turime netuščią aibę $\mathbb{S}$. Nagrinėsime jos poaibių šeimas, t.y. aibės $2^{\mathbb{S}}$ poaibius.

***1.1 apibrėžimas.*** *Aibės $\mathbb{S}$ poaibių šeima $\mathcal{S} \subseteq 2^{\mathbb{S}}$ vadinama algebra, jeigu ji pasižymi šiomis savybėmis:*

$(i)$ $\mathbb{S} \in \mathcal{S}$;

$(ii)$ *jei* $A \in \mathcal{S}$, *tai ir* $A^c \in \mathcal{S}$;

$(iii)$ *jei* $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{S}$ *tai ir* $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{S}$.

*Algebra* $\mathcal{S}$ *vadinama* $\sigma$ *algebra, jei ji yra uždara skaičios sąjungos atžvilgiu, t.y., jei* $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{S}$ *tai ir* $\bigcup_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{S}$.

Algebrai visada priklauso tuščia aibė $\emptyset = \mathbb{S}^c$. Iš De Morgan'o (1.1) tapatybių gauname, kad $\sigma$ algebra (atitinkamai algebra) yra uždara skaičios (atitinkamai baigtinės) sankirtos atžvilgiu. Bet kuri $\sigma$ algebra yra ir algebra, bet ne atvirkščiai (žr. 1.7 pratimą).

***1.1 pavyzdžiai.*** (a) *Trivialioji* $\sigma$ *algebra* yra $\mathcal{S} = \{\mathbb{S}, \emptyset\}$.

(b) *Diskrečioji* $\sigma$ *algebra* yra $\mathcal{S} = 2^{\mathbb{S}}$.

(c) Jei $A \subset \mathbb{S}$, tai $\mathcal{S} = \{A, A^c, \mathbb{S}, \emptyset\}$ yra algebra.

***1.2 teiginys.*** *Bet kuriam aibės* $\mathcal{S}$ *poaibių rinkiniui* $\mathcal{A}$ *egzistuoja mažiausia* $\sigma$ *algebra* $\sigma(\mathcal{A})$, *kuriai priklauso* $\mathcal{A}$ *(ją vadinsime šeimos* $\mathcal{A}$ *generuota* $\sigma$ *algebra).*

*Įrodymas.* Tegu $\mathcal{I}$ yra rinkinys visų $\sigma$ algebrų, kurioms priklauso $\mathcal{A}$. Kadangi diskrečioji $\sigma$ algebra $2^{\mathcal{S}} \in \mathcal{I}$, tai rinkinys $\mathcal{I}$ yra netuščias. Apibrėžkime $\sigma(\mathcal{A}) = \bigcap_{\mathcal{F} \in \mathcal{I}} \mathcal{F}$. Kadangi $\mathcal{A} \in \mathcal{F}$ kiekvienai $\sigma$ algebrai $\mathcal{F} \in \mathcal{I}$, tai $\mathcal{A} \subset \sigma(\mathcal{A})$. Lieka patikrinti, kad $\sigma(\mathcal{A})$ yra $\sigma$ algebra. Kadangi $\mathbb{S} \in \mathcal{F}$ kiekvienai $\mathcal{F} \in \mathcal{I}$, tai $\mathbb{S} \in \sigma(\mathcal{A})$. Jei $A \in \sigma(\mathcal{A})$, tai $A \in \mathcal{F}$ kiekvienai $\mathcal{F} \in \mathcal{I}$. Kadangi $\mathcal{F}$ yra $\sigma$ algebra, tai $A^c \in \mathcal{F}$. Taigi $A^c \in \sigma(\mathcal{A})$. Jei $(A_i, i \geq 1) \subset \sigma(\mathcal{A})$, tai $(A_i, i \geq 1) \subset \mathcal{F}$, ir $\bigcup_i A_i \in \mathcal{F}$ kiekvienai $\mathcal{F} \in \mathcal{I}$. Taigi $\bigcup_i A_i \in \sigma(\mathcal{A})$. ■

***1.2 apibrėžimas.*** *Realiųjų skaičių aibės* $\mathbb{R}$ *Borelio* $\sigma$ *algebra* $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ *yra aibių šeimos*

$$\mathcal{A} := \{[a,b), (-\infty, b), [a, \infty), (-\infty, \infty), \quad a, b \in \mathbb{R}\}$$

*generuota* $\sigma$ *algebra:* $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathcal{A})$.

***1.3 apibrėžimas.*** *Aibių rinkinys* $\mathcal{A} \subset 2^{\mathbb{S}}$ *yra*

- $\pi$ *sistema, jei* $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$, *kai* $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$;
- $\lambda$ *sistema, jei*

  *(i)* $\mathbb{S} \in \mathcal{A}$;

  *(ii)* $B \setminus A \in \mathcal{A}$, *kai* $A, B \in \mathcal{A}$ *ir* $A \subset B$;

  *(iii) skaiti poromis nesikertančių aibių iš* $\mathcal{A}$ *sąjunga priklauso* $\mathcal{A}$, *t.y., jei* $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ *ir* $A_i \cap A_j = \emptyset$, *kai* $i \neq j$, *tuomet* $\bigcup_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{A}$.

Ekvivalenti (iii) savybei yra ši:

(iii') jei $(A_i) \subset \mathcal{A}$, $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ tai $\bigcup_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{A}$.

Įsitikinti ekvivalentumu paliekame vietoj pratimo.

Akivaizdu, kad $\sigma$ algebra yra tiek $\pi$ sistema, tiek $\lambda$ sistema. Teisingas ir atvirkščias teiginys.

***1.3* teiginys.** *Aibės $\mathbb{S}$ poaibių šeima yra $\sigma$ algebra, jei ji yra kartu ir $\pi$ sistema, ir $\lambda$ sistema.*

*Įrodymas.* Tarkime, $\mathcal{E} \subset 2^{\mathbb{S}}$ yra ir $\pi$ sistema ir $\lambda$ sistema. Pirmiausia pastebime, kad $\mathcal{E}$ yra uždara papildinio atžvilgiu: jei $A \in \mathcal{E}$ tai ir $\mathbb{S} \setminus A \in \mathcal{E}$, nes $\mathbb{S} \in \mathcal{E}$ ir $A \subset \mathcal{E}$, o $\mathcal{E}$ yra $\lambda$ sistema. Įsitikinkime, kad $A \cup B \in \mathcal{E}$, kai $A, B \in cE$. Taip yra, nes $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$, o $\mathcal{E}$ yra uždara atžvilgiu papildinio ($\lambda$ sistema) ir sankirtos ($\pi$ sistema) operacijų. Tegu $(A_n) \subset \mathcal{E}$. Įsitikinkime, kad $\cup_{k \geq 1} A_k \in \mathcal{E}$. Tegu $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \cap A_1^c, \ldots B_k = A_k \cap A_{k-1}^c \cap \cdots \cap A_1^c, \ldots$. Aibės $(B_k)$ nesikerta ir priklauso $\mathcal{E}$. Be to, $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$. Teiginys pilnai įrodytas. ■

***1.1* teorema.** *Tegu $\mathcal{E} \subset 2^{\mathbb{S}}$ yra $\lambda$ sistema, o $\mathcal{B} \subset 2^{\mathbb{S}}$ yra $\pi$ sistema. Jei $\mathcal{E} \supset \mathcal{B}$ tai $\mathcal{E} \supset \sigma(\mathcal{B})$.*

*Įrodymas.* Tegu $\mathcal{B}'$ yra mažiausia $\lambda$ sistema, kuriai priklauso $\mathcal{B}$. Įsitikinsime, kad $\mathcal{B}' \supset \sigma(\mathcal{B})$. Tam pakanka patikrinti, kad $\mathcal{B}'$ yra $\sigma$ algebra. O tam, savo ruožtu, pakanka patikrinti, kad $\lambda$ sistema $\mathcal{B}'$ yra kartu ir $\pi$ sistema. Pasinaudosime šiuo teiginiu, kurio įrodymui pakanka žingsnis po žingsnio patikrinti $\lambda$ sistemos apibrėžimą.

***1.4* teiginys.** *Jei $\mathcal{A}$ yra $\lambda$ sistema ir $A \in \mathcal{A}$, tuomet ir $\mathcal{A}' = \{B \in \mathcal{A} : B \cap A \in \mathcal{A}\}$ yra $\lambda$ sistema.*

Tęsdami teoremos įrodymą, fiksuokime $B \in \mathcal{B}$ ir nagrinėkime

$$\mathcal{D}_1 := \{A \in \mathcal{B}' : A \cap B \in \mathcal{B}'\}.$$

Kadangi $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$ tai, remiantis 1.4 teiginiu, $\mathcal{D}_1$ yra $\lambda$ sistema. Be to, jai priklauso $\mathcal{B}$ : jei $A \in \mathcal{B}$ tai $A \cap B \in \mathcal{B}$. Taigi $\mathcal{D}_1 \supset \mathcal{B}'$.

Gauname, kad fiksuotai aibei $A \in \mathcal{B}'$, rinkinys

$$\mathcal{D}_2 := \{B \in \mathcal{B}' : A \cap B \in \mathcal{B}'\}$$

apima ir $\mathcal{B}$. Remiantis 1.4 teiginiu $\mathcal{D}_2$ yra $\lambda$ sistema, taigi turi apimti $\mathcal{B}'$. Tai reiškia, kad $A \cap B \in \mathcal{B}'$, kai $A, B \in \mathcal{B}'$. ■

***1.4* apibrėžimas.** *Pora $(\mathbb{S}, \mathcal{S})$, kai $\mathbb{S}$ yra netuščia aibė, o $\mathcal{S}$ – jos poaibių $\sigma$ algebra, vadinama mačiąja erdve. Aibės $A \in \mathcal{S}$ vadinamos mačiosiomis.*

## Matai

Matai yra kaip tik ta matematinė priemonė, kuri padeda „pamatuoti" aibes (prisiminkime skyriaus pradžioje iškeltą klausimą), o mačios aibės yra tos, kurias galima „pamatuoti".

***1.5* apibrėžimas.** *Tarkime, $\mathcal{A}$ yra aibės $\mathbb{S}$ poaibių algebra. Funkcija $\mu \colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ vadinama matu, jei teisingos šios aksiomos:*

(1) $\mu(\emptyset) = 0$;

(2) *jei* $A_n \in \mathcal{A}, n = 1, 2, \ldots, A_n \cap A_m = \emptyset$, *kai* $n \neq m$, *ir* $A = \sum_n A_n \in \mathcal{A}$, *tai*

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Matas $\mu$, apibrėžtas algebroje $\mathcal{A}$, vadinamas:

- *baigtiniu*, jei $\mu(\mathbb{S}) < \infty$;
- *tikimybiniu*, jei $\mu(\mathbb{S}) = 1$;
- *$\sigma$-baigtiniu*, jei egzistuoja tokia aibių seka $(A_n) \subset \mathcal{A}$, kad $\mathbb{S} = \bigcup_n A_n$ ir $\mu(A_n) < \infty$ su kiekvienu $n \in \mathbb{N}$.

***1.3 pavyzdys.*** (1) Tarkime, $(\mathbb{S}, \mathcal{S})$ - mati erdvė, $x \in \mathcal{S}$ - duotas aibės $\mathbb{S}$ elementas. Aibei $A \in \mathcal{S}$ apibrėžkime

$$\mu(A) = \delta_x(A) = \begin{cases} 1, & \text{jei} \quad x \in A, \\ 0, & \text{jei} \quad x \notin A. \end{cases}$$

Galima įsitikinti, kad $\delta_x$ yra erdvės $(\mathbb{S}, \mathcal{S})$ matas. Jis vadinamas Dirako matu taške $x$.

(2) Tarkime, $(\mathbb{S}, \mathcal{S})$ - mati erdvė, $\mathcal{D} \subset \mathbb{S}$ skaiti mati aibė. Aibei $A \in \mathcal{S}$ apibrėžkime

$$\mu_{\mathcal{D}}(A) = \sum_{x \in \mathcal{D}} \delta_x(A).$$

Galima įsitikinti, kad taip apibrėžta aibių funkcija $\mu_{\mathcal{D}}$ yra erdvės $(\mathbb{S}, \mathcal{S})$ matas, kuris „suskaičiuoja" aibės $A \cap \mathcal{D}$ elementus (jų gali būti ir begalo daug).

(3) Tarkime, $(\mathbb{S}, \mathcal{S})$ - mati erdvė, $\mathcal{D} \subset \mathbb{S}$ skaiti mati aibė, $m : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ kokia nors neneigiama funkcija. Aibei $A \in \mathcal{S}$ apibrėžkime

$$\mu_{\mathcal{D}}(A) = \sum_{x \in \mathcal{D}} m(x) \delta_x(A).$$

Galima įsitikinti, kad taip apibrėžta aibių funkcija $\mu_{\mathcal{D}}$ yra erdvės $(\mathbb{S}, \mathcal{S})$ matas. Jis vadinamas diskrečiuoju. Jei $\sum_{x \in \mathcal{D}} m(x) < \infty$, tai matas $\mu$ yra baigtinis. Jei $\sum_{x \in \mathcal{D}} m(x) = 1$, tai matas $\mu$ yra tikimybinis.

Svarbios mato savybės surinktos šiame teiginyje.

***1.5 teiginys.*** *Matas $\mu$ apibrėžtas algebroje $\mathcal{A}$ yra:*

(1) *monotoniškas, t.y., jei $A, B \in \mathcal{A}, A \subset B$, tai $\mu(A) \leq \mu(B)$;*

(2) *tolydus, t.y., jei seka $(A_n) \subset \mathcal{A}$ yra monotoniškai didėjanti (t.y., $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$), tai*

(1.2)
$$\mu\Big(\lim_n A_n\Big) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n);$$

(3) *monotoniškai mažėjančiai sekai* $(A_n)$ *(t.y.,* $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$*)* $(1.2)$ *galioja, jei* $\mu(A_{n_0}) < \infty$ *kažkuriam* $n_0 \geq 1$.

(4) *skaičiai subadityvus, t.y., jei* $(A_n) \subset \mathcal{A}$ *ir* $\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$*, tai*

$$\mu\Big(\bigcup_n A_n\Big) \leq \sum_n \mu(A_n).$$

*Įrodymas.* (1) Kadangi $A \subset B$, tai $B = A + B \cap A^c$. Aibės $A$ ir $A \cap B^c$ nesikerta, todėl

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \cap A^c) \geq \mu(A).$$

(2) Tegu $A_0 = \emptyset$. Tuomet $\bigcup_{n=1}^\infty A_n = \sum_{n=1}^\infty A_n \setminus A_{n-1}$. Taigi

$$\begin{aligned}\mu\Big(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\Big) &= \mu\Big(\sum_{n=1}^\infty A_n \setminus A_{n-1}\Big) = \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n \setminus A_{n-1}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \mu(A_k \setminus A_{k-1}) = \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\sum_{k=1}^n A_k \setminus A_{k-1}\Big) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).\end{aligned}$$

(3) Nagrinėkime monotoniškai mažėjančią seką $(A_n)$. Nemažindami bendrumo tarkime, kad $n_0 = 1$, t.y., $\mu(A_1) < \infty$. Tegu $B_n = A_1 \setminus A_n$, $n > 1$. Seka $(B_n)$ yra monotoniškai didėjanti. Taigi

$$\begin{aligned}\lim_n \mu(B_n) = \mu(\lim_n B_n) &= \mu\Big(\bigcup_{n=1}^\infty (A_1 \cap A_n^c)\Big) = \mu\Big(A_1 \cap \bigcup_{n=1}^\infty A_n^c\Big) \\ &= \mu\Big(A_1 \cap \Big(\bigcap_{n=1}^\infty A_n\Big)^c\Big) = \mu(A_1) - \mu\Big(\bigcap_{n=1}^\infty A_n\Big) \\ &= \mu(A_1) - \mu(\lim_n A_n).\end{aligned}$$

Iš kitos pusės

$$\lim_\mu (B_n) = \lim_n (\mu(A_1) - \mu(A_n)) = \mu(A_1) - \lim_n \mu(A_n).$$

Kadangi $\mu(A_1) < \infty$ šios lygybės reiškia, kad $\lim_n \mu(A_n) = \mu(\lim_n A_n)$.

(4) Tegu $B_1 = A_1, B_2 = A_2 \cap A_1^c, \ldots, B_k = A_k \cap A_{k-1}^c \cap \cdots \cap A_1^c$. Aibės $B_1, \ldots, B_n$ nesikerta ir $\bigcup_{k=1}^n A_k = \sum_{k=1}^n B_k$. Taigi

$$\begin{aligned}\mu\Big(\bigcup_{k=1}^n A_k\Big) = \mu\Big(\sum_{k=1}^n B_k\Big) &= \sum_{k=1}^n \mu(B_k) \\ &\leq \sum_{k=1}^n \mu(A_k) \leq \sum_{k=1}^\infty \mu(A_k).\end{aligned}$$

Lieka pereiti prie ribos, kai $n \to \infty$ ir pritaikyti mato tolydumo savybę. ■

***1.6 apibrėžimas.*** *Trejetą* $(\mathbb{S}, \mathcal{S}, \mu)$, *kai* $\mathcal{S}$ *yra aibės* $\mathbb{S}$ *poaibių* $\sigma$ *algebra ir* $\mu$ *yra* $\sigma$ *baigtinis matas, apibrėžtas* $\sigma$ *algebroje* $\mathcal{S}$*, vadinsime erdve su matu.*

Jei $\mu$ yra tikimybinis matas, tai trejetas $(\mathbb{S}, \mathcal{S}, \mu)$ vadinamas tikimybine erdve. Abstrakti tikimybinė erdvė dažniausiai žymima $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

***1.7 apibrėžimas.*** *Aibė* $A \subset \mathbb{S}$ *vadinama* $\mu$*-nuline, jei egzistuoja tokia aibė* $E \in \mathcal{S}$*, kad* $\mu(E) = 0$ *ir* $A \subset E$*. Erdvė su matu* $(\mathbb{S}, \mathcal{S}, \mu)$ *vadinama pilna, jei kiekviena* $\mu$*-nulinė aibė* $A \subset \mathbb{S}$ *yra mati.*

Dažnai pasitaikantis būdas sukonstruoti erdves su matu yra toks. Pirmiausia matas aprašomas kuriai nors patogiai duotos aibės poaibių klasei. Toliau patikrinama ar, išlaikant norimas savybes, galima jį apibrėžti tos aibių klasės generuotoje algebroje. Generuotas algebras, priešingai nei $\sigma$ algebras galima aprašyti konstruktyviai (žr. 1.8 pratimą). Galiausiai paskutiniame žingsnyje remiamės mato pratęsimo teorema. Šį būdą kitame skyrelyje pritaikysime konstruodami realiųjų skaičių aibės Lebego bei Lebego-Stiltjeso matus (žr. 1.3 teoremą), o čia aptarsime labai svarbią mato pratęsimo teoremą.

***1.2 teorema.*** ***( Carathéodory teorema )*** *Tarkime,* $\mu$ *yra* $\sigma$ *baitinis matas apibrėžtas aibės* $\mathbb{S}$ *poaibių algebroje* $\mathcal{A}$*. Egzistuoja tokia* $\sigma$ *algebra* $\mathcal{A}^* \supset \mathcal{A}$ *ir toks vienintelis mačios erdvės* $(\mathbb{S}, \mathcal{A}^*)$ $\sigma$ *baigtinis matas* $\mu^*$*, kad* $\mu^*(A) = \mu(A)$*, kai* $A \in \mathcal{A}$*. Be to, erdvė su matu* $(\mathbb{S}, \mathcal{A}^*, \mu^*)$ *yra pilna.*

*Įrodymas.* Bet kuriai aibei $A \subset \mathbb{S}$ apibrėžiame vadinamą jos išorinį matą:

$$\mu^*(A) := \inf\Big\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \ \ A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}\Big\}. \tag{1.3}$$

Apibrėžkime

$$\mathcal{A}^* := \{A \in 2^{\mathbb{S}} : \mu^*(C) = \mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \cap A^c), \quad \text{su visais} \quad C \in 2^{\mathbb{S}}\}.$$

Taip sukonstruoti $\mu^*$ ir $\mathcal{A}^*$ ir yra ieškomieji matas bei $\sigma$ algebra. Pilną teoremos įrodymą galima rasti [5] knygoje. ■

***1.1 pastaba.*** Išorinio mato $\mu^*$ apibrėžime galima nagrinėti tik poromis nesikertančias aibes $A_i$, mato $\mu^*(A)$ reikšmė nuo to nepasikeis, t. y.:

$$\mu^*(A) = \inf\Big\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : A \subset \sum_{n=1}^{\infty} A_n, \ \ A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}\Big\}. \tag{1.4}$$

Tikrai, tegu $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, 2, \ldots$ tokios aibės, kad $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \supset A$. Apibrėžkime

$$B_1 = A_1, \quad B_i = A_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i} A_i, i > 1.$$

Aibės $B_1, B_2, \ldots$ nesikerta ir $\sum_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \supset A$. Kadangi $\mathcal{A}$ yra algebra, tai jai priklauso visos aibės $B_i$. Be to, $B_i \subset A_i$. Todėl

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Toliau lieka pasinaudoti tiksliojo apatinio rėžio apibrėžimu.

***1.2 pastaba.*** Kadangi $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}^*$, matą $\mu^*$ galime nagrinėti ir aibėms $A \in \sigma(\mathcal{A})$. Mato $\mu^*$ siaurinys $\sigma$-algebroje $\sigma(\mathcal{A})$ vadinamas mato $\mu$ tęsiniu į $\sigma(\mathcal{A})$ ir dažnai žymimas tuo pačiu simboliu $\mu$. Taigi $\mu(A) = \mu^*(A)$, kai $A \in \sigma(\mathcal{A})$.

## Erdvių su matu sandaugos

Skyrelį baigsime apibrėždami erdvių su matu sandaugą. Nagrinėkime erdves su matu $(\mathbb{S}_i, \mathcal{S}_i, \mu_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Dekarto sandaugos $\prod_{i=1}^n \mathbb{S}_i$ $\sigma$ algebra yra

$$\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{S}_i = \sigma\{A_1 \times \cdots \times A_n : \quad A_i \in \mathcal{S}_i, i = 1, \ldots, n\}.$$

Pora $(\prod_{i=1}^n \mathbb{S}_i, \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{S}_i)$ vadinama mačių erdvių $(\mathbb{S}_i, \mathcal{S}_i), i = 1, \ldots, n$ sandauga. Imdami aibes $A_i \in \mathcal{S}_i$, $i = 1, \ldots, n$, apibrėžkime

$$\mu(A_1 \times \cdots \times A_n) = \prod_{i=1}^m \mu_i(A_i). \tag{1.5}$$

Galime įsitikinti (žr. 1.24 pratimą), kad $\mu$ yra matas algebroje

$$\mathcal{A} = \{A_1 \times \cdots \times A_n : \quad A_i \in \mathcal{S}_i, i = 1, \ldots, n\}. \tag{1.6}$$

Remdamiesi Carathéodory teorema, pratęskime matą $\mu$ į $\sigma$ algebrą $\sigma(\mathcal{A}) = \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{S}_i$. Gautą matą žymime $\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$ ir vadiname sandaugos matu. Trejetas

$$(\prod_{i=1}^n \mathbb{S}_i, \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{S}_i, \bigotimes_{i=1}^n \mu_i)$$

vadinamas erdvių su matu $(\mathbb{S}_i, \mathcal{S}_i, \mu_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ *tiesiogine sandauga*. Kai $(\mathbb{S}_i, \mathcal{S}_i, \mu_i) = (\mathbb{S}, \mathcal{S}, \mu)$ su kiekvienu $i = 1, \ldots, n$, tai atitinkamą tiesioginę sandaugą žymėsime $(\mathbb{S}^n, \mathcal{S}^{\otimes n}, \mu^{\otimes n})$.

## Lebego-Stiltjeso matai

***1.3 teorema.*** *Tegu $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yra monotoninė nemažėjanti tolydi iš dešinės funkcija. Egzistuoja toks Borelio $\sigma$ algebroje $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ apibrėžtas matas $\mu$, kad*

$$\mu((a, b]) = F(b) - F(a). \tag{1.7}$$

*Matas $\mu$ vadinamas Lebego–Stiltjeso matu (atitinkančiu funkciją $F$).*

*Įrodymas.* Tegu $\mathcal{A}_I$ yra aibė visų realiųjų skaičių tiesės $\mathbb{R}$ intervalų, pavidalo

$$(a, b], (-\infty, b], (a, +\infty), (-\infty, +\infty), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Nagrinėkime rinkinį $\mathcal{A}$, sudarytą iš visų baigtinių nesikertančių intervalų iš $\mathcal{A}_I$ sąjungų: $A \in \mathcal{A}$, jei $A = \cup_{i=1}^m I_i$, $I_1, \ldots, I_m \in \mathcal{A}_I$ ir $I_i \cap I_j = \emptyset$, kai $i \neq j$. Galime įsitikinti, kad šeima $\mathcal{A}$ yra algebra. Be to, jos generuota $\sigma$ algebra sutampa su Borelio, $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ (žr. 1.12 pratimą).

Pirmiausia matą $\mu$ apibrėžiame algebroje $\mathcal{A}$. Tuo tikslu bet kuriam intervalui $(a, b]$, kai $a \leq b \in \mathbb{R}$, tegu $\mu((a, b]) = F(b) - F(a)$. Be to, tegu

$$\mu((a, \infty)) = \lim_{x \to \infty} [F(x) - F(a)],$$
$$\mu((-\infty, a]) = \lim_{x \to -\infty} [F(a) - F(x)],$$

kai $a \in \mathbb{R}$ ir. tegu

$$\mu((-\infty, \infty)) = \lim_{x \to +\infty} [F(x) - F(-x)].$$

Jei $A \in \mathcal{A}$ ir $A = \sum_{k=1}^m I_k$, $I_1, \ldots, I_m \in \mathcal{A}_I$, apibrėžkime

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^m \mu(I_k).$$

Įsitikinkime, kad toks apibrėžimas yra korektiškas, tai yra $\mu(A)$ nepriklauso nuo aibės $A$ reiškimo baigtine nesikertančių intervalų sąjunga. Tegu $A = \sum_{k=1}^d J_k$. Pastebėkime, kad

$$I_k = I_k \cap A = \sum_{j=1}^d (I_k \cap J_j), \quad J_i = J_i \cap A = \sum_{l=1}^m (J_i \cap I_l), \quad k = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, d.$$

Kadangi funkcija $\mu$ yra adityvi algebroje $\mathcal{A}$, tai

$$\mu(I_k) = \sum_{j=1}^d \mu(I_k \cap J_j), \quad \mu(J_i) = \sum_{l=1}^n \mu(J_i \cap I_l).$$

Iš šių lygybių matome, kad

$$\sum_{k=1}^m \mu(I_k) = \sum_{l=1}^d \mu(J_l).$$

Tai ir įrodo funkcijos $\mu$ apibrėžimo vienareikšmiškumą. Taigi $\mu(A) \geq 0$ apibrėžėme kiekvienai aibei $A \in \mathcal{A}$. Įrodykime, kad taip apibrėžta aibių funkcija $\mu$ yra algebros $\mathcal{A}$ matas. Tam pakanka patikrinti funkcijos $\mu$ skaitų adityvumą, nes $\mu(\emptyset) = \mu((a, a]) = F(a) - F(a) = 0$. Tarkime, $(a, b] = \sum_{n=1}^\infty (a_n, b_n]$ - skaiti nesikertnčių intervalų sąjunga. Tegu skaičiai $\varepsilon > 0$ ir $\delta > 0$ yra laisvai pasirenkami. Kadangi funkcija $F$ tolydi iš dešinės, egzistuoja tokie $\varepsilon_k > 0$, kad

$$F(b_k + \varepsilon_k) - F(b_k) < \varepsilon / 2^k, \quad k \geq 1. \tag{1.8}$$

Uždarą intervalą $[a+\delta, b]$ dengia atvirieji intervalai $(a_k, b_k+\varepsilon_k)$, $k \geq 1$. Remiantis Heinės–Borelio teorema (žr. [4]), egzistuoja toks svaikasis skaičius $N$, kad

$$(a + \delta, b] \subset [a + \delta, b] \subset \bigcup_{k=1}^N (a_k, b_k + \varepsilon_k) \subset \bigcup_{k=1}^N (a_k, b_k + \varepsilon_k].$$

Taigi

$$\begin{aligned} F(b) - F(a+\delta) &\le \sum_{k=1}^{N} [F(b_k + \varepsilon_k) - F(a_k)] \\ &\le \sum_{k=1}^{N} [F(b_k) - F(a_k)] + \sum_{k=1}^{N} \varepsilon 2^{-k} \\ &\le \sum_{k=1}^{N} [F(b_k) - F(a_k)] + \varepsilon. \end{aligned}$$

Perėję prie ribos, kai $\delta \to 0$ ir $\varepsilon \to 0$ bei pritaikę funkcijos $F$ tolydumą iš dešinės, gauname

$$F(b) - F(a) \le \sum_{k=1}^{\infty} [F(b_k) - F(a_k)]. \tag{1.9}$$

Kadangi $(a, b] \supset \sum_{k=1}^{n} (a_k, b_k]$ su kiekvienu $n$, tai

$$F(b) - F(a) \ge \sum_{k=1}^{\infty} [F(b_k) - F(a_k)]. \tag{1.10}$$

Taigi skaitų adityvumą kai baigtinis intervalas yra nesikertančių intervalų sąjunga įrodo (1.9) ir (1.10) nelygybės. Galima įsitikinti, kad bet kuriam intervalui $I$,

$$\mu(I) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu(I \cap (n, n+1]).$$

Jei dabar $I = \sum_{j=1}^{\infty} I_j$ yra nesikertančių baigtinių intervalų sąjunga, tai pagal jau įrodytą dalį

$$\begin{aligned} \sum \mu(I_j) &= \sum_j \sum_n \mu(I_j \cap (n, n+1]) \\ &= \sum_n \mu(I \cap (n, n+1]) = \mu(I). \end{aligned}$$

Dabar jau nesudėtinga užbaigti teoremos įrodymą. ■

Nemažėjanti tolydi iš dešinės funkcijs $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tenkinanti sąlygas

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1, \quad \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0,$$

vadinama *pasiskirstymo funkcija*. Lebego–Stiltjeso matas $\mu = P_F$, kurį apibrėžia pasiskirstymo funkcija $F$, yra tikimybinis, t.y., $P_F(\mathbb{R}) = 1$. Be to, jei $P$ yra tikimybinis matas, apibrėžtas realiųjų skaičių aibėje $\mathbb{R}$, tuomet funkcija $F(x) = P((-\infty, x]),\ x \in \mathbb{R}$ yra pasiskirstymo funkcja.

## Lebego matas

Nagrinėkime funkciją $F(x) = x, x \in \mathbb{R}$. Ją atitinkantis Lebego–Stiltjeso matas $\mu$ vadinamas Lebego matu ir toliau žymimas $m$. Dėl Lebego mato svarbos atskirai pateiksime jo apibrėžimą. Tuo tikslu, intervalo $I \subset \mathbb{R}$ ilgį žymėkime $\ell(I)$.

***1.8 apibrėžimas.*** *Aibės $A \subset \mathbb{R}$ išoriniu Lebego matu $m^*(A)$ vadinamas skaičius*

$$m^*(A) = \inf\Big\{\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) : \{I_k\} \text{ yra toks atvirų intervalų rinkinys, kad } E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\Big\}.$$

Akivaizdu, kad $0 \leq m^*(A) \leq \infty$.

***1.4 teorema.*** *Išorinis Lebego matas $m^*$ apibendrina ilgį, yra monotoninis ir invariantinis postūmiams. Be to,*

- *$m^*(A) = 0$, jei $A$ yra skaiti aibė;*
- *bet kuriai aibių sekai $A_i \subset \mathbb{R}$, $i \geq 1$,*

$$m^*\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A_i).$$

***1.9 apibrėžimas.*** *Aibė $A \subset \mathbb{R}$ vadinama Lebego prasme mačia, jei su bet kuria aibe $B \subset \mathbb{R}$*

$$m^*(A) = m^*(A \cup B) + m^*(A \cup B^c).$$

***1.10 apibrėžimas.*** *Lebego prasme mačios aibės $A$ Lebego matas $m(A)$ yra apibrėžiams kaip išorinis matas $m^*(A)$, t.y.*

$$m(A) = m^*(A).$$

Aibę visų Lebego prasme mačių $\mathbb{R}$ poaibių žymime $\mathcal{A}^*$. Žemiau išrašytos savybės parodo, kad $m$ yra matas $\sigma$-algebroje $\mathcal{A}^*$. Be to, trejetas $(\mathbb{R}, \mathcal{A}^*, m)$ yra pilna erdvė su matu. Bet dažniau nagrinėjame lebego mato siaurinį Borelio $\sigma$ algebroje $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, kurį bėl gi žymime $m$ ir vadiname Lebego matu.

***1.5 teorema.*** *Aibė $\mathcal{A}^*$ pasižymi šiomis savybėmis:*

1. *$\emptyset \in \mathcal{A}^*$ ir $\mathbb{R} \in \mathcal{A}^*$;*
2. *jei $A \in \mathcal{A}^*$ tai ir $A^c \in \mathcal{A}^*$;*
3. *jei $m^*(A) = 0$, tai $A \in \mathcal{A}^*$;*
4. *jei $A_1, A_2 \in \mathcal{A}^*$, tai $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}^*$ ir $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}^*$;*
5. *jei $A \in \mathcal{A}^*$ ir $b \in \mathbb{R}$, tai $A + b \in \mathcal{A}^*$;*
6. *Bet kuris intervalas $I \in \mathcal{A}^*$ ir, be to, $m(I) = m^*(I) = \ell(I)$;*

7. *jei* $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}^*$ *ir nesikerta, tai su bet kuria aibe* $B \subset \mathbb{R}$

$$m^*(\bigcup_{i=1}^{n} B \cap A_i) = m^*(B \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} m^*(B \cap A_i);$$

   *Atskiru atveju, imdami* $B = \mathbb{R}$, *gauname*

$$m(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i).$$

8. *Jei* $A_i \in \mathcal{A}^*, i = 1, 2, \dots,$ *tai*

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}^* \quad \textit{ir} \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}^*;$$

9. *Jei* $(A_i, i = 1, 2, \dots) \subset \mathcal{A}^*$ *ir nesikerta, tai*

$$m\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i);$$

10. *Bet kuri atvira aibė ir bet kuri uždara aibė yra mačios Lebego prasme.*

# 1.3 Mačios funkcijos

## Mačios funkcijos sąvoka

Tarkime, $(\mathbb{S}, \mathcal{S})$ ir $(\mathbb{V}, \mathcal{V})$ yra dvi mačios erdvės.

***1.11 apibrėžimas.*** *Atvaizdis* $f\colon \mathbb{S} \to \mathbb{V}$, *vadinamas* $(\mathcal{S}, \mathcal{V})$-*mačiuoju (mačiu* $\sigma$ *algebrų* $\mathcal{S}, \mathcal{V}$ *atžvilgiu arba tiesiog mačiuoju, kai atitinkamos* $\sigma$ *algebros yra žinomos iš konteksto), jei*

$$f^{-1}(\mathcal{V}) := \{f^{-1}(A)\colon A \in \mathcal{S}\} \subseteq \mathcal{S}.$$

Norėdami pabrėžti $f$ reikšmių aibę, sakysime, kad $f$ yra $\mathbb{V}$-*reikšmis matus atvaizdis* (arba, matus atvaizdis su reikšmėmis aibėje $\mathbb{V}$).

Svarbi yra sudėtinės funkcijos matumo teorema.

***1.6 teorema.*** *Tarkime,* $(\mathbb{S}, \mathcal{S}), (\mathbb{V}, \mathcal{V})$ *ir* $(\mathbb{E}, \mathcal{E})$ *– mačios erdvės,* $f\colon \mathbb{S} \to \mathbb{V}, g\colon \mathbb{V} \to \mathbb{E}$ *– matūs atvaizdžiai. Tuomet kompozicija* $g \circ f\colon \mathbb{S} \to \mathbb{E}$ *(*$g \circ f(s) = g(f(s)), s \in \mathbb{S}$*) yra matus atvaizdis.*

*Įrodymas.* Paliekamas vietoj pratimo. ■

***1.6 teiginys.*** *Tegu* $f : \mathbb{S} \to \mathbb{V}$. *Su bet kokia aibės* $\mathbb{T}$ *poaibių klase* $\mathcal{A}$ *galioja lygybė*

$$\sigma\big(f^{-1}(\mathcal{A})\big) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{A})).$$

Iš šio teiginio gauname, kad bet kuriai funkcijai $f : \mathbb{S} \to \mathbb{V}$, aibių šeima $f^{-1}(\mathcal{V})$ yra $\sigma$ algebra. Ji vadinama atvaizdžio $f$ generuota $\sigma$ algebra ir dažnai žymima $\sigma_f$ arba $\sigma(f)$. Tai mažiausia $\sigma$ algebra, kurios atžvilgiu yra mati funkcija $f$.

1.6 teiginio įrodyme pasiremsime funkcijos pirmavaizdžio savybėmis. Jos surinkos šioje lemoje, kurios įrodymą paliekame vietoj pratimo.

***1.1 lema.*** *Bet kuriai funkcijai $f : \mathbb{S} \to \mathbb{T}$, teisingos šios savybės:*

$(a)$ $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$;

$(b)$ $f^{-1}(\mathbb{T}) = \mathbb{S}$;

$(c)$ $f^{-1}(A^c) = \big(f^{-1}(A)\big)^c$;

$(d)$ $f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i)$;

$(e)$ $f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(A_i)$;

*1.6 teiginio įrodymas.* Pirmiausia, pritaikę 1.1 lemą įsitikinkime, kad $f^{-1}(\sigma(\mathcal{A}))$ yra $\sigma$ algebra. Be to, $f^{-1}(\mathcal{A}) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{A}))$. Taigi

$$\sigma\big(f^{-1}(\mathcal{A})\big) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{A})).$$

Nagrinėkime

$$\mathcal{A}' := \{A' \subset \mathbb{T} : f^{-1}(A') \in \sigma\big(f^{-1}(\mathcal{A})\big)\}.$$

Pastebėkime, kad $\mathcal{A}'$ yra $\sigma$ algebra ir, be to, $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$. Todėl ir $\mathcal{A}' \subset \sigma(\mathcal{A})$. Taigi

$$f^{-1}(\sigma(\mathcal{A})) \subset f^{-1}(\mathcal{A}') \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{A})).$$

Tai užbaigia įrodymą. ∎

Šis teiginys palengvina funkcijos matumo tikrinimą.

***1.7 teiginys.*** *Jei $\mathcal{A}$ yra tokia aibės $\mathbb{T}$ poaibių klasė, kad $\mathcal{T} = \sigma(\mathcal{A})$ ir*

$$f^{-1}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{S},$$

*tai funkcija $f : \mathbb{S} \to \mathbb{T}$ yra $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-mati.*

*Įrodymas.* Kadangi

$$f^{-1}(\mathcal{T}) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{A})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{A})) \subset \mathcal{S},$$

nes $f^{-1}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{S}$ ir $\mathcal{S}$ yra $\sigma$ algebra. ∎

## Realios ir skaitinės mačios funkcijos

Plačiau aptarsime realias mačias funkcijas. Tegu $(\mathbb{S}, \mathcal{S})$ yra bet kuri mati erdvė. Jei nepasakyta kitaip, realiųjų skaičių aibėje $\mathbb{R}$ nagrinėsime Borelio $\sigma$ algebrą $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Funkcija $f : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ yra mati, jei $f^{-1}(B) \in \mathcal{S}$ su kiekviena Borelio aibe $B \subset \mathbb{R}$. Kadangi Borelio $\sigma$ algebrą generuoja aibės pavidalo $(a, +\infty), a \in \mathbb{R}$ (žr. 1.12 pratimą), tai teisingas šis teiginys.

***1.8 teiginys.*** *Funkcija $f : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ yra $(\mathcal{S}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$-mati tada ir tik tada, kai*

$$f^{-1}((a, \infty)) \in \mathcal{S}, \quad \text{su visais} \quad a \in \mathbb{R}.$$

*Be to, aibę $(a, \infty)$ galime pakeisti bet kuria iš aibių $(-\infty, a), (-\infty, a], [a, \infty)$.*

***1.4 pavyzdys.*** Nagrinėkime indikatorinę funkciją $\mathbf{1}_A : \mathbb{S} \to \mathbb{R},\ A \subset \mathbb{S}$. Tegu $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Tuomet

$$\mathbf{1}_A^{-1}(B) = \begin{cases} \mathbb{S}, & \text{jei} \quad 0, 1 \in B \\ \emptyset, & \text{jei} \quad 0, 1 \in B^c \\ A, & \text{jei} \quad 1 \in B, 0 \in B^c \\ A^c, & \text{jei} \quad 0 \in B, 1 \in B^c. \end{cases}$$

Taigi $\mathbf{1}_A^{-1}(B) \in \mathcal{S}$ su bet kuria $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, jei tik $A \in \mathcal{S}$. Vadinasi, $\mathbf{1}_A$ yra mati funkcija tada ir tik tada, kai $A \in \mathcal{S}$.

***1.12 apibrėžimas.*** *Poromis nesikertančių mačių aibių rinkinys $\{A_1, \dots, A_n\} \subset \mathcal{S}$ vadinamas aibės $\mathbb{S}$ skaidiniu, jei $\mathbb{S} = \sum_{k=1}^n A_k$. Funkcija $f : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ vadinama laiptine, jei*

$$f = \sum_{k=1}^n x_k \mathbf{1}_{A_k};$$

*čia $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, o $\{A_1, \dots, A_n\}$ yra aibės $\mathbb{S}$ skaidinys. Jei $x_1, \dots, x_n \geq 0$, tuomet $f$ vadinama neneigiama laiptine funkcija.*

***1.9 teiginys.*** *Laiptinės funkcijos yra mačios.*

*Įrodymas.* Tegu $f = \sum_{k=1}^n x_k \mathbf{1}_{A_k}$; čia $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, $\{A_1, \dots, A_n\} \subset \mathcal{S}$ yra aibės $\mathbb{S}$ skaidinys. Tuomet

$$\begin{aligned} f^{-1}((a, \infty]) = \{x \in \mathbb{S} : f(x) > a\} &= \bigcup_{k=1}^n \{x \in A_k : f(x) > a\} \\ &= \bigcup_{k=1}^n \{x \in A_k : x_k > a\}. \end{aligned}$$

Kadangi

$$\{x \in A_k : x_k > a\} = \begin{cases} A_k, & \text{jeigu} \quad x_k > a \\ \emptyset & \text{priešingu atveju}, \end{cases}$$

tai $f^{-1}((a, \infty])$ yra mačių aibių sąjunga, todėl yra mati aibė. ■

*1.10* ***teiginys.*** *Tarkime, $f, g : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ yra mačios funkcijos, $a, b \in \mathbb{R}$. Tuomet yra teisingi šie teiginiai:*

*(a) funkcijos $f + c$ ir $cf$ yra mačios su bet kuriuo $c \in \mathbb{R}$;*

*(b) su bet kuriais $a, b \in \mathbb{R}$ funkcija $af + bg$ yra mati;*

*(b) funkcija $fg$ yra mati;*

*(d) savo apibrėžimo srityje funkcija $f/g$ yra mati;*

*(e) funkcijos $\max\{f, g\}$ ir $\min\{f, g\}$ yra mačios;*

*(f) funkcija $|f|$ yra mati.*

*Įrodymas.* (a) Kadangi $\{x : f(x) + c > a\} = \{x : f(x) > a - c\} = f^{-1}(a - c, \infty) \in \mathcal{S}$, nes $f$ yra mati. Jei $c = 0$, tuomet

$$\{x : cf(x) > a\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{kai} \quad a \geq 0 \\ \mathbb{S}, & \text{kai} \quad a < 0. \end{cases}$$

Taigi $\{x : cf(x) > a\} \in \mathcal{S}$, kai $c = 0$. Jei $c > 0$, tuomet $\{x : cf(x) > a\} = f^{-1}((a/c, \infty)) \in \mathcal{S}$. Galiausiai, jei $c < 0$, tuomet $\{x : cf(x) > a\} = f^{-1}((-\infty, a/c)) \in \mathcal{S}$, nes $f$ yra mati.

(b) Pakanka įrodyti, kad funkcija $f + g$ yra mati. Turime

$$\{x \in \mathbb{S} : f(x) + g(x) > a\} = A^c \cap \{x \in \mathbb{S} : f(x) > a - g(x)\}.$$

Pasinaudosime tuom, kad realiesiems skaičiams $c, d$ nelygybė $c > d$ teisinga tada ir tik tada, kai egzistuoja toks racionalus skaičius $r$, kad $c > r > d$. Todėl

$$\{x \in \mathbb{S} : f(x) > a - g(x)\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \Big[\{x \in \mathbb{S} : f(x) > r\} \cap \{x \in \mathbb{S} : r > a - g(x)\}.$$

Iš čia matyti, kad aibė $\{x \in \mathbb{S} : f(x) > a - g(x)\} \in \mathcal{S}$, taigi ir $\{x \in \mathbb{S} \setminus A : f(x) + g(x) > a\} \in \mathcal{S}$.

(c) Pirmiausia pastebėkime, kad bet kurios mačios funkcijos $f$ kvadratas $f^2$ yra mati funkcija. Tikrai, jei $a \leq 0$, tuomet $(f^2)^{-1}((a, \infty)) = \mathbb{S}$. Jei $a > 0$, tuomet $(f^2)^{-1}((a, \infty)) = f^{-1}((\sqrt{a}, \infty)) \cup f^{-1}((-\infty, -\sqrt{a})) \in \mathcal{S}$. Toliau pastebėkime, kad $fg = 2^{-1}((f + g)^2 - f^2 - g^2)$. Taigi $fg$ yra mati.

(d) Pakanka įrodyti, kad funkcija $1/g$ yra mati. Ji apibrėžta aibėje $B^c$, kai $B = \{x \in \mathbb{S} : g(x) = 0\}$. Tegu $a > 0$. Tuomet

$$\{x \in B^c : 1/g(x) > a\} = \{x \in B^c : 0 \leq g(x) < 1/c\} = \{x \in \mathbb{S} : 0 < g(x) < 1/c\} \in \mathcal{S}.$$

Jei $a \leq 0$, tuomet

$$\begin{aligned} \{x \in B^c : 1/g(x) > a\} &= \{x \in B^c : 0 \leq g(x)\} \cup \{x \in B^c : g(x) < 1/a\} \\ &= \{x \in \mathbb{S} : 0 < g(x)\} \cup \{x \in \mathcal{S} : g(x) < 1/a\} \in \mathcal{S}. \end{aligned}$$

(e) Pakanka pastebėti, kad

$$\{x : \max\{f(x), g(x)\} > a\} = \{x : f(x) > a\} \cup \{x : g(x) > a\}$$
$$\{x : \min\{f(x), g(x)\} > a\} = \{x : f(x) > a\} \cap \{x : g(x) > a\}.$$

(f) Funkcijos $f^* = \max\{f, 0\}$ ir $f^- = -\min\{f, 0\}$ yra mačios, kaip ką tik įsitikinome. Taigi ir funkcija $|f| = f^+ + f^-$ yra mati. ∎

## Mačių funkcijų sekų ribos

Tegu $f_n : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ yra mačių funkcijų seka. Pataškiui apibrėžta funkcija $\sup_{n\to\infty} f_n$ reiškia, kad $(\sup_{n\to\infty} f_n)(x) = \sup_{n\to\infty} f_n(x), x \in \mathbb{S}$. Analogiškai pataškiui apibrėžiamos ir kitos sekos $(f_n)$ funkcijos.

***1.11 teiginys.*** *Tarkime, $f, f_n : \mathbb{S} \to \mathbb{R}, n \geq 1$ yra mačios funkcijos. Tuomet*

*(a) funkcijos $\inf f_n$, $\sup f_n$ yra mačios;*

*(b) funkcijos $\liminf f_n$, $\limsup f_n$ yra mačios;*

*(c) aibė $\{x : \lim f_n(x) \quad \text{egzistuoja}\}$ yra mati;*

*(d) aibėje $\{x : \lim f_n(x) \quad \text{egzistuoja}\}$ apibrėžta funkcija $x \to \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ yra mati.*

*Įrodymas.* (a) Tegu $g(x) = \sup_n f_n(x), x \in \mathbb{S}$. Tuomet

$$\{x : g(x) \leq a\} = \bigcap_n \{x : f_n(x) \leq a\}, \quad a \in \mathbb{R},$$
$$\{x : g(x) = +\infty\} = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_n \{x : f_n(x) > N\}$$
$$\{x : g(x) = -\infty\} = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_n \{x : f_n(x) < -N\}.$$

Kadangi kiekviena aibė dešinėje lygybių pusėje priklauso $\mathcal{S}$, tai kairėje pusėje esančios aibės tai pat priklauso $\sigma$ algebrai $\mathcal{S}$. Taigi $g$ yra mati funkcija. Kadangi $\inf_n f_n(x) = -\sup_n(-f_n(x))$, tai funkcija $\inf_n f_n$ taip pat mati.

(b) Pastebėję, kad

$$\liminf_{n\to\infty} f_n = \sup_{n\geq 1}(\inf_{k\geq n} f_k) \quad \text{ir} \limsup_{n\to\infty} f_n = \inf_{n\geq 1}(\sup_{k\geq n} f_k),$$

rezultatą išvedame iš (a).

(c) Turime

$$\{x : \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \text{egzistuoja}\} = \{x : \liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x)\}.$$

(d) Pažymėkime $A = \{x : \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \text{egzistuoja}\}$. Kadangi aibėje $A$ teisinga lygybė $\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, tai

$$\{x \in A : \lim_{n\to\infty} f_n(x) > a\} = \{x \in A : \liminf_{n\to\infty} f_n(x) > a\}$$
$$= A \cap \{x \in X : \liminf_{n\to\infty} f_n(x) > a\} \in \mathcal{S},$$

nes funkcija $\lim_{n\to\infty} f_n$ yra apibrėžta visoje aibėje $\mathbb{S}$ ir yra mati. Teiginys pilnai įrodytas. ■

Taigi mačiųjų funkcijų pataškė riba, kai ji egzistuoja, yra mati funkcija. Čia verta pastebėti, kad tolydžiųjų funkcijų sekos riba nebūtinai tolydi funkcija. Pavyzdžiu gali būti seka $f_n(t) = t^n, t \in [0, 1]$. Jos pataškė riba yra

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{kai} \quad t \neq 1 \\ 1, & \text{kai} \quad t = 1. \end{cases}$$

***1.13* apibrėžimas.** *Mačių funkcijų seka $(f_n)$ konverguoja prie mačios funkcijos $f$ tolygiai, jei*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{S}} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

***1.14* apibrėžimas.** *Mačių funkcijų seka $(f_n)$ konverguoja prie mačios funkcijos $f$ beveik tikrai mato $\mu$ atžvilgiu ($\mu$-b. t.) jei egzistuoja tokia mati aibė $N$, kad $\mu(N) = 0$ ir*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

*su visais $x \in N^c$.*

***1.15* apibrėžimas.** *Mačių funkcijų seka $(f_n)$ konverguoja prie mačios funkcijos $f$ pagal matą $\mu$, jei su kiekvienu $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(x : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon) = 0.$$

Taigi turime keturis mačių funkcijų sekos konvergavimo tipus: pataškis, pataškis tolygus, pagal matą ir beveik tikrai mato atžvilgiu. Panagrinėkime 6iuos konvergavimus indikatorinių funkcijų pavyzdžiu. Tegu $(\mathbb{S}, \mathcal{S}, \mu)$ yra erdvė su matu, $(A_n) \subset \mathcal{S}$ - mačių aibių seka, $A \in cS$. Apibrėžkime

$$f_n(x) = \mathbf{1}_{A_n}(x), \quad x \in \mathbb{S}, \quad n \geq 1$$

ir $f(x) = \mathbf{1}_A(x), x \in \mathbb{S}$. Kadangi $\sup_{x\in\mathbb{S}} |\mathbf{1}_A(x) - \mathbf{1}_B(x)| = 1$, jei $A \neq B$, tai seka $(f_n)$ konverguos tolygiai vieninteliu atveju, kai $A_n = A$ su visais $n \geq 1$. Pataškiui seka konverguos prie funkcijos $f = \mathbf{1}_A$ tada ir tik tada, kai

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_n \bigcup_{m\geq n} A_m = \liminf_{n\to\infty} = \bigcup_n \bigcap_{m\geq n} A_m = A$$

(žr. 1.22 pratimą). Seka $f_n \to f$ pagal matą tada ir tik tada, kai

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n \Delta A) = 0.$$

Taigi $f_n \to 0$ pagal matą tada ir tik tada, kai $\mu(A_n) \to 0$, nes $0 =_{\emptyset}$ .

***1.12 teiginys.*** *Funkcija $f : \mathbb{S} \to \overline{\mathbb{R}}$ yra neneigiama mati funkcija. Tuomet egzistuoja tokia neneigiamų laiptinių funkcijų seka $(f_n)$, kad $f_n \leq f$ su visais $n$ ir*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \textit{su visais} \quad x \in \mathbb{S}.$$

*Įrodymas.* Kiekvienam $n$ apibrėžkime $A_{n,k} = f^{-1}((k/n,(k+1)/n])$, kai $k = 1, \dots, n^2 - 1$ ir $A_{n,0} = f^{-1}([0, 1/n] \cup (n, \infty))$. Be to, tegu $A_\infty = f^{-1}(\{\infty\})$. Apibrėžkime

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n^2-1} k\mathbf{1}_{A_{n,k}}(x) + n\mathbf{1}_{A_\infty}(x), \quad x \in \mathbb{S}.$$

Užbaigti teiginio įrodymą paliekame vietoj pratimo. ■

## 1.4 Mačių realiųjų funkcijų integravimas

### Apibrėžimai ir paprasčiausios savybės

Tegu $(\mathbb{S}, \mathcal{S}, \mu)$ yra erdvė su matu. Nagrinėsime mačias funkcijas $f, g, \dots : (\mathbb{S}, \mathcal{S}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$. Joms apibrėšime ingeralą atžvilgiu mato $\mu$. Tai daroma trimis žingsniais. Pirmuoju apibrėžiamas laiptinės funkcijos integralas, antruoju - neneigiamos mačios funkcijos ir, galiausiai – bet kurios mačios funkcijos integralas. Mato ir integralo teorijoje sutariama, kad $0 \cdot \infty = 0$.

***1.16 apibrėžimas.*** *Neneigiamos laiptinės funkcijos $f = \sum_{k=1}^n x_k\mathbf{1}_{A_k}$ ($x_k \in [0,\infty], k = 1, \dots, n$) (Lebego) integralas aibėje $E \in \mathcal{S}$ yra*

$$\int_E f d\mu := \sum_{k=1}^n x_k\mu(A_k \cap E).$$

Pirmiausia reikėtų įsitikinti, kad integralo reikšmė nepriklauso nuo laiptinės funkcijos reprezentacijos, t.y., jei $f = \sum_{k=1}^m y_k\mathbf{1}_{B_k}$, tai

$$\sum_{k=1}^n x_k\mu(A_k \cap E) = \sum_{k=1}^m y_k\mu(B_k \cap E).$$

Tai paliekame vietoj pratimo. Iš integralo apibrėžimo iškart matyti, kad funkcija $E \to \int_E f\,\mathrm{d}\mu : \mathbb{S} \to [0, \infty]$ yra neneigiama ir skaičiai adityvi.

***1.17 apibrėžimas.*** *Jei mati funkcija $f \geq 0$, tai jos (Lebego) integralas aibėje $E \in \mathcal{S}$ yra*

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu := \sup\Big\{\int_E g\,\mathrm{d}\mu : \quad g \geq 0, \ g \textit{ yra laiptinė funkcija ir } g \leq f \textit{ aibėje } E\Big\}.$$

Norėdami apibrėžti integralą bet kuriai mačiai funkcijai $f$, pažymėkime

$$f^+ = \max\{f, 0\}, \quad f^- = \max\{-f, 0\}.$$

Funkcijos $f^+$, $f^-$, kurios vadinamos atitinkamai teigiama ir neigiama funkcijos $f$ dalimi, yra mačios (žr. 1.10 teiginį ) ir

$$f = f^+ - f^-, \quad |f| = f^+ + f^-.$$

***1.18 apibrėžimas.*** *Funkcija $f$ vadinama integruojama aibėje $E \in \mathcal{S}$, jei integralas $\int_E |f| \, \mathrm{d}\mu$ yra baigtinis. Šiuo atveju, funkcijos $f$ integralas aibėje $E$ yra*

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \int_E f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int_E f^- \, \mathrm{d}\mu.$$

***1.13 teiginys.*** *Jei mačios funkcijos $f, g$ aibėje $E$ yra lygios beveik visur mato $\mu$ atžvilgiu, t.y. $\mu(s \in E : f(s) \neq g(s)) = 0$, tai*

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \int_E g \, \mathrm{d}\mu.$$

*Įrodymas.* Paliekamas vietoj pratimo. ■

Integralą $\int_{\mathbb{S}} f \, \mathrm{d}\mu$ toliau žymėsime trumpiau – $\int f \, \mathrm{d}\mu$. Jei $\mu$ yra tikimybinis matas, dažnai $\int f \, \mathrm{d}\mu$ žymimas $Ef$ ir vadinamas funkcijos $f$ vidurkiu.

***1.14 teiginys.*** *Jei $f$ yra neneigiama mati funkcija, tai atvaizdis*

$$E \to \int_E f \, \mathrm{d}\mu, \quad E \in \mathbb{S}, \tag{1.11}$$

*yra neneigiama monotoninė nemažėjanti ir skaičiai adityvi funkcija.*

*Įrodymas.* Kad (1.11) formule apibrėžta funkcija yra nemažėjanti, gauname tiesiog iš apibrėžimo. Tegu $(E_n)$ yra mačių aibių seka ir $E = \bigcup_n E_n$. Bet kuriai neneigiamai laiptinei funkcijai $g \leq f$, remiantis integralo apibrėžimu,

$$\int_E g \, \mathrm{d}\mu \leq \sum_n \int_{E_n} g \, \mathrm{d}\mu \leq \sum_n \int_{E_n} f \, \mathrm{d}\mu.$$

Nagrinėdami kairiosios pusės tikslųjį viršutinį rėžį atžvilgių visų neneigiamų laiptinių funkcijų $g \leq f$, gauname

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu \leq \sum_n \int_{E_n} f \, \mathrm{d}\mu.$$

Norėdami įrodyti skaitų adytivumą, pakanka įsitikinti, kad

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu \geq \sum_n \int_{E_n} f \, \mathrm{d}\mu, \tag{1.12}$$

kai $E_i \cap E_j = \emptyset$, $i \neq j$. Nagrinėkime dvi nesikertančias aibes $E_1, E_2 \in \mathcal{S}$. Kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka tokios dvi laiptinės funkcijas $g_1, g_2$, kad $g_i \leq f$ aibėje $E_i$, $i = 1, 2$ ir

$$\int_{E_i} f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_{E_i} g_i \, \mathrm{d}\mu + \varepsilon/2. \tag{1.13}$$

Apibrėžkime

$$g(s) = \begin{cases} g_1(s), & \text{kai} \quad s \in E_1, \\ g_2(s), & \text{kai} \quad s \in E_2, \\ 0, & \text{kai} \quad s \in (E_1 \cup E_2)^c. \end{cases}$$

Funkcja $g$ yra neneigiama ir $g \leq f$ aibėje $E_1 \cup E_2$. Sudėję (1.13) nelygybes kai $i = 1, 2$, gauname

$$\begin{aligned} \int_{E_1} f \, \mathrm{d}\mu + \int_{E_2} f \, \mathrm{d}\mu &\leq \varepsilon + \int_{E_1} g \, \mathrm{d}\mu + \int_{E_2} g \, \mathrm{d}\mu \\ &= \varepsilon + \int_{E_1 \cup E_2} g \, \mathrm{d}\mu \\ &\leq \varepsilon + \int_{E_1 \cup E_2} f \, \mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$

Kadangi $\varepsilon > 0$ laisvai pasirenkamas skaičius ir funkcija $E \to \int_E f \, \mathrm{d}\mu$ pusiauadityvi, tai

$$\int_{E_1 \cup E_2} f \, \mathrm{d}\mu = \int_{E_1} f \, \mathrm{d}\mu + \int_{E_2} f \, \mathrm{d}\mu.$$

Remiantis šia lygybe ir integralo, kaip aibės funkcijos monotoniškumu, gauname

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu \geq \int_{A_1 \cup \cdots \cup E_n} d \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} f \, \mathrm{d}\mu$$

. Perėję prie ribis, kai $n \to \infty$, įsitikiname, kad (1.12) nelygybė yra teisinga. Teiginys pilnai įrodytas. ■

## Lebego teoremos

***1.7 teorema.*** ***( Lebego teorema apie monotoninį konvergavimą )*** *Tegu* $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f_n \leq \cdots$ *yra mačių funkcijų seka ir* $\lim_n f_n(t) = f(t)$ *su visais* $t \in \mathbb{S}$. *Tuomet*

$$\lim_{n \to \infty} \int_E f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_E f \, \mathrm{d}\mu \tag{1.14}$$

*bet kuriai* $E \in \mathcal{S}$.

*Įrodymas.* Kairę (1.14) lygybės pusę pažymėkime $v$. Kadangi $f_n \leq f$ su visais $n \geq 1$, tai

$$v \leq \int_E f \, \mathrm{d}\mu. \tag{1.15}$$

Tegu laiptinė funkcija $g \le f$ aibėje $E$. Imdami skaičių $c \in (0,1)$, apibrėžkime aibes

$$E_n = \{x : x \in E, 0 \le cg(x) \le f_n(x)\}.$$

Seka $(E_n)$ yra nemažėjanti ir konverguoja į $E$. Todėl

$$\int_E f_n \,\mathrm{d}\mu \ge \int_{E_n} f_n \,\mathrm{d}\mu \ge c \int_{E_n} g \,\mathrm{d}\mu.$$

Perėję prie ribos, kai $n \to \infty$ ir, pritaikę ką tik įrodytą 1.4 teiginį, gauname $v \ge c\int_E g \,\mathrm{d}\mu$. Imdami tikslųjį viršutinį rėžį pagal neneigiamas laiptines funkcijas $g \le f$ ir perėję prie ribos, kai $c \to 1$, gauname $v \ge \int_E f \,\mathrm{d}\mu$. Ši nelygybė, kartu su (1.15), įrodo (1.14). ■

## Integralo savybės

Įrodysime, kad integravimas yra tiesinė operacija.

***1.15 teiginys.*** *Jei mačios funkcijos $f_1, f_2$ yra integruojamos aibėje $E \in \mathcal{S}$, tai su bet kuriais $a, b \in \mathbb{R}$, funkcija $af_1 + bf_2$ yra integruojama aibėje $E$ ir*

$$\int_E (af_1 + bf_2) \,\mathrm{d}\mu = a\int_E f_i \,\mathrm{d}\mu + b\int_E f_2 \,\mathrm{d}\mu.$$

*Įrodymas.* Paliekame vietoj pratimo įrodyti, kad teiginys yra teisingas laiptinėms funkcijoms. Tarkime, $f_1, f_2$ yra neneigiamos mačios funkcijos. Egzistuoja tokios dvi laiptinių funkcijų sekos $(g_{1n})$ ir $(g_{2n})$ kurios monotoniškai didėja ir konverguoja į atitinkamai $f_1$ ir $f_2$. Suma $(g_{1n}+g_{2n})$ yra nemažėjanti laiptinių funkcijų seka ir konverguoja į sumą $f_1 + f_2$. Pritaikę 1.7 teoremą, gauname

$$\begin{aligned}
\int_E (f_1 + f_2) \,\mathrm{d}\mu &= \lim_{n\to\infty} \int_E (g_{1n} + g_{2n}) \,\mathrm{d}\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_E g_{1n} \,\mathrm{d}\mu + \lim_{n\to\infty} \int_E g_{1n} \,\mathrm{d}\mu \\
&= \int_E f_1 \,\mathrm{d}\mu + \int_E f_2 \,\mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

■

***1.16 teiginys.*** *Neneigiamos mačios funkcijos $f$ integralas $\int_E f \,\mathrm{d}\mu = 0$ tada ir tik tada, kai $\mu(x \in E : f(x) \ne 0) = 0$.*

*Įrodymas.* Tarkime, kad $\int_E f \,\mathrm{d}\mu = 0$, bet $\mu(x \in E : f(x) \ne 0) = \alpha > 0$. Tuomet egzistuoja tokia konstanta $c > 0$ ir tokia aibė $A \subset E$, kad $\mu(A) > 0$ ir $f(s) \ge c$ su visais $s \in A$. Tokiu atveju,

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu \ge \int_A f \,\mathrm{d}\mu \ge c\int_A 1 \,\mathrm{d}\mu = c\mu(A) > 0.$$

Taigi būtinumas įrodytas. Pakankamumą paliekame skaitytojui vietoj pratimo. ■

Kai kurios kitos integralo savybės surinktos šiame pratime.

***1.17* teiginys.** *Integralo pasižymi šiomis savybėmis:*

$(a)$ *Jei* $\mu(t\colon f(t) > g(t)) = 0$, *tai*

$$\int\limits_{\mathbb{S}} f(t)\mu(\,\mathrm{d}t) \geq \int\limits_{\mathbb{S}} g(t)\mu(\,\mathrm{d}t);$$

$(b)$ *Jei yra integruojama funkcija $f$ tai integruojama ir funkcija $|f|$ ir, be to,*

$$\left|\int\limits_{\mathbb{S}} f(t)\mu(\,\mathrm{d}t)\right| \leq \int\limits_{\mathbb{S}} |f(t)|\mu(\,\mathrm{d}t);$$

$(c)$ *Jei $f$ yra integruojama funkcija, $a, b \in \mathbb{R}$ ir $E$ – tokia mati aibė, kad $a \leq f(t) \leq b$ su visais $t \in E$, tai*

$$a\mu(E) \leq \int\limits_{\mathbb{S}} f(t)\mathbf{1}_E\mu(\,\mathrm{d}t) \leq b\mu(E);$$

$(d)$ *Atvaizdis*

$$E \to \int_E f d\mu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$$

*yra $\sigma$-adityvus.*

*Įrodymas.* Paliekamas vietoj pratimo. ∎

## Integralų ribos

Perėjimą prie ribos po integralo ženklu nustato trys žemiau suformuluoti rezultatai: Lebego teorema apie mažoruojamą konvergavimą, B. Levy teorema apie monotoninį konvergavimą ir Fatu lema. Sakysime, kad seka $(f_n)$ *konverguoja prie $f$ pagal matą $\mu$*, jei su kiekvienu $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mu(t\colon |f_n(t) - f(t)| > \varepsilon) = 0.$$

Seka $(f_n)$ konverguoja į funkciją $f$ $\mu$ beveik visur, jei

$$\mu(t\colon f_n(t) \not\to f(t)) = 0.$$

***1.8* teorema.** *Tarkime, integruojamų funkcijų seka $(f_n)$ konverguoja pagal matą $\mu$ į funkciją $f$ ir egzistuoja tokia integruojama funkcija $g$, su kuria $|f_n(t)| \leq g$ beveik visiems $t \in \mathbb{S}$ ($n \in \mathbb{N}$.) Tuomet*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{S}} f_n(t)\mu(\,\mathrm{d}t) = \int\limits_{\mathbb{S}} f(t)\mu(\,\mathrm{d}t). \tag{1.16}$$

*Įrodymas.* Pereidami, jei reikia, prie posekių, galime tarti, kad seka $(f_n)$ konverguoja prie $f$ pataškiui. Be to, galime tarti, kad $|f_n(t)| \leq g(t)$ kiekvienai argumento reikšmei $t$. Tuomet su visais $t$

$$g(t) - f_n(t) \geq 0, \quad g(t) + f_n(t) \geq 0.$$

Remiantis Fatu lema

$$\liminf_{n\to\infty} \int (g - f_n)\, \mathrm{d}\mu \geq \int \liminf_{n\to\infty} (g - f_n)\, \mathrm{d}\mu = \int (g - f)\, \mathrm{d}\mu.$$

Kairėje šios lygybės pusįėje esantys dydis yra lygus $\int g\, \mathrm{d}\mu - \liminf_{n\to\infty} \int f_n\, \mathrm{d}\mu$. Kadangi funkcija $g$ yra integruojama ir $|f| \leq g, |f_n| \leq g$, tai $f_n$ ir $f$ taip pat integruojamos, todėl

$$\liminf_{n\to\infty} \int f_n\, \mathrm{d}\mu \leq \int f\, \mathrm{d}\mu.$$

Atlikę analogiškus veiksmus su seka $(g + f_n)$, gauname

$$\liminf_{n\to\infty} \int f_n\, \mathrm{d}\mu \geq \int f\, \mathrm{d}\mu.$$

Iš pastarųjų dviejų nelygybių gauname (1.16). ∎

***1.9 teorema.*** *Tarkime $(f_n)$ yra tokia mačių funkcijų seka, kad $f_n(t) \geqslant 0$ beveik visiems $t \in \mathbb{S}$, $f_n(t) \leqslant f_m(t)$ su visais $t \in \mathbb{S}$, kai $n \leqslant m$ ir $\lim_n f_n(t) = f(t)$ visiems $t \in \mathbb{S}$. Tuomet galioja (1.16) sąryšis.*

***1.2 lema.*** *Tarkime, $(f_n)$ yra neneigiamų integruojamų funkcijų seka. Jei*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} f_n(t)\mu(\,\mathrm{d}t) < \infty,$$

*tai funkcija $f(t) = \liminf_{n\to\infty} f_n(t), \ \ t \in \mathbb{S}$, yra integruojama ir*

$$\int_{\mathbb{S}} f(t)\mu(\,\mathrm{d}t) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} f_n(t)\mu(\,\mathrm{d}t).$$

*Įrodymas.* Apibrėžkime $g_n(s) = \inf\{f_i(s), i \geq n\}, s \in \mathbb{S}$. Tuomet seka $(g_n)$ monotoniškai nemažėja ir konverguoja į $\liminf_n f_n$. Remiantis teorema apie monotoninį konvergavimą

$$\liminf_n \int_E g_n\, \mathrm{d}\mu = \int_E (\liminf_n f_n)\, \mathrm{d}\mu.$$

Kadangi $g_n \leq f_n$ su visais $n$, tai $\int_E g_n\, \mathrm{d}\mu \leq \int_E f_n\, \mathrm{d}\mu$ su visais $n$. ∎

### Integravimo kintamųjų keitimas

Kintamųjų keitimo integrale taisyklę nustato ši teorema.

***1.10*** **teorema.** *Tarkime, $(\mathbb{S}_1, \mathcal{S}_1, \mu_1)$ yra kita erdvė su matu, $T\colon \mathbb{S}_1 \to \mathbb{S}$ – matus atvaizdis. Be to, tarkime $\mu_1$ yra toks $\sigma$ baigtinis matas, kad matas $\mu_1 \circ T^{-1}$ taip pat $\sigma$ baigtinis. Tuomet su bet kuria mačia funkcija $f$ ir bet kuria mačia aibe $F$*

$$\int\limits_{T^{-1}(F)} f \circ T \,\mathrm{d}\mu_1 = \int\limits_{F} f \,\mathrm{d}\mu_1 \circ T^{-1}.$$

*Matas $\mu_1 \circ T^{-1}(A) = \mu_1(T^{-1}(A))$, $A \in \mathcal{T}$.*

*Įrodymas.* Pirmausia imkime funkciją $f = \mathbf{1}_A$. Tuomet

$$\begin{aligned}\int_F \mathbf{1}_A \,\mathrm{d}\mu \circ T^{-1} &= \mu \circ T^{-1}(B \cap F) = \mu(T^{-1}(B) \cap T^{-1}(F)) \\ &= \int_{T^{-1}(F)} \mathbf{1}_{T^{-1}(B)} \,\mathrm{d}\mu = \int_{T^{-1}(F)} \mathbf{1}_B \circ T \,\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

Taigi formulė teisinga, kai $f$ indikatorinė funkcija. Kadangi laiptinės funkcijos yra tiesinė kombinacija indikatorinių, tai formulė išlieka teisinga ir bet kuriai laiptinei funkcijai. Toliau tarkime, $f$ yra neneigiama mati funkcija. Tuomet egzistuoja tokia laiptinių funkcijų seka $(g_n)$, kuri monotoniškai didėja ir konverguoja į $f$. Be to, $(g_n \circ T)$ taip pat yra monotoniškai didėjanti laiptinių funkcijų seka, kuri konverguoja į $f \circ T$. Lieka pritaikyti teoremą apie monotoninį konvergavimą. Bendras mačios funkcijos atvejis susiveda į išnagrinėtą pritaikius lygybę $|f \circ T| = |f| \circ T$. ■

***1.18*** **teiginys.** *Tegu $(f_n)$ yra neneigiamų mačių funkcijų seka, kuri konverguoja prie $f$ pagal matą. Jei $f_n$ ir $f$ integruojamos ir $\int f_n \,\mathrm{d}\mu \to \int f \,\mathrm{d}\mu$, tai*

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

## 1.5 Pratimai

***1.1*** **pratimas.** Raskite $\bigcup_{x\in[0,1]}[x, 2]$ ir $\bigcap_{x\in[0,1]}[x, 2]$.

***1.2*** **pratimas.** Tarkime, $\{A_i, i \in I\}$ yra kurios nors aibės poaibių šeima. Įrodykite De Morgano (1.1) tapatybes.

***1.3*** **pratimas.** Nustatykite, kurie iš pateiktų binarinių sąryšių $\sim$ yra ekvivalentumo ir jiems aprašykite ekvivalentumo klases:

(a) Aibėje $\mathbb{R}$ sąryšis $x \sim y$ reiškia, kad $|x - y| < 1.$;

(b) Aibėje $\mathbb{R}^2$ sąryšis $x \sim y$ reiškia, kad taškai $x$ ir $y$ yra vienoje tiesėje, einančioje per koordinačių pradžią;

(c) Aibėje $\mathbb{R}^2$ sąryšis $x \sim y$ reiškia, kad taškai $x = (x_1, x_2)$ ir $y = (y_1, y_2)$ tenkina $x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2$;

(d) Aibėje $2^{\mathbb{R}}$ sąryšis $A \sim B$ aibėms $A, B \subseteq \mathbb{R}$ reiškia, kad $A \cap B = \emptyset$;

(e) Funkcijų aibėje $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sąryšis $f \sim g$ reiškia, kad egzistuoja tokia konstanta $c$, kad $f(x) = g(x) + c, x \in \mathbb{R}$.

***1.4 pratimas.*** Apibrėžkime funkciją $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{Z}$:

$$f(x) = \begin{cases} x/2, & \text{jei } x \text{ yra lyginis} \\ -(x+1)/2, & \text{jei } x \text{ yra nelyginis.} \end{cases}$$

Įrodykite, kad funkcija $f$ yra bijekcija.

***1.5 pratimas.*** Patikrinkite šias lygybes:

(a) $\mathbf{1}_{A \triangle B} = |\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B|$.

(b) $\left\{x : \sum_n \mathbf{1}_{A_n}(x) < \infty\right\} = \bigcup_n \bigcap_{k \geq n} A_k^c$.

***1.6 pratimas.*** Įrodykite šiuos teiginius.

(1) Racionaliųjų skaičių aibė $\mathbb{Q}$ yra skaiti.

(2) Skaiti skaičių aibių sąjunga yra skaiti aibė.

(3) Bet kuris netuščias atviras realiųjų skaičių intervalas yra neskaiti aibė.

***1.7 pratimas.*** Įsitikinkite, kad visų galimų intervalo $[0, 1]$ pointervalių baigtinių sąjungų rinkinys yra algebra, bet nėra $\sigma$ algebra.

***1.8 pratimas.*** Imkime $\mathcal{A} \subset 2^{\mathbb{S}}$. Nagrinėkime aibių

$$B = \bigcup_{k=1}^{n} \bigcap_{i=1}^{m} B_{ki},$$

rinkinį, kai arba $B_{ki} \in \mathcal{A}$, arba $B_{ki}^c \in \mathcal{A}$. Pažymėkime jį $\mathcal{A}_0$. Įsitikinkite, kad šeima $\mathcal{A}_0$ ir yra mažiausia algebra, kuriai priklauso $\mathcal{A}$.

***1.9 pratimas.*** Tegu $\mathcal{A}, \mathcal{A}' \subset 2^{\mathbb{S}}$. Įrodykite šiuos sąryšius:

(a) Jei $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$, tai $\sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{A}')$;

(b) Jei $\mathcal{A} \subset \sigma(\mathcal{A}')$ tai $\sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{A}')$;

(c) Jei $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}' \subset \sigma(\mathcal{A})$, tai $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A}')$.

***1.10 pratimas.*** Įsitikinkite, kad $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathcal{A})$, kai $\mathcal{A}$ yra bet kuri iš šių šeimų:

$$\{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}, \quad \{(a,b) : a,b \in \mathbb{Q}\},$$
$$\{(-\infty,a) : a \in \mathbb{R}\}. \quad \{(-\infty,a) : a \in \mathbb{Q}\}.$$

***1.11 pratimas.*** Įrodykite, kad realiųjų skaičių aibės $\mathbb{R}$ bet kuri taškinė aibė $\{x\}$ yra Borelio.

***1.12 pratimas.*** Įsitikinkite, kad $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathcal{A})$, kai

(a) $\mathcal{A} = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$;

(b) $\mathcal{A} = \{(-\infty,a] : a \in \mathbb{R}\}$;

(c) $\mathcal{A} = \{(a,\infty) : a \in \mathbb{R}\}$.

***1.13 pratimas.*** Įsitikinkite, kad

$$\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} = \sigma(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \{-\infty\}, \{+\infty\})$$

***1.14 pratimas.*** Įsitikinkite, kad topologinės erdvės Borelio $\sigma$ algebra yra taip pat generuojama uždarųjų aibių šeima. Taigi tiek atviros tolologinės erdvės $\mathbb{S}$ aibės, tiek uždaros yra Borelio.

***1.15 pratimas.*** Įrodykite, kad atvirasis metrinės erdvės rutulys yra atvira aibė, o uždarasis - uždara.

***1.16 pratimas.*** Įsitikinkite, kad atvirųjų metrinės erdvės $(\mathbb{S}, d)$ aibių šeima $\tau_d$ sudaro topologiją. Ji vadinama natūraliaja metrinės erdvės topologija.

***1.17 pratimas.*** Patikrinkite metrikos aksiomas funkcijai

$$d(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}, \quad x,y \in \mathbb{R}.$$

Ar metrinės erdvės $(\mathbb{R}, d)$ topologija yra ekvivalenti Euklidinei?

***1.18 pratimas.*** Patikrinkite metrikos aksiomas funkcijoms $d_1, d_2, d_\infty$, apibrėžtoms **??** pavyzdyje. Įsitikinkite, kad jos aprašo ekvivalenčias erdvės $\mathbb{R}^m$ topologijas.

***1.19 pratimas.*** Tegu $\mathcal{F}$ yra aibės $\Omega$ poaibių $\sigma$ algebra, $B \subset \Omega$. Įsitikinkite, kad rinkinys $\mathcal{G} = \{A \cap B : A \in \mathcal{F}\}$ yra aibės $B$ poaibių $\sigma$ algebra.

Tegu $(\mathbb{S}, \mathcal{S})$ yra mati erdvė. Seka $(A_n) \subset \mathcal{S}$ yra

- monotoniškai didėjanti, jei $A_n \subseteq A_{n+1}$ su visais $n \geq 1$;
- monotoniškai mažėjanti, jei $A_n \supseteq A_{n+1}$ su visais $n \geq 1$.

Aibei

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{n=i}^{\infty} A_n$$

priklauso tik tie $s \in \mathbb{S}$, kurie priklauso begalo daugeliui $A_n$. Aibei

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcap_{n=i}^{\infty} A_n$$

priklauso tik tie $s \in \mathbb{S}$, kurie priklauso visoms aibėms $A_n$ išskyrus galbūt baigtinį jų skaičių. Jei $\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n$ tai tą aibę žymime $\lim_{n\to\infty} A_n$ ir vadiname aibių sekos $(A_n)$ riba.

***1.20 pratimas.*** Koks ryšys tarp $\limsup$ ir $\liminf$ apibrėžimų skaičių sekai $(x_n)$ ir aibių sekai $(A_n)$?

***1.21 pratimas.*** Apibrėžkime

$$A_n = \begin{cases} (-1/n, 1], & \text{kai } n \text{ nelyginis} \\ (-1, 1/n], & \text{kai } n \text{ lyginis.} \end{cases}$$

Raskite $\liminf_{n\to\infty} A_n$ ir $\limsup_{n\to\infty} A_n$.

***1.22 pratimas.*** Tegu $(A_n, n \in \mathbb{N})$ yra aibių seka. Įrodykite šiuos teiginius:

(a) $\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n$ tada ir tik tada, kai su kiekvienu $\omega \in \Omega$ egzistuoja riba $\lim_{n\to\infty} \mathbf{1}_{A_n}(\omega)$.

(b) Jei seka $(A_n)$ monotoniškai didėjanti, tai $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

(c) Jei seka $(A_n)$ monotoniškai mažėjanti, tai $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

***1.23 pratimas.*** Įrodykite 1.1 lemą.

***1.24 pratimas.*** Įrodykite, kad (1.5 formule aprašoma aibių sistema yra algebra, o (1.5 formule aprašoma funkcija - matas toje algebroje.

***1.25 pratimas.*** Įrodykite, kad funkcija $f : \mathbb{S} \to \overline{\mathbb{R}}$ yra mati tada ir tik tada, kai $f^{-1}((r, \infty]) \in \mathbb{S}$ su visais $r \in \mathbb{Q}$.

***1.26 pratimas.*** Įrodykite, kad atitinkamai parinkus matą $\mu$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n) = \int f(x)\mu(dx).$$

***1.27 pratimas.*** Tegu metrinės erdvės $(\mathbb{S}, d)$ $\sigma$ algebra $\sigma(\mathcal{C})$ yra generuota atvirų rutulių šeima $\mathcal{C}_{\mathbb{S}} = \{S_r(x) : r \geq 0.x \in \mathbb{S}\}$. Pateikite pavyzdį, kuris įrodytų, kad bendru atveju $\sigma(\mathcal{C}_{\mathbb{S}}) \neq \mathcal{B}_{\mathbb{S}}$.

Pagalba. Nagrinė metrinę erdvę $(\mathbb{R}, d)$, kai $d$ yra diskrečioji metrika:

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{kai} \quad x \neq y, \\ 0, & \text{kai} \quad x = y. \end{cases}.$$

Tuomet bet kuris $\mathbb{R}$ poaibis yra atvira aibė, taigi $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = 2^{\mathbb{R}}$.. Atviri diskrečiosios metrinės erdvės rutuliai yra arba vieno taško aibės arba visa $\mathbb{R}$.

***1.28*** ***pratimas.*** Tegu $(\mathbb{S}, \mathcal{S})$ yra mati erdvė, $A \subset \mathbb{R}$ yra tiršta aibė. T.y., kokį beimtume skaičių $\varepsilon > 0$, kiekvienam $x \in \mathbb{R}$ rasime tokį $x_\varepsilon \in A$, kad $|x - x_\varepsilon| < \varepsilon$. Pavyzdžiui, racionaliųjų skaičių aibė $\mathbb{Q}$ yra tiršta. Įrodykite, kad funkcija $f : \mathbb{S} \to \overline{\mathbb{R}}$ yra mati tada ir tik tada, kai išpildoma viena iš šių sąlygų:

(a) $f^{-1}((a, \infty]) \in \mathcal{S}$ su kiekvienu $a \in A$;

(a) $f^{-1}([a, \infty]) \in \mathcal{S}$ su kiekvienu $a \in A$;

(a) $f^{-1}([-\infty, a)) \in \mathcal{S}$ su kiekvienu $a \in A$;

(a) $f^{-1}([-\infty, a]) \in \mathcal{S}$ su kiekvienu $a \in A$.

***1.29*** ***pratimas.*** Tarkime, funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yra tolydi visur išskyrus baigtinį arba skaitų taškų skaičių. Įrodykite, kad funkcija $f$ yra Borelio.

***1.30*** ***pratimas.*** Įrodykite, kad bet kuri monotoninė funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yra Borelio.

# 2 skyrius

# Atsitiktiniai dydžiai

## 2.1 Apibrėžimai

Fiksuokime tikimybinę erdvė $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Tuo atveju, kai tikimybinę erdvę siejame su kokiu nors statistiniu eksperimentu, aibę $\Omega$ interpretuojame kaip elementariųjų įvykių visumą, $\mathcal{F}$ – eksperimento metu stebimų įvykių $\sigma$-algebrą, o $P(A)$ reiškia įvykio $A$ pasirodymo galimybė išreikšta skaičiumi iš intervalo $[0,1]$. Visiškai bendru atveju, $\Omega$ galima interpretuoti kaip vsiumą Gamtos scenarijų, o $A \in \mathcal{F}$ yra scenarijų rinkinys, kurį Gamta parenka su tikimybe $P(A)$.

Matematine-tikimybine kalba, *atsitiktinis dydis*, apibrėžtas tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, yra $(\mathcal{F}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ - matus (trumpiau – $\mathcal{F}$-matus) atvaizdis $X : \Omega \to \mathbb{R}$, t.y., tokia funkcija

$$X : \Omega \to \mathbb{R},$$

kad

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\} \in \mathcal{F} \tag{2.1}$$

su kiekviena Borelio aibe $A \subset \mathbb{R}$ ($A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$).

Kadangi Borelio $\sigma$ algebrą generuoja intervalai, pakanka, kad (2.1) savybė būtų teisinga šio pavidalo

$$[a,b), (-\infty, b), [a, \infty), (-\infty, \infty), \quad a, b \in \mathbb{R} \tag{2.2}$$

aibėms $A \subset \mathbb{R}$. Taigi tie scenarijai $\omega \in \Omega$, dėl kurių atsitiktinio dydžio $X$ reikšmės yra, tarkime, intervale $[a,b)$, visados yra pamatuojami, t.y.

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in [a,b)\} \in \mathcal{F}$$

ir galime kalbėti apie tikimybę $P(\{\omega : X(\omega) \in [a,b)\})$. Trumpindami, vietoj $P(\{\omega : X(\omega) \in A\})$ dažnai rašysime $P(X \in A)$.

***2.1 teiginys.*** *Jei $X$ yra atsitiktinis dydis, o $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yra Borelio funkcija, t.y., tokia funkcija, kuriai*

$$g^{-1}(A) := \{x \in \mathbb{R} : g(x) \in A\} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}},$$

*su kiekviena aibe $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, tai $g(X)$ yra atsitiktinis dydis.*

*Įrodymas.* Išvedame iš 1.6 teoremos. ■

Tolydžios funkcijos ir funkcijos turinčios ne daugiau nei skaičią trūkio taškų aibę yra Borelio (žr. 1.29 pratimą). Taigi pavyzdžiui, jei $X$ yra atsitiktinis dydis, tai $X^2$, $\cos(X)$, $1/X$, yra atsitiktiniai dydžiai.

Visų atistiktinių dydžių, apibrėžtų tikimybinėje erdvėjs $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ aibė žymima $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Du atsitiktiniai dydžiai $X_1$ ir $X_2$, apibrėžti toje pačioje tikimybinėje erdvėje, vadinami *ekvivalenčiais* (žymėsime $X_1 \overset{\text{b.t.}}{=} X_2$ arba $X_1 = X_2$ b.t., arba tiesiog $X_1 = X_2$), jei

$$P(\omega : X_1(\omega) \neq X_2(\omega)) = 0.$$

Galima įsitikinti, kad $\sim$ yra aibės $\mathcal{L}_0$ ekvivalentumo sąryšis (žr. 2.3 pratimą). Atitinkama faktor aibė žymima $L_0 = L_0(\Omega, \mathcal{F}, P)$:

$$L_0(\Omega, \mathcal{F}, P) = \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{F}, P)/\sim .$$

Atsitiktinis dydis $X$ apibrėžia $\sigma$ algebrą $\mathcal{F}_X := \{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\} \subset \mathcal{F}$, kuri vadinama *atsitiktinio dydžio $X$ generuota $\sigma$ algebra* (žr. 2.1 pratimą), bei tikimybinį matą $P_X$:

$$P_X(B) = P(\{\omega : X(\omega) \in B\}), \quad B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}.$$

Tikimybinis matas $P_X$ vadinamas atsitiktinio dydžio $X$ *skirstiniu*. Taigi atsitiktinis dydis tikimybinę erdvę $(\Omega, \mathcal{F}.P)$ pakeičia kita tikimybine erdve $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, P_X)$ arba $(\mathbb{R}, \mathcal{F}_X, P_X)$. Jei $\mu$ yra tikimybinis matas, apibrėžtas aibės $\mathbb{R}$ Borelio $\sigma$ algebroje, tai egzistuoja tikimybinė ervdvė $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ir toks atsitiktinis dydis $X : \Omega \to \mathbb{R}$, kad $P_X = \mu$. Pakanka paimti $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ ir apibrėžti $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $X(\omega) = \omega$.

## 2.2 Pasiskirstymo funkcija ir kitos charakteristikos

Atsitiktinio dydžio aprašymui naudojamos įvairios neatsitiktinės charakteristikos. Bene svarbiausia yra pasiskirstymo funkcija. Atsitiktinio dydžio $X$ pasiskirstymo funkcija yra realioji realaus argumento funkcija $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F_X(x) = P(\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pagrindines jos savybes aprašo šis teiginys.

**2.2 teiginys.** *Atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcija $F$ pasižymi šiomis savybėmis:*

$(i)$ $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1, \quad \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0,$

$(ii)$ *$F$ yra nemažėjanti: jei $x < y$ tai $F(x) \leq F(y)$,*

$(iii)$ *$F$ yra tolydi iš dešinės: $F(x+h) \to F(x)$, jei $h \downarrow 0$.*

*Be to, kiekviena nemažėjanti tolydi iš dešinės ir tenkinanti $(i)$ sąlygą funkcija $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yra kurio nors atsitiktinio dydžio $X$ pasiskirstymo funkcija, t.y. egzistuoja tokia tikimybinė erdvė $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ir toks joje apibrėžtas atsitiktinis dydis $X$, kad $F = F_X$.*

Atsitiktiniai dydžiai $X_1, X_2$ yra *vienodai pasiskirstę* (žymėsime $X_1 \overset{\mathcal{D}}{=} X_2$), jei jų pasiskirstymo funkcijos sutampa, t.y.

$$F_{X_1}(x) = P(\omega : X_1(\omega) \leq x) = P(\omega : X_2(\omega) \leq x) = F_{X_2}(x)$$

su visais $x \in \mathbb{R}$. Čia atkreipiame dėmesį, kad vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai nebūtinai turi būti apibrėžti vienoje tikimybinėje erdvėje.

Ekonometrija bei finansų matematika paprastai nagrinėja tik diskrečiuosius ir tolydžiuosius atsitiktinius dydžius.

***2.1 apibrėžimas.*** *Atsitiktinis dydis $X$ vadinamas diskrečiuoju, jeigu jo įgyjamų reikšmių aibė $\{x_i\}$ yra baigtinė arba skaiti.*

Diskretūs atsitiktiniai dydžiai pilnai aprašomi įgyjamomis reikšmėmis $x_1, x_2, \dots$, ir atitinkamomis tų reikšmių įgyjimo tikimybėmis $p_1, p_2, \cdots$ :

$$p_k = p_X(x_k) = P(\omega : X(\omega) = x_k), \quad k = 1, 2, \dots$$

Skaičių rinkinys $(p_X(x_k))$ (arba trumpiau $(p_k)$) vadinamas diskrečiojo atsitiktinio dydžio $X$ *reikšmių tikimybių funkcija*. Ji pasižymi šiomis savybėmis:

(i) $0 \le p_X(x_k) \le 1$ su visais $k$

(ii) $p_X(x) = 0$, jei $x \ne x_k$;

(iii) $\sum_k p_X(x_k) = 1$.

Jei $X$ yra diskretus atsitiktinis dydis su reikšmėmis $x_1, x_2, \dots$ ir

$$P(X = x_k) = p_k, \ \ k = 1, 2, \dots$$

tai jo pasiskirstymo funkcija yra

$$F(x) = \sum_{k:\ x_k \le x} p_k, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Jei aibė $A \subset \Omega$ yra mati ($A \in \mathcal{F}$), tuomet (ir tik tuomet) indikatorinė funkcija

$$\mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{kai} \quad \omega \in A, \\ 0, & \text{kai} \quad \omega \notin A \end{cases}$$

yra atsitiktinis dydis. Tai bene paprasčiausias diskretusis atsitiktinis dydis.

***2.2 apibrėžimas.*** *Atsitiktinį dydį $X$ su pasiskirstymo funkcija $F_X$ vadiname tolydžiuoju, jei egzistuoja tokia neneigiama Borelio funkcija $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kad*

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Jei nepasakyta kitaip, realaus argumento funkcijų integralai suprantami Lebego prasme. Funkcija $f_X$ vadinama atsitiktinio dydžio $X$ *tankio funkcija* (tankiu). Ji pasižymi šiomis savybėmis:

(i) $f_X(x) \ge 0$ su visais $x \in R$;

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x = 1$;

(iii) $f_X$ yra atkarpomis tolydi funkcija;

(iv) $P(\omega : a < X(\omega) \le b) = \int_a^b f_X(x)\,\mathrm{d}x$ su visais $a < b$;

(v) Borelio aibei $B \subset \mathbb{R}$,

$$\int_B f(x)\,\mathrm{d}x = P(X \in B).$$

Atsitiktinio dydžio $X$ *vidurkis* (tikėtina reikšmė arba tipinė reikšmė) yra $X$ integralas atžvilgiu tikimybinio mato $P$:

$$E(X) = \int_\Omega X(\omega)\,\mathrm{d}P(\omega) = \int X\,\mathrm{d}P.$$

Priminsime šio integralo apibrėžimą. Atskiru atveju, kai $X$ yra diskretusis atsitiktinis dydis, tarkime, su reikšmėmis $a_1, a_2, \ldots$ ir $A_j = \{\omega : X(\omega) = a_j\}$, $j = 1, 2, \ldots$, apibrėžiame

$$\int_\Omega X(\omega)\,\mathrm{d}P(\omega) := a_1 P(A_1) + a_2 P(A_2) + \cdots .$$

Taigi $E(\mathbf{1}_A) = P(A)$. Todėl vidurkis yra tam tikra prasme bendresnė sąvoka už tikimybę.

Toliau remiamės šiuo faktu: jei $X$ yra neneigiamas a.d. tai egzistuoja tokia neneigiamų diskrečiųjų a.d. seka $X_1, X_2, \ldots$, kad

$$X_1(\omega) \le X_2(\omega) \le \cdots$$

ir, be to,

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$$

su visais $\omega \in \Omega$. Remdamiesi šiuo faktu, apibrėžiame

$$\int_\Omega X(\omega)\,\mathrm{d}P(\omega) := \lim_{n\to\infty} \int_\Omega X_n(\omega)\,\mathrm{d}P \le \infty.$$

Čia reikia pažymėti, kad riba visada egzistuoja (baigtinė arba begalinė), nes seka $(\int_\Omega X_n dP, n \ge 1)$ yra nemažėjanti.

Galiausiai, jei $X$ yra bet kuris atsitiktinis dydis, tuomet

$$E(X) := E(X^+) - E(X^-),$$

čia $X^+ = \max\{X, 0\}, X^- = -\min\{X, 0\}$, jei tik bent vienas iš vidurkių $E(X^+)$ arba $E(X^-)$ yra baigtinis. Jei abu vidurkiai $EX^+$ ir $EX^-$ yra baigtiniai, tuomet $E|X| < \infty$. Šiuo atveju sakome, kad a.d. $X$ yra integruojamas.

***2.3 teiginys.*** *Neneigiamo tolydžiojo atsitiktinio dydžio vidurkis yra*

$$E(X) = \int_0^\infty P(\omega : X(\omega) > x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.3}$$

*Įrodymas.* Šią formulę nesunkiai išvedame sukeitę integravimo tvarką:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_\Omega X(\omega)\,\mathrm{d}P(\omega) = \int_\Omega \Big(\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{X(\omega)>t\}}\,\mathrm{d}t\Big)\,\mathrm{d}P(\omega) \\ &= \int_0^\infty P(X > t)\,\mathrm{d}t. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Iš (2.3) gauname kitą svarbią formulę, kuri susieja atsitiktinio dydžio momentus su galimų didelių reikšmių tikimybėmis: jei $p \ge 1$, tada

$$E|X|^p = p\int_0^\infty x^{p-1} P(\omega : |X(\omega)| > x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.4}$$

Diskretaus neneigiamo sveikareikšmio a.d. vidurkiui skaičiuoti galima naudotis tokia formule.

***2.4 teiginys.*** *Jei $X$ yra neneigiamas sveikareikšmis atsitiktinis dydis, tai*

$$EX = \sum_{k=0}^{\infty} P(X > k). \tag{2.5}$$

*Įrodymas.* Įrodymui reikia sukeisti sumavimo tvarką:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X > k) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=k+1}^{\infty} p_j = \sum_{j=1}^{\infty} \Big( \sum_{k=0}^{j-1} \Big) p_j$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} j p_j = EX. \blacksquare$$

Atsitiktinio dydžio vidurkį galime išreikšti Rymano-Stiltjeso integralu atžvilgiu jo pasiskirstymo funkcijos:

$$E(X) = \int_0^{\infty} x dF_X(x).$$

Jei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yra Borelio funkcija ir $E|g(X)| < \infty$, tuomet

$$E(g(X)) = \int_{\Omega} g(X(\omega))\, \mathrm{d}P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, \mathrm{d}F_X(x).$$

Atskiru atveju, jei $X$ yra tolydusis a.d. su tankio funkcija $f_X$, tai

$$Eg(X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, \mathrm{d}P_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\, \mathrm{d}x.$$

Jei $X$ yra diskretusis a.d. su reikšmių tikimybių funkcija $(p_k)$ tuomet

$$Eg(X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, \mathrm{d}F_X(x) = \sum_k g(x_k) p_k.$$

Priminsime kitas svarbesnes diskrečiųjų bei tolydžiųjų atsitiktinių dydžių charakteristikas.

- *$n$-tosios eilės momentas*:

$$E(X^n) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x) dx, & \text{kai } X \text{ tolydus a.d.} \\ \sum_k x_k^n p_X(x_k), & \text{kai } X \text{ diskretus a.d.} \end{cases}$$

- *dispersija*

$$\sigma_X^2 = var(X) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx, & \text{kai } X \text{ tolydus a.d.} \\ \sum_k (x_k - \mu_X)^2 p_X(x_k), & \text{kai } X \text{ diskretus a.d.} \end{cases}$$

- *standartinis nuokrypis* yra $\sigma_X$ - kvadratinė šaknis iš dispersijos.

- *charakteristinė funkcija* yra argumento $t \in \mathbb{R}$, bendru atveju, kompleksinė funkcija

$$c_X(t) = Ee^{\imath tX} = E\cos(tX) + \imath E \sin(tX).$$

  Čia $\imath = \sqrt{-1}$.

- *generuojanti funkcija* yra argumento $s > 0$ funkcija

$$g_X(s) = Es^X, \quad s > 0.$$

Funkcija $g_X$ yra apibrėžta tiems $s > 0$ su kuriais $Es^X < \infty$.

***2.1 pavyzdys.*** *Bernulio atsitiktinis dydis.*

Atsitiktinis dydis $X$ turintis tik dvi galimas reikšmes $0$ ir $1$, vadinamas Bernulio atsitiktiniu dydžiu. Tikimybė, kad tas dydis įgis reikšmę $1$ lygi $p$, o $P(X = 0) = 1 - p$. Bernuli atsitiktinis dydis aprašo vieno kurio nors įvykio „sėkmę" – „nesekmę". Tai gali būti, tarkime, vartotojo sprendimas pirkti kurią nors prekę; banko sprendimas apie kredito išdavimą; darbdavio sprendimas apie priėmimą į darbą ir t.t. Jo vidurkis ir dispersija yra atitinkamai

$$\mu_X = p \quad \text{ir} \quad \sigma_X^2 = p(1 - p).$$

***2.2 pavyzdys.*** *Binominis atsitiktinis dydis.*

Jei atliekame $n$ bandymų, kiekviename iš kurių įvykis pasirodo su tikimybe $p$ ir nepasirodo su tikimybe $1 - p$, tuomet įvykio pasirodymų skaičius $X$ yra Binominis atsitiktinis dydis (žymime $X \sim b(k; n, p)$). Jo galimos reikšmės yra $0, 1, \ldots, n$ ir atitinkamos tikimybės

$$P(X = k) = b(k; n, p) := \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \;\; k = 0, 1, \ldots, n.$$

Be to, $\mu_X = E(X) = np$, $\sigma_X^2 = var(X) = np(1 - p)$, o generuojanti funkcija yra

$$g_X(s) = (1 - p + ps)^n, \quad s > 0.$$

***2.3 pavyzdys.*** *Puasono atsitiktinis dydis.*

Puasono atsitiktinis dydis $X$ yra diskretusis atsitiktinis dydis, kurio reikšmės yra $0, 1, 2, 3, \ldots$, o atitinkamos tikimybės

$$P(X = k) = p(k; \lambda) := \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

su kiekvienu $k = 0, 1, \ldots$ (žymėsime $X \sim p(k; \lambda)$). Čia $\lambda > 0$ yra Puasono parametras, dar vadinamas intensyvumu.

Tai labai plačiai naudojamas atsitiktinis dydis, dažniausiai aprašantis kokių nors įvykių pasirodymo skaičių vienetinio ilgio laiko intervale, kai vidutinis tų įvykių pasirodymas per tą patį laiką yra $\lambda$. Pavyzdžiui, skambučių skaičius per tam tikrą laiką (valandą, dieną ir t.t.); fiksuotame laiko intervale kreditinių kortelių panaudojimo bankomate skaičius; per tam tikrą laiko intervalą (per dieną, valandą ar pan.) užeinančių į parduotuvę pirkėjų skaičius. Puasono atsitiktinis dydis labai paplitęs modeliuojant skaičiuojančiuosius procesus.

Tegu $X$ yra Puasono atsitiktinis dydis su parametru $\lambda > 0$. Tuomet

$$\begin{aligned} EX = &\sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ =&\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda. \end{aligned}$$

Norėdami suskaičiuoti Puasono atsitiktinio dydžio dispersiją, pirmiausia suskaičiuojame

$$EX(X - 1) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k - 1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda^2.$$

Kadangi $EX^2 = EX(X-1) + EX = \lambda^2 + \lambda$, tai dispersija yra

$$var(X) = EX^2 - (EX)^2 = \lambda.$$

Puasono atsitiktinio dydžio generuojanti funkcija yra

$$g_X(s) = e^{\lambda(s-1)}, \quad s > 0.$$

***2.4 pavyzdys.*** *Geometrinis atsitiktinis dydis.*

Bandymą, kuriame įvykis pasirodo su tikimybe $p$ tol kartojame, kol įvykis pasirodo. Reikalingų tam bandymų skaičius $X$ ir turi geometrinį skirstinį (žymėsime $X \sim g(n;p)$. Atitinkamos tikimybės yra

$$P(X = n) = (1-p)^n p, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Pažymėję $q = 1 - p$, suskaičiuojame

$$\begin{aligned} EX =& \sum_{k=0}^{\infty} kq^k p = p \sum_{k=0}^{\infty} kq^k = p \sum_{k=0}^{\infty} \Big( \sum_{j=1}^{k} 1 \Big) q^k \\ =& p \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} q^j = p \sum_{j=1}^{\infty} q^j (1-q)^{-1} \\ =& \sum_{j=1}^{\infty} q^j = \frac{q}{p}. \end{aligned}$$

Geometrinio atsitiktinio dydžio generuojanti funkcija yra

$$g_X(s) = \frac{p}{1-qs}, \quad 0 < s < q^{-1}.$$

***2.5 pavyzdys.*** *Tolygusis a.d.* Atsitiktinis dydis $X$ vadinamas tolygiuoju intervale $(a, b)$, jei jo tankio funkcija yra

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{kai } a < x < b \\ 0 & \text{kitur.} \end{cases}$$

Tolygiojo a.d. pasiskirstymo funkcija yra

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai } x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{kai } a < x < b; \\ 1 & \text{kai } x \ge b. \end{cases}$$

Kitos jo skaitinės charakteristikos: vidurkis $\mu_X = E(X) = \frac{a+b}{2}$, dispersija $\sigma_X^2 = var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

***2.6 pavyzdys.*** *Eksponentinis a.d.* Atsitiktinis dydis $X$ vadinamas eksponentiniu su parametru $\lambda > 0$ (žymėsime $X \sim \exp\{\lambda\}$), jei jo tankio funkcija yra

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{kai } x > 0 \\ 0 & \text{kitur.} \end{cases}$$

Eksponentinio a.d. pasiskirstymo funkcija yra

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{kai } x \geq 0; \\ 0 & \text{kai } x < 0. \end{cases}$$

Kitos jo charakteristikos yra: vidurkis $\mu_X = E(X) = \frac{1}{\lambda}$, dispersija $\sigma_X^2 = var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$. Eksponentiniai atsitiktiniai dydžiai taikomi modeliuojant draudiminius įvykius.

***2.7 pavyzdys.*** *Normalusis a.d.* Atsitiktinis dydis $X$ vadinamas normaliuoju su parametrais $(\mu, \sigma^2)$ (žymėsime $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$), jei jo tankio funkcija yra

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\Big\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \Big\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Parametrai $\mu$ ir $\sigma^2$ yra atitinkamai vidurkis ir dispersija. Atsitiktinis dydis $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ vadinamas standartiniu normaliuoju. Jo pasiskirstymo funkcija žymima $\Phi$:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-s^2/2}\, \mathrm{d}s, \quad x \in \mathbb{R}.$$

A.d. $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ charakteristinę bei generuojančią funkcijas galime rasti pasinaudoję šia formule: su visais $u \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} E\exp\{uX\} &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ux} e^{-x^2/2\sigma^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\sigma^2 u^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ux} e^{-(x-\sigma^2 u)^2/2\sigma^2}\, \mathrm{d}x \\ &= \exp\{\sigma^2 u^2/2\}. \end{aligned}$$

Normalusis atsitiktinis dydis, kurio vidurkis yra $\mu$, o dispersija $\sigma^2$ reikšmes iš intervalo $[\mu - 1.96\sigma, \mu + 1.96\sigma]$ įgyja su tikimybe $0.95$:

$$P(\mu - 1.96\sigma \leq X \leq \mu + 1.96\sigma) = \Phi(1.96) - \Phi(-1.96) = 0.95.$$

Šis sąryšis plačiai taikomas statistikoje.

## 2.3 Atsitiktiniai vektoriai

Jei $X_1, \dots, X_d$ yra atsitiktiniai dydžiai, apibrėžti vienoje tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, tai jų sutvarkytas rinkinys $X = (X_1, \dots, X_d)$ vadinamas atsitiktiniu vektoriumi. Norėdami jį interpretuoti kaip atsitiktinį erdvės $\mathbb{R}^d$ elementą, turime apibrėžti atitinkamą tos erdvės $\sigma$ algebrą.

***2.3 apibrėžimas.*** *Erdvės $\mathbb{R}^d$ Borelio $\sigma$ algebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ yra mažiausia $\sigma$ algebra, kuriai priklauso aibės*

$$A_1 \times \cdots \times A_d, \quad A_1, \dots, A_d \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}.$$

Galima įsitiktinti (žr, 2.21 pratimą), kad atsitiktinis vektorius $X = (X_1, \dots, X_d)$ yra $\mathcal{F}/\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$-matus atvaizdis:

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{F}, \quad B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}.$$

Taigi, atsitiktinis vektorius yra atsitiktinis erdvės $\mathbb{R}^d$ elementas. Ir atvirkščiai, jei $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ yra $\mathcal{F}/\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$-matus atvaizdis, tuomet $X = (X_1, \dots, X_d)$ ir $X_i, i = 1, \dots, d$ yra atsitiktiniai dyžiai.

Atsitiktinio vektoriaus $X = (X_1, \ldots, X_d)$ pasiskirstymo funkcija vadiname $d$ kintamųjų funkciją

$$F_X(x) = F_X(x_1, \ldots, x_d) = P(\omega : X_1(\omega) \leq x_1, \ldots, X_d \leq x_d), \quad x = (x_1, \ldots, x_d) \in R^d.$$

Atsitiktinio vektoriaus $X = (X_1, \ldots, X_d)$, kurio pasiskirstymo funkcija yra $F_X(x_1, \ldots, x_d)$ komponentės $X_k$ *marginalinė pasiskirstymo funkcija* yra

$$F_k(x_k) = F_X(+\infty, \cdots, +\infty, x_k, +\infty, \ldots, +\infty) : \lim_{x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_d \to \infty} F_X(x_1, \ldots, x_d), \ \ x_k \in \mathbb{R}.$$

Analogiškai apibrėžiame ir bet kurio vektoriaus $X = (X_1, \ldots, X_d)$ kooedinačių rinkinio $(X_{k_1}, \ldots, X_{k_q})$ marginalinę pasiskirstymo funkciją

$$F_{k_1, \ldots, k_q}(x_{k_1}, \ldots, x_{k_q}) = \lim_{x_j \to \infty, j \in \{1, \ldots, d\} \setminus \{k_1, \ldots, k_q\}} F_X(x_1, \ldots, x_d).$$

Bet kuri $d$-mačio atsitiktinio vektoriaus pasiskirstymo funkcija $F$ pasižymi šiomis savybėmis:

(i) kiekvienam $k$, $1 \leq k \leq d$, $F(x_1, \ldots, x_d) \to 0$, kai $x_k \to -\infty$;

(ii) $F(x_1, \ldots, x_d) \to 1$, kai $x_1 \to \infty, \ldots, x_d \to \infty$;

(iii) $F$ yra tolydi iš dešinės kiekvieno argumento atžvilgiu;

(iv) su bet kuriais $a_i < b_i, i = 1, \ldots, d$,

$$\sum_{\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_d = \pm 1} (-1)^{\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_d} F(\varepsilon_1 a_1 + (1 - \varepsilon_1) b_1, \ldots, \varepsilon_d a_d + (1 - \varepsilon_d) b_d) \geq 0.$$

Ir atvirkščiai, jei $d$ kintamųjų funkcija $F(x_1, \ldots, x_d)$ pasižymi (i)–(iv) savybėmis, tai ji yra kurio nors atsitiktinio vektoriaus pasiskirstymo funkcija.

Atsitiktiniai vektoriai $X_1 = (X_{11}, \ldots, X_{1d}), X_2 = (X_{21}, \ldots, X_{2d})$ yra

- *ekvivaletūs* $X_1 \sim X_2$ arba *lygūs beveik tikrai* $X_1 = X_2$ b.t., jei $P(\{\omega : X_1(\omega) \neq X_2(\omega)\}) = 0$;
- *vienodai pasiskirstę* (žymėsime $X_1 \stackrel{\mathcal{D}}{=} X_2$), jei jų pasiskirstymo funkcijos sutampa, t.y.

$$P(\omega : X_{11}(\omega) \leq x_1, \ldots, X_{1d}(\omega) \leq x_d) = P(\omega : X_{21}(\omega) \leq x_1, \ldots, X_{2d} \leq x_d)$$

  su visais $(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$.

Sakysime, kad atsitiktinis vektorius $X \in \mathbb{R}^d$ turi tankio funkciją $f_X$ jei $f_X : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ yra tokia neneigiama Borelio funkcija, kad

$$P(a_i < X_i \leq b_i, i = 1, \ldots, d) = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_d}^{b_d} f_X(x_1, \ldots, x_d) dx_1 \cdots dx_d,$$

su bet kuriais realiaisiais skaičiais $a_i < b_i, i = 1, \ldots, d$.

***2.5 teiginys.*** *Jei funkcija $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ yra Borelio, t.y.*

$$g^{-1}(A) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$$

*su kiekviena aibe $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}$, tai $g(X_1, \ldots, X_d)$ yra $m$-matis atsitiktinis vektorius.*

Atskiru šio teiginio atveju gauname, kad su kiekviena Borelio funkcija $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $g(X)$ yra atsitiktinis dydis, jei $X$ yra atsitiktinis vektorius. Taigi galime kalbėti apie to atsitiktinio dydžio įvairias skaitines charakteristikas.

Tolydi funkcija arba funkcija turinti ne daugiau nei skaičią trūkio taškų aibę yra Borelio. Taigi pavyzdžiui, jei $X_1, X_2$ yra atsitiktiniai dydžiai, tai $X_1 + X_2$, $X_1X_2$, $X_1/X_2$ yra atsitiktiniai dydžiai.

Atsitiktinio vektoriaus $X = (X_1, \ldots, X_d)$ *vidurkis* yra vektorius

$$E(X) = (E(X_1), \ldots, E(X_d)).$$

Atsitiktinio vektoriaus $X = (X_1, \ldots, X_d)$ *kovariacinė matrica* yra matrica

$$\Gamma_X = (\Gamma_X(i,j))_{1\le i,j\le d} = (cov(X_i, X_j))_{1\le i,j\le d};$$

čia

$$\Gamma_X(i,j) = cov(X_i, X_j) = E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j),$$

yra atsitiktinių dydžių $X_i$ ir $X_j$ kovariacija, $i, j = 1, \ldots, d$. Matrica $\Gamma_X$ yra simetrinė ir neneigiamai apibrėžta, t.y., $\Gamma_X(i,j) = \Gamma_X(j,i)$ ir

$$\sum_{i,j=1}^{d} \Gamma_X(i,j) a_i a_j \ge 0$$

su visais realiaisais skaičiais $a_1, \ldots, a_d$. Kovariacinės matricos simetriškumas yra matomas tiesiog apibrėžime, o jos neneigiamą apibrėžtumą gauname iš šių lygybių:

$$\sum_{i,j=1}^{d} \Gamma_X(i,j) a_i a_j = \sum_{i,j=1}^{d} cov(X_i, X_j) a_i a_j = var\Big(\sum_{i=1}^{d} a_i X_i\Big) \ge 0.$$

***2.8 pavyzdys.*** Atsitiktinis vektorius $X = (X_1, \ldots, X_d)$ turi normalųjį skirstinį su parametrais $m$ ir $\Gamma$ (trumai žymėasime $X \sim \mathcal{N}(m, \Gamma)$), jei jo tankio funkcija yra

$$f_X(x_1, \ldots, x_d) = (2\pi \det(\Gamma))^{-d/2} \exp\Big\{ - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} (x_i - m_i)(x_j - m_j)\Gamma^{-1}(i,j) \Big\}.$$

Čia $m = (m_1, \ldots, m_d) \in \mathbb{R}^d$ yra atsitiktinio vektoriaus $X$ vidurkio vektorius, $\Gamma = (\Gamma(i,j))$ - kovariacinė matrica, o $\Gamma^{-1} = (\Gamma^{-1}(i,j))$ - jos atvirkštinė matrica. Atsitiktinis vektorius $X \sim \mathcal{N}(0, I)$; čia $I$ yra vienetinė matrica, vadinamas standartiniu normaliuoju.

Jei $\Gamma$ yra diagonalinė matrica, $\Gamma = diag(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_d^2)$, tuomet atsitiktinio vektoriaus $X$ tankio funkcija yra normaliųjų tankio funkcijų sandauga:

$$f_X(x_1, \ldots, x_d) = \prod_{i=1}^{d} \Big( \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\{-(x_i - m_i)^2/2\sigma_i^2\} \Big).$$

Jei $X \sim \mathcal{N}(m, \Gamma)$ ir $A$ yra bet kuri $d \times d$ matrica, tai atsitiktinis vektorius $AX$ turi normalinį skirstinį su parametrais $Am$ ir $A\Gamma A'$ ($A'$ žymi transponuotą matricą).

## 2.4 Nepriklausomumas

Nepriklausomumo sąvoka yra bene svarbiausia tikimybių teorijoje. Tegu $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ yra tikimybinė erdvė.

**2.4** **apibrėžimas.** *Įvykiai $A, B \in \mathcal{F}$ yra vadinami tarpusavyje $P$-nepriklausomais, jei*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Nagrinėkime tikimybinę erdvę, atitinkančią taisyklingo lošimo kauliukų metimą. Įvykiai

$$A = \{\text{dviejų mestų kauliukų iškritusių taškų suma yra } 6\}$$

ir

$$B = \{\text{pirmame kauliuke iškrito } 4\}$$

nėra nepriklausomi.Tačiau įvykiai $B$ ir

$$C = \{\text{dviejų mestų kauliukų iškritusių taškų suma yra } 7\}$$

yra nepriklausomi.

Pažymėsime, kad įvykiai gali būti tarpusavyje nepriklausomi vieno tikimybinio mato atžvilgiu, bet priklausomi atžvilgiu kito (žr. 2.25 pratimą).

**2.5** **apibrėžimas.**

- *Įvykiai $A_1, \ldots, A_n$ vadinami:*
  - *poromis tarpusavyje $P$-nepriklausomais, jei*

    $$P(A_j \cap A_k) = P(A_j)P(A_k), \quad kai \;\; k \neq j;$$

  - *tarpusavyje $P$-nepriklausomais, jei su bet kuriais $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$,*

    $$P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_k}),$$

- *Begalinis rinkinys įvykių yra tarpusavyje $P$-nepriklausomi, jei bet kuris baigtinis jų porinkinis yra tarpusavyje $P$-nepriklausomi.*
- *Dvi aibės $\Omega$ poaibių $\sigma$ algebros $\mathcal{F}_1$ ir $\mathcal{F}_2$ vadinamos $P$-nepriklausomomis, jei*

  $$P(A \cap B) = P(A)P(B),$$

  *kai $A \in \mathcal{F}_1, B \in \mathcal{F}_2$.*

Galima įsitikinti, kad poromis tarpusavio $P$-nepriklausomumas negarantuoja tarpusavio $P$-nepriklausomumo (žr. 2.26 pratimą).

Šiuose apibrėžimuose, tikimybinį matą $P$ praleisime, kai jis yra žinomas iš konteksto, t.y., vietoj $P$-nepriklausomi sakysime tiesiog nepriklausomi.

**2.6** **apibrėžimas.** *Atsitiktiniai dydžiai $X$ ir $Y$, apibrėžti vienoje tikimybinėje erdvėje vadinami nepriklausomais, jei $\sigma$ algebros $\mathcal{F}_X$ ir $\mathcal{F}_Y$ yra nepriklausomos. Analogiškai, atsitiktiniai vektoriai $X = (X_1, \ldots X_m)$ ir $Y = (Y_1, \ldots, Y_d)$, apibrėžti vienoje tikimybinėje erdvėje vadinami nepriklausomais, jei jų generuotos $\sigma$ algebros $\mathcal{F}_X$ ir $\mathcal{F}_Y$ yra nepriklausomos.*

Galima įrodyti (žr. 2.28 pratimą), kad atsitiktiniai dydžiai $X$ ir $Y$ yra nepriklausomi tada ir tik tada, kai

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Ši nepriklausomumo savybė sugeneruoja įvairius atsitiktinių dydžių priklausomumo modelius. Pavyzdžiui, atsitiktiniai dydžiai $X$ ir $Y$ yra vadinami *neigiamai priklausomais*, jei

$$P(X \leq x, Y \leq y) \leq P(X \leq x)P(Y \leq y)$$
ir
$$P(X \geq x, Y \geq y) \leq P(X \geq x)P(Y \geq y)$$

su visais $x, y \in \mathbb{R}$.

Jei vektoriai $X = (X_1, \dots X_m)$ ir $Y = (Y_1, \dots, Y_d)$ yra nepriklausomi, tai nepriklausomi yra ir atsitiktiniai dydžiai $h(X), g(Y)$, kokios bebūtų Borelio funkcijos $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ ir $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ (žr. 2.27 pratimą).

***2.7 apibrėžimas.*** *Atsitiktiniai dydžiai $X$ ir $Y$, kuriems $EX^2 < \infty$ ir $EY^2 < \infty$ vadinami nekoreliuotais, jei*

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Atsitiktinių dydžių koreliacija rodo tam tikrą tų dydžių tarpusavio priklausomybę. Jei jie yra nepriklausomi tai ir nekoreliuoti. Bet atvirkščiai nebūtinai. Pavyzdžiui, jei $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, tai atsitiktiniai dydžiai $X_1 = X$ ir $X_2 = X^2$ yra akivaizdžiai priklausomi, bet nekoreliuoti : $E(X_1X_2) = E(X^3) = 0 = E(X_1)E(X_2)$.

Šis teiginys paaiškina nepriklausomumo sąryšį su koreliacija.

***2.6 teiginys.*** *Su bet kuriais $m \geq 1, d \geq 1$ atsitiktiniai vektoriai $X = (X_1, \dots X_m)$ ir $Y = (Y_1, \dots, Y_d)$, apibrėžti vienoje tikimybinėje erdvėje yra nepriklausomi tada ir tik tada, kai*

$$E(h(X_1, \dots, X_m)g(Y_1, \dots, Y_d)) = Eh(X_1, \dots, X_m)Eg(Y_1, \dots, Y_d),$$

*bet kurioms aprėžtoms Borelio funkcijoms $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ ir $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$.*

Pritaikę teiginį dviems atsitiktiniams dydžiams matome, kad atsitiktiniai dydžiai $X_1$ ir $X_2$ yra nepriklausomi tada ir tik tada, kai atsitiktiniai dydžiai $h(X_1)$ ir $g(X_2)$ yra nekoreliuoti su bet kuriomis aprėžtomis Borelio funkcijomis $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Tikimybių teorija negrinėja įvairius atsitiktinių dydžių priklausomumo modelius.

***2.8 apibrėžimas.*** *Tegu sveikasis skaičius $m \geq 1$. Atsitiktiniai dydžiai $X_1, X_2, \dots$ vadinami $m$-priklausomais, jei atsitiktiniai dydžiai $X_i$ ir $X_j$ yra nepriklausomi, kai tik $|i - j| \geq m$.*

***2.9 pavyzdys.*** Tarkime, $Y_0, Y_1, Y_2, \dots$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai. Apibrėžkime

$$X_j = Y_{j-1} + Y_j, j = 1, 2, \dots$$

Tuomet atsitiktiniai dydžiai $X_1, X_2, \dots$ yra 2-priklausomi.

Kitokius atsitiktinių dydžių priklausomumo modelius (pavyzdžiui, martingalinis, markoviškas priklausomumai) sutiksime studijuodami atsitiktinius procesus.

## 2.5 Sąlyginis vidurkis

Įvykio $A \in \mathcal{F}$ sąlyginė tikimybė su sąlyga, kad įvyko įvykis $B \in \mathcal{F}$, apskaičiuojama pagal formulę

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Sąlyginės tikimybės interpretacija paprasta. Tarkime, kad įvykis $B$ įvyko. Ši, papildoma informacija, leidžia pakeisti tikimybinę erdvę. Priskirkime nulinę tikimybę įvykiui $B^c$, o vienetą – įvykiui $B$. Taip įvykis $B$ pasidaro nauja elementariųjų įvykių erdve, tarkime, $\Omega'$, o įvykiais dabar yra jos matūs jos poaibiai $A \cap B \subset \Omega'$ (žr. 3.2 pratimą). Naujoje erdvėje apibrėžiame tikimybinį matą normalizuodami senąsias tikimybes $P(A \cap B)$ skaičiumi $P(B)$.

Jei $P(B) > 0$ ir $X$ – atsitiktinis dydis, tai jo sąlyginė pasiskirstymo funkcija atžvilgiu $B$ yra funkcija

$$F_X(x|B) = \frac{P(X \le x, B)}{P(B)}, \quad x \in \mathbb{R},$$

o sąlyginis vidurkis:

$$E(X|B) = \frac{1}{P(B)} EX\mathbf{1}_B.$$

***2.10 pavyzdys.*** Imkime $\Omega = (0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}_{(0,1]}$ - jos Borelio $\sigma$ algebrą, o tikimybę $P$ apibrėžkime taip, kad $P((a,b]) = b - a$. Apibrėžkime atsitiktinį dydį $X(\omega) = \omega$, $\omega \in \Omega$. Nesunku įsitikinti, kad $X$ turi tolygųjį pasiskirstymą ir $EX = 0.5$. Jei $B = (0, 1/4]$, tai

$$E(X|B) = \frac{1}{P(B)} EX\mathbf{1}_B = \frac{1}{P(B)} \int_0^{1/4} x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{8}.$$

Dabar tarkime, kad $Y$ yra diskretusis atsitiktinis dydis, apibrėžtas aibėje $\Omega$ ir įgyjantis reikšmes $y_i, i = 1, 2, \ldots$. Nemažindami bendrumo galime tarti kad tos reikšmės yra skirtingos ir

$$B_i = \{\omega : Y(\omega) = y_i\}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Tuomet aibių rinkinys $(B_i)$ yra aibės $\Omega$ skaidinys:

$$B_i \cap B_j = \emptyset, \text{ kai } i \ne j \text{ ir } \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega.$$

Be to, tarsime, kad $P(B_i) > 0$, su visais $i = 1, 2, \ldots$.

***2.9 apibrėžimas.*** *Atsitiktinio dydžio $X$, apibrėžto aibėje $\Omega$ ir turinčio baigtinį vidurkį ($E|X| < \infty$) sąlyginiu vidurkiu atžvilgiu atsitiktinio dydžio $Y$ vadinamas toks diskretusis atsitiktinis dydis $E(X|Y)$, kad*

$$E(X|Y)(\omega) = E(X|B_i) = E(X|Y = y_i), \text{ kai } \omega \in B_i, \ i = 1, 2, \ldots$$

Jei žinome, kad įvyko įvykis $B_i$, tuomet apsiribojame tik tais $\omega$, kurie priklauso aibei $B_i$. Tiems $\omega$, $E(X|Y)(\omega)$ sutampa su sąlyginiu vidurkiu $E(X|B_i)$.

***2.11 pavyzdys.*** Tęskime 2.10 pavyzdį. Tegu a.d. $Y$ yra apibrėžtas toje pačioje tikimybinėje erdvėje kaip ir $X$, tokiu būdu:

$$Y(\omega) = \begin{cases} \omega/2, & \text{kai} \quad \omega \in [0, 1/4) \\ 2\omega, & \text{kai} \quad \omega \in [1/4, 1]. \end{cases}$$

Tuomet

$$E(X|Y)(\omega) = \begin{cases} 1/8, & \text{kai} \quad \omega \in [0, 1/4) \\ 5/8, & \text{kai} \quad \omega \in [1/4, 1]. \end{cases}$$

Išvardinsime kelias sąlyginio vidurkio savybes:

- Sąlyginis vidurkis yra tiesinė funkcija:

$$E([aX + bZ]|Y) = aE[X|Y] + bE[Z|Y].$$

- Atsitiktinių dydžių $X$ ir $E[X|Y]$ vidurkiai sutampa:

$$EX = E(E[X|Y]).$$

Šių savybių įrodymą paliekame vietoj pratimo.

Sąlyginis vidurkis $E[X|Y]$, kai $Y$ diskretusis a.d. yra diskretus a.d. Tam tikra prasme, tai yra šiurkštesnė (grubesnė) a.d. $X$ versija. Kuo mažiau reikšmių įgyja $Y$, tuo grubesnis yra a.d. $E[X|Y]$. Taip, jei $Y = const$, tai $E[X|Y] = EX$; jei $Y$ įgyja dvi skirtingas reikšmes, tai toks yra ir sąlyginis vidurkis $E[X|Y]$.

Sąlyginis vidurkis $E[X|Y]$ yra $Y$ funkcija:

$$E[X|Y] = g(Y), \;\; \text{čia} \;\; g(y) = \sum_{i=1}^{\infty} E[X|Y = y_i]\mathbf{1}_{\{y_i\}}(y).$$

Iš sąlyginio vidurkio $E[X|Y]$ apibrėžimo, kai $Y$ yra diskretus atsitiktinis dydis, aišku, kad a.d. $Y$ reikšmės čia visai nesvarbios, bet svarbūs įvykiai lemiantys tas reikšmes. Todėl sąlyginį vidurkį galime suprasti kaip atsitiktinį dydį sukonstruotą pagal su dydžiu $Y$ susijusią įvykių aibę, tarkime $\sigma(Y)$ ir simboliškai, vietoj $E[X|Y]$ rašyti $E[X|\sigma(Y)]$. Aišku, kad $\sigma(Y)$ suteikia visą informaciją apie a.d. $Y$, kaip $\omega \in \Omega$ funkciją.

Priminsime, kad atsitiktinius dydžius nagrinėjame apibrėžtus tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Tarkime, $\mathcal{G}$ yra kita aibės $\Omega$ poaibių $\sigma$ algebra ir $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$.

***2.10 apibrėžimas.*** *Atsitiktinio dydžio $X$ sąlyginis vidurkis atžvilgiu $\sigma$ algebros $\mathcal{G}$ yra toks $\mathcal{G}$-matus atsitiktinis dydis $E(X|\mathcal{G})$, kuriam*

$$E(E(X|\mathcal{G})\mathbf{1}_F) = E(X\mathbf{1}_F),$$

*su kiekviena aibe $F \in \mathcal{G}$.*

Sąlyginis vidurkis $E(X|Y) = E(X|\mathcal{F}_Y)$, kai $\mathcal{F}_Y$ yra mažiausia $\sigma$ algebra atžvilgiu kurios yra matus atsitiktinis dydis $Y$. Įvykio $A \in \mathcal{F}$ sąlyginė tikimybė atžvilgiu $\mathcal{G}$ yra

$$P(A|\mathcal{G}) = E(\mathbf{1}_A|\mathcal{G}).$$

Svarbu įsidėmėti, kad sąlyginis vidurkis ir sąlyginė tikimybė atžvilgiu kurios nors $\sigma$ algebros yra atsitiktinis dydis.

Jei $\sigma$ algebra $\mathcal{G}$ yra generuota baigtiniu skaidiniu $\{B_1, \ldots, B_n\}$, tuomet

$$E(X|\mathcal{G}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{P(B_k)} E(X\mathbf{1}_{B_k})\mathbf{1}_{B_k}.$$

Jei atsitiktinis vektorius $(X, Y)$ yra aprašomas tankio funkcija $f(x, y)$, tai atsitiktinio dydžio $X$ sąlyginė tankio funkcija, kai fiksuota dydžio $Y$ reikšmė $y$, yra

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)},$$

kai $f_Y(y)$ yra atsitiktinio dydžio $Y$ marginalioji tankio funkcija. Tuomet

$$P(a < X \leq b|Y = y) = \int_a^b f(x|y)dx,$$
$$E(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x|y)dx.$$

Išvardinsime paprasčiausias sąlyginio vidurkio savybes. Lygybės tarp atistiktinių dyžių yra lygybės beveik tikrai.

1) Jei $X = c$ b.t., tai $E(X|\mathcal{G}) = c$ b.t.
2) $E(aX + bY|\mathcal{G}) = aE(X|\mathcal{G}) + bE(Y|\mathcal{G})$;
3) Jei $\sigma$ algebros $\mathcal{F}_X$ ir $\mathcal{G}$ yra nepriklausomos, tai $E(X|\mathcal{G}) = EX$;
4) Jei $X$ yra $\mathcal{G}$-matus, tai $E(X|\mathcal{G}) = X$;
5) Jei $X \leq Y$ b.t., tai $E(X|\mathcal{G}) \leq E(Y|\mathcal{G})$ b.t.
6) $|E(X|\mathcal{G})| \leq E(|X||\mathcal{G})$;
7) *Dvigubo vidurkinimo taisyklė*: jei $\sigma$-algebros $\mathcal{G}_1$ ir $\mathcal{G}_2$ tenkina $\mathcal{G}_1, \subset \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{F}$, tai
$$E(E(X|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1) = E(X|\mathcal{G}_1).$$
8) Jei $Y$ yra $\mathcal{G}$-matus, tai
$$E(XY|\mathcal{G}) = YE(X|\mathcal{G}).$$
9) *Jenseno nelygybė*: jei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yra iškiloji funkcija (t.y., $h(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda h(x) + (1-\lambda)h(y)$ su visais $\lambda \in [0,1]$ ir $x, y \in \mathbb{R}$), tuomet
$$h(E(X|\mathcal{G})) \leq E(h(X)|\mathcal{G}).$$

## 2.6 Naudingi tikimybių teorijos faktai

Šiame skirelyje surinkti naudingi tikimybių teorijos faktai, kuriais ateityje naudosimės.

- *Čebyševo nelygybė:* jei $\lambda > 0$, tai
$$P(|X| > \lambda) \leq \lambda^{-p} E|X|^p.$$
- *Švarco nelygybė:* $E(XY) \leq \Big(EX^2 EY^2\Big)^{1/2}$.
- *Hiolderio nelygybė:* jei skaičiai $p, q > 1$ tenkina sąryšį $1/p + 1/q = 1$, tai
$$E(XY) \leq \big(E|X|^p\big)^{1/p}\big(E|Y|^q\big)^{1/q}.$$
- *Jenseno nelygybė:* jei funkcija $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yra iškila, tai
$$\phi(E(X)) \leq E(\phi(X)).$$

Atsitiktinių dydžių sekoms apibrėžiami kelių tipų konvergavimai. Tarkime, atsitiktinių dydžių seka $(X_n)$ ir a.d. $X$ yra apibrėžti vienoje tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

- *Konvergavimas beveik tikrai*: Seka $(X_n)$ konverguoja beveik tikrai prie $X$ ($X_n \xrightarrow{b.t.} X$), jei egzistuoja tokia mati aibė $N \in \mathcal{F}$, kad $P(N) = 0$ ir

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega),$$

  su visais $\omega \notin N$.

- *Konvergavimas pagal tikimybę*: Seka $(X_n)$ konverguoja pagal tikimybę prie $X$ ($X_n \xrightarrow{P} X$), jei

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0,$$

  su visais $\varepsilon > 0$.

- *Konvergavimas $p$-ojo momento prasme*: tegu $p \geq 1$. Seka $(X_n)$ konverguoja $p$-ojo momento praseme ($L_p$-prasme) prie $X$ ($X_n \xrightarrow{Lp} X$), jei

$$\lim_{n\to\infty} E|X_n - X|^p = 0.$$

Sekos $(X_n)$ konvergavimo pagal skirstinį apibrėžimui jau nėra būtina, kad tie dydžiai būtų apibrėžti vienoje tikimybinėje erdvėje.

- *Konvergavimas pagal skirstinį*: Seka $(X_n)$ konverguoja pagal skirstinį prie $X$ ($X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$), jei

$$\lim_{n\to\infty} Ef(X_n) = Ef(X)$$

  su bet kuria aprėžta tolydžia funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

  Pasiskirstymo funkcijų terminais konvergavimas pagal skirstinį yra ekvivalentus

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) \to F_X(x)$$

  kiekvienam funkcijos $F$ tolydumo taškui $x \in \mathbb{R}$.

Sąryšius tarp konvergavimo tipų nusako šis teiginys.

***2.7 teiginys.*** *Tegu $(X_n)$ yra a.d. seka, a.d. $X \in \mathbb{R}$. Teisingi šie teiginiai:*

1. $X_n \xrightarrow{b.t.} X \quad \Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{P} X;$
2. $X_n \xrightarrow{Lp} X \quad \Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{P} X;$
3. $X_n \xrightarrow{P} X \quad \Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X;$
4. $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} C(\textit{konstanta}) \quad \Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{P} X;$
3. $X_n \xrightarrow{P} X \quad \Rightarrow$ *egzistuoja posekis* $\quad X_{n_k} \xrightarrow{b.t.} X.$

Tikimybių teorijai labai svarbūs yra didžiųjų skaičių dėsnis bei centrinė ribinė teorema. Silpnasis didžiųjų skaičių dėsnis yra šis teiginys.

***2.8 teiginys.*** ***(Silpnasis didžiųjų skaičių dėsnis)*** *Tegu $(X_n)$ yra nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių seka. Tuomet*

$$n^{-1}(X_1 + \cdots + X_n) \xrightarrow{P} 0$$

*tada ir tik tada, kai*

- $\lim_{t\to\infty} tP(|X_1| > t) = 0$;
- $\lim_{n\to\infty} EX\mathbf{1}\{|X| > n\} = 0$.

Stiprusis didžiųjų skaičių dėsnis ir centrinė ribinė teorema suformuluoti šiuose teiginiuose.

***2.9 teiginys.*** ***(Stiprusis didžiųjų skaičių dėsnis)*** *Tegu $(X_n)$ yra seka nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių a.d. Tuomet*

$$n^{-1}(X_1 + \cdots + X_n) \xrightarrow{b.t.} EX_1.$$

*tada ir tik tada, kai $E|X_1| < \infty$.*

***2.10 teiginys.*** ***(Centrinė ribinė teorema)*** *Tegu $(X_n)$ yra seka nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių a.d. su vidurkiu $\mu = EX_1$ ir baigtine dispersija $\sigma^2 = EX_1^2 < \infty$. Tuomet*

$$Z_n = n^{-1/2}(X_1 + \cdots + X_n - n\mu) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1).$$

## 2.7 Pratimai

***2.1 pratimas.*** Įsitikinkite, kad $\mathcal{F}_X$ yra $\sigma$ algebra.

***2.2 pratimas.*** Įrodykite 2.1 teiginį.

***2.3 pratimas.*** Įrodykite kad atsitiktinių dydžių lygybė beveik tikrai yra ekvivalentumo sąryšis.

***2.4 pratimas.*** Įrodykite, kad atsitiktinių dydžių $X$ ir $X$ skirstiniai sutampa, jei sutampa jų pasiskirstymo funkcijos.

***2.5 pratimas.*** Įrodykite, kad $\lambda F + (1 - \lambda)G$ yra pasiskirstymo funkcija, kai $F$ ir $G$ yra pasiskirstymo funkcijos, o $\lambda \in [0, 1]$. Ar sandauga $FG$ yra pasiskirstymo funkcija?

***2.6 pratimas.*** Įrodykite, kad tolydžiam atsitiktiniam dydžiui $X$,

$$P(\omega : X(\omega) = x) = 0.$$

***2.7 pratimas.*** Tegu $(X_n)$ yra atsitiktinių dydžių seka. Įsitikinkite, kad

(a) $\limsup_{n\to\infty} X_n$, yra atsitiktinis dydis;

(b) $\liminf_{n\to\infty} X_n$ yra atsitiktinis dydis;

(c) aibė $\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \ \text{egzistuoja}\}$ yra mati;

(d) $X(\omega) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} X_n(\omega), & \text{jei riba egzistuopja} \\ 0, & \text{kitur.} \end{cases}$.
Įsitikinkite, kad $X$ yra atsitiktinis dydis.

***2.8 pratimas.*** Įrodykite, kad $\lambda f + (1-\lambda)g$ yra tankio funkcija, kai $f$ ir $g$ yra tankio funkcijos, o $\lambda \in [0,1]$. Ar sandauga $fg$ yra tankio funkcija?

***2.9 pratimas.*** Tarkime, $X$ yra atsitiktinis dydis su tankio funkcija

$$f_X(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|},$$

kai $x \in \mathbb{R}$. Raskite $var(X)$.

***2.10 pratimas.*** Atsitiktinių dydžių

$$X^+ = \max\{0, X\}, \quad X^- = -\min\{0, X\}, \quad |X| = X^+ + X^-, \quad -X$$

pasiskirstymo funkcijas išreiškite atsitiktinio dydžio $X$ pasiskirstymo funkcija $F_X$.

***2.11 pratimas.*** Atvaizdis $d : S \times S \to \mathbb{R}$ vadinamas aibės $S$ metrika, jei yra teisingos šios savybės:

(i) $d(s,t) = d(t,s) \geq 0$ su visais $s, t \in S$,

(ii) $d(s,t) = 0$ tada ir tik tada, kai $s = t$,

(iii) $d(s,t) \leq d(s,u) + d(u,t)$ su visais $s, t, u \in S$.

(a) *Levi metrika.* Pasiskirstymo funkcijoms $F$ ir $G$, Levi metrika yra

$$d_L(F,G) = \inf\{\varepsilon > 0 : G(x-\varepsilon) \leq F(x) \leq G(x+\varepsilon), \text{visiems } x\}.$$

Įrodykite, kad $d_L$ yra pasiskirstymo funkcijų aibės metrika.

(b) *Pilnosios variacijos metrika.* Tegu $X$ ir $Y$ yra sveikareikšmiai atsitiktiniai dydžiai ir

$$d_{TV}(X,Y) = \sum_k |P(X=k) - P(Y=k)|.$$

Įrodykite, kad funkcija $d_{TV}$ tenkina pirmą ir trečią metrikos savybes ir $d_{TV}(X,Y) = 0$ tada ir tik tada, kai $P(X=Y) = 1$.

(c) Įrodykite, kad

$$d_{TV}(X,Y) = 2 \sup_{A \subset Z} |P(X \in A) - P(Y \in A)|.$$

***2.12 pratimas.*** Įrodykite, kad

$$\text{argmin}_{a \in \mathbb{R}} E(X-a)^2 = EX.$$

***2.13 pratimas.*** Tarkime, $X$ yra Puasono atsitiktinis dydis su parametru $\lambda$. Raskite $E(1/(X+1))$.

***2.14 pratimas.*** Tegu $X, Y$ yra nepriklausomi eksponentiniai atsitiktiniai dydžiai su parametru $\lambda$. Raskite $E|X-Y|$.

***2.15 pratimas.*** Tegu $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Žinodami, kad

$$Ee^{\lambda X} = \exp\left\{\frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2\right\}$$

su visais $\lambda \in \mathbb{R}$, išveskite:

(a) $EX^{2k} = \dfrac{(2k)!}{2^k k!}\,\sigma^{2k}$, $k = 1, 2, \dots$;

(b) $EX^{2k-1} = 0$, $k = 1, 2, \dots$.

***2.16*** ***pratimas.*** Įrodykite, kad Puasono atsitiktinio dydžio $X$ su paramatru $\lambda$ charakteristinė funkcija yra lygi

$$c_X(t) = \exp\{\lambda(e^{it} - 1)\},$$

$t \in \mathbb{R}$. Remdamiesi šia formule suskaičiuokite $EX^2, var(X), EX^3$.

***2.17*** ***pratimas.*** Tegu $X$ yra Bernulio atsitiktinis dydis, $P(X = 0) = 1 - p, P(X = 1) = p$. Tegu $Y = 1 - X$, o $Z = XY$. Raskite $P(X = x, Y = y)$ ir $P(X = x, Z = z)$, kai $x, y, z \in [0, 1]$.

***2.18*** ***pratimas.*** Įrodykite, kad a.d. $X \sim p(k; \lambda)$, generuojanti funkcija yra

$$g_X(s) = e^{\lambda(s-1)}, \quad s > 0.$$

***2.19*** ***pratimas.*** Tarkime $g(s)$ yra atsitiktinio dydžio generuojanti funkcija, kurios konvergavimo spindulys nemažesnis už 1. Įrodykite, kad funkcija $g(s)$ yra be galo daug kartų diferencijuojama.

***2.20*** ***pratimas.*** Įrodykite šią generuojančių funkcijų savybę:

> Jei $X_1, X_2$ yra nepriklausomi neneigiami sveikareikšmiai a.d., kurių generuojančios funkcijos yra $g_{X_i}(s), 0 \le s \le 1, i = 1, 2$, tai
>
> $$g_{X_1+X_2}(s) = P_{X_1}(s)P_{X_2}(s).$$

***2.21*** ***pratimas.*** Įsitikinkite, kad jei $X_1, \cdots, X_d$ yra vienoje tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ apibrėžti atsitiktiniai dydžiai, tai vektorius $(X_1, \dots, X_d)$ yra $\mathcal{F}/\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$-matus.

***2.22*** ***pratimas.*** Įrodykite 2.5 teiginį.

***2.23*** ***pratimas.*** Tarkime, vektoriaus $(X, Y)$ pasiskirstymo funkcija yra $F$. Įrodykite, kad

$$P(a < X \le b, c < Y \le d) = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c),$$

kai $a < b, c < d$.

***2.24*** ***pratimas.*** Ar funkcija $F(x, y) = 1 - \exp\{-xy\}, 0 \le x, y < \infty$ yra kokio nors atsitiktinio vektoriaus pasiskirstymo funkcija?

***2.25*** ***pratimas.*** Sukonstruokite dviejų įvykių pavyzdį,kurie būtų tarpusavyje nepriklausomi vieno tikimybinio mato atžvilgiu, bet priklausomi atžvilgiu kito.

***2.26*** ***pratimas.*** Įsitikinkite, kad poromis tarpusavio $P$-nepriklausomumas negarantuoja tarpusavio $P$-nepriklausomumo.

***2.27*** ***pratimas.*** Įsitikinkite, kad jei vektoriai $X = (X_1, \dots X_m)$ ir $Y = (Y_1, \dots, Y_d)$ yra nepriklausomi, tai nepriklausomi yra ir atsitiktiniai dydžiai $h(X), g(Y)$, kokios bebūtų Borelio funkcijos $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ ir $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$.

***2.28 pratimas.*** Įrodykite, kad atsitiktiniai dydžiai $X_1, \ldots, X_d$ yra tarpusavyje nepriklausomi tada ir tik tada, kai

$$P(X_1 \le x_1, \ldots, X_d \le x_d) = P(X_1 \le x_1) \cdots P(X_d \le x_d), \quad x_1, \ldots, x_d \in \mathbb{R}.$$

***2.29 pratimas.*** Tegu $X_i \sim \mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2$ yra nekoreliuoti atsitiktiniai dydžiai. Įrodykite, kad jie yra nepriklausomi. Apibendrinkite atsitiktiniams Gausiniams vektoriams.

***2.30 pratimas.*** Jei $X \sim \mathcal{N}(0, I_m)$ ($I_m = diag(1, \ldots, 1)$ yra $m \times m$ vienetinė matrica) ir $A, B$ yra $m \times m$ matricos, tai vektoriai $AX$ ir $BX$ yra nepriklausomi tada ir tik tada, kai $AB' = 0$.

***2.31 pratimas.*** Tegu $\tau$ yra eksponentinis atsitiktinis dydis su parametru $\lambda$. Raskite sąlyginį vidurkį $E(\tau|\tau < c)$.

***2.32 pratimas.*** Raskite atsitiktinio dydžio $Y$ sąlyginę tankio funkciją ir sąlyginį vidurkį atžvilgiu $X$, jei poros $(X, Y)$ tankio funkcija yra:

(a) $f(x, y) = \lambda^2 e^{-\lambda y}$, $0 \le x \le y < \infty$,

(b) $f(x, y) = xe^{-x(y+1)}$, $x, y \ge 0$.

***2.33 pratimas.*** Įrodykite, kad beveik visur konvergavimas yra invariantinis tolydinių transformacijų atžvilgiu: jei $X_n \xrightarrow{b.t.} X$ ir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yra tolydi funkcija, tuomet $f(X_n) \xrightarrow{b.t.} f(X)$.

***2.34 pratimas.*** Tegu $(X_n)$ yra nepriklausomų bernuli a.d. seka, $P(X_n = 1) = p_m, \quad P(X_m = 0) = 1 - p_m$. Įrodykite šiuos teiginius:

(a) $X_n \xrightarrow{P} 0$ tada ir tik tada, kai $p_n \to 0$;

(b) $X_n \xrightarrow{Lp} 0$ tada ir tik tada, kai $p_n \to 0$;

(c) $X_n \xrightarrow{b.t.} 0$ tada ir tik tada, kai $\sum_n p_n < \infty$.

# 3 skyrius

# Atsitiktiniai procesai

Atsitiktinius procesus galime apibrėžti dviem būdais. Pirmuoju - kaip atsitiktinių dydžių rinkinį indeksuotą kokia nors realiųjų skaičių aibe. Antruoju - kaip atsitiktinį kokios nors mačios realiojo argumento funkcijų erdvės elementą. Šiam apibrėžimui reikalingos tam tikros funkcinės analizės žinios. Pirmajam gi tokių žinių nereikia, tačiau tuomet galime kalbėti tik apie atsitiktinio proceso baigtiniamačius skirstinius, bet ne apie jų trajektorijų savybes, tokias kaip tolydumas ar diferencijuojamumas. Šiame skyriuje pateikti abu atsitiktinių procesų apibrėžimai, aprašytos jų skaitinės charakteristikos bei reguliarumo (matumo, diferencijuojamumo, integruojamumo) savybės.

## 3.1 Apibrėžimai

Tegu $T \subset \mathbb{R}$ yra duota aibė.

***3.1 apibrėžimas.*** *Tikimybinėje erdvėje* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *apibrėžtų atsitiktinių dydžių rinkinys*

$$(X_t, t \in T)$$

*vadinamas atsitiktiniu procesu.*

Atsitiktinio proceso $(X_t, t \in T)$ indeksų aibė $T$ dažnai vadinama laiko sritimi, o $t \in T$ interpretuojamas kaip laiko momentas. Jei aibė $T$ bus aiški iš konteksto, vietoj $(X_t, t \in T)$ dažnai rašysime tiesiog $(X_t)$.

Atsitiktinis procesas $(X_t, t \in T)$, kai $T \subset \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ vadinamas *diskretaus laiko procesu* arba *laikine seka*. Jei $T$ yra baigtinė aibė, tuomet $(X_t, t \in T)$ yra tiesiog atsitiktinis vektorius. Jei aibė $T$ yra tolydi, pavyzdžiui, $T = [0, 1]$, tai procesas $(X_t, t \in T)$ vadinamas *tolydaus laiko*.

Atsitiktinis procesas $(X_t, t \in T)$ yra dviejų argumentų $t \in T$ ir $\omega \in \Omega$ funkcija. Kai $t \in T$ fiksuotas,

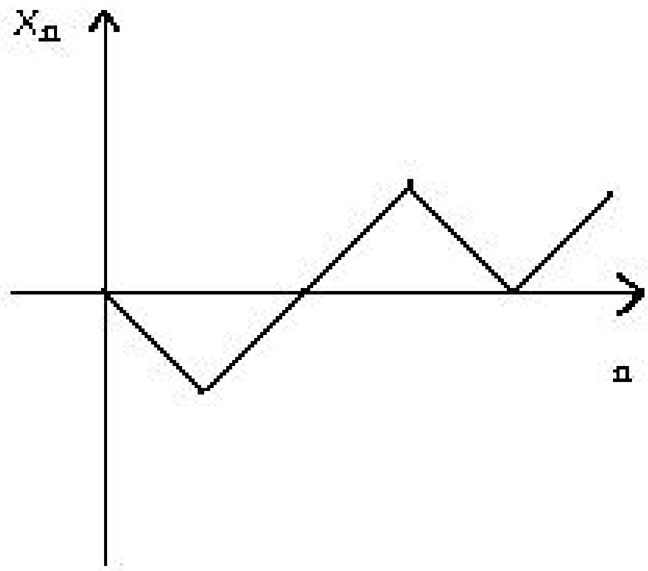
$$X_t = \{X_t(\omega),\ \omega \in \Omega\}$$

yra atsitiktinis dydis ir interpretuojamas kaip proceso būsena laiko momentu $t$. Kai fiksuotas „elementarusis įvykis" $\omega \in \Omega$, turime argumento $t \in T$ funkciją:

$$\{X_t(\omega),\ \ t \in T\} \quad \text{arba} \quad t \to X_t(\omega) : T \to \mathbb{R}.$$

Ši funkcija vadinama *proceso trajektorija* arba *realizacija*.

***3.1 pavyzdys.*** Bene paprasčiausias diskretaus laiko atsitiktinio proceso pavyzdys - atsitiktinis klaidžiojimas metant monetą. Dalelė startuoja nulinio laiko momentu koordinačių pradžioje (žr. 2.1 pav.). Kiekvienu laiko momentu $n = 1, 2, \ldots$ metama moneta ir dalelė juda per vienetą į dešinę iškritus „pinigui”, į kaire - iškritus „herbui”. $X_n$ yra dalelės padėtis po $n$-ojo monetos metimo, $n = 1, 2, \ldots$.




2.1 pav. Diskretaus laiko proceso trajektorija

***3.2 pavyzdys.*** Tegu $X$ ir $Y$ yra du nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai. Apibrėžkime tolydaus laiko atsitiktinį procesą $(X_t, t \geq 0)$:

$$X_t = tX + Y, \quad t \geq 0.$$

Šio proceso trajektorijos yra tiesės su atsitiktiniais koeficientais (*atsitiktinės tiesės*).

***3.3 pavyzdys. (Atvykimų procesas)*** Nagrinėkime klientų atvykimą į parduotuvę, matuodami laikus nuo vieno kliento atvykimo iki kito. Tegu tie laikai yra teigiami atsitiktiniai dydžiai $X_1, X_2, \ldots$. Imdami $t \in [0, \infty)$, apibrėžkime $N_t = k$, jei sveikasis skaičius $k$ yra toks, kad

$$X_1 + \cdots + X_k \leq t < X_1 + \cdots + X_{k+1}.$$

Tegu $N_t = 0$, jei $t < X_1$. Tuomet $N_t$ yra iki laiko momento $t$ (laiko intervale $[0, t]$) į parduotuvę atvykusių klientų skaičius. Pastebėkime, kad su kiekvienu $t \geq 0$, $N_t$ yra atsitiktinis dydis įgyjantis reikšmes aibėje $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}$. Taigi $\{N_t, t \geq 0)$ yra tolydaus laiko diskretus procesas. Jo trajektorijos yra nemažėjančios, tolydžios iš dešinės funkcijos ir didėjančios vienetiniais šuoliukais taškuose $X_1 + \cdots + X_k$. Be to, $N_t < \infty$ su visais $t \geq 0$ tada ir tik tada, kai $\sum_{k=1}^{\infty} X_k = \infty$.

***3.4 pavyzdys.*** Nagrinėkime diskretaus laiko atsitiktinį procesą $(X_t)$, kurio būsenų aibė yra $S = \{1, 2, 3\}$. Proceso dinamika (kitimas laike) aprašoma taip: iš būsenos 1 į būseną 2 procesas pereina su tikimybe 1. Iš būsenos 3 gali pereiti arba į 1, arba 2 su vienoda tikimybe $1/2$, o iš 2 peršoka į 3 su tikimybe $1/3$ arba lieka būsenoje 2. Tai yra Markovo grandinės pavyzdys. Jas detaliai nagrinėsime vėliau.

Kaip jau minėjome, kitaip atsitiktinį procesą galime apibrėžti panaudoję atsitiktinės funkcijos sampratą. Priminsime, kad $\mathbb{R}^T$ žymi visų funkcijų $f : T \to \mathbb{R}$ aibę:

$$\mathbb{R}^T := \{f : T \to \mathbb{R}\}.$$

Jei $T = \{1, \ldots, d\}$, tuomet $\mathbb{R}^T = \mathbb{R}^d$ yra tiesiog $d$-mačių vektorių aibė. Jei $T = \mathbb{Z}$ arba $T = \mathbb{N}$, tuomet $\mathbb{R}^T$ yra visų galimų skaitinių sekų aibė, atitinkamai

$$\mathbb{R}^{\mathbb{Z}} := \{(x_j, j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)\}, \quad \mathbb{R}^{\mathbb{N}} := \{(x_j, j = 0, 1, 2, \ldots)\}.$$

Taigi atsitiktinį procesą $(X_t, t \in T)$ atitinka atvaizdis

$$\omega \to \{X_t(\omega),\ \ t \in T\} : \Omega \to \mathbb{R}^T,$$

apibrėžtas aibėje $\Omega$ ir reikšmes įgyjantis funkcijų erdvėje $\mathbb{R}^T$. Norėdami atsitiktinį procesą interpretuoti ar apibrėžti kaip atsitiktinį aibės $\mathbb{R}^T$ elementą (kaip atsitiktinę funkciją), aibėje $\mathbb{R}^T$ turime apibrėžti $\sigma$ algebrą kurios atžvilgiu atvaizdis $\omega \to X(\omega) = (X_t(\omega), t \in T)$ būtų matus.

Aibės $\mathbb{R}^T$ $d$-mate cilindrine aibe vadinsime aibę

$$A = \{x \in \mathbb{S}^T : x(t_1) \in E_1, \ldots, x(t_d) \in E_d\},$$

kai $t_1, \ldots, t_d \in T$, $E_i \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, i = 1, \ldots, d$. Cilindrinė aibės $\mathbb{R}^T$ $\sigma$ algebra yra $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}^T$:

$$\mathcal{C}_{\mathbb{R}}^T = \sigma\{1 - \text{mačiai stačiakampiai}).$$

Pagal $\sigma$ algebros apibrėžimą bet kuri baigtiniamatė cilindrinė aibė priklauso $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}^T$.

***3.2 apibrėžimas.*** *Atsitiktine realiąja funkcija, apibrėžta aibėje $T$, vadinsime atvaizdį $X : \Omega \to \mathbb{R}^T$, kuris yra $\mathcal{F}/\mathcal{C}_{\mathbb{R}}^T$-matus, t.y.*

$$\{\omega : X(\omega) \in C\} \in \mathcal{F}, \quad \textit{jei} \quad C \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}^T.$$

***3.1 teiginys.*** *Atsitiktinis procesas $X = (X_t, t \in T)$, kaip atvaizdis $X : \Omega \to \mathbb{R}^T$, yra $\mathcal{F}/\mathcal{B}_{\mathbb{R}}^T$-matus.*

*Įrodymas.* Jei $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ ir $C = \{x \in \mathbb{R} : x(t) \in E\}$ yra bet kuri vienmatė cilindrinė aibė, tai

$$X^{-1}(C) = \{omega : X_t(\omega) \in E\} = X_t^{-1}(E) \in \mathcal{F},$$

nes $X_t$ yra atsitiktinis dydis. ■

***3.3 apibrėžimas.*** *Atsitiktinė (realioji) funkcija apibrėžta aibėje $T$ yra $(\mathcal{F}, \mathcal{C}_{\mathbb{R}}^T)$-matus atvaizdis $X : \Omega \to \mathbb{R}^T$.*

Taigi atsitiktinis procesas yra kartu ir atsitiktinė funkcija. Atvirkščiai yra taip pat. Apibrėžkime projektorius $\pi_t : \mathbb{R}^T \to \mathbb{R}$:

$$\pi_t x = x(t), \quad x \in \mathbb{R}^T.$$

***3.2 teiginys.*** *Funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}^T$ yra $(\mathcal{F}, \mathcal{C}_{\mathbb{R}}^T)$-matu tada ir tik tada, kai $\pi_t X : \Omega \to \mathbb{R}$ yra $(\mathcal{F}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-matus su kiekvienu $t \in T$.*

*Įrodymas.* Pakanka prisiminti, kad cilindrinę $\sigma$-algebrą generuoja vienmačtės cilindrinės aibės. ■

Taigi atsitiktiniu procesu galime vadinti bet kurį $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}^T/\mathcal{F}$-matų atvaizdį $X : \Omega \to \mathbb{R}^T$. Ši atsitiktinio proceso interpretacija leidžia kalbėti apie įvairias procesų trajektorijų savybes, pavyzdžiui, trajektorijų tolydumą, diferencijuojamumą ir pan. Tarkime, mus domina atsitiktinio proceso $X = (X_t, t \in T)$ trajektorijų savybė, kurią aprašo aibė $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^T$. Pati $\mathbb{U}$ gali nepriklausyti (o dažniausiai ir nepriklauso) $\sigma$ algebrai $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}^T$. Todėl nagrinėkime susiaurintą $\sigma$ algebrą $\mathbb{U} \cap \mathcal{B}_{\mathbb{R}}^T := \{U \cap A : A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}^T\}$. Tuomet pora $(\mathbb{U}, \mathbb{U} \cap \mathcal{B}_{\mathbb{R}}^T)$ yra mati erdvė (žr. 3.2 pratimą).

***3.4 apibrėžimas.*** *Atsitiktiniu procesu su trajektorijomis aibėje $\mathbb{U}$ vadinsime atvaizdį $X : \Omega \to \mathbb{U}$, kuris yra $\mathcal{F}/\mathbb{U} \cap \mathcal{B}_{\mathbb{R}}^T$-matus.*

***3.3 teiginys.*** *Funkcija $X = (X_t, t \in T) : \Omega \to \mathbb{U}$ yra $\mathcal{F}/\mathbb{U} \cap \mathcal{B}^T$– mati tada ir tik tada, kai su kiekvienu $t \in T$, $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$ yra $\mathcal{F}/\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-matus atvaizis.*

*Įrodymas.* Kadangi $X(\omega) \in \mathbb{U}$, tai $\{\omega : X(\omega) \in \mathbb{U} \cap A\} = \{\omega : X(\omega) \in A\}$ su kiekviena $A \in \mathcal{B}^T$. Kitaip tariant, jei $X : \Omega \to \mathbb{U}$ tai $X$ yra $\mathcal{F}/\mathbb{U} \cap \mathcal{B}^T$-matus atvaizdis tada ir tik tada, kai jis yra $\mathcal{F}/\mathcal{B}^T$-matus. ■

Keletas pavyzdžių paaiškins, kaip aibės $\mathbb{U}$ parinkimas atspindi proceso trajektorijų savybes. Tegu $T = [a, b]$ ir $\mathbb{U} := C(T) = C[a, b]$ – visų tolydžių funkcijų $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ aibė. Taigi atsitiktinio proceso $X = (X_t, t \in [a, b])$ trajektorijos yra tolydžios, jei tas procesas yra atsitiktinis erdvės $C[a, b]$ elementas. Kartais tai matyti tiesiog iš proceso apibrėžimo. Taip, pavyzdžiui, atsitiktinis procesas $X = (X_t, t \geq 0)$:

$$X_t = \eta t + \xi, \quad t \geq 0,$$

kai $\eta, \xi$ yra atsitiktiniai dydžiai yra akivaizdžiai procesas su tolydžiomis trajektorijomis (su kiekvienu $t \geq 0$, $X_t = \eta t + \xi$ yra atsitiktinis dydis ir $X : \Omega \to C[0, \infty)$, nes $\{\omega : X(\omega) \in C[0, \infty)\} = \Omega$).

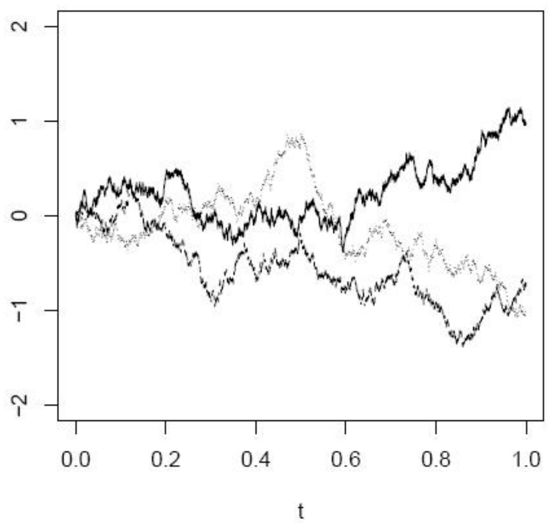
Kiti analogiški pavyzdžiai: $\mathbb{U} = B[a, b]$ – aprėžtų funkcijų $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ aibė; $T = (0, \infty)$ ir $\mathbb{U} = L_1(T)$ – Lebego prasme integruojamų funkcijų $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ aibė; $T = \mathbb{N}$ ir $\mathbb{U} = c_0$ – konverguojančių į nulį skaitinių sekų aibė arba $\mathbb{U} = \ell_2$ – kvadratu sumuojamų skaitinių sekų aibė.

Norėdami įsitikinti, kad atsitiktinio proceso $X = (X_t, t \in T)$ beveik visos trajektorijos turi savybę, kurią aprašo aibė $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^T$, pakanka įrodyti, kad $X \in \mathbb{U}$ su tikimybe vienas. Pavyzdžiui, atsitiktinio proceso $X = (X_n, n \in \mathbb{N})$ beveik visos trajektorijos konverguoja prie nulio, jei $P(X \in c_0) = 1$. Kadangi $P(\omega : X(\omega) \in c_0) = P(\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = 0)$, tai $X \in c_0$ beveik tikrai reiškia, kad $X_n \to 0$ beveik tikrai.

Tačiau patikrinti, kad $X \in \mathbb{U}$ su tikimybe vienas, ne visada yra paprasta tolydaus laiko procesams, nes gali iškilti matumo problemos. Įvykis $\{\omega : X(\omega) \in \mathbb{U}\}$ nebūtinai yra matus. Pavyzdžiui, atsitiktiniam procesui $X = (X_t, t \in [0, 1])$, aibė

$$\{\omega : X(\omega) \in C[0, 1]\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{|t-s|<1/k} \{\omega : |X_t(\omega) - X_s(\omega)| \leq 1/n\}$$

nebūtinai priklauso $\mathcal{F}$. Šią matumo problemą detaliau aptarsime kiek vėliau.




2.2 pav. Tolydaus laiko proceso trajektorijos

Taigi turime atsitiktinio proceso apibrėžimą ir atsitiktinio proceso su aprašytomis trajektorijų savybėmis apibrėžimą.

## 3.2 Atsitiktinių procesų skirstiniai

Nagrinėkime atsitiktinį procesą $(X_t, t \in T), T \subset \mathbb{R}$. Fiksuotu laiko momentu $t_1 \in T$, $X_{t_1}$ yra atsitiktinis dydis. Jo pasiskirstymo funkcija yra

$$F_{t_1}(x_1) = P(\omega : X_{t_1}(\omega) \le x_1), \quad x_1 \in \mathbb{R}.$$

Pasiskirstymo funkcijų rinkinys $\{F_{t_1}, t_1 \in T\}$ vadinamas atsitiktinio proxceso $(X_t, t \in T)$ *pirmosios eilės pasiskirstimu.* Analogiškai, jei $t_1 < t_2 \in T$, tai $X_{t_1}, X_{t_2}$ yra du atsitiktiniai dydžiai. Jų bendra pasiskirstymo funkcija yra

$$F_{t_1,t_2}(x_1, x_2) = P(\omega : X_{t_1}(\omega) \le x_1, X_{t_2}(\omega) \le x_2).$$

Rinkinys $\{F_{t_1,t_2}, t_1 < t_2 \in T\}$ sudaro proceso *antrosios eilės pasiskirstimą.*

Jei $t_1 < \cdots < t_n$ yra baigtinis parametro $t$ skirtingų reikšmių rinkinys, tai atsitiktinio vektoriaus $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ pasiskirstymo funkcija $F_{t_1,\ldots,t_n}$ yra

$$F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n) = P(\omega : X_{t_1}(\omega) \le x_1, \ldots, X_{t_n}(\omega) \le x_n)$$

ir jų šeima, kai $t_1 < \cdots < t_n \in T$ vadinama *$n$-tosios eilės pasiskirstimu.* Visų eilių pasiskirstimų rinkinys,

$$\{F_{t_1,\ldots,t_n} : \ t_1 < t_2 \cdots < t_n \in T, \ n \ge 1\} \tag{3.1}$$

vadinama proceso $(X_t, t \in T)$ *baigtiniamačių pasiskirstymo funkcijų šeima.* Ji pilnai aprašo atsitiktinį procesą.

Funkcijų šeima $\{F_{t_1,\ldots,t_n} : \ t_1 < t_2 \cdots < t_n \in T, \ n \ge 1\}$, vadinama suderinta pasiskirstymo funkcijų šeima, jei

(i) $F_{t_1,\ldots,t_n}$ yra $n$-mačio atsitiktinio vektoriaus pasiskirstymo funkcija;

(ii) jei $\{t_{k_1} < \cdots < t_{k_m}\} \subset \{t_1 < \cdots < t_n\}$, tuomet $F_{t_{k_1},\ldots,t_{k_m}}$ yra pasiskirstymo funkcijos $F_{t_1,\ldots,t_n}$ marginalinė funkcija atitinkanti indeksus $t_{k_1}, \ldots, t_{k_m}$, t.y.

$$\lim_{x_i\to\infty,\quad i\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{i_1,\ldots,k_m\}} F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1,\ldots,x_n) = F_{t_{k_1},\ldots,t_{k_m}}(x_{k_1},\ldots,x_{k_m}).$$

***3.1 teorema.* (Kolmogorovo)** *Jei $\{F_{t_1,\ldots,t_n}: \ t_1 < t_2 \cdots < t_n \in T, \ n \geq 1\}$, yra suderinta pasiskirstymo funkcijų šeima, tai egzistuoja tikimybinė erdvė $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ir toks joje apibrėžtas atsitiktinis procesas $(X_t, t \in T)$, kurio baigtiniamačių pasiskirstymo funkcijų šeima sutampa su $\{F_{t_1,\ldots,t_n}: \ t_1 < t_2 \cdots < t_n \in T, \ n \geq 1\}$.*

***3.5 pavyzdys.* *(Chaoso procesas)*** Tegu $F$ yra bet kuri pasiskirstymo funkcija, apibrėžta realiųjų skaičių aibėje $\mathbb{R}$. Imdami skirtingus $t_1 < \cdots < t_m \in T$ ir bet kuriuos $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$, apibrėžkime

$$F_{t_1,t_2,\ldots,t_m}(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \prod_{k=1}^{m} F(x_k),$$

Atitinkama baigtiniamačių pasiskirstymo funkcijų šeima apibrėžia atsitiktinį procesą $(X_t, t \in T)$, kurį galime interpretuoti kaip *chaosą*, nes visi procesą sudarantys atsitiktiniai dydžiai yra tarpusavyje nepriklausomi.

Jei atsitiktinį procesą apibrėžiame kaip atsitiktinę funkciją, galime kalbėti apie jos skirstinį. Tegu $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^T$ ir $X = (X_t, t \in T) : \Omega \to \mathbb{U}$ yra $\mathcal{F}/\mathbb{U} \cap \mathcal{B}_{\mathbb{R}}^T$-matus atvaizdis. Jo skirstiniu vadiname tikimybinį matą $P_X$, apibrėžtą aibėms $A \in \mathbb{U} \cap \mathcal{B}_{\mathbb{R}}^T$:

$$P_X(A) = P(\omega : X(\omega) \in A).$$

Jei $A$ yra cilindrinė aibė, tarkime, $A = (-\infty, x] \times \mathbb{R}^{T\setminus\{t\}}$, tai

$$P_X(A) = P(X_t \leq x).$$

***3.2 teorema.**** *Tarkime $X = (X_t, t \in T)$ ir $Y = (Y_t, t \in T)$ yra du atsitiktiniai procesai su trajektorijomis aibėje $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^T$. Tuomet $P_X = P_Y$ tada ir tik tada, kai procesų $(X_t, t \in T)$ ir $(Y_t, t \in T)$ baigtiniamačiai skirstiniai sutampa.*

*Įrodymas.* Jei $P_X = P_Y$, tuomet $P_X(C) = P_Y(C)$ su kiekviena cilindrine aibe $C \in \mathbb{R}^T$. Imdami $C = \{f \in \mathbb{R}^T : f(t_1) \leq x_1, \ldots, f(t_d) \leq x_d\}$ gauname

$$P(X_{t_1} \leq x_1, \ldots, X_{t_d} \leq x_d) = P(Y_{t_1} \leq x_1, \ldots, Y_{t_d} \leq x_d).$$

Taigi procesų baigtiniamačiai skirstiniai sutampa.

Pakankamumo įrodymui pasinaudosime aibių $\pi - \lambda$-sistemų savybėmis. Nagrinėkime cilindrinių aibių šeimą

$$\mathcal{C} = \{f \in \mathbb{R}^T : (f(t_1), \ldots, f(t_d)) \in B\}, \quad d \in \mathbb{N}, B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}, t_1, \ldots, t_d \in T.$$

Ji yra uždara sankirtų atžvilgiu. Taigi yra $\pi$-sistema.

Toliau nagrinėkime tokių aibių $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^T$ sistemą $\mathcal{U}$, kad $P_X(U) = P_Y(U)$. Įsitikinkime, kad ji yra $\lambda$-sistema: (i) jai priklauso $\mathbb{R}^T$; (ii) uždara atžvilgiu papildymo; (iii) uždara atžvilgiu monotoniniškai didėjančių ribų.

Kadangi $P_X(\mathbb{R}^T) = 1 = P_Y(\mathbb{R}^T)$, tai $\mathbb{R}^T \in \mathcal{U}$. Jei $U \in \mathcal{U}$, tai $P_X(U^c) = 1 - P_X(U) = 1 - P_Y(U) = P_Y(U^c)$, taigi $U^c \in \mathcal{U}$. Galiausiai, jei turime monotoniškai didėjančią aibių seką $(U_n) \subset \mathcal{U}$ ir $U_n \uparrow U$, tuomet $P_X(U_n) \uparrow P_X(U)$ ir $P_Y(U_n) \uparrow P_Y(U)$. Bet $P_X(U_n) = P_Y(U_n)$, todėl $P_X(U) = P_Y(U)$. Taigi $\mathcal{U}$ yra $\lambda$-sistema.

Kadangi $\mathcal{C} \subset \mathcal{U}$ ir $\mathcal{C}$ yra $\pi - \lambda$-sistema, tai ir $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{U}$. Kita vertus $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}^T$. Taigi $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}^T \subset \mathcal{U}$. Vadinasi, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}^T = \mathcal{U}$ ir $P_X(U) = P_Y(U)$ su visais $U \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}^T$. Taigi $P_X = P_Y$. ■

Atsitiktinio proceso baigtiniamačiai skirstiniai aprašo įvairius jo skaitinius parametrus bei įvairias trajektorijų savybes.

Atsitiktinio proceso $X = (X_t, t \in T)$ *vidurkio funkcija* (arba tiesiog *vidurkis*) yra funkcija $\mu_X : T \to \mathbb{R}$,

$$\mu_X(t) = EX_t, \ \ t \in T.$$

Vidurkio funkciją, kuri charakterizuoja vidutinę ar tipinę proceso trajektoriją, aprašo proceso pirmos eilės pasiskirstymas, nes $\mu_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, \mathrm{d}F_t(x)$.

Atsitiktinis procesas $X = (X_t, t \in T)$ vadinamas *antrosios eilės* procesu, jei $EX_t^2 < \infty$ su visais $t \in T$. Antrosios eilės procesui $X = (X_t, t \in T)$ apibrėžiami šie parametrai:

- *autokoreliacinė funkcija* $Q_X : T^2 \to \mathbb{R}$,

$$Q_X(t,s) = EX_tX_s, \ \ t,s \in T,$$

  Funkcija $(Q_X(t,t), t \in T)$ dažnai vadinama proceso $(X_t, t \in T)$ *vidutine galia.*

- *autokovariacinė funkcija* $\Gamma_X : T^2 \to \mathbb{R}$,

$$\Gamma_X(t,s) = cov_X(t,s) = E[(X_t - \mu_X(t))(X_s - \mu_X(s))], \ \ t,s \in T,$$

- *variacijos funkcija* $\sigma_X^2 : T \to \mathbb{R}$,

$$\sigma_X^2(t) = cov_X(t,t) = var X_t, \ \ t \in T.$$

- *autokoreliacijos keoficientas* $\rho_X : T^2 \to \mathbb{R}$,

$$\rho_X(t,s) = \frac{\Gamma_X(t,s)}{[\Gamma_X(t,t)\Gamma_X(s,s)]^{1/2}}, \quad s,t \in T.$$

Tiek autokoreliacinę funkciją, tiek autokovariacinę funkciją aprašo proceso antrosios eilės pasiskirstymas.

Autokovariacinės funkcijos savybės surinktos šiame teiginyje.

***3.4 teiginys.*** *Tarkime, $X = (X_t, t \in T)$ yra atsitiktinis procesas su nuliniu vidurkiu ir autokovariacine funkcija $\Gamma = \Gamma_X$. Tada teisingos šios savybės:*

(1) $\Gamma(s,t) = \Gamma(t,s)$ *ir* $\Gamma(t,t) \geq 0$.

(2) *Funkcija* $\Gamma$ *yra neneigiamai apibrėžta, t.y.,*

$$\sum_{j,k=1}^{n} \Gamma(t_j, t_k) a_j a_k \geq 0$$

*su visais* $t_i \in T, a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$ *ir visais* $n \in \mathbb{N}$*;*

(3) $|\Gamma(s,t)| \leq \Gamma^{1/2}(s,s)\Gamma^{1/2}(t,t)$*;*

(4) *dviejų autokovariacinių funkcijų suma yra autokovariacinė funkcija;*

(5) *dviejų autokovariacinių funkcijų sandauga yra autokovariacinė funkcija;*

(6) *su bet kuria realiąja funkcija $\sigma : T \to \mathbb{R}$, funkcija $(s,t) \to \sigma(s)\sigma(t)$ yra autokovariacinė funkcija.*

*Įrodymas.* Pimoji savybė gaunama tiesiog iš autokoreliacijos funkcijos apibrėžimo. Norėdami įrodyti (2) savybę, apibrėžkime atsitiktinį dydį $Y = \sum_{k=1}^{n} a_k X_{t_k}$. Galime suskaičiuoti

$$EY^2 = \sum_{j,k=1}^{n} a_j a_k \Gamma(t_j, t_k) \geq 0.$$

Trečioji savybė yra tiesiog perrašyta Cauchy-Schwarz'o nelygybė. Norėdami įrodyti $(4)$, nagrinėkime du tokius procesus $X$ ir $Y$, kuriems atsitiktiniai dydžiai $X_1(t)$ ir $X_2(t)$ yra nepriklausomi su bet kuriuo $t \in T$ ir kurių autokovariacinės funkcijos yra atitinkamai $\Gamma_1$ ir $\Gamma_2$. Tuomet sumos $X+Y$ autokovariacinė funkcija yra $\Gamma_1 + \Gamma_2$. (Įsitikinkite!) Kita savybė įrodoma analogiškai, suskaičiuojant sandaugos $XY$ autokoreliacinę funkciją. Galiausiai (6) savybės įrodymui nagrinėjamre procesą $X_t = \sigma(t)Z, t \in T$. Čia a.d. $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.
■

Kaip jau minėjome, baigtiniamačiai atsitiktinio proceso skirstiniai aprašo ir tam tikras trajektorijų savybes. Paprasčiausia apibrėžti atsitiktinio proceso tolydumą pagal tikimybę.

***3.5 apibrėžimas.*** *Atsitiktinis procesas $(X_t, t \in T)$ vadinamas tolydžiu pagal tikimybę taške $t_0 \in T$, jei su kiekvienu $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{h \to 0} P(|X_{t_0+h} - X_{t_0}| > \varepsilon) = 0.$$

*Jei procesas tolydus pagal tikimybę kiekviename taške, tai jis vadinamas tiesiog tolydžiu pagal tikimybę.*

***3.6 apibrėžimas.*** *Tegu $p > 0$. Atsitiktinis procesas $(X_t, t \in T)$ vadinamas tolydžiu $p$-ojo momento prasme taške $t_0 \in T$, jei su kiekvienu $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{h \to 0} E|X_{t_0+h} - X_{t_0}|^p = 0.$$

*Jei procesas tolydus $p$-ojo momento prasme kiekviename taške, tai jis vadinamas tiesiog tolydžiu $p$-ojo momento prasme (kvadratinio vidurkio prasme, kai $p = 2$).*

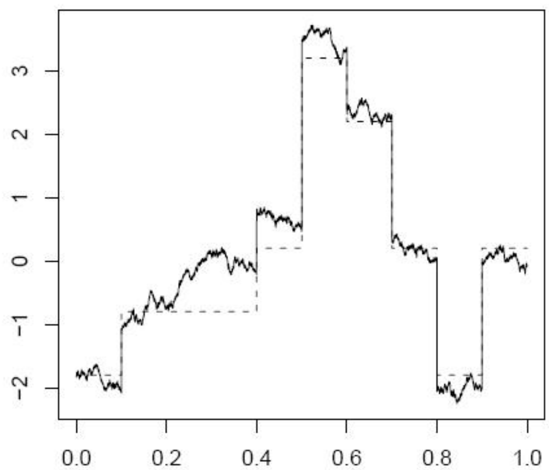
Pritaikę Čebyševo nelygybę matome, kad tolydumas $p$-ojo momento prasme yra stipresnis už tolydumą pagal tikimybę:

$$P(|X_{t_0+h} - X_{t_0}| > \varepsilon) = P(|X_{t_0+h} - X_{t_0}|^p > \varepsilon^p) \leq \varepsilon^{-p} E(|X_{t_0+h} - X_{t_0}|^p),$$

jei $\varepsilon > 0$ ir $p > 0$. Panašiai galime apibrėžti diferencijuojamumą pagal tikimybę: procesas $(X_t)$ yra diferencijuojamas pagal tikimybę taške $t_0$ jei egzistuoja riba

$$\lim_{h \to 0} \frac{X_{t_0+h} - X_{t_0}}{h} := X'_{t_0}$$

pagal tikimybę. Riba $X'_{t_0}$ vadinama proceso išvestine pagal tikimybę taške $t_0$.




2.3 pav. Tolydaus pagal tikimybę proceso realizacija

Kad ne visas atsitiktinio proceso trajektorijų savybes galima aprašyti baigtiniamačiais skirstiniais paaiškinsime pavyzdžiu.

***3.6 pavyzdys.*** Tegu $\Omega = [0, 1]$ ir $P$ yra tolygusis intervalo $[0, 1]$ skirstinys. Apibrėžkime atsitiktinius procesus $(X_t, t \in [0, 1])$ ir $(Y_t, t \in [0, 1])$:

$$X_t(\omega) = 0 \quad \text{su visais} \quad t, \omega \in [0, 1]$$

$$Y_t(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{kai} \quad t = \omega \\ 0, & \text{kai} \quad t \neq \omega \end{cases}$$

Galima įsitikinti, kad abu procesai turi vienodus baigtiniamačius skirstinius:

$$F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{kai visi} \quad x_j \geq 0 \\ 0, & \text{kitur} \end{cases}$$

Tačiau

$$P(\omega : X_t(\omega) < 1 \quad \text{su visais} \quad t \in [0, 1]) = P(\Omega) = 1$$

tuo tarpu

$$P(\omega : Y_t(\omega) < 1 \quad \text{su visais} \quad t \in [0, 1]) = P(\emptyset) = 0$$

Taip pat matome, kad

$$P((X_t) \quad \text{tolydus intervale} \quad [0, 1]) = 1$$
$$P((Y_t) \quad \text{tolydus intervale} \quad [0, 1]) = 0.$$

Šiame paprastame pavyzdyje nagrinėjamų įvykių tikimybės nėra aprašomos baigtiniamačiais skirstiniais. Taigi vien Kolmogorovo teoremos nepakanka norint analizuoti atsitiktinius procesus. Mat tokios geometrinės trajektorijų savybės kaip tolydumas, diferencijuojamumas, integruojamumas ir pan., susijusios su visa proceso trajektorija, t.y. su reikšmėmis $X_t$ kiekvienam laiko momentui $t \in T$. Tuo atveju, kai $T$ yra neskaiti aibė kyla matumo problemų. Nagrinėjami įvykiai gali būti nematūs. Pavyzdžiui, jei $T = [a, b]$, $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ - bet kuri Borelio aibė, tai įvykis

$$\{\omega \in \Omega : X_t(\omega) \in A \quad \text{su visais} \quad t \in T\} = \bigcap_{t \in T} \{\omega \in \Omega : X_t \in A\}$$

yra neskaitaus skaičiaus mačių įvykių sankirta. Nors kiekvienas iš įvykių $\{\omega \in \Omega : X_t \in A\}$ yra matus (priklauso $\mathcal{F}$) $\sigma$ algebros apibrėžimas negarantuoja, kad jų neskaiti sankirta bus mati. Taigi norėdami analizuoti tas atsitiktinio proceso trajektorijų savybes, kurių aprašymui rekia kontroliuoti reikšmes kiekvienu laiko momentu $t \in T$, turime ieškoti papildomų priemonių, nei suteikia baigtiniamačiai skirstiniai. Laimei, tam yra galimybė modifikuoti procesus, nekeičiant jų baigtiniamačių skirstinių.

## 3.3 Klasifikavimas pagal skirstinius

Šiame skyrelyje klasifikuojami atsitiktiniai procesai pagal savybes, aprašomas baigtiniamačiais skirstiniais.

### Gauso procesai

***3.7 apibrėžimas.*** *Atsitiktinis procesas $X = (X_t, t \in T)$ yra Gauso (arba normalusis), jei visi jo baigtiniamačiai skirstiniai yra Gauso (normaliniai).*

***3.7 pavyzdys.*** Tegu $X, Y$ yra normaliniai atsitiktiniai dydžiai. Tuomet procesas $X_t = tX + Y, t \geq 0$ yra Gauso.

***3.5 teiginys.*** *Gauso procesą pilnai aprašo jo vidurkio funkcija ir autokovariacinė funkcija šia prasme: jei $m : T \to \mathbb{R}$ yra bet kuri funkcija, o simetrinė funkcija $\Gamma : T \times T \to \mathbb{R}$ yra neneigiamai apibrėžta, tai egzistuoja Gauso procesas su vidurkio funkcija $m$ ir autokovariacine funkcija $\Gamma$.*

*Įrodymas.* Įrodoma remiantis Kolmogorovo teorema, nes daugiamačius Gauso vektorius vienareikšmiškai aprašo vidurkio vektorius ir kovariacijų matrica. ■

***3.6 teiginys.*** *Atsitiktinis procesas $X = (X_t, t \in T)$ yra Gauso tada ir tik tada, kai su bet kuriuo $n \geq 1$ ir bet kuriais rinkiniais $t_1, \ldots, t_n$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ atsitiktinis dydis $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k X_{t_k}$ yra Gauso.*

*Įrodymas.* Paliekame vietoj pratimo. ■

***3.8 pavyzdys. (Gauso baltasis triukšmas)*** Nagrinėkime procesą $X = (X_t, t \in \mathbb{Z})$, kai $X_t, t \in \mathbb{Z}$ yra nepriklausomi normaliniai atsitiktiniai dydžiai su vienodu pasiskirstymu $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Tada procesas $X$ yra Gauso procesas su vidurkio funkcija

$$m_X(t) = 0, \quad t \in \mathbb{Z},$$

ir kovariacine funkcija

$$\Gamma_X(s, t) = \begin{cases} \sigma^2, & \text{kai } s = t \\ 0, & \text{kai } s \neq t, \end{cases} \qquad s, t \in \mathbb{Z}.$$

Šitaip apibrėžtas procesas vadinamas Gauso baltuoju triukšmu.

***3.9* *pavyzdys.* (Vynerio procesas)** Tarkime, $T$ yra arba uždaras intervalas $[0.a]$, arba aibė $[0,\infty)$. Imdami $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ ir $x_0 = 0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ apibrėžkime

$$F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1,\ldots,x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_{t_1,\ldots,t_n}(u_1,\ldots,u_n)\,\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_n,$$

o

$$f_{t_1,\ldots,t_n}(u_1,\ldots,u_n) = \prod_{k=1}^{n}(2\pi(t_k - t_{k-1}))^{-1/2}\exp\Big\{-\frac{(u_k-u_{k-1})^2}{2(t_k-t_{k-1})}\Big\};$$

čia $t_0 = u_0 = 0$. Galime patikrinti, kad pasiskirstymo funkcijų šeima $\{F_{t_1,\ldots,t_n}, 0 \le t_1 < \cdots < t_n \in T,\ \ n \ge 1\}$ tenkina Kolmogorovo 3.1 teoremos sąlygas. Taigi egzistuoja atsitiktinis procesas, pažymėkime jį $(W_t, t \in T)$, kurio baigtiniamačių pasiskirstymo funkcijų šeima sutampa su $\{F_{t_1,\ldots,t_n}, t_1 < \cdots < t_n \in T, n \ge 1\}$. Gautasis procesas vadinamas Vynerio arba *Brauno judesio procesu*.

## Stacionarūs procesai

Daugelio svarbių atsitiktinių procesų baigtiniamačiai skirstiniai nepriklauso nuo laiko postūmio. Todėl natūralu juos apjungti į vieną klasę. Primename, kad nagrinėjame atsitiktinius procesus, kurių indeksų aibė $T$ yra realiųjų skaičių intervalas arba sveikųjų skaičių aibė.

***3.8* *apibrėžimas.*** *Atsitiktinis procesas $X = (X_t, t \in T)$ vadinamas stipriai stacionariu (stacionariu siaurąja prasme), jei atsitiktinių vektorių*

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_m})$$

*ir*

$$(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \ldots, X_{t_m+h})$$

*skirstiniai sutampa kokie bebūtų $t_1 < t_2 < \cdots < t_m \in T$ ir toks $h > 0$, kad $t_1 + h, \ldots, t_m + h \in T$.*

Stipriai stacionaraus atsitiktinio proceso $(X_t, t \in T)$, atsitiktiniai dydžiai $X_t, t \ge 0$, yra vienodai pasiskirstę. Tikrai, imdami $t < s$, turime

$$F_t(x) = P(X_t \le x) = P(X_{t+(s-t)} \le x) = F_s(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Taigi a.d. $X_t$ ir $X_s$ pasiskirstymo funkcijos sutampa. Kadangi proceso vidurkį aprašo pirmos eilės skirstinys, tai stacionaraus proceso vidurkio funkcija yra konstanta.

***3.7* *teiginys.*** *Stacionaraus proceso $(X_t, t \in T)$ kovariacinė funkcija $\Gamma(s,t)$, $s > t$, priklasuso tik nuo skirtumo $s - t$.*

*Įrodymas.* Tarkime, $EX_t = 0$ su kiekvienu $t \in T$. Jei $s > t$, tai

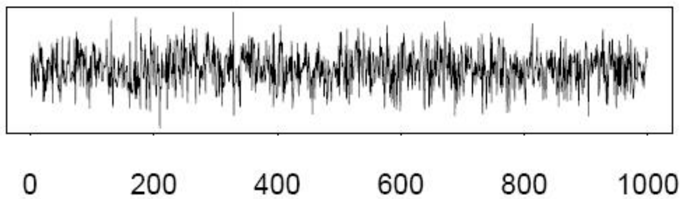
$$\Gamma(s,t) = E(X_s X_t) = \int xy\,\mathrm{d}F_{s,t}(x,y) = \int xy\,\mathrm{d}F_{s-t,0}(x,y) = \Gamma(s-t,0).$$

Taigi $\Gamma(s,t) = \Gamma(s-t,0)$ su visais $s > t$. ■

Stacionaraus atsitiktinio proceso autokovariacinį funkcija yra vieno argumento funkcija. Dėl šios priežasties, vietoj $\Gamma(h,0)$ rašysime tiesiog $\gamma(h)$.

***3.10 pavyzdys. (Stiprus baltasis triukšmas)*** Atsitiktinių dydžių seka $X_t, t \in \mathbb{Z}$ sudaryta iš centruotų ir nepriklausomų vienodai pasiskirs2iusių atsitiktinių dydžių: $EX_t = 0$, vadinama *stipriu baltuoju triukšmu*. Jo autokoreliacinė funkcija yra

$$Q_X(s,t) = EX_tX_s = \begin{cases} \sigma^2, & \text{jei} \quad s = t \\ 0, & \text{jei} \quad s \neq t. \end{cases} \tag{3.2}$$




2.3 pav. Stiprus baltasis triukšmas

Bendru atveju, atsitiktinis procesas su nuliniu vidurkiu ir (3.4) autokoreliacine funkcija nėra stacionarus. Tokia autokoreliacinė funkcija tik reiškia, kad atsitiktiniai dydžiai $X_t$ ir $X_s$ yra nekoreliuoti.

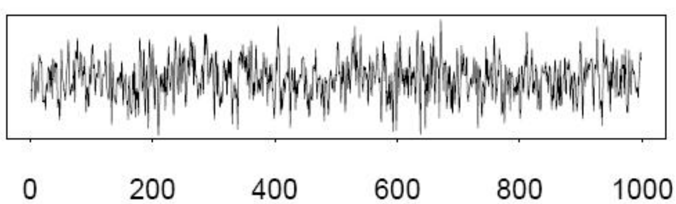
***3.11 pavyzdys.*** Tegu $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ yra stacionarus procesas, sveikasis skaičius $d \geq 1$ ir $a_1, \ldots, a_d$ – realieji skaičiai. Apibrėžkime

$$X_t = \sum_{k=0}^{d} a_k Y_{t-k}, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Atsitiktinis procesas $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ yra stacionarus (įsitikinkite!). Jis vadinamas $d$-eilės slenkančio vidurkio procesu (MA$(d)$ procesu). Jo autokoreliacinė funkcija yra

$$Q_X(s,t) = \sum_{k=0}^{d} \sum_{m=0}^{d} a_k a_m E(Y_{t-k}Y_{s-m}) = \sum_{m=0}^{d} a_m a_{t-s+m}, \tag{3.3}$$

kai $t \geq s$.




2.4 pav. Slenkančio vidurkio procesas MA$(1)$

Stipraus stacionarumo sąlyga dažniausiai yra per stiprus reikalavimas praktiniuose atsitiktinių procesų teorijos taikymuose. Todėl dažnai pakanka vadinamojo silpnojo stacionarumo.

***3.9 apibrėžimas.*** *Antrosios eilės atsitiktinis procesas $X = (X_t, t \in T)$ vadinamas silpnai stacionariu (stacionariu plačiąja prasme), jei su visais $t_1, t_2 \in T$ ir tokiais $h > 0$, kad $t_1 + h, t_2 + h \in T$,* *(i)* $E(X_{t_1}) = E(X_{t_2})$;

*(ii)* $cov(X_{t_1}, X_{t_2}) = cov(X_{t_1+h}, X_{t_2+h})$.

Silpnai stacionaraus atsititktinio proceso $X$ kovariacinė funkcija $\Gamma(t, t+h) = \Gamma(0, h)$. Taigi $\Gamma(t, s)$ priklauso tik nuo skirtumo $t - s$. Ir šiuo atveju vietoj $\Gamma(0, h)$ rašysime $\gamma(h)$.

***3.12* pavyzdys.** Atsitiktinis procesas $(X_t, t \in T)$, kurio vidurkis yra nulis, o autokoreliacinė funkcija

$$Q_X(s,t) = \begin{cases} \sigma^2, & \text{jei} \quad s = t \\ 0, & \text{jei} \quad s \neq t. \end{cases} \tag{3.4}$$

vdinamas *silpnu baltuoju triukšmu*. Akivaidu, kad toks procesas yra silpnai stacionarus.

***3.13* pavyzdys.** Apibrėžkime procesą

$$X_t = A\cos(\phi + \lambda t), \quad t \geq 0,$$

čia $A$ ir $\phi$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, $E(A) = 0$, $E(A^2) < \infty$, o $\phi$ yra tolygiai pasiskirstęs intervale $[0, 2\pi]$. Taip apibrėžtas procesas $(X_t, t \geq 0)$ yra antrosios eilės, jo vidurkio ir kovariacinės funkcijos yra (žr. 3.4 pratimą):

$$m_X(t) = 0 \quad t \geq 0, \tag{3.5}$$

ir

$$\Gamma_X(t,s) = \frac{1}{2}E(A^2)\cos(\lambda(t-s)), \quad t, s \geq 0. \tag{3.6}$$

Taigi procesas $(X_t)$ yra silpnai stacionarus.

***3.14* pavyzdys.** Tarkime, $\alpha$ ir $\beta$ yra nekoreliuoti atsitiktiniai dydžiai su nuliniais vidurkiais ir vienetinėmis dispersijomis. Imdami $\lambda \in [0, \pi]$ apibrėžkime

$$X_n = \alpha\cos(\lambda n) + \beta\sin(\lambda n), \quad n \geq 0.$$

Akivaizdu, kad $EX_n = 0$ su visais $n \geq 1$. Suskaičiuokime kovariacinę funkciją:

$$\begin{aligned}
\Gamma_X(m, m+n) &= E(X_n X_{n+m}) \\
&= E(\alpha\cos(\lambda m) + \beta\sin(\lambda m))(\alpha\cos(\lambda(m+n)) + \beta\sin(\lambda(m+n)) \\
&= E(\alpha^2\cos(\lambda m)\cos(\lambda(m+n))) + E(\beta^2\sin(\lambda m)\sin(\lambda(m+n))) \\
&= \cos(\lambda n),
\end{aligned}$$

nes $E(\alpha\beta) = 0$. Tagi $\Gamma_X(m, m+n)$ priklauso tik nuo $n$, todėl procesas $X$ yra silpnai stacionarus. Bendru atveju jis nėra stipriai stacionarus. Norėdami tai pastebėti, paimkime $\lambda = \pi/2$. Tuomet

$$(X_0, X_1, X_2, X_3, \dots) = (\alpha, \beta, -\alpha, -\beta, \dots).$$

Šis procesas bus stipriai stacionarus, tada ir tik tada, kai poros $(\alpha, \beta)$, $(\beta, -\alpha)$, $(-\alpha, -\beta)$ bus vienodai pasiskirsčiusios. Kita vertus, jei $\alpha$ ir $\beta$ yra standartiniai normaliniai atsitiktiniai dydžiai, tai procesas $X$ bus ir stipriai stacionarus (įsitikinkite).

**3.8 teiginys.** *Stacionaraus proceso kovariacinę funkciją $\gamma(h)$ galime išreikšti Furjė integralu*

$$\gamma(h) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda h}\,\mathrm{d}F(\lambda).$$

*Funkcija $F$ yra vadinama spektrine pasiskirstymo funkcija. Ji charakterizuojama šiomis savybėmis:*

*(i)* $\mathrm{d}F(-\lambda) = \mathrm{d}F(\lambda)$;

*(ii)* $F(\lambda) \le F(\lambda')$, *jei* $\lambda \le \lambda'$;

*(iii)* $F(+\infty) - F(-\infty) = \gamma(0) < \infty$.

Spektrinės pasiskirstymo funkcijos vienareikšmiškumą užtikrina papildomas apribijimas viename taške. Dažniausiai tariama, kad $F(-\infty) = 0$. Jei $F$ yra absoliučiai tolydi ir $F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} f(s)\,\mathrm{d}s$, tai funkcija $f$ yra vadinama spektrine tankio funkcija. Spektriniai momentai yra

$$\lambda_k = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^k\,\mathrm{d}F(\lambda).$$

Kadangi $F$ yra simetrinė, tai visi nelyginiai momentai yra nuliai. Kaip matysime vėliau spektriniai momentai yra susiję su proceso trajektorijų savybėmis.

## Levy procesai

**3.10 apibrėžimas.** *Atsitiktinis procesas $(X_t, t \in T)$ vadinamas procesu su stacionariais prieaugiais, jei atsitiktiniai dydžiai $X_{t+h} - X_{s+h}$ ir $X_t - X_s$ yra vienodai pasiskirstę su visais $s < t \in T$ ir tokiais $h > 0$, kad $t + h, s + h \in T$.*

**3.15 pavyzdys.** Vynerio procesas $(W_t, t \ge 0)$ nėra stacionarus, tačiau turi stacionarius prieaugius. Tikrai, atsitiktiniai dydžiai $W_t \sim \mathcal{N}(0, t), t > 0$ nėra vienodai pasiskirstę. Tegu $s < t \in T$ ir $t + h, s + h \in T$. Suskaičiuokime prieaugio $W_t - W_s$ pasiskirstymo funkciją:

$$P(W_t - W_s \le x) = \int_{z-y\le x} p_{s,t}(y, z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z;$$

čia $p_{s,t}(y, z)$ yra vektoriaus $(W_s, W_t)$ pasiskirstymo tankio funkcija,

$$p_{s,t}(y, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp\{-y^2/2s\} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\{-(z-y)^2/2(t-s)\}.$$

Suintegravę šią tankio funkciją, gauname

$$\begin{aligned} P(W_t - W_s \le x) &= \int_{z-y\le x} \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp\{-y^2/2s\} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\{-(z-y)^2/2(t-s)\}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\{-u^2/2(t-s)\}\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Taigi $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$. Todėl prieaugiai $W_{t+h} - W_{s+h}$ ir $W_t - W_s$ yra vienodai pasiskirstę.

**3.11 apibrėžimas.** *Atsitiktinis procesas $(X_t, t \in T)$ vadinamas nepriklausomų (atitinkamai nekoreliuotų) prieaugių, jei prieaugiai $X_{t_4} - X_{t_3}$ ir $X_{t_2} - X_{t_1}$ yra nepriklausomi (nekoreliuoti) atsitiktiniai dydžiai su visais $t_1 < t_2 \le t_3 < t_4$.*

***3.16 pavyzdys.*** Tegu $Y_t, t = 1, 2, \dots$ yra nepriklausomi (nekoreliuoti) atsitiktiniai dydžiai. Apibrėžkime

$$X_t = \sum_{k=1}^{t} Y_t, \quad t = 1, 2, \dots$$

Atsitiktinis procesas $(X_t, t = 1, 2, \dots)$ yra nepriklausomų (nekoreliuotų) prieaugių procesas.

***3.12 apibrėžimas.*** *Atsitiktinis procesas $(X_t, t \geq 0)$ vadinamas Levy procesu, jei*

$(i)$ $X_0 = 0$*;*

$(ii)$ *procesas turi stacionarius ir nepriklausomus prieaugius;*

$(iii)$ *procesas yra tolydus pagal tikimybę.*

Du svarbiausi (bet ne vieninteliai) Levy proceso pavyzdžiai yra Brauno judesio procesas ir Puasono procesas. Pastarąjį galime apibrėžti nusakydami jo baigtiniamačius skirstinius:

***3.17 pavyzdys. (Puasono procesas)*** Galima patikrinti, kad pasiskirstymo funkcijų šeima

$$\begin{aligned}
&\{F_{t_1,\dots,t_n} : 0 \leq t_1 < \dots < t_k, k \in \mathbb{N}\},\\
&F_{t_1,\dots,t_k}(x_1,\dots,x_k) = \sum_{n_1 \leq x_1,\dots,n_{k-1} \leq n_k \leq x_k} P_{t_1,\dots,t_k}(n_1,\dots,n_k);
\end{aligned}$$

čia

$$P_{t_1,\dots,t_k}(n_1,\dots,n_k) = e^{-\lambda t_k} \prod_{j=1}^{k} \frac{(\lambda t_j - \lambda t_{j-1})^{n_j - n_{j-1}}}{(n_j - n_{j-1})!},$$

$0 = t_0 \leq t_1 < \dots < t_k$ ir $0 = n_0 \leq n_1 \leq \dots \leq n_k$ tenkina Kolmogorovo 3.1 teoremos sąlygas. Vadinasi, egzistuoja procesas $(N_t, t \geq 0)$, kurio baigtiniamačių pasiskirstymo funkcijų šeima sutaps su duotaja. Tas procesas vadinamas *Puasono*.

Dar viena svarbi Levy procesų klasė yra stabilūs Levy procesai. priminsime šį stabilaus skirstinio apibrėžimą.

***3.13 apibrėžimas.*** *Atsitiktinis dydis $\xi$ vadinamas stabiliu, jei jo charakteristinei funkcijai $c(t), t \in \mathbb{R}$ teisinga ši savybė: kiekvieną $a > 0$ atitinka tokie $b > 0$ ir $c \in \mathbb{R}$, kad*

$$\big(c(t)\big)^a = c(bt)e^{ict}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

*Atsitiktinis dydis $\xi$ yra griežtai stabilus, jei kiekvieną $a > 0$ atitinka toks $b > 0$, kad*

$$\big(c(t)\big)^a = c(bt), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Yra žinoma, kad konstanta $b = a^{1/\alpha}$ su $\alpha \in (0, 2]$. Skaičius $\alpha$ vadinamas stabilumo indeksu.

***3.14 apibrėžimas.*** *Atsitiktinis procesas $X = (X_t, t \geq 0)$ vadinamas stabiliu ($\alpha$-stabiliu) Levy procesu, jei $X$ yra Levy procesas ir $X_1$ yra stabilus (su stabilumo indeksu $\alpha$) atsitiktinis dydis.*

Čia dar pastebėsime, kad Levy procesui $X = (X_t, t \geq 0)$, su kiekvienu $s > 0$, teisinga ši charakteristinių funkcijų savybė:

$$Ee^{itX_s} = \big(Ee^{itX_1}\big)^s.$$

## Markovo procesai

Atsitiktinio proceso markoviškumas aprašo proceso „ateities” priklausomybę nuo jo „praeities”.

Nagrinėkime tolydaus laiko procesą $(X_t, t \geq 0)$.

***3.15 apibrėžimas.*** *Atsitiktinis procesas $(X_t, t \geq 0)$ vadinamas Markovo procesu, jei su bet kuriais tokiais $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$, kad $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ ir bet kuria Borelio aibe $A \subset \mathbb{R}$ teisinga ši sąlyginės tikimybės savybė:*

$$P(X_{t_n} \in A \big| X_{t_{n-1}}, \ldots, X_{t_1}) = P(X_{t_n} \in A \big| X_{t_{n-1}}). \tag{3.7}$$

*Jei, be to, dešinė (3.7) lygybės dešinė pusė priklauso tik nuo skirtumo $t_n - t_{n-1}$, tai Markovo procesas vadinamas homogeniniu.*

Homogeniniam diskrečiam Markovo procesui, funkcija $p : [0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ :

$$p(t, x, y) := P(X_t = y \big| X_0 = x)$$

vadinama stochatine perėjimo funkcija.

Interpretuodami laiko momentą $t_{n-1}$ dabartimi, matome, kad Markovo proceso elgesys ateityje (laiko momentu $t_n$) nepriklauso nuo praeities (laiko momentais $t_k, k < n - 1$, jei fiksuota dabartis.

Markovo procesus pilnai aprašo jo dvimačiai skirstiniai. Tačiau tam dvimačiai skirstiniai turi tenkinti tam tikras savybes. Tiksliau, šias dvi savybės

(i) $P(X_t \leq x) = \int_{-\infty}^{\infty} P(X_t \leq x \big| X_s = y) dP(X_s \leq y)$;

(ii) su bet kuriais $t_0 < s < t$,

$$P(X_t < x \big| X_{t_0} = x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} P(X_t \leq x \big| X_s = y) dP(X_s \leq y \big| X_{t_0} = x_0).$$

Pirmoji savybė yra teisinga bet kuriems dvimačiams skirstiniams. Antroji yra tam tikras apribojimas. Koks tai apribojimas galime pamatyti iš šio klasikinio pavyzdžio.

***3.18 pavyzdys.*** Nagrinėkime procesą $(X_t, t \in T)$, kurio reikšmių sritis yra $\{-1, 1\}$ ir

(1) $P(X_t = 1) = P(X_t = -1) = 1/2$ su visais $t \in T$;

(2) su visais $t > s$

$$P(X_t = X_s) = p(t - s), \quad P(X_t = -X_s) = 1 - p(t - s).$$

Čia funkcija $t \to p(t)$ yra tolydi ir $p(0) - 1$.

Panagrinėkime, kokia gali būti funkcija $p$, kad procesas būtų Markovo. Tegu $T = [0, \infty)$. Antroji savybė reiškia, kad

$$p(t - t_0) = p(t - s)p(s - t_0) = (1 - p(t - s))(1 - p(s - t_0))$$

su visais $t_0 < s < t$. Pakeitę kintamuosius $t - s = \tau$ ir paėmę $t_0 = 0$ gauname lygtį

$$p(s + \tau) = p(\tau)p(s) + (1 - p(\tau))(1 - p(s))$$

arba

$$p(s + \tau) = 2p(\tau)p(s) - (p(\tau) + p(s)).$$

Jei pažymėsime $f(t) = 2p(t) - 1$, tai funkcijai $f$ gausime šią lygtį:

$$f(s + \tau) = f(s)f(\tau)$$

kuri turi vienintelį netrivialų sprendinį $f(t) = e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$. Taigi $p(t) = (1 + e^{-\lambda t})/2, t \geq 0$.

## 3.4 Klasifikavimas pagal trajektorijas

### Stochastinis ekvivalentumas

Tikimybių teorijoje atsitiktinius dydžius priimta apibrėžti nulinės tikimybės tikslumu: atsitiktiniai dydžiai yra ekvivalentūs, jei jie sutampa beveik visur. Jei atsitiktiniam procesui $(X_t, t \in T)$ skirtingiems $t$ tokios nulinės tikimybės aibės nebus suderintos tarpusavyje, tuomet trajektorijos samprata apskritai neteks prasmės. Todėl natūralu tarti, kad visi a.d. $X_t$ yra apibrėžti vienoje bendroje pilnosios tikimybės aibėje $\Omega_0 \subset \Omega$. Kiekvieną a.d. $X_t$ „pataisę" nulinės tikimybės aibėje $\Omega \setminus \Omega_0$, galime gauti įvairias proceso $(X_t)$ modifikacijas. Tarp jų gali pasitaikyti ir tokių, kurių realizacijos pasižymės reikalingomis savybėmis, pavyzdžiui, tolydumu, matumu ar diferencijuojamumu.

***3.16* apibrėžimas.** *Vienoje tikimybinėje erdvėje apibrėžti atsitiktiniai procesai* $X = (X_t, t \in T)$ *ir* $Y = (Y_t, t \in T)$ *yra vadinami stochastiškai ekvivalenčiais, jei su kiekvienu* $t \in T$*,*

$$P(\omega : X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)) = 0.$$

Atsitiktinio proceso $X = (X_t, t \in T)$ modifikacija vadinsime bet kurį jam stochastiškai ekvivalentų procesą.

***3.9* teiginys.** *Jei procesai* $X = (X_t, t \in T)$ *ir* $Y = (Y_t, t \in T)$ *yra stochastiškai ekvivalentūs, tai jų baiginiamačiai skirstiniai sutampa.*

*Įrodymas.* Pakanka įsitikinti, kad $P((X_t, t \in J) = (Y_t, t \in J)) = 1$ su bet kuria baigtine aibe $J \subset T$. Tegu $J = \{t_1, \ldots, t_d\} \subset T$. Tuomet

$$\begin{aligned} P((X_t, t \in J) = (Y_t, t \in J)) &= P(X_{t_1} = Y_{t_1}, \ldots, X_{t_d} = Y_{t_d}) = 1 - P\Big(\bigcup_{t_i \in J} \{X_{t_i} \neq Y_{t_i}\}\Big) \\ &\geq 1 - \sum_{t_i \in J} P(X_{t_i} \neq Y_{t_i}) = 1. \end{aligned}$$

Taigi tikimybė kairėje pusėje būtinai lygi 1. ■

Stochastiškai ekvivalentūs procesai gali turėti visiškai skirtingas trajektorijų savybes. Tikrai, 3.6 pavyzdyje, atsitiktiniai procesai $X = (X_t, t \in [0, 1])$ ir $(Y = (Y_t, t \in [0, 1])$ yra stochastiškai ekvivalentūs, nes $P(\omega : X_t(\omega) = Y_t(\omega)) = P(\omega : \omega = t) = 0$, nes $P$ yra tolygusis skirstinys. Tačiau vienas iš šių procesų turi tolydžias trajektorijas, o kitas - ne.

***3.17* apibrėžimas.** *Atsitiktiniai procesai* $X = (X_t, t \in T)$ *ir* $Y = (Y_t, t \in T)$ *apibrėžti vienoje tikimybinėje erdvėje vadinami neatskiriamais, jei egzistuoja tokia mati aibė* $N \subset \Omega$*, kad* $P(N) = 0$ *ir* $X(\omega) = Y(\omega)$ *su visais* $\omega \notin N$*.*

### Separabilūs procesai

Svarbi proceso trajektorijų savybė yra separabilumas. Separabili funkcija yra tokia, kurią tam tikra prasme galime atstatyti pagal jos reikšmes tam tikroje skaičioje aibėje. Atsitiktinis procesas yra separabilus, jei su tikimybe vienas visos jo trajektorijos yra separabilios funkcijos. Taigi separabiliam atsitiktiniam procesui neskaičią indeksų aibę galima pakeisti skaičia, kai norime ištirti kokias nors proceso trajektorijų savybes. Tai padeda išspręsti kai kurias matumo problemas, apie kurias buvo jau užsiminta anksčiau.

Tarkime, $T$ yra neskaiti aibe ($T = [0, 1]$ arba $T = [0, \infty)$). Tegu $D \subset T$ yra skaitus poaibis. Funkcija $f : T \to \mathbb{R}$ vadiname $D$-separabilia, jei kiekvieną $t \in T$ atitinka tokia seka $(t_n) \subset D$, kad

$$\lim_{n\to\infty} t_n = t \quad \text{ir} \quad \lim_{n\to\infty} f(t_n) = f(t).$$

Atsitiktinis procesas $X = (X_t, t \in T)$ yra $D$-separabilus, jei egzistuoja tokia aibė $N \in \mathcal{F}$, kad $P(N) = 0$ ir trajektorija $t \to X_t(\omega)$ yra $D$-separabili su kiekvienu $\omega \in N$.

Atsitiktinis procesas yra separabilus, jei jis yra $D$-separabilus su kuria nors aibe $D \subset T$.

***3.10 teiginys.*** *Jei $X = (X_t, t \in T)$ yra separabilus procesas, tai $inf_{t\in T} X_t$ ir $\sup_{t\in T} X_t$ yra atsitiktiniai dydžiai.*

Dar pastebėsime, kad separabiliam procesui $X = (X_t, t \in [0, 1])$ aibė $\{\omega : X \in C[0, 1])$ yra mati.

Pavyzdžiui, aibė $\{\omega : \sup_t X_t(\omega) \in (-\infty, a]\} = \bigcup_{t\in T}\{\omega : X_t(\omega) \in (-\infty, a]\}$ gali nebūti mačia, nes $\sigma$ algebros savybės negarantuoja, kad neskaiti mačių aibių sankirta yra mati. Separabiliam procesui ta sankirta gali būti paimta atžvilgiu skaičios aibės $S$.

Priminsime, kad tikimybinė erdvė $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ yra pilna, jei $A \in F$, kai egzistuoja tokia nulinio mato aibė $B \in \mathcal{F}$ ir $A \subset B$. Kitaip tariant, bet kurios nulinės tikimybės aibės poaibis yra matus.

***3.3 teorema.*** *Tegu $T = [a, b]$ arbe $T = [0, \infty)$. Tarkime, kad atsitiktinis procesas $(X_t, t \in T)$ yra apibrėžtas pilnoje tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.*

*(a) Jei atsitiktinis procesas $(X_t, t \in T)$ reikšmes įgyja kokiame nors baigtiniame uždarame intervale tai egzistuoja separabili jo versija.*

*(b) Egzistuoja atsitiktinio proceso $(X_t, t \in T)$ separabili versija su reikšmėmis praplėstoje skaičių tiesėje $[-\infty, \infty]$.*

Nagrinėdami atsitiktinių procesų trajektorijų savybes dažniausiai tarsime, kad tie procesai yra separabilūs.

## Tolydūs procesai

***3.18 apibrėžimas.*** *Separabilus atsitiktinis procesas $(X_t, t \in T)$ yra tolydus su tikimybe vienas, jei*

$$P(\omega : \bigcup_{t\in T} \lim_{h\to 0} |X_{t+h} - X_t| \neq 0) = 0.$$

Jau minėjome, jei procesas yra tolydus $p$-ojo laipsnio vidurkio prasme, tai jis tolydus ir pagal tikimybę. Tačiau tolydumas pagal tikimybę negarantuoja, kad bus tolydžios proceso trajektorijos. Kokio tolydumo vidurkio prasme pakanka, kad egzistuojtų proceso versija su tolydžiomis trajektorijomis, aprašo Kolmogorovo teorema.

***3.4 teorema.*** ***(Kolmogorovo kriterijus)*** *Tegu $X = (X_t, t \in [0, 1])$ yra atsitiktinis procesas.Tarkime, egzistuoja tokios lyginės nedidėjančios funkcijos $g$ ir $q$, kad*

$$\sum_n g(2^{-n}) < \infty, \quad \sum_n 2^n q(2^{-n}) < \infty$$

*ir*

$$P(|X_{t+h} - X_t| \geq g(h)) \leq q(h); \tag{3.8}$$

*su visais $t \in [0, 1]$ ir tokiais $h \in (0, 1)$, kad $t + h \in [0, 1]$. Tuomet egzistuoja proceso $(X_t, t \in T)$ versija, kurios trajektorijos su tikimybe 1 yra tolydžios.*

*Įrodymas.* Įrodymui naudojama labai paprasta idėja, funkcijos aproksimavimas laužtėmis. Nagrinėkime diadinius skaičius

$$t_{n,j} = 2^{-n}j, \quad j = 0, 1, \ldots, 2^n; \quad n \geq 1.$$

Imdami $n$-ojo lygmens skaičius $t_{n,j}, j = 0, 1, \ldots, 2^n$, apibrėžkime

$$X_t^{(n)} = X_{t_{n,j}} + 2^n(t - t_{n,j})[X_{t_{n,j+1}} - X_{t_{n,j}}], \quad \text{kai} \quad t \in [t_{n,j}, t_{n,j+1}].$$

Taip gauname atsitiktinių laužčių seką $X^{(n)} = \{X_t^{(n)}, t \in [0,1]\}$. Akivaidu, kad funkcijos $X^{(n)}$ yra tolydžios. Įrodysime, kad su tikimybe vienas taip sukonstruota laužčių seka tolygiai konverguoja. Imdami $t \in [t_{n,j}, t_{n,j+1}]$ ir pastebeję, kad $t_{n,j} = t_{n+1,2j}$, $t_{n,j+1} = t_{n+1,2j+2}$, įvertiname

$$|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}| \leq 2^{-1}|X_{t_{n+1,2j+1}} - X_{t_{n+1,2j}}| + 2^{-1}|X_{t_{n+1,2j+1}} - X_{t_{n+1,2j+2}}|$$

ir, pritaikę teoremos sąlygą, gauname

$$P(\max_{t \in [t_{n,j}, t_{n,j+1}]} |X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}| \geq g(2^{-n-1})) \leq 2q(2^{-n-1}).$$

Diadiniai bet kurio lygmens skaičiai sudaro intervalo $[0,1]$ skaidinį, todėl

$$P(\max_{t \in [0,1]} |X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}| \geq g(2^{-n-1})) \leq 2^{n+1}q(2^{-n-1}).$$

Kadangi eilutė $\sum_n 2^n q(2^{-n})$ konverguoja, galime įsitikinti, kad $X^{(n)}$ konverguoja tolygiai su tikimybe vienas. Ribinę funkciją pažymėkime $Y = (Y_t, t \in [0,1])$. Būdama tolygi tolydinių funkcijų riba, $Y$ yra tolydinė su tikimybe vienas. Kai $t = t_{n,j}$ ir $p = 1, 2, \ldots$ tuomet $X_t^{(n+p)} = X_t$ todėl $P(Y_t = X_t) = 1$. Tegu $t \neq t_{n,r}$. Tuomet egzistuoja tokia seka $r_n$, kad $t = \lim_{n\to\infty} t_{n,r_n}$. Be to, $0 < t - t_{n,r_n} < 2^{-n}$. Remiantis teoremos sąlyga

$$P(|X_{t_{n,r_n}} - X_t| \geq g(t - t_{n,r_n})) \leq q(t - t_{n,r_n}) \leq q(2^{-n}).$$

Taigi

$$P(|X_{t_{n,r_n}} - X_t| \geq g(2^{-n})) \leq q(2^{-n})$$

ir, remiantis Borelio-Cantelli lema, $X_{t_{n,r_n}} \xrightarrow{b.t.} X_t$. Kita vertus, kadangi $(Y_t)$ tolydi funkcija, tai $Y_{t_{n,r_n}} \xrightarrow{b.t.} Y_t$. Bet, kaip matėme anksčiau, $P(X_{t_{n,r_n}} = Y_{t_{n,r_n}}) = 1$. Taigi ir $P(X_t = Y_t) = 1$. ■

***3.1* išvada.** *Jeigu*

$$E|X_{t+h} - X_t|^p \leq \frac{C|h|}{|\log|h||^{1+r}}$$

*su $0 < p < r$ ir bet kuria konstanta $C > 0$, tuomet egzistuoja proceso $(X_t)$ tolydi versija.*

Jei procesas $(X_t)$ yra separabilus ir jam yra teisingos teoremos sąlygos, tuomet

$$P(\text{procesas } (X_t) \text{ yra tolydus}) = 1.$$

Tai yra, separabilus procesas, kuriam egzistuoja tolydi versija yra pats tolydus. Tikrai, remiantis Kolmogorovo teorema, egzistuoja proceso $(X_t, t \in [0,1])$ versija $(Y_t, t \in [0,1])$ kurio trajektorijos su tikimybe vienas yra tolydžios. Tegu $S \subset [0,1]$ yra skaiti aibė, kuri egzistuoja pagal separabilumo apibrėžimą. Tuomet su tikimybe 1,

$$X_t = Y_t \quad \text{su visais} \quad t \in S.$$

Nagrinėkime tolydžią trajektoriją $t \to Y_t(\omega), t \in [0,1]$. Kiekvieną $\varepsilon > 0$ ir $t_0 \in [0,1]$ atitinka toks $\delta > 0$, kad

$$|Y_t - Y_{t_0}| < \varepsilon, \quad \text{kai} \quad |t - t_0| < \delta.$$

Imdami intervalą $I = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ gauname

$$X_{t_0} \geq \inf_{t \in I} X_t = \inf_{t \in IS} X_t = \inf_{t \in IS} Y_t \geq Y_{t_0} - \varepsilon.$$

Kadangi $\varepsilon > 0$ laisvai pasirenkamas skaičius, tai $X_{t_0} \geq Y_{t_0}$. Analogiškai įsitikiname, kad $X_{t_0} \leq Y_{t_0}$. Taigi $X_{t_0} = Y_{t_0}$. Kadangi proceso $(Y_t)$ trajektorijos tolydžios su tikimybe vienas, tai

$$P(X_t = Y_t, t \in [0,1]) = 1.$$

Tai ir įrodo rezultatą.

Priminsime, kad realioji funkcija $t \to f(t)$ taške $t_0$ turi pirmosios rūšies trūkį, jei egzistuoja ribos iš dešinės ir kairės:

$$f(t_0 + 0) := \lim_{t \downarrow t_0} f(t), \quad f(t_0 - 0) := \lim_{t \uparrow t_0} f(t),$$

bet ne visi skaičiai $f(t_0 + 0)$, $f(t_0 - 0)$ ir $f(t_0)$ yra tarpusavyje lygūs.

***3.5 teorema.*** *Tegu $X = (X_t, t \in [0,1])$ yra atsitiktinis procesas. Tarkime, egzistuoja tokios lyginės nedidėjančios funkcijos $g$ ir $q$, kad*

$$\sum_n g(2^{-n}) < \infty, \quad \sum_n 2^n q(2^{-n}) < \infty$$

*ir su visais $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 \leq 1, t_3 - t_1 = h$,*

$$P(|[X_{t_3} - X_{t_2}][X_{t_2} - X_{t_1}]| \geq g^2(h)) \leq q(h). \tag{3.9}$$

*Tuomet egzistuoja proceso $(X_t, t \in T)$ versija, kurios trajektorijos su tikimybe 1 turi ne daugiau nei pirmos rūšies trūkius.*

## Matūs ir integruojami procesai

Tarkime, atsitiktinio proceso $(X_t, t \in T)$ indeksų aibėje $T$ apibrėžta $\sigma$ algebra $\mathcal{T}$ ir $\sigma$ baigtinis matas $\mu$, t.y. turime erdvę su matu $(T, \mathcal{T}, \mu)$.

Norėdami kalbėti apie integralą $\int_T X_t \,\mathrm{d}\mu(t)$ turime žinoti, ar proceso trajektorijos yra mačios funkcijos.

***3.19 apibrėžimas.*** *Tegu $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ yra tikimybinė erdvė. Atsitiktinis procesas $X = (X_t, t \in T)$ vadinamas mačiu, jei su kiekvienu $\omega \in \Omega$ funkcija $t \to X_t(\omega) : T \to \mathbb{R}$ yra mati.*

Taigi, jei atsitiktinis procesas $X = (X_t, t \in T)$ yra matus, tai į jį galime žiūrėti, kaip į dviejų argumentų $(t, \omega)$ mačią funkciją, $X : T \times \Omega \to \mathbb{R}$, $X(t, \omega) = X_t(\omega)$. Ji yra mati atžvilgiu $\sigma$ algebrų $\mathcal{T} \otimes \mathcal{F} / \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Čia sandaugos $\sigma$ algebra $\mathcal{T} \otimes \mathcal{F} = \sigma(A \times B : A \in \mathcal{T}, B \in \mathcal{F})$ yra papildyta iki pilnos.

***3.6 teorema.*** *Jei atsitiktinis procesas $X = (X_t, t \in T)$ yra matus ir funkcija $t \to E(X_t) : T \to \mathbb{R}$ yra $\mu$-integruojama, tuomet su bet kuria aibe $I \subset T$,*

$$\int_I E(X_t)\mu(\,\mathrm{d}t) = E\Big(\int_I X_t \mu(\,\mathrm{d}t)\Big).$$

***3.7 teorema.*** *Tegu $T = [0, a] \subset \mathbb{R}$. Jei procesas $(X_t, t \in T)$ yra stochastiškai tolydus, tai jis turi mačią versiją.*

## Ergodiniai procesai

Stacionariųjų procesų teorijai labai svarbūs yra du rezultatai, tai „spektrinė teorema" ir „ergodinė teorema". Su spektrine teorija susipažinsime vėliau. Čia trumpai aptarkime ergodiškumą. Panagrinėkime du kraštutinumus. Tegu $X = (X_n : n \geq 0)$ yra nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių seka su nuliniu vidurkiu ir vienetine dispersija. Akivaizdu, kad procesas $X$ yra stacionarus ir jo autokovariacinė funkcija yra

$$\Gamma_X(m, m+n) = E(X_m X_{m+n}) = \begin{cases} 1, & \text{kai } n = 0, \\ 0, & \text{kai } n \neq 0. \end{cases}$$

Remiantis stipriuoju didžiųjų skaičių dėsniu $n^{-1}\sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{b.t.} 0$, kai $n \to \infty$.

Nagrinėkime kitą pavyzdį. Tegu $Y$ yra atsitiktinis dydis su nuliniu vidurkiu ir vienetine dispersija. Procesą $X = (X_n, n \geq 0)$ apibrėžkime imdami $X_n = Y$ su visais $n \geq 0$. Jo kovariacinė funkcija yra $\Gamma_X(m, m+n) = EX_m X_{m+n} = EY^2 = 1$ su visais $n, m$. Be to, $n^{-1}\sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{b.t.} Y$.

Abiejuose pavyzdžiuose matėme, kad egzistuoja sumos $n^{-1}\sum_{k=1}^n X_k$ riba beveik tikrai, kai $n \to \infty$. Pirmuoju atveju riba yra konstanta, antruoju – atsitiktinis dydis.

Ergodinės teoremos (stiprus ar silpnas didžiųjų skaičių dėsnis) nagrinėja sąlygas, prie kurių agreguotos trajektorijos $T^{-1}\int_0^T X_s \, \mathrm{d}s$ konverguoja prie proceso vidurkio. Proceso ergodiškumas yra dar stipresnis, nes leidžia tvirtinti, kad $T^{-1}\int_0^T f(X_s)\, \mathrm{d}s$ konverguoja plačiai funkcijų $f$ klasei.

***3.11 teiginys.*** ***(Ergodinė teorema vidurkiams )*** *Tarkime,* $(X_k, k \geq 0)$ *yra stacionari laikin4 seka,* $m = EX_0$*,* $(r(h), h \geq 0)$ *- jos autokovariacinė seka:* $\gamma(h) = EX_0X_h - m^2, h \geq 0$*. Tuomet*

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n X_k,$$

*kvadratinio vidurkio prasme konverguoja prie vidurkio* $m$ *tada ir tik tada, kai*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{h=0}^n \gamma(h) = 0. \tag{3.10}$$

*Įrodymas.* Įrodysime tik (a). Antrosios dalies įrodymas yra analogiškas ir paliekamas vietoj pratimo. Pradėkime pakankamumo įrodymu. Pažymėkime $S_n = \sum_{k=0}^{n-1}(X_k - m)$. Tuomet

$$\begin{aligned} E(n^{-1}S_n)^2 &= n^{-2}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{m=0}^{n-1}\gamma(k-m) \\ &= n^{-1}\sum_{|k|\leq n-1}(1-|k|/n)\gamma(k). \end{aligned}$$

Iš sąlygos

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{|k|\leq n-1}(1-|k|/n)\gamma(k) = 0.$$

Tai ir įrodo pakankamumą. Sąlygos būtinumą gauname pastebėję, kad

$$\Big|n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}\gamma(k)\Big| = \Big|E\Big[n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}(X_k-m)(X_0-m))\Big]\Big|$$
$$\leq \Big(E\Big[n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}(X_k-m)\Big]^2\Big)^{1/2}(E[(X_0-m)]^2)^{1/2} \to 0,$$

kai $n\to\infty$. ■

Analogiškai įrodomas analogas tolydauus laiko procesui.

***3.12 teiginys.*** *Jei $(X_t,\in[0,T]$ yra stacionarus plačiąja prasme procesas, su vidurkiu $EX_t=m$ ir kovariacine funkcija $\Gamma_X(t)$, tuomet*

$$T^{-1}\int_0^T X_t\,\mathrm{d}t$$

*konverguoja prie $m$ kvadratinio vidurkio prasme tada ir tik tada, kai*

$$\lim_{T\to\infty} T^{-1}\int_0^T \Gamma_X(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Priminsime, kad iš konvergavimo kvadratinio vidurkio prasme gauname taip pat konvergavimą pagal tikimybę.

***3.13 teiginys.* (Ergodinė teorema kovariacijoms)** *Tarkime, $(X_k,k\geq 0)$ yra stacionari laiko eilutė, $(v(h),h\geq 0)$ - atitinkama antros eilės autokovariacinė seka:*

$$v(h)=E[X_{h+h_0}X_h-EX_{h+h_0}X_h][X_{h_0}X_0-EX_{h_0}X_0], h\geq 0.$$

*Jei*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{h=0}^{n}v(h)=0, \tag{3.11}$$

*tuomet*

$$EX_0X_h=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}X_kX_{k+h},$$

*kvadratinio vidurkio prasme.*

Pateiktieji rezultatai yra taip vadinamos individualios ergodinės teoremos. Kokios bendros proceso savybės užtikrina analogiškus rezultatus?

Pirmiausia apibrėžkime ergodiškumą sekoms. Nagrinėkime diskretaus laiko procesą $(X_t,t\in\mathbb{Z})$. Tegu jis yra apibrėžtas tikimybinėje erdvėje $(\Omega,\mathcal{F},P)$. Nagrinėkime mačią erdvę $(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}},\mathcal{B}^{\mathbb{Z}})$. Atsitiktinis procesas $(X_t,t\in\mathbb{Z})$ yra atsitiktinis erdvės $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ elementas. Jo skirstinys yra tikimybinis matas $P_X$ apibrėžtas aibėms $C\in\mathcal{B}^{\mathbb{Z}}_{\mathbb{R}}$:

$$P_X(C)=P(\omega:(X_t(\omega))\in C).$$

Erdvėje $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ apibrėžkime operatorių $\tau:\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}\to\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ :

$$\tau((x_t))=(x_{t+1}).$$

Atvaizdis $\tau$ yra matus. (Įsitikinkite!) Be to, $P_X(\tau^{-1}(C))=P_X(C)$ tada ir tik tada, kai procesas $(X_t)$ yra stacionarus. (Įrodykite!) Aibę $C\in\mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$ vadinsime $\tau$-invariantine, jei $\tau^{-1}(C)=C$.

***3.20 apibrėžimas.*** *Sakysime, kad stacionarus procesas $(X_t)$ yra ergodinis, jei kiekvienai $\tau$-invariantinei aibei $C \in \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$ arba $P_X(C) = 0$ arba $P_X(C) = 1$.*

Paprasčiausias ergodinio proceso pavyzdys - chaoso procesas, t.y. $(X_t, t \in \mathbb{Z})$, kai a.d. $X_t, t \in \mathbb{Z}$ yra nepriklausomi.

***3.14 teiginys.*** *Jei $(X_t)$ yra stacionarus ergodinis procesas ir $f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ yra matus atvaizdis, tuomet*

$$\widetilde{X}_t = f(X_t, X_{t-1}, \dots), \quad t \in \mathbb{Z}$$

*yra stacionarus ergodinis procesas.*

*Įrodymas.* Stacionarumo įrodymui reikia patikrinti, kad a.p. $(\widetilde{X}_t)$ baigtiniamačiai skirstiniai sutampa su atitinkamais proceso $(\widetilde{X}_{t+k})$ baigtiniamačiais skirstiniais kokį beimtume $k \in \mathbb{Z}$. Nagrinėkime operatorių $F : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$,

$$F((x_j, j \in \mathbb{N})) = (f(x_t, x_{t+1}, \cdots)) = (\widetilde{x}_t, t \in \mathbb{Z}).$$

Turime $(\widetilde{X}_{t+k}, t \in \mathbb{Z}) = \tau^k((\widetilde{X}_t, t \in \mathbb{Z}))$. Tegu $\widehat{\tau} : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ yra postūmio operatorius. Galime įsitikinti, kad

$$\tau^k \circ F = F \circ \widehat{\tau}^k. \tag{3.12}$$

Taigi

$$\begin{aligned}\{(\widetilde{X}_{t+k}, t \in \mathbb{Z}) \in C\} &= \{\tau^k((\widetilde{X}_t, t \in \mathbb{Z}) \in C\} = \{(\widetilde{X}_t, t \in \mathbb{Z}) \in \tau^{-k}(C)\} \\ &= P((X_t) \in F^{-1}(\tau^{-k}(C))).\end{aligned}$$

Pastaroji tikimybė yra lygi $P(\tau^k(X_t) \in F^{-1}(C))$, kuri, savo ruožtu, yra $P((X_t) \in F^{-1}(C))$, nes procesas $(X_t)$ yra stacionarus. Taigi proceso $(\widetilde{X}_t)$ stacionarumas įrodytas. Norėdami įrodyti proceso $(\widetilde{X}_t)$ ergodiškumą, tarkime, kad $C \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ yra invariantinė aibė. Įsitikinsime, kad aibė $F^{-1}(C)$ yra invariantinė. Iš (3.12) gauname

$$F^{-1}(C) = F^{-1}(\tau^{-1}(C)) = )\tau \circ F)^{-1}(C) = (F \circ \tau)^{-1}(C) = \tau^{-1}(F^{-1}(C)).$$

Kadangi $F^{-1}(C)$ yra invariantinė procesui $(X_t)$ tai arba $P((X_t) \in F^{-1}(C))$ lygi nuliui arba vienam. Lieka pastebėti, kad $P((\widetilde{X}_t) \in C) = P((X_t) \in F^{-1}(C)$. ■

***3.15 teiginys.*** *Tarkime, $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ yra stipriai stacionarus procesas ir $f$ yra tokia mati funkcija, kad $E(|f(X_t)|) < \infty$. Tuomet riba*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} f(X_t)$$

*egzistuoja beveik tikrai ir yra atsitiktinis dydis, kurio vidurkis lygus $Ef(X_0)$. Jei procesas $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ yra ergodinis, tuomet*

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} f(X_t) \xrightarrow{b.t.} Ef(X_0).$$

Tarkime procesas $(X_t, t \in \mathbb{R})$ yra apibrėžtas tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Nagrinėkime mačią erdvę $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}^T_{\mathbb{R}})$. Atsitiktinis procesas $X = (X_t, t \in \mathbb{R})$ yra matus atvaizdis $\Omega \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ arba, kitais žodžiais tariant, yra atsitiktinis erdvės $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ elementas (atsitiktinė funkcija). Tegu $P_X$,

$$P_X(A) := P(\omega : X(\omega) \in A)$$

aibei $A \in \mathcal{B}^{\mathbb{R}}_{\mathbb{R}}$ yra atsitikinio proceso skirstinys trajektorijų erdvėje.

**3.21 apibrėžimas.** *Aibė $A \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ vadinama invariantine procesui $(X_t, t \in \mathbb{R})$, jei su kiekvienu $h \in \mathbb{R}$*

$$\{(X_t, t \in T) \in A\} \subset \{(X_{h+t}, t \in T) \in A\}.$$

Kitaip tariant, invariantinė aibė yra ta, kurioje pasilieka ir pastumtas laike procesas. Pavyzdžiui, aibė

$$A = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : \lim_{T\to\infty} T^{-1} \int_0^T f(x_{t+s})\,\mathrm{d}t = 0\}$$

yra invariantinė procesui $(X_t)$. O aibė $\{x : x(s) \in (a, b),\ \text{kažkuriam} \quad s \in \mathbb{R}\}$ nėra invariantinė.

**3.22 apibrėžimas.** *Procesas $(X_t)$ vadinamas ergodiniu, jei kiekvienai jo realizacijų invariantinei aibei $A$ arba $P_X(A) = 0$, arba $P_X(A) = 1$.*

**3.16 teiginys.** *Tarkime, $(X_t)$ yra stipriai stacionarus procesas ir $f$ yra tokia mati funkcija, kad $E(|f(X_t)|) < \infty$. Tuomet riba*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(X_s)\,\mathrm{d}s$$

*egzistuoja beveik tikrai ir yra atsitiktinis dydis, kurio vidurkis lygus $Ef(X_0)$.*

*Jei procesas $(X_t, t \in [0, T])$ yra ergodinis, tuomet*

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(X_s)\,\mathrm{d}s \xrightarrow{b.t.} Ef(X_0).$$

## Savipanašūs procesai

**3.23 apibrėžimas.** *Tegu $H > 0$ yra fiksuotas skaičius. Atsitiktinis procesas $(X_t, t \geq 0)$ vadinamas $H$-savipanašiu, jei jei jo baigtiniamačiai skirstiniai tenkina:*

$$(X_{at_1}, \ldots, X_{at_d}) \stackrel{\mathcal{D}}{=} (a^H X_{t_1}, \ldots, a^H X_{t_d})$$

*su visais $a > 0$ ir bet kuriuo rinkiniu $t_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, d$ ir $d \geq 1$.*

Jei tarsime, kad

$$(X_{at}, t \geq 0) \stackrel{\mathcal{D}}{=} (bX_t, t \geq 0)$$

su kažkuriuo $b = b(a)$, tai imdami $a_1, a_2 > 0$, gausime

$$b(a_1 a_2)X_t \stackrel{\mathcal{D}}{=} X_{a_1 a_2 t} \stackrel{\mathcal{D}}{=} b(a_1)b(a_2)X_t.$$

Jei dydis $X_t$ nėra išsigimęs, tai

$$b(a_1 a_2) = b(a_1)b(a_2).$$

Jei, be to, $X$ yra stochastišai aprėžtas, tai $b(a_) < 1$, kai $a < 1$. Taigi $b(a) = a^H$ su kokiu nors $H \geq 0$. Be to, jei $H = 0$, iš proceso $X$ stochastinio tolydumo nulyje gauname

$$P(|X_t - X_0| > \varepsilon) = P(|X_{t/a} - X_0| > \varepsilon) = \lim_{a\to\infty} P(|X_{t/a} - X_0| > \varepsilon) = 0.$$

Vadinasi, $X$ yra trivialus procesas. Taigi $H > 0$.

Jei procesas $X$ yra kvadratu integruojamas ir savipanašus, tai

$$var(X_t) = var(t^H X_t) = t^{2H} var(X_1).$$

Tarkime, $X$ turi stacionarius prieaugius, nulinį vidurkį ir $var(X_1) = 1$. Tuomet jo autokovariacinė funkcija yra

$$R_H(s,t) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}).$$

Jei $H > 1$, tai

$$\lim_{n\to\infty} cov(X_1, X_n - X_{n-1}) = \infty.$$

Taigi $H \leq 1$.

***3.17 teiginys.*** *Funkcija $R_H$ yra neneigiamai apibrėžta, jei $H \in (0,1]$.*

Jei $H = 1$, tuomet

$$X(X_t - tX_1)^2 = 0,$$

taigi $X_t - tX_1$ b.t. Todėl $H = 1$ dažniausiai nenagrinėjamas.

Trupmeninis Brauno judesio procesas: vienintelis Gauso savipanašus su nuliniu vidurkiu ir stacionariais prieaugiais: jo kovariacinė funkcija $R_H(s,t)$.

Trajektorijų savybės.

***3.24 apibrėžimas.*** *Atsitiktinis procesas $X = (X_t, t \in [0,1])$ yra $\beta$-Hiolderio, jei egzistuoja toks baigtinis a.d. $K$, kad*

$$\sup_{s,t\in[0,1], s\neq t} \frac{|X_t - X_s|}{|t-s|^\beta} \leq K.$$

***3.18 teiginys.*** *Trupmeninis Brauno judesio procesas yra $\beta$-Hiolderio su $\beta < H$.*

$$P(\limsup_{t\downarrow 0} \frac{X_t}{t^H\sqrt{\log\log(1/t)}}) = 1.$$

Taigi, $X$ negali būti $\beta$-Hiolderio, jei $\beta \geq H$.

***3.19 teiginys.*** *Levy atsitiktinis procesas $X = (X_t, t \geq 0)$ yra savipanašus tada ir tik tada, kai jis yra $\alpha$-stabilus. Šiuo atveju savipanašumo indeksas $H = 1/\alpha$.*

*Įrodymas.* Tegu $c_t(\lambda) = Ee^{i\lambda X_t}$ ir $X$ yra savipanašus su indeksu $1/\alpha$. Tuomet $X_t \stackrel{\mathcal{D}}{=} t^{1/\alpha}X_1$ su kiekvienu $t > 0$. Kita vertus,

$$c_t(\lambda) = (c_1(\lambda))^t, \quad t > 0,$$

taigi $(c_1(\lambda)^t = c_1(t^{1/\alpha}\lambda)$, t.y., atsitiktinis dydis $X_1$ yra $\alpha$-stabilus.

Dabar tarkime, kad $X_1$ yra $\alpha$-stabilus. Kadangi procesas $X$ turi nepriklausomus ir stacionarius prieaugius, tai pakanka įsitiktinti, kad $X_{at} \stackrel{\mathcal{D}}{=} a^{1/\alpha}X_t$ su visais $t > 0$ ir $a > 0$. Taip yra, nes

$$c_{at}(\lambda) = (c_1(\lambda)^{at} = (c_1(a^{1/\alpha}\lambda))^t = c_t(a^{1/\alpha}\lambda),$$

su visais $\lambda \in \mathbb{R}$. ■

## 3.5 Pratimai

***3.1 pratimas.*** Įrodykite , kad cilindrinė $\sigma$ algebra $\mathcal{B}^T$ sutampa su vienmačių cilindrinių aibių generuota $\sigma$ algebra $\sigma\{A \times \mathbb{R}^{T\setminus\{s\}} : A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, s \in T\}$.

***3.2 pratimas.*** Tegu $U \subset \mathbb{R}^T$. Įrodykite kad $U \bigcap \mathcal{B}^T$ yra $\sigma$ algebra.

***3.3 pratimas.*** Įsitikinkite, kad 3.5-3.17 pavyzdžiuose pateiktos baigtiniamačių skirstinių šeimos tenkina Kolmogorovo suderinamumo sąlygas.

***3.4 pratimas.*** 3.13 pavyzdžiui išveskite (3.5) ir (3.6) formules.

***3.5 pratimas.*** Tegu $X$ ir $U$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, $U$ yra tolygiai pasiskirstęs intervale $[0, 2\pi]$, o a.d. $X$ tankis yra

$$f_X(x) = 2x^3 \exp\{-1/(2x^4)\}, \quad x > 0.$$

įsitikinkite, kad procesas

$$X_t = X^2 \cos(2\pi t + U), \quad t \geq 0,$$

yra Gauso ir suraskite jo vidurkio bei kovariacinę funkcijas.

***3.6 pratimas.*** Tegu $\varepsilon_n, n \geq 0$ yra seka nekoreliuotų atsitiktinių dydžių su nuliniu vidurkiu ir vienetine dispersija. Apibrėžkime procesą

$$Y_n = \sum_{i=0}^{r} a_i \varepsilon_{n-i}, \quad n \geq 0.$$

Čia $a_, a_2, \dots, a_r$ yra realūs skaičiai, o sveikasis skaičius $r \geq 1.$. Įrodykite, kad procesas $(Y_n, n \geq 1)$ yra stacionarus ir raskite jo autokovariacinę funkciją.

***3.7 pratimas.*** Tarkime, $(Z_n, n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots)$ yra nekoreliuoti atsitiktiniai dydžiai su nuliniu vidurkiu ir vienetine dispersija. Tegu atsitiktinis procesas $Y = (Y_n)$ tenkina autoregresinę lygtį:

$$Y_n = \rho Y_{n-1} + Z_n, \quad n = 0, \pm 1, \dots.$$

Čia $|\rho| < 1$. Raskite proceso $Y$ autokovariacinę funkciją.

***3.8 pratimas.*** Tegu $U$ yra tolygusis intervale $[0, 1]$ atsitiktinis dydis. Jo dvejetainis išdėstymas yra $U = \sum_{i=1}^{\infty} X_i 2^{-i}$. Apibrėžkime

$$V_n = \sum_{i=1}^{\infty} X_{i+n} 2^{-i}, \quad n \geq 0.$$

Įrodykite, kad procesas $V = (V_n, n \geq 0)$ yra stipriai stacionarus ir raskite jo autokovariacinę funkciją.

***3.9 pratimas.*** Tegu $(X_n, n = \dots, -1, 0, 1, \dots)$ yra stacionarus procesas su nuliniu vidurkiu ir kovariacine funkcija $c_X(m)$. Įrodykite šiuos teiginius:

a) Jei skaitinė eilutė $\sum_k a_k$ konverguoja absoliučiai, tai eilutė $\sum_{k=0}^{\infty} a_k X_k$ konverguoja beveik tikrai ir kvadratinio vidurkio prasme.

b) Tegu

$$Y_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X_{n-k}, \quad n \in Z.$$

Čia $\sum_k |a_k| < \infty$. Raskite proceso $Y$ autokovariacinę funkciją $c_Y(m), m = 0, \pm 1, \cdots$ ir įrodykite, kad

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |c_Y(m)| < \infty.$$

# 4 skyrius

# Martingalai

## 4.1 Diskretaus laiko martingalo apibrėžimas, pavyzdžiai

Tikimybinės erdvės $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ filtarcija vadinasime bet kuria nemažėjančių $\sigma$ algebrų seką

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}.$$

$\sigma$ algebra $\mathcal{F}_n$ yra interpretuojama kaip informacija iki laiko momento $n$, tai yra tokių įvykių $F \subset \Omega$ $\sigma$ algebra apie kuriuos iki laiko momento $n$ žinoma ar jie įvyko ar ne. Ketvertas $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n), P)$ vadinamas tikimybine erdve su filtracija arba „stochastine baze". Tipinis filtarcijos pavyzdys yra natūralioji diskretaus laiko atsitiktinio proceso $(X_n, n \geq 0)$ filtracija $(\mathcal{F}_n)$, kai

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \cdots, X_n)$$

yra $\sigma$ algebra generuota proceso iki laiko momento $n$. Tuomet $F \in \mathcal{F}_n$ reiškia, kad

$$F = \{\omega : (X_0(\omega), X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \in A\}$$

kuriai nors Borelio aibei $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$. Taigi kai tik sužinome atsitiktinių dydžių $X_0, X_1, \dots, X_n$ realizaciją $X_0(\omega), X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$, žinome ar įvykis $F$ įvyko ar ne.

Atsitiktinis procesas $(X_n)$ vadinamas adaptuotu prie filtarcijos $(\mathcal{F}_n)$ (trumpai $(\mathcal{F}_n)$-adaptuotu), jei su visais $n \geq 0$, atsitiktinis dydis $X_n$ yra $\mathcal{F}_n$-matus. Natūralioji proceso filtarcija yra mažiausia, prie kurios procesas yra adaptuotas.

***4.1 apibrėžimas.*** *Tegu* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n), P)$ *yra stochastinė bazė. Atsitiktinis procesas* $(X_n, n \geq 0)$, *apibrėžtas tikimybinėje erdvėje* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *vadinamas martingalu atžvilgiu filtracijos* $(\mathcal{F}_n, n = 0, 1, 2, \dots)$, *jei*

$(a)$ $(X_n)$ *yra* $(\mathcal{F}_n)$*-adaptuotas;*

$(b)$ $E|X_n| < \infty$, *su visais* $n = 0, 1, \dots;$

$(c)$ $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$ *b.t. su visais* $n = 0, 1, \dots$

Norėdami pažymėti $\sigma$ algebrų filtraciją, atžvilgiu kurios diskretaus laiko procesas $(X_n, n \geq 0)$ yra martingalas, sakysime, kad $((X_n, \mathcal{F}_n), n \geq 0)$ yra martingalas. Jei nepasakyta kokios filtracijos atžvilgiu atsitiktinis procesas $(X_n, n \geq 0)$ yra martingalas, suprasime, kad tai yra $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n), n \geq 0$.

Analogiškai apibrėžiame martingalus $(X_n, n \in \mathbb{Z})$. Pavadinimas „martingalas" kilęs iš vadinamosios dvigubinamo lošimo strategijos, kuri ir vadinasi *martingalo strategija*. Esmė yra tokia. Statomas vienas litas. Jei išlošiama, tai vėl statomas litas. Jei pralošiama, tai statomi du litai. Kiekvieną kartą pralošus, statymas dvigubinamas. Pavyzdžiui, galimas toks variantas

| Rezultatas | $P$ | $P$ | $P$ | $P$ | $L$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Lošimas | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 |
| Pelnas | $-1$ | $-3$ | $-7$ | $-15$ | $+1$ |

Pažymėkime $X_n$ lošėjo pelną po $n$-ojo lošimo. Aišku, kad $X_0 = 0$, $|X_n| \le 1 + 2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$. be to, $X_{n+1} = X_n$, jei lošimas sustoja $n+1$-uoju momentu. Kitu atveju

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - 2^n & \text{su tikimybe} \quad 1/2; \\ X_n + 2^n & \text{su tikimybe} \quad 1/2. \end{cases}$$

Taigi $E(X_{n+1}|X_0, X_1, \dots, X_n) = X_n$, todėl $(X_n, n \ge 0)$ yra martingalas.

***4.2 apibrėžimas.*** *Atsitiktinis procesas $(X_n, n \ge 0)$ vadinamas submartingalu (supermartingalu) atžvilgiu $(\mathcal{F}_n, n = 0, 1, 2, \dots)$, jei su visais $n = 0, 1, \dots$ yra teisingos 4.1 apibrėžimo $(a)$–$(b)$ savybės ir*

*c') $E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \ge (\le) X_n$ b.t.,*

***4.1 pavyzdys.*** Tegu $Y$ yra bet kuris integruojamas atsitiktinis dydis apibrėžtas tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ir $(\mathcal{F}_n, n = 0, 1, 2, \dots)$ – bet kuri jos filtracija. Apibrėžkime

$$X_n = E[Y|\mathcal{F}_n], \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

Atsitiktinis procesas $((X_n, \mathcal{F}_n), n = 0, 1, 2, \dots)$ yra martingalas. Tuom įsitikiname pritaikę dvigubo vidurkinimo taisyklę.

***4.2 pavyzdys.*** Tegu $X_0, Y_1, Y_2, \dots$ yra nepriklausomi a.d., apibrėžti vienoje tikimybinėje erdvėje. Apibrėžkime

$$X_n = X_0 + Y_1 + \cdots + Y_n, \;\; n = 0, 1, 2, \dots.$$

Procesas $(X_n, n \ge 0)$ vadinamas atsitiktiniu klaidžiojimu, startuojančiu atsitiktiniame taške $X_0$. Nagrinkime $\sigma$ algebrų srautą

$$\mathcal{F}_0 = \sigma(X_0), \quad \mathcal{F}_n = \sigma(X_0, Y_1, \dots, Y_n), \; n \in \mathbb{N}.$$

Tuomet

- jei $EY_n = 0$ su visais $n \in \mathbb{N}$, tai $((X_n, \mathcal{F}_n), n \ge 0)$ yra martingalas;
- jei $EY_n \le 0$ su visais $n \in \mathbb{N}$, tai $((X_n, \mathcal{F}_n), n \ge 0)$ yra supermartingalas;
- jei $EY_n \ge 0$ su visais $n \in \mathbb{N}$, tai $((X_n, \mathcal{F}_n), n \ge 0)$ yra submartingalas.

Galima įsitikinti, kad šiame pavyzdyje $\sigma(X_0, X_1, \dots, X_n) = \sigma(X_0, Y_1, \dots, Y_n), n \ge 0$ (įsitikinkite!).

***4.3 pavyzdys.*** *Paprasčiausias besišakojantis procesas.* Populiacija startuoja nuo pradininko, kuris sudaro nulinę kartą. Tas pradininkas skyla (išsiskaido į, palieka) $k$ palikuonių su tikimybe $p_k$, $k = 0, 1, \dots,$ kurie sudaro pirmąją populiacijos kartą. Kiekvienas iš pirmosios kartos palikuonių savo ruožtu, nepriklausomai skyla į atsitiktinį skaičių palikuonių su ta pačia tikimybių funkcija $(p_k)$. Procesas tęsiasi iki išnykimo, kai nei vienas kartos narys nebeturi palikuonių.

Šis modelis yra plačiai taikomas ir vadinamas *besišakojančiu* arba *Galtono-Watsono-Bienimė procesu*. Iš pradžių jis buvo taikomas modeliuojant neutronų skilimą. Juo galime modeliuoti giminės pavardės išlikimo procesą (kiek vaikų turi būti šeimoje, kad šeimos pavardė niekada ateityje neišnyktų?)

Formaliai procesas apibrėžiamas taip. Tegu $\{Z_{n,j}, n \geq 1, j \geq 1\}$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę neneigiami sveikareikšmiai atsitiktiniai dydžiai, su vienoda tikimybių funkcija $(p_k)$. Prilygindami sumą nuliui, kai joje nėra dėmenų, apibrėžkime procesą $\{Z_n, n \geq 0\}$ taip:

$$
\begin{aligned}
&Z_0 = 1\\
&Z_1 = Z_{1,1}\\
&Z_2 = Z_{2,1} + \cdots + Z_{2,Z_1}\\
&\vdots\\
&Z_n = Z_{n,1} + \cdots + Z_{n,Z_{n-1}}.
\end{aligned}
$$

Taigi $Z_{n,j}$ galime interpretuoti kaip $n$-tosios kartos narių, kurie yra $n-1$-osios kartos $j$-ojo nario palikuonys, skaičių.

Pastebėkime, kad $Z_{n+1} = 0$, jei $Z_n = 0$. Be to, $Z_{n-1}$ nepriklauso nuo $\{Z_{n,j}, j \geq 1\}$. Taigi nagrinėkime paprasčiausią besišakojantį procesą $(Z_n, n = 0, 1, 2, \ldots)$. Tegu vidutinis kiekvieno individo palikuonių skaičius yra

$$\mu = \sum_k k p_k.$$

Akivaizdu, kad jei $n$-toje kartoje yra $z_n$ individų, tai vidutinis $n+1$-os kartos individų skaičius yra $\mu z_n$, taigi

$$E(Z_{n+1}|Z_n, Z_{n-1}, \ldots, Z_0) = \mu Z_n \begin{cases} < Z_n, & \text{jei } \mu < 1\\ = Z_n, & \text{jei } \mu = 1\\ > Z_n & \text{jei } \mu > 1. \end{cases}$$

Dar galime pastebėti, kad su visais $n = 0, 1, \ldots$

$$E\Big(\frac{Z_{n+1}}{\mu^{n+1}}|Z_n, \ldots, Z_0\Big) = \frac{Z_n}{\mu^n}.$$

Taigi atsitiktinis procesas $(Z_n/\mu^n,\ n \geq 0)$ yra martingalas.

***4.4 pavyzdys.*** *Akcijų kaina.* Tegu $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ nepriklausomi teigiami atsitiktiniai dydžiai, $E\zeta_i < \infty$ su visais $i = 1, 2, \ldots$. Tegu $X_0 = c$,

$$X_n = X_0 \zeta_1 \cdots \zeta_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Atsitiktinis procesas $(X_n, n \geq 0)$ yra martingalas. Atsitiktiniai dydžiai $\zeta_i$ aprašo kainos pasikeitimą. Atskiri atvejai yra šie gerai žinomi kainų modeliai.

- *Diskretus Black–Scholes modelis.* Čia $\zeta_i = \exp\{\eta_i\}$, ir $\eta_i \sim Norm(\mu, \sigma^2)$, $i = 1, 2, \ldots$.
- *Binominis (CRR) modelis.* Čia $\zeta_i = (1+a)e^{-r}$ su tikimybe $p$ ir $\zeta_i = (1+a)^{-1}e^{-r}$ su tikimybe $1-p$. Dydis $r$ aprašo palūkanų normą.

Iš apibrėžimo matome, kad

$$E(X_{n+1}|X_n, \ldots, X_0) = X_n E\zeta_{n+1}$$

su visais $n = 0, 1, 2, \ldots$.

## 4.2 Paprasčiausios savybės

***4.1 teiginys.*** *Tarkime,* $(X_n, n \geq 0)$ *yra martingalas atžvilgiu filtracijos* $(\mathcal{G}_n)$. *Tegu su kiekvienu* $n$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n) \subset \mathcal{G}_n$. *Tuomet* $(X_n, n \geq 0)$ *yra martingalas ir atžvilgiu filtracijos* $(\mathcal{F}_n)$.

*Įrodymas.* Remiantis dvigubo vidurkinimo taisykle

$$E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = E(E(X_{n+1}|\mathcal{G}_n))|\mathcal{F}_n) = E(X_n|\mathcal{F}_n) = X_n. \blacksquare$$

***4.2 teiginys.*** *Jei* $(X_n, \mathcal{F}_n)$ *yra martingalas, tai* $(|X_n|, \mathcal{F}_n)$ *– submartingalas.*

*Įrodymas.* Gauname iš sąlyginio vidurkio savybės: $E|(X_{n+1}|\,|\mathcal{F}_n) \geq |E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)| = |X_n|$. ■

***4.3 teiginys.*** *Jei* $(X_n, \mathcal{F}_n)$ *yra supermartingalas, ir* $0 \leq m < n$, *tai*

$$EX_m \geq EX_n.$$

*Įrodymas.* Kadangi $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \leq X_n$, tai ir $E(E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)) \leq E(X_n)$. Bet $E(E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)) = E(X_{n+1})$. Taigi $EX_{n+1} \leq EX_n$. Iš šios lygybės gauname $E(X_n) \leq E(X_{n-1}) \leq \cdots \leq E(X_m)$. ■

***4.4 teiginys.*** *Jei* $(X_n, \mathcal{F}_n)$ *yra submartingalas, ir* $0 \leq m < n$, *tai*

$$EX_m \leq EX_n.$$

*Įrodymas.* Analogiškas 4.2 teiginio įrodymui. ■

***4.5 teiginys.*** *Jei* $(X_n, \mathcal{F}_n)$ *yra martingalas, ir* $0 \leq m < n$, *tai*

$$EX_m = EX_n.$$

*Įrodymas.* Išvedame iš 4.2 ir 4.4 teiginių. ■

***4.6 teiginys.*** *Jei* $(X_n)$ *yra martingalas ir* $\phi$ *yra tokia iškila (žemyn) funkcija, kad* $E|\phi(X_n)| < \infty$ *su visais* $n \geq 0$. *Tuomet* $(\phi(X_n))$ *yra submartingalas.*

*Įrodymas.* Remiantis Jenseno nelygybe

$$E(\phi(X_{n+1})|\mathcal{F}_n) \geq \phi(E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)) = \phi(X_n).$$

■

Atskiru atveju, imdami $\phi(t) = |t|^p, p \geq 1$ matome, kad $(|X_n|^p)$ yra submartingalas, jei $(X_n)$ yra martingalas ir $E|X_n|^p < \infty$ su visais $n \geq 0$. ■

***4.3* apibrėžimas.** *Tarkime, duota filtracija $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$. Sakysime, kad atsitiktinių dydžių seka $(H_n, n \geq 0)$ yra numatoma atžvilgiu $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$, jei su kiekvienu $n \geq 1$, atsitiktinis dydis $H_n$ yra $\mathcal{F}_{n-1}$ matus.*

***4.1* teorema. (Dubo išskaidymas)** *Submaringalą $(Y_n, \mathcal{F}_n)$ galima išskaidyti*

$$Y_n = M_n + S_n,$$

*su visais $n \geq 0$. Be to, $(M_n, \mathcal{F}_n)$ yra martingalas, o $(S_n, \mathcal{F}_n)$ – didėjantis numatomas procesas prasidedantis nulyje $(S_0 = 0$ ir išskaidymas yra vienintelis.*

Atsitiktinis procesas $(S, \mathcal{F})$ yra vadinamas *submartingalo $(Y, \mathcal{F})$ kompensatoriumi.*

*Įrodymas.* Procesai $M$ ir $S$ apibrėžiami išreikštiniu būdu. Imkime $M_0 = Y_0, S_0 = 0$,

$$\begin{aligned} M_{n+1} - M_n &= Y_{n+1} - Y_n - E(Y_{n+1} - Y_n | \mathcal{F}_n), \\ S_{n+1} - S_n &= E(Y_{n+1} - Y_n | \mathcal{F}_n), \end{aligned}$$

kai $n > 0$. Galime įsitikinti, kad $(M, \mathcal{F})$ ir $(S, \mathcal{F})$ tenkina teoremos tvirtinimus. Lieka įrodyti išskaidymo vienatį. Tarkime, yra dar vienas išskaidymas: $Y_n = M'_n + S'_n$. Tuomet

$$\begin{aligned} Y_{n+1} - Y_n &= (M'_{n+1} - M'_n) + (S'_{n+1} - S'_n) \\ &= (M_{n+1} - M_n) + (S_{n+1} - S_n). \end{aligned}$$

Suskaičiavę sąlyginį vidurkį atžvilgiu $\mathcal{F}_n$ gauname, kad $S'_{n+1} - S'_n = S_{n+1} - S_n$ su visais $n \geq 0$. Tačiau $S'_0 = S_0 = 0$, taigi $S'_n = S_n$ ir, kartu, $M'_n = M_n$. ■

Martingalo $(M_n, n \geq 0)$ transformacija su numatoma seka $(H_n, n \geq 1)$ vadinsime seką

$$(H \circ M)_n = M_0 + \sum_{j=1}^{\infty} H_j \Delta M_j, \quad n \geq 1.$$

***4.7* teiginys.** *Jei $(M_n, n \geq 0)$ yra (sub)martingalas, o $(H_n, n \geq 1)$ yra aprėžta (neneigiama) numatoma seka, tuomet transformuota seka $((H \circ M)_n)$ yra (sub)martingalas.*

Jei martingalą interpretuosime kaip lošėjo pelną, tuomet natūralus klausimas yra toks: ar galime maksimizuoti pelną sustabdydami lošimą kuriuo nors laiku. Jei $(X_n, n = 0, 1, 2, \ldots)$ yra martingalas ir $EX_0 = 0$, tuomet ir $EX_n = 0$ su kiekvienu $n = 1, 2, \ldots$ Taigi, lošimo sustabdymas bet kuriuo fiksuotu laiko momentu nepadeda padidinti vidutinio pelno. Tačiau, tai neįrodo, kad negalima lošimo sustabdyti atsitiktiniu laiko momentu. Pavyzdžiui, prieš gręsiančius didelius nuostolius (jei žinotume, kad jie artėja). Tokį scenarijų galime nagrinėti panaudoję sustabdymo momentus.

***4.4* apibrėžimas.** *Neneigiamas sveikareikšmis atsitiktinis dydis $T : \Omega \to \{0, 1, \ldots, \infty\}$, apibrėžtas tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vadinamas sustabdymo momentu atžvilgiu $\sigma$ algebrų srauto $(\mathcal{F}_n, n = 0, 1, 2, \ldots)$, jei*

$$\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$$

*su visais $n = 0, 1, 2, \ldots$.*

Atkreipiame dėmesį, kad $T$ gali įgyti ir reikšmę $\infty$.

***4.5 pavyzdys.*** Tegu $(X_n, n = 0, 1, 2, \dots)$ yra adaptuotas $\sigma$ algebrų srauto $(\mathcal{F}_n, n = 0, 1, 2, \dots)$ atžvilgiu. Jei $B \subset \mathbb{R}$ yra bet kuri Borelio aibė, tuomet

$$T = \inf\{n : X_n \in B\} \quad (\inf \emptyset = \infty)$$

yra sustabdymo momentas.

***4.6 pavyzdys.*** Jei $T$ yra sustabdymo momentas, tuomet procesas

$$H_n = \mathbf{1}_{T \geq n}, \quad n \geq 0$$

yra numatomas. Tikrai, $\{T \geq n\}^c = \{T \leq n-1\} \in \mathcal{F}_{n-1}$. Atitinkama martingalo $(X_n)$ transformacija yra

$$\begin{aligned}(H \circ X)_n &= \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{T \geq j}(X_j - X_{j-1}) \\ &= X_0 + \sum_{j=1}^{T \wedge n}(X_j - X_{j-1}) = X_{T \wedge n}.\end{aligned}$$

Taigi, jei $(X_n)$ yra (sub)martingalas tai ir sustabdytas procesas yra (sub)martingalas.

***4.8 teiginys.*** *$T$ yra sustabdymo momentas tada ir tik tada, kai $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ su visais $n = 0, 1, 2, \dots$*

Tai kad apsiribojama sustabdymo momentu yra visai natūralu. Jei pasirinkome laiką $T$ tai su kiekvienu $n = 0, 1, 2, \dots$ turime žinoti ar $T = n$ laiko momentu $n$. Jei srautas (filtracija) yra generuotas pačio proceso, tai įvykis $\{T = n\}$ turi priklausyti nuo informacijios apie $X_0, X_1, \dots, X_n$, jei $T$ yra sustabdymo momentas. Taigi sprendimas turi būti priimtas atsižvelgiant į proceso istoriją, bet ne į ateitį.

Tarkime, $EX_0 = 0$. Klausimas ar galime rasti tokį sustabdymo momentą $T$, kad $EX_T > 0$ dar neatsakytas. Čia atsitiktinis dydis $X_T$ yra apibržtas taip:

$$(X_T)(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega), \quad \omega \in \Omega.$$

Jei $T$ gali įgyti begalinę reikšmę, tai reikia apibrėžti $X_\infty$.

Norėdami atsakyti į iškeltą klausimą, pirmiausia apibrėšime procesą $(X_n^T, n = 0, 1, 2, \dots)$:

$$X_n^T(\omega) = X_{T(\omega) \wedge n}(\omega).$$

***4.9 teiginys.*** *Jei $(X_n)$ yra martingalas, tai ir $(X_n^T)$ yra martingalas.*

*Įrodymas.* Galime užrašyti

$$X_n^T = X_0 + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{k \leq T}(X_k - X_{k-1}).$$

Taigi $X_{n+1}^T - X_n^T = \mathbf{1}_{n+1 \leq T}(X_{n+1} - X_n)$. Atsitiktinis dydis $\mathbf{1}_{n+1 \leq T} = 1 - \mathbf{1}_{T \leq n}$ yra $\mathcal{F}_n$–matus. Todėl

$$E(X_{n+1}^T - X_n^T | \mathcal{F}_n) = \mathbf{1}_{n+1 \leq T} E(X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n) = 0$$

nes $(X_n)$ yra martingalas. Taip pat reikia pastebėti, kad

$$|X_n^T| \leq max_{1 \leq i \leq n} |X_i|.$$

■

## 4.3 Martingalų konvergavimas

***4.2 teorema.*** *Jei $(X_n)$ yra martingalas ir $\sup_n EX_n^2 < \infty$ tuomet egzistuoja toks a.d. $X_\infty$, kad $X_n \to X_\infty$ b.t. ir kvadratinio vidurkio prasme.*

Šios teoremos įrodymui labai svarbi yra Doob-Kolmogorov nelygybė.

***4.3 teorema.*** ***(Doob-Kolmogorov nelygybė)*** *Jei $(X_n)$ yra martingalas, tuomet su kiekvienu $\lambda > 0$*

$$P(\max_{1\le k\le n} |X_k| \ge \lambda) \le \lambda^{-2} EX_n^2.$$

*Įrodymas.* Pažymėkime $A_0 = \Omega$,

$$A_k = \{|X_i| < \lambda \quad \text{su visais} \quad i \le k\}, \quad B_k = A_{k-1} \cap \{|X_k| \ge \lambda\}.$$

Taigi $k$ yra toks pirmasis indeksas $i$ su kuriuo $|X_i| \ge \lambda$. Tuomet

$$A_k \cup (\bigcup_{i=1}^{k} B_i) = \Omega.$$

Taigi

$$EX_n^2 = \sum_{i=1}^{n} EX_n^2 \mathbf{1}_{B_i} + EX_n^2 \mathbf{1}_{A_n} \ge \sum_{i=1}^{n} EX_n^2 \mathbf{1}_{B_i}.$$

Kita vertus

$$\begin{aligned} EX_n^2 \mathbf{1}_{B_i} &= E(X_n - X_i + X_i)^2 \mathbf{1}_{B_i} = E(X_n - X_i)^2 \mathbf{1}_{B_i} + E(X_i)^2 \mathbf{1}_{B_i} + 2E(X_n - X_i) X_i \mathbf{1}_{B_i} \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Pirmiausia pastebėkime, kad $I_1 \ge 0$ ir $I_2 \ge \lambda^2 P(B_i)$, nes $|X_i| \ge \lambda$ aibėje $B_i$. Dabar nagrinėkime $I_3$. Kadangi $(X_n)$ yra martingalas

$$E((X_n - X_i) X_i \mathbf{1}_{B_i} | \mathcal{F}_i) = 0.$$

Surinkę gautą informaciją užbaigiame teoremos įrodymą. ■

Pastebėkime, kad a.d. $X_m$ ir $(X_{n+m} - X_m)$ yra nekoreliuoti, kei $n.m \ge 1$, nes

$$E(X_m(X_{m+n} - X_m)) = E[(X_m(X_{m+n} - X_m))|\mathcal{F}_m] = 0.$$

Taigi

$$EX_{n+m}^2 = EX_m^2 + E(X_{n+m} - X_m)^2.$$

Matome, kad seka $(EX_n^2)$ yra nemažėjanti ir, remiantis teoremos sąlyga, aprėžta. Taigi ta seka konverguoja. Pažymėkime $M = \lim_{n\to\infty} EX_n^2$. Įsitikinsime, kad seka $(X_n)$ yra Koši seka b.t.

Pažymėkime $C = \{\omega : (X_n(\omega)) \quad \text{yra Koši seka}\}$. Taigi jei $\omega \in C$, tuomet $X_n(\omega) \to X_\infty(\omega)$. Įrodysime, kad $P(C) = 1$. Pagal Koši sekos apibrėžimą

$$C = \{\text{kiekvieną } \varepsilon > 0 \text{ atitinka toks } m \text{, kad} \quad |X_{m+i} - X_{m+j}| < \varepsilon \quad \text{su visais} \quad i, j \ge 1\}.$$

Kadangi $|X_{m+i} - X_{m+j}| \le |X_{m+i} - X_m| + |X_m - X_{m+j}|$,

$$\begin{aligned} C &= \{\text{kiekvieną } \varepsilon > 0 \text{ atitinka toks } m, \text{ kad} \quad |X_{m+i} - X_m| < \varepsilon \quad \text{su visais} \quad i \geq 1\} \\ &= \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_m \{|X_{m+i} - X_m| \geq \varepsilon \quad \text{su visais} \quad i \geq 1\}. \end{aligned}$$

Aibės $C$ paildinį galime užrašyti

$$C^c = \bigcup_{\varepsilon>0} \bigcap_m A_m(\varepsilon), \quad A_m(\varepsilon) = \{|S_{m+i} - S_m| \geq \varepsilon \quad \text{su visais} \quad i \geq 1\}.$$

Kadangi $A_n(\varepsilon) \subset A_m(\varepsilon')$, jei $\varepsilon \geq \varepsilon'$, tai

$$P(C^c) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P\Big(\bigcap_m A_m(\varepsilon)\Big) \leq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{m \to \infty} P(A_m(\varepsilon)).$$

Tikimybes $P(A_m(\varepsilon))$ įvertinsime pasinaudoję Doob-Kolmogorovo teorema. Fiksuokime $m$ ir nagrinėkime seką $(Y_n)$, $Y_n = X_{n+m} - X_m$. Galime patikrinti, kad $(Y_n)$ yra martingalas. Taigi

$$P(\max_{1 \leq i \leq n} |S_{m+i} - S_n| \geq \varepsilon) \leq \varepsilon^{-2} E(X_{n+m} - X_m)^2.$$

Perėję prie ribos, kai $n \to \infty$, gauname

$$P(A_m(\varepsilon)) \leq \varepsilon^{-2}(M - ES_m^2).$$

Taigi $P(A_m) \to 0$, kai $m \to \infty$.

Liko įrodyti, kad konvergavimas taip pat teisingas kvadratinio vidurkio prasme. Tam pasinaudosime Fatu lema:

$$\begin{aligned} E(X_n - X_\infty)^2 &= E(\liminf_{m \to \infty} (X_n - X_m)^2) \leq \liminf_{n \to \infty} E(X_n - X_m)^2 \\ &= M - EX_n^2 \to 0 \end{aligned}$$

kai $n \to \infty$. Teorema pilnai įrodyta.

***4.7 pavyzdys.*** Tegu $\{\xi_n, n \geq 1\}$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę normaliniai atsitiktiniai dydžiai su nuliniu vidurkiu ir dispersija $\sigma^2$. Apibrėžkime $X_0 = 1$,

$$X_n = \exp\{\sum_{j=1}^n \xi_j - n\sigma^2/2\}.$$

Seka $(X_n)$ yra neneigiamas martingalas ir $X_n \xrightarrow{b.t.} 0$. Bet $EX_n = 1$ su visais $n$.

## 4.4 Tolydaus laiko martingalai

Tolydaus laiko tikimybinės erdvės $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ filtracija yra toks $\sigma$ algebrų srautas $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, kad $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}$ su visais $s \geq 0$ ir $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, jei $s \leq t$. Standartinis pavyzdys yra natūralioji atsitiktinio proceso $(X_t, t \geq 0)$ generuota filtracija $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t), t \geq 0$. Ketvertas $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$, kaip ir diskrečiuoju atveju, vadinamas tikimybine erdve su filtracija arba stochastine baze. Be atskiro priminimo tarsime, kad filtracija $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ tenkina taip vadinamas *įprastastines sąlygas*:

(i) kiekvienai $\sigma$ algebrai $\mathcal{F}_t$ priklauso visi nulinės tikimybės įvykiai (*filtracijos pilnumas*);

(ii) su kiekvienu $t > 0$, $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$; (*tolydumas iš dešinės*).

Pirmą filtracijos savybę nesunku pasiekti prie kiekvienos $\sigma$ algebros $\mathcal{F}_t$ prijungus nulinės tikimybės įvykius. Antroji savybė yra sudėtingesnė. Daugumoje pavyzdžių ji yra išpildoma. Retais atvejais, kai taip nėra, galima nagrinėti filtraciją $\bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s, t \geq 0$, kuri pasižymi tolydumu iš dešinės.

Kaip ir diskrečiuoju atveju, procesas $(X_t, t \geq 0)$ yra adaptuotas atžvilgiu filtracijos $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, (trumpiau $(\mathcal{F}_t)$-adaptuotas), jei $X_t$ yra $\mathcal{F}_t$-matus atsitiktinis dydis.

***4.5 apibrėžimas.*** *Tegu yra duota stochastinė bazė $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$. Tuomet $(\mathcal{F}_t)$-adaptuotas integruojamas procesas $(X_t, t \geq 0)$ vadinamas*

*(i) martingalu, jei $E(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$ b.t., su visais $s \leq t$;*

*(ii) submartingalu, jei $E(X_t|\mathcal{F}_s) \geq X_s$ b.t., su visais $s \leq t$;*

*(iii) supermartingalu, jei $E(X_t|\mathcal{F}_s) \leq X_s$ b.t., su visais $s \leq t$;*

Norėdami diskretizuoti (sub/super) martingalą $(X_t, t \geq 0)$ imame bet kuriuos fiksuotus laiko momentus $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \cdots$ ir apibrėžiame $Y_k = X_{t_k}, k = 0, 1, 2, \ldots$. Galima patikrinti, kad $(Y_k, \mathcal{F}_{t_k})$ yra (sub/super) martingalas.

***4.4 teorema.*** *Jei $(X_t, \mathcal{F}_t, t \geq 0)$ yra (sub/super) martingalas ir filtracija $(\mathcal{F}_t)$ tenkina įprastines sąlygas, o funkcija $t \to EX_t$ yra tolydi iš dešinės, tuomet egzistuoja proceso $(X_t)$ cadlag modifikacija.*

*Įrodymas.* Žr...... ■

***4.8 pavyzdys.*** Duotai filtracijai $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ ir atsitiktiniam dydžiui, $X$, apibrėžkime $X_t = E(X|\mathcal{F}_t), t \geq 0$ parinkdami kurią nors sąlyginio vidurkio modifikaciją (visos jos skiriasi tik nulinės tikimybės aibėse). Be to, galima parinkti tokią, kad martingalas būtų cadlag.

Martingalų konvergavimas

## 4.5 Kai kurie taikymai ekonomikoje

***4.9 pavyzdys.*** *Kainos prognozės procesas.* Tarkime, ...., $X_t, X_{t+1}, \ldots, X_{t+T}, \ldots$ – procesas, aprašantis kainas, pvz. aukso, vilnos ir pan., $X_t$ yra kaina dabartiniu momentu, $X_{t+T}$ – ateities kaina, praėjus $T$ laiko momentų (dienų). Tarkime, kad atsitiktiniai dydžiai $X_j$ yra aprėžti ir apibrėžti tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Ekonomikos dalyvis žino šios dienos kainą ir buvusias kainas. Kitais žodžiais, tariame, kad ekonominis agentas žino visą informaciją, kurią generuoja procesas iki laiko momento $t$, arba informaciją esančią $\sigma$-algebroje $\mathcal{F}_t = \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_t)$. Joje, beje, yra ir stebėtos kainos, tarkime, $x_0, x_1, \ldots, x_t$. Jos yra viena iš proceso realizacijų,

$$X_0(\omega) = x_0, \ldots, X_t(\omega) = x_t.$$

Tačiau agentas negali žinoti nei rytdienos kainos $X_{t+1}$ nei, juo labiau, kainos $X_{t+T}$. Tačiau laikui bėgant, informacijos vis daugėja, todėl galima vis kita kainos prognozė. Tarkime, norime prognozuoti kainą $X_{t+T}$. Tegu $Y(T, t)$ – jos prognozė laiko momentu $t$. Pasibaigus vienam laiko periodui, tos kainos prognozė jau bus $Y(T-1, t+1)$ ir taip toliau. Taip gauname seką

$$Y(T, t), Y(T-1, t+1), \ldots, Y(T-n, t+n), \ldots, Y(1, t+T-1). \tag{4.1}$$

Racionalių lūkesčių hipotezė teigia, kad

$$Y(T,t) = E[X_{t+T}|\mathcal{F}_t], \quad \text{su visais} \quad T = 1, 2, \ldots \tag{4.2}$$

Įsitikinsime, kad jei teisinga racionalių lūkesčių (4.2) hipotezė, tai (4.1) seka yra martingalas atžvilgiu $\sigma$-algebrų

$$\mathcal{F}_t, \mathcal{F}_{t+1}, \ldots, \mathcal{F}_{t+T-1}.$$

Iš esmės reikia patikrinti tik martingališkumo sąryšį

$$E[Y(T-1, t+1)|\mathcal{F}_t] = Y(T,t).$$

Tam reikia pasinaudoti dvigubo vidurkinimo taisykle:

$$\begin{aligned} E[Y(T-1,t+1)|\mathcal{F}_t] &= E[E[X_{t+T}|\mathcal{F}_{t+1}]|\mathcal{F}_t] \\ &= E[X_{t+T}|\mathcal{F}_t] \\ &= Y(T,t). \end{aligned}$$

Martingalinė ateities kainų savybė gali būti panaudota tiriant akcijų rinkos efektyvumą. Kapitalo rinka yra efektyvi, jei vertybinių popierių kaina atspindi visą prieinamą informaciją.

informaciją (silpna, pusiau stipri, stipri infoprmacijos). kurie bandymai praeities kainose įžvelgti kokią nors naudą prognozuojant yra pamerkti žlugti.

***4.10* pavyzdys.** *Efektyvios rinkos hipotezė.*

Tarkime, $P_t, t = 0, 1, 2, \ldots$ yra akcijos (dieninių) kainų procesas,

$$X_t = \ln(P_t/P_{t-1}) = \ln(1 + \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \approx \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}, \quad t = 1, 2, \ldots$$

yra logaritminių (santykinių) grąžų procesas. Tegu $\mathcal{I}_t$ yra visa prieinama informacija iki laiko momento $t$. Sakoma, kad yra teisinga efektyvios rinkos hipotezė, jei

$$E(X_t|\mathcal{I}_{t-1}) = E(X_t), \quad t = 1, 2, \ldots.$$

Kitaip tariant, grąžų procesas $X_t - E(X_t), t = 1, 2, \ldots$ yra martingalinių skirtumų procesas atžvilgiu informacijos srauto $\mathcal{I}_t, t = 0, 1, 2, \ldots$. Efektyvios rinkos atveju, kainų proceso logaritmas yra martingalas.

Yra trys rinkos efektyvumo sampratos, besiskiriančios informacijos $\mathcal{I}_t$ apibrėžimu.

1. Silpna efektyvumo forma reiškia, kad $\mathcal{I}_t$ yra tik informaciją apie procesą $X_s$, $s \le t$.

2. Pusiau stipri efektyvumo forma reiškia, kad $\mathcal{I}_t$ yra informacija apie proceso praeitį, t.y. apie $X_s, s \le t$ ir visa informacija, kuri yra viešai prieinama laiko momentu $t$.

3. Stipri efektyvumo hipotezė reiškia, kad $\mathcal{I}_t$ sudaro visa tiek vieša, tiek privati informacija prieinama laiko momentu $t$.

Žinios apie naujas prekiavimo strategijas ar naujus rinkų modeliavimo metodus laikomos privačia informacija. Pateikta efektyvios rinkos hipotezė yra klasikinė ir labiau siejama su negalimumu prognozuoti. Yra ir modernesnių šiuolaikinių efektyvumo apibrėžimų.

## 4.6 Pratimai

***4.1 pratimas.*** Tegu $X, Y$ yra du nepriklausomi Bernulio atsitiktiniai dydžiai. Apibrėžkime $Z = \mathbf{1}_{\{X+Y=0\}}$. Raskite $E(X|Z)$ ir $E(Y|Z)$. Ar tie atsitiktiniai dydžiai yra nepriklausomi?

***4.2 pratimas.*** Tegu $(Y_n, n \geq 1)$ yra nepriklausomų atsitiktinių dydžių tolygiai pasiskirsčousių intervale $[-1, 1]$ seka. Tegu $S_0 = 0$, $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n, n \geq 1$. Patikrinkite ar duotos sekos yra martingalai:

a) $X_n = \sum_{k=1}^{n} S_{k-1}^2 Y_k, \quad X_0 = 0;$

b) $X_n = S_n^2 - \frac{n}{3}, \quad X_0 = 0.$

***4.3 pratimas.*** Tarkime, $(Y, \mathcal{F})$ yra martingalas. Įrodykite, kad

$$E(Y_{n+m}|\mathcal{F}_n) = Y_n$$

su visais $n, m \geq 0$.

***4.4 pratimas.*** Tegu $(X_n, n \geq 1)$ yra nepriklausomi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ a.d. Tegu $Y_0 = 1$,

$$Y_n = \exp\{a \sum_{k=1}^{n} X_k - n\sigma^2\}, \quad n \geq 1.$$

Su kuria parametro $a$ reikšme, $(Y_n)$ yra martingalas?

***4.5 pratimas.*** Tarkime, $S_n$ yra draudimo kompanijos kapitalas $n$-tųjų metų gale. $n$-taisiais metais gautas pelnas yra $c > 0$ ir išmokėta $\xi_n$ išmokų. Tegu $\xi_n$ yra $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ir $\mu < c$. Kompanija bankrutuoja, kai jos kapitalas pasidaro mažesnis ar lygus nuliui. Įrodykite, kad

$$P(bankrotas) \leq \exp\{-2(c - \mu)S_0/\sigma^2).$$

# 5 skyrius

# Puasono procesas

## 5.1 Apibrėžimas ir modeliavimas

Pirmiausia apibrėšime homogeninį Puasono procesą.

***5.1 apibrėžimas.*** *Homogeniniu Puasono procesu su parametru $\lambda$ vadiname procesą $\{X_t, t \in [0,\infty)\}$ apibrėžtą tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, jei teisingos šios trys savybės:*

*(P1)* $X_0 = 0$

*(P2) su visais $0 < t_1 < \cdots < t_n$ priaugliai $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ yra nepriklausomi;*

*(P3) Jei $0 \leq s < t < \infty$, tai $X_t - X_s$ turi Puasono skirstinį su parametru $\lambda(t-s)$, t.y.*

$$P(X_t - X_s = k) = \frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!} \exp\{-\lambda(t-s)\},$$

*su visais $k \in \mathbb{N}$.*

Šio apibrėžimo (P2) ir (P3) sąlygos reiškia, kad Puasono procesas turi nepriklausomus ir stacionarius priauglius.

Puasono proceso konstravimui labai svarbūs yra eksponentiniai atsitiktiniai dydžiai. Priminsime, kad a.d. $\tau$ turi eksponentinį skirstinį su parametru $\lambda$, jei

$$P(\tau \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

Tai yra tolydus atsitiktinis dydis su tankio funkcija

$$f_\tau(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & \text{kai } t \geq 0, \\ 0, & \text{kitur.} \end{cases}$$

Svarbiausios eksponentinio atsitiktinio dydžio charakteristikos yra šios.

- *Vidurkis* $E\tau = 1/\lambda$ :

$$E\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}dx$$
$$= -xe^{-\lambda x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}.$$

- *Dispersija* $var(\tau) = 1/\lambda^2$. Pirmiausia suskaičiuokime antrąjį momentą:

$$\begin{aligned} E\tau^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= -x^2 e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2x e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

  Taigi

$$var\tau = E\tau^2 - (E\tau)^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

- *Atminties nebuvimas*: $P(\tau > t+s | \tau > t) = P(\tau > s)$ :

$$P(\tau > t+s|\tau > t) = \frac{P(\tau > t+s)}{P(\tau > t)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = P(\tau > s).$$

Keletas kitų svarbių savybių.

- Jei $\tau_1, \ldots, \tau_m$ yra nepriklausomi eksponentiniai atsitiktiniai dydžiai su parametrais atitinkamai $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, tai atsitiktinis dydis $V = \min\{\tau_1, \ldots, \tau_m\}$ yra eksponentinis su parametru $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m$:

$$\begin{aligned} P(\min\{\tau_1, \ldots, \tau_n) > t) &= P(\tau_1 > t, \ldots, \tau_n > t) \\ &= P(\tau_1 > t) \cdots P(\tau_n > t) \\ &= \prod_{k=1}^{n} e^{-\lambda_k t} = \exp\{-(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)t\}. \end{aligned}$$

- $P(\tau_i = \min\{\tau_1, \ldots, \tau_m\}) = \lambda_i/(\lambda_1 + \cdots + \lambda_m)$.

Norėdami įrodyti šią savybę, pirmiausia tarkime, kad $S$ ir $\tau$ yra nepriklausomi eksponentiniai a.d. su parametrais atitinkamai $\lambda$ ir $\mu$. Tuomet

$$\begin{aligned} P(S < \tau) &= \int_0^{\infty} P(\tau > s) f_S(s) ds = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda s} e^{-\mu s} ds \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \int_0^{\infty} (\lambda + \mu) e^{-(\lambda+\mu)s} ds = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}. \end{aligned}$$

Lieka pasinaudoti šia ir prieš tai išvestąja savybėmis.

- Jei $I = \operatorname{argmin}\{\tau_1, \ldots, \tau_m\}$, tai

$$P(I = i) = \lambda_i/(\lambda_1 + \cdots + \lambda_m).$$

Tegu $I = i$, $S = \tau_i$, $U = \min_{j \neq i} \tau_j$. Atsitiktinis dydis $U$ yra eksponentinis su parametru

$$\mu = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n - \lambda_i.$$

Taigi

$$P(I = i) = P(S < U) = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu} = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}.$$

- a.d. $I$ ir $V$ yra nepriklausomi.

Suskaičiuokime bendrą šių a.d. skirstinį:

$$\begin{aligned}P(I=i,V=t) &= P(\tau_i=t,\tau_j>t,\ \text{kai}\ j\neq i)\\ &= \lambda_i e^{-\lambda_i t}\prod_{j\neq i} e^{-\lambda_j t}\\ &= \frac{\lambda_i}{\lambda_1+\cdots\lambda_n}(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)e^{-(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)t}\\ &= P(I=i)P(V=t),\end{aligned}$$

nes a.d. $V$ turi eksponentinį skirstinį su parametru $\lambda_1+\cdots+\lambda_n$.

***5.1 teiginys.*** *Jei $\tau_1,\tau_2,\ldots$ nepriklausomi eksponentiniai su parametru $\lambda$, tai a.d. $Z_n=\tau_1+\cdots+\tau_n$ tankio funkcija yra*

$$f_{Z_n}(t)=\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!},\ \ t\geq 0.$$

*Įrodymas.* Įrodysime pasitelkę matematinę indukciją. Teiginys akivaizdžiai teisingas, kai $n=1$ (priminsime, kad pagal susitarimą $0!=1$). Tarkime, kad teiginys teisingas, kai $n=m$ ir suskaičiuokime $f_{Z_{m+1}}(t)$. Kadangi a.d. $Z_m$ ir $\tau_{m+1}$ yra nepriklausomi, tai

$$\begin{aligned}f_{Z_{m+1}}(t) &= \int_0^t f_{Z_n}(t)f_{\tau_{m+1}}(t-s)ds\\ &= \int_0^t \lambda e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^m}{m!}\lambda e^{-\lambda(t-s)}ds\\ &= e^{\lambda t}\lambda^{m+1}\int_0^t \frac{s^m}{m!}ds\\ &= \lambda e^{-\lambda t}\frac{\lambda^m t^m}{m!}.\end{aligned}$$

Teiginys įrodytas. ■

Tegu $\tau_1,\tau_2,\ldots$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę eksponentiniai atsitiktiniai dydžiai, su pasiskirstymo funkcija

$$F_\tau(x)=P(\tau_i\leq x)=1-e^{-\lambda x},\ \ x\geq 0.$$

Atsitiktinį dydį $\tau_i$ interpretuojame, kaip $i$-ojo kliento laukimo laiką. Apibrėžkime

$$T_n=\tau_1+\cdots+\tau_n,\ \ n=1,2,\ldots.$$

Atsitiktinį dydį $T_n$ interpretuojame, kaip $n$-ojo kliento atvykimo laiką. Pastebėkime, kad $\lim_{n\to\infty}T_n=\infty$ beveik tikrai, nes pagal didžiųjų skaičių dėsnį

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}T_n=\frac{1}{\lambda}\ \ \text{b.t.}$$

Apibrėžkime procesą $(N_t,t\geq 0)$ taip:

$$N_0=0,\quad N_t=\max\{n\geq 1:T_n\leq t\},\ \ t>0.$$

Ekvivalenčiai

$$N_t=\sum_{n=1}^{\infty}n\mathbf{1}_{T_n\leq t<T_{n+1}},\quad t>0.$$

***5.1 teorema.*** *Atsitiktinis procesas $(N_t, t \geq 0)$ yra homogeninis Puasono procesas su parametru (intensyvumu) $\lambda$.*

*Įrodymas.* Irodysime, kad procesas $(N_t, t \geq 0)$ turi (P1)–(P3) savybes. ■

***5.1 lema.*** *Su kiekvienu $s > 0$, $N_s$ yra Puasono atsitiktinis dydis su parametru $\lambda s$.*

*Įrodymas.* Reikia pastebėti, kad įvykiai $\{N_s = n\}$ ir $\{T_n \leq s < T_{n+1}\}$ yra lygūs, todėl

$$P(N_s = n) = P(T_n \leq s < T_{n+1}).$$

Pastaroji tikimybė lygi

$$\begin{aligned} P(T_n \leq s < T_n + \tau_{n+1}) &= \int_0^\infty P(t \leq s < t + \tau_{n+1}) f_{T_n}(t)dt \\ &= \int_0^s P(\tau_{n+1} > s - t) f_{T_n}(t)dt \\ &= \int_0^s e^{-(s-t)\lambda} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} dt \\ &= e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Lema įrodyta. ■

***5.2 lema.*** *Atsitiktinis dydis $N_{t+s} - N_s$ yra Puasono su parametru $\lambda t$ ir nepriklauso nuo atsitiktinių dydžių $N_u, 0 \leq u \leq s$.*

***5.3 lema.*** *Atsitiktinio proceso $(N_t, t \geq 0)$ priaugliai yra nepriklausomi.*

Jau matėme, kad Puasono proceso trajektorijos yra trūkios su vienetiniais šuoliukais. Tačiau Puasono procesas yra tolydus antrojo momento prasme:

$$E(N_t - N_s)^2 = \lambda(t - s) + [\lambda(t - s)]^2 \to 0 \quad \text{kai} \quad s \to t.$$

Homogeninis Puasono procesas su intensyvumu $\lambda$ gali būti charakterizuotas kaip sveikareikšmis procesas, prasidedantis nulyje, nemažėjančių trajektorijų, nepriklausomų priauglių kuriam tolygiai pagal $t$

$$\begin{aligned} &P(X_{t+h} - X_t = 0) = 1 - \lambda h + o(h) \\ &P(X_{t+h} - X_t = 1) = \lambda h + o(h). \end{aligned}$$

Kodėl Puasono procesas yra svarbus? Spęskime tokį uždavinį. Tegu $n$ MIF studentų nepriklausomai vienas nuo kito eina pietauti tarp 12 ir 13 val. su tikimybe $\lambda/n$. Be to, tas kuris nusprendžia eiti, laiką pasirenka pagal tolygų skirstinį. Tikimybė, kad lygiai $k$ studentų pietaus tarp 12 ir 13 val. lygi

$$\binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

kai $n \to \infty$.

Pavyzdžio tęsinys.

***5.2 teorema.*** *Tarkime, su kiekvienu $n \geq 1$, $X_{nk}, k = 1, \ldots, n$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai,*

$$P(X_{ni} = 1) = p_{ni}, \qquad P(X_{ni} = 0) = 1 - p_{ni},$$

*$i = 1, \ldots, n$. Tegu*

$$S_n = X_{n1} + \cdots + X_{nn}, \quad \lambda_n = ES_n = p_{n1} + \cdots + p_{nn}$$

*ir $Z_n$ yra Puasono atsitiktinis dydis su parametru $\lambda_n$. Tuomet, su bet kuria aibe $A \subset N$*

$$\big|P(S_n \in A) - P(Z_n \in A)\big| \leq \sum_{i=1}^{n} p_{ni}.$$

***5.1 išvada.*** *Jei $\lambda_n \to \lambda$ ir $\max_{1 \leq k \leq n} p_{nk} \to 0$ kai $n \to \infty$, tai*

$$\sup_{A \subset N} \big|P(S_n \in A) - P(Z_n \in A)\big| \to 0.$$

## 5.2 Puasono procesų suma ir išskaidymas

Nagrinėkime du nepriklausomus homogeninius Puasono procesus $N = (N_t, t \geq 0)$ ir $M = (M_t, t \geq 0)$ su intensyvumais atitinkamai $\lambda$ ir $\mu$. Tuomet procesas $L_t = N_t + M_t, t \geq 0$ vadinamas procesų $N$ ir $M$ superpozicija.

***5.2 teiginys.*** *Atsitiktinis procesas $L = (L_t, t \geq 0)$ yra homogeninis Puasono procesas su intensyvumu $\lambda + \mu$.*

*Įrodymas.* Akivaizdu, kad $L$ turi nepriklausomus priauglius ir $L_0 = 0$. Pakanka įsitikinti, kad su bet kuriais $0 \leq s < t$ atsitiktinis dydis $L_t - L_s$ yra Puasono su intensyvumo parametru $(\lambda + \mu)(t - s)$. Suskaičiuokime tikimybes:

$$\begin{aligned} P(L_t - L_s = n) &= \sum_{k=0}^{n} P(N_t - N_s = k, M_t - M_s = n - k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^k}{k!} e^{-\mu(t-s)} \frac{(\mu(t-s))^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)(t-s)} \frac{((\lambda+\mu)(t-s))^n}{n!}. \end{aligned}$$

Pirmame žingsnyje pasinaudojome pilnosios tikimybės formule, o antrame - procesų $N$ ir $M$ nepriklausomumu. ■

Toliau tegu $N = (N_t, t \geq 0)$ yra Puasono procesas su intensyvumu $\lambda$. Tegu $(X_n, n \geq 1)$ yra seka nepriklausomų Bernulio atsitiktinių dydžių su parametru $p \in (0, 1)$, nepriklausomu nuo $N$:

$$P(X_n = 1) = p = 1 - P(X_n = 0), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Pažymėkime $S_n = X_1 + \cdots + X_n, n \geq 1$. Interpretuokime $S_n$, kaip įvykio pasirodymų skaičių po $n$ bandymų ir tegu $n$-asis bandymas yra vykdomas $n$-ojo atvykimo laiku $T_n$. Tokiu atveju, įvykio pasirodymų skaičius laiko intervale $[0.t]$ yra

$$M_t = S_{N_t},$$

o neįvykimų skaičius -

$$L_t = N_t - S_{N_t}.$$

***5.3 teiginys.*** *Atsitiktiniai procesai $L = (L_t, t \geq 0)$ ir $M = (M_t, t \geq 0)$ yra nepriklausomi Puasono procesai su intensyvumais atitinkamai $\lambda(1-p)$ ir $\lambda p$.*

*Įrodymas.* Pakanka įsitikinti, kad įvykiai

$$A = \{M_t - M_s = m, L_t - L_s = k\}, \quad 0 \leq s < t,$$

nepriklauso nuo atsitiktinių dydžių $\{M_u, L_u; u \leq s\}$ ir

$$P(A) = e^{-\lambda p(t-s)} \frac{(\lambda p(t-s))^m}{m!} e^{-\lambda(1-p)(t-s)} \frac{(\lambda(1-p)(t-s))^k}{k!}.$$

Galime pastebti, kad

$$A = \{N_t - N_s = m + k, S_{N_t} - S_{N_s} = m\}.$$

Be to, $\sigma$ algebra $\sigma(M_u, L_u; u \leq s)$ sutampa su $\sigma$ algebra

$$\mathcal{F} = \sigma(N_u, u \leq s; Y_1, \ldots, Y_{N_s}).$$

Akivaizdu, kad $A$ nepriklauso nuo $\mathcal{F}$. Galiausiai

$$\begin{aligned}
P(A) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(A \cap \{N_s = n\}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P(N_s = n, N_t - N_s = m + k, S_{m+k+n} - S_n = m) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P(N_s = n, N_t - N_s = m + k) P(S_{m+k+n} - S_n = m) \\
&= P(N_t - N_s = m + k) P(S_{m+k} = m) \\
&= e^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^{m+k}}{(m+k)!} \frac{(m+k)!}{m!k!} p^m (1-p)^k.
\end{aligned}$$

Teiginys įrodytas. ■

## 5.3 Sudėtinis Puasono procesas

Kiek pinigų išleido pirkėjai parduotuvėje iki laiko momento $t$? Koks informacijos kiekis atėjo į serverį iki laiko momento $t$? Šiems ir panašiems klausimams spręsti galime pasinaudoti sudėtiniu Puasono procesu.

***5.2 apibrėžimas.*** *Tegu $Y_1, Y_2, \ldots$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai ir nepriklauso nuo Puasono proceso $(N_t, t \geq 0)$. Tuomet procesas*

$$Z_t = \sum_{k=1}^{N_t} Y_k, \quad t \geq 0,$$

*vadinamas sudėtiniu Puasono procesu.*

Jei Puasono procesu $(N_t, t \geq 0)$ modeliuosime ateinančių į parduotuvę klientų skaičių, o atsitiktiniu dydžiu $Y_j$ aprašysime $j$'ojo pirkėjo išleidžiamą pinigų sumą, tai sudėtinis Puasono procesas $(Z_t, t \geq 0)$ kaip tik aprašys pinigų kiekį, kurį pirkėjai išleidžia parduotuvėje. Atsitiktinių dydžių $Y_1, Y_1, \ldots$ nepriklausomumas čia yra visai natūralus.

**5.3** **teorema.** *Tegu $Y, Y_1, Y_2, \ldots$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai nepriklausantys nuo sveikareikšmio neneigiamo atsitiktinio dydžio $N$. Apibrėžkime $S_N = Y_1 + \cdots + Y_N$ ($S_N = 0$, jei $N = 0$). Tuomet*

*(a) jei $EN < \infty$, tai $ES_N = EY \cdot EN$;*

*(b) jei $EN^2 < \infty$, tai $var(S_N) = ENvar(Y) + var(N)(EY)^2$;*

*(c) jei $N$ yra Puasono su parametru $\lambda$, tai $var(S_N) = \lambda EY^2$.*

*Įrodymas.* Pasinaudijame pilnosios tikimybės formule:

$$\begin{aligned} ES_N &= \sum_{n=0}^{\infty} E(S_N|N=n)P(N=n) = \sum_{n=0}^{\infty} nEY_1P(N=n) \\ &= ENEY. \end{aligned}$$

Analogiškai skaičiuojame ir variaciją. Pirmiausia pastebime, kad

$$E(S_N^2|N=n) = ES_n^2 = nvar(Y_1) + (nEY_1)^2.$$

Toliau skaičiuojame kaip anksčiau:

$$\begin{aligned} ES_N^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} E(S_N^2|N=n)P(N=n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [nvar(Y_1) + n^2(EY_1)^2]P(N=n) \\ &= (EN)var(Y_1) + EN^2(EY_1)^2. \end{aligned}$$

Lieka suskaičiuoti variaciją:

$$\begin{aligned} var(S_n) &= ES_N^2 - (ES_N)^2 \\ &= (EN)var(Y_1) + EN^2(EY_1)^2 - (EN \cdot EY_1)^2 \\ &= (EN)var(Y_1) + var(N)(EY_1)^2. \end{aligned}$$

Atskiru atveju, kai $N$ yra Puasono atsitiktinis dydis, tai $EN = var(N) = \lambda$, todėl

$$var(S_N) = \lambda(var(Y_1) + (EY_1)^2) = \lambda EY_1^2.$$

Teorema įrodyta. ■

**5.4** **teiginys.** *Sudėtinis Puasono procesas turi nepriklausomus prieaugius, o priaugliai $Z_t - Z_s$ turi charakteristinę funkciją*

$$e^{(c_{Y_1}(x)-1)\lambda(t-s)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

*Čia $c_{Y_1}$ yra atsitiktinio dydžio $Y_1$ charakteristinė funkcija.*

*Įrodymas.* Fiksuokime $0 \leq s < t$. Galime pastebėti, kad

$$\mathcal{G} := \sigma(Z_u, u \leq s) \subset \mathcal{F} := \sigma(N_u, u \leq s; Y_1, \ldots, Y_{N_s}).$$

Iš čia gauname, kad $Z_t - Z_s = S_{N_t} - S_{N_s}$ nepriklauso nuo $\mathcal{G}$. Lieka suskaičiuoti charakteristinę funkciją:

$$\begin{aligned}
Ee^{ix(Z_t - Z_s)} &= \sum_{m,k=0}^{\infty} Ee^{ix(Z_t - Z_s)} \mathbf{1}_{N_s = m, N_t - N_s = k} \\
&= \sum_{m,k=0}^{\infty} Ee^{ix(S_{m+k} - S_m)} \mathbf{1}_{N_s = m, N_t - N_s = k} \\
&= \sum_{m,k=0}^{\infty} Ee^{ixS_k} P(N_s = m, N_t - N_s = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ Ee^{ixY_1} \right]^k e^{-\lambda(t-s)} \frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!} \\
&= \exp\{(c_{Y_1}(x) - 1)\lambda(t-s)\}.
\end{aligned}$$

teiginys pilnai įrodytas. ■

## 5.4 Nehomogeniškas Puasono procesas

***5.3 apibrėžimas.*** *Nehomogeniniu Puasono procesu su dažnumo funkcija $\lambda(r), r \geq 0$, vadiname procesą $\{N(t), t \in [0, \infty)\}$ apibrėžtą tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, jei teisingos šios trys savybės:*

*(P1)* $N(0) = 0$

*(P2) su visais $0 < t_1 < \cdots < t_n$ prieaugiai $X_{t_1}, N(t_2) - N(t_1), \ldots, N(t_n) - N(t_{n-1})$ yra nepriklausomi;*

*(P3) Jei $0 \leq s < t < \infty$, tai $N(t) - N(s)$ turi Puasono skirstinį su parametru $\int_s^t \lambda(r)dr$.*

Esminis skirtumas nuo homogeninio yra tas, kad laukimo laikai nebėra pasiskirstę pagal eksponentinį skirstinį ir nėra nepriklausomi.

## 5.5 Pratimai

***5.1 pratimas.*** Tegu $X$ ir $Y$ yra nepriklausomi eksponentiniai atsitiktiniai dydžiai su parametrais atitinkamai $\lambda$ ir $\mu$. Pažymėkime $U = \min\{X, Y\}$, $V = \max\{X, Y\}$. Raskite

(a) $E(U)$,

(b) $E(V - U)$,

(c) $E(V)$,

(c) išraišką vidurkiui $EV$, pritaikę tapatybę $V = X + Y - U$.

***5.2 pratimas.*** Tegu $T_1$ ir $T_2$ yra eksponentiniai atsitiktiniai dydžiai su parametrais atitinkamai $\lambda_1$ ir $\lambda_2$. Pažymėkime $U = \min\{T_1, T_2\}$, $V = \max\{T_1, T_2\}$. Tegu $I = \operatorname{argmin}\{T_1, T_2\}$. Raskite vektoriaus $(U, V - U, I)$ bendrą tankio funkciją ir įrodykite, kad $U$ ir $V - U$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai.

***5.3 pratimas.*** Tarkime, $(N_t, t \geq 0)$ yra Puasono procesas su intensyvumu $\lambda = 15$. Suskaičiuokite

(a) $P(N_6 = 9)$;

(b) $P(N_8 = 10 | N_9 = 6)$;

(c) $P(N_9 = 6 | N_8 = 10)$.

***5.4 pratimas.*** Tegu $(N_t, t \geq 0)$ yra Puasono procesas su parametru $\lambda = 5$. Tegu $T_n$ yra $n$-ojo kliento atvykimo laikas. Raskite

(a) $E(T_{12})$;

(b) $E(T_{12} | N_2 = 5)$;

(c) $E(N_5 | N_2 = 5)$.

***5.5 pratimas.*** Pirmoji ir antroji futbolo komandos muša įvarčius pagal Puasono procesą su parametrais atitinkamai 1 ir 2. Tarkime $N_0^{(1)} = 2$, $N_0^{(2)} = 1$.

(a) Kokia tikimybė, kad $N_t^{(1)} = 5$ anksčiau, nei $N_t^{(2)} = 5$?

(b) Atsakykite į tą patį klausimą, kai atitinkamų Puasono procesų parametrai yra $\lambda_1$ ir $\lambda_2$.

***5.6 pratimas.*** Pirkėjai į parduotuvę užeina pagal Puasono dėsnį su intensyvumu $\lambda = 10$ per valandą. Surašykite vidutinį pardavimų kiekį per darbo dieną (8 val.), jei žinoma, kad pirkėjas ką nors nuperka su tikimybe 0.3.

***5.7 pratimas.*** Parduotuvė turi tris įėjimus. Per kiekvieną iš jų pirkėjai ateina pagal Puasono dėsnį su intensyvumais atitinkamai $\lambda_1 = 100$, $\lambda_2 = 90$. $\lambda_3 = 120$ per valandą. Be to, 30 procentų ateina vyrų. Vyrai ką nors nuperka su tikimybe 0.8, o moterys - 0.1. Kiekvienas pirkėjas vidutiniškai išleidžia 12 Lt.

(a) Kiek vidutiniškai pirkėjai išleidžia parduotuvėje per 10 val.

(b) Kokia tikimybė, kad trečioji pirkėja moteris apsipirkti ateis per pirmas 15 min.? Koks yra tikėtinas jos atvykimo laikas?

***5.8 pratimas.*** Tarkime, $Y_1, Y_2, \dots$ yra neneigiami nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai. Tegu $Z_0 = 0, Z_n = Y_1 + \dots + Y_n$, $n \geq 1$. Atsitiktinį dydį $Z_n$ interpretuojame, kaip $n$-ojo kliento atvykimo į parduotuvę laiką. Atsitiktinis procesas $(Z_n, n \geq 0)$ dar vadinamas atstatymo procesu. Tegu $N_t$ yra atvykimų skaičius laike $[0, t]$.

(a) Įrodykite, kad su visais $n \geq 1$ ir $t \geq 0$, $P(N_t \geq n) = P(Z_n \leq t)$;

(b) Įsitikinkite, kad $\lim_{t\to\infty} N_t = \infty$ b.t.

(c) Įrodykite, kad

$$\frac{Z_{N_t}}{N_t} \xrightarrow{b.t.} a = EY_1.$$

(d) Pritaikę nelygybes $Z_{N_t} \leq t < Z_{N_t+1}$ įrodykite, kad

$$\frac{N_t}{t} \xrightarrow{b.t.} \frac{1}{EY_1},$$

kai $t \to \infty$.

***5.9*** ***pratimas.*** Tegu $\tau_1, \tau_2, \ldots$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę eksponentiniai atsitiktiniai dydžiai su parametru $\lambda$, o $\nu$ yra nepriklausomas atsitiktinis dydis su $P(\nu = n) = p(1-p)^{n-1}$, $n \geq 1$. Raskite sumos $S_\nu = \tau_1 + \cdots \tau_\nu$ skirstinį.

***5.10*** ***pratimas.*** Tegu $N$ yra Puasono procesas su parametru $\lambda$, $L$ yra paskutinio atvykimo intervale $[0, t]$ laikas ($L = 0$, jei atvykimų nebuvo). Raskite vidurkį $E(t - L)$ ir išnagrinėkite jo elgesį, kai $t \to \infty$.

# 6 skyrius

# Brauno judesio procesas

## 6.1 Apibrėžimas ir paprasčiausios savybės

Matematinis Brauno judesio arba Vynerio proceso apibrėžimas yra toks.

***6.1 apibrėžimas.*** *Atsitiktinis procesas $W = (W_t, t \geq 0)$ vadinamas (standartiniu) Brauno judesiu arba (standartiniu) Vynerio procesu, jeigu:*

1) $W_0 = 0$
2) *proceso prieaugiai yra nepriklausomi: su visais $0 \leq t_1 < \cdots < t_n$ atsitiktiniai dydžiai $W_{t_n} - W_{t_{n-1}}, \ldots, W_{t_2} - W_{t_1}$ yra nepriklausomi;*
3) *jei $0 \leq s < t$, tai atsitiktinis dydis $W_t - W_s$ turi normalųjį skirstinį $\mathcal{N}(0, t-s)$;*
4) *proceso $(W_t, t \geq 0)$ trajektorijos yra tolydžios.*

***6.1 teiginys.*** *Brauno judesio procesas yra Gausinis.*

*Įrodymas.* Reikia įsitikinti, kad visi proceso baigtiniamačiai skirstiniai yra Gauso. Imkime $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_d$ ir nagrinėkime vektorius $X = (W_{t_1}, W_{t_2}, \ldots, W_{t_d})^\tau$, ir $Y = (W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_d} - W_{t_{d-1}})^\tau$. Čia $^\tau$ žymi vektoriaus transponavimą, kitaip tariant $X$ ir $Y$ yra atitinkami vektoriai stulpeliai. Remiantis Vynerio proceso nepriklausomų prieaugių savybe, gauname, kad vektorius $Y$ turi Gauso skirstinį. Kadangi $X = AY$, su matrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

tai ir $X$ yra Gauso atsitiktinis vektorius. ■

***6.2 teiginys.*** *Brauno judesio vidurkis yra nulis:*

$$m_B(t) = EB_t = 0, \quad t \geq 0, \quad t \geq 0,$$

*o kovariacija*

$$\Gamma_B(s,t) = EB_sB_t = \min\{s,t\}, \quad s,t \geq 0$$

*Įrodymas.* Tikrai, kadangi $W_t = W_t - W_0 \sim N(0, t^2)$, tai $EW_t = 0$ su visais $t \geq 0$. Norėdami suskaičiuoti kovariaciją, tarkime, $t > s > 0$. Tuomet

$$EW_tW_s = E(W_t - W_s + W_s)W_s = E(W_t - W_s)(W_s - W_0) + EW_s^2 = E(W_t - W_s)E(W_s - W_0) + EW_s^2 = s.$$

Čia pasinaudojome (2) ir (3) Vynerio proceso apibrėžimo aksiomomis. ■

Yra teisingas ir atvirkčias sąryšis tarp Gauso proceso kovariacijos ir Vynerio proceso: jei atsitiktinis Gauso procesas $X = (X_t, t \geq 0$ turi nulinį vidurkį ir kovariacinę funkciją $\Gamma(s, t_) = \min\{s, t\}, s, t \geq 0$, tai jis tenkina $(1) - (3)$ Vynerio proceso 6.1 apibrėžimo aksiomas (žr. 6.1 pratimą). Čia tik pastebėsime, kad kovariacinė funkcija $\Gamma(s, t) = \min\{s, t\}$ yra neneigiamai apibrėžta, nes

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j \min\{t_i, t_j\} &= \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^\infty \mathbf{1}_{[0,t_i]}(u)\mathbf{1}_{[0,t_j]}(u)du \\ &= \int_0^\infty \Big[\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{1}_{[0,t_i]}(u)\Big]^2 du \geq 0. \end{aligned}$$

Taigi remiantis Kolmogorovo teorema egzistuoja Gauso procesas, kurio kovariacija yra $\Gamma(t, s) = \min\{t, s\}, s, t \geq 0$. Be to, kadangi $X_t - X_s$ turi normalųjį skirstinį, tai

$$E[(X_t - X_s)^{2k}] = \frac{(2k)!}{2^k k!}(t - s)^k.$$

Pėmę, pavyzdžiui. $k = 2$, procesui $X$ galime pritaikyti Kolmogorovo teorem1 apie tolydumą. Taigi egzistuoja proceso $X$ versija, kurios trajektorijos yra tolydžios beveik tikrai. Ta tolydžioji versija ir yra Vynerio procesas. Taigi jis egzistuoja. Tačiau, kaip nesunku pastebėti, įrodymas nėra konstruktyvus. Konstruktyvius Vynerio proceso aprašymus nagrinėsime vėliau.

## 6.2 Atsitiktiniai procesai susiję su Brauno judesiu

Tegu $W = (W_t, t \geq 1)$ yra standartinis Vynerio procesas.

***6.2 apibrėžimas. (Brauno tiltas)*** *Brauno tiltu vadinamas atsitiktinis procesas $B = (B_t, t \in [0, 1]$ :*

$$B_t = W_t - tW_1,$$

*kai $t \in [0, 1]$.*

Brauno tiltas yra Gauso procesas, kurio vidurkis yra nulis, o kovariacinė funkcija

$$\Gamma_B(t, s) = E(B_tB_s) = \min\{s, t\} - st,$$

$s, t \in [0, 1]$. Be to, iš Brauno tilto apibrėžimo matome, kad

$$B_0 = B_1 = 0.$$

***6.3 apibrėžimas. (Brauno tiltas su dreifu)*** *Atsitiktinis procesas*

$$X_t = \sigma W_t + \mu t, \quad t \geq 0$$

*vadinamas Vynerio procesu su dreifu. Čia $\sigma > 0, t \in \mathbb{R}$ yra konstantos.*

Atsitiktinis procesas $(X_t, t \geq 0)$ yra Gauso su vidurkiu

$$\mu_X(t) = E(X_t) = \mu t$$

ir kovariacine funkcija

$$\Gamma_X(s,t) = \sigma^2 \min\{s,t\},$$

$s, t \geq 0$.

***6.4 apibrėžimas.*** ***(Geometrinis Brauno judesys)*** *Apibrėžiamas taip:*

$$X_t = \exp\{\sigma W_t + \mu t\}, \quad t \geq 0.$$

*Čia $\sigma > 0$ it $\mu \in \mathbb{R}$ yra konstantos.*

Šį procesasą Black, Scholes ir Merton pasiūlė akscijų kainų modeliavimui. Procesas nėra Gauso.

***6.5 apibrėžimas.*** ***(Ornstein–Uhlenbeck procesas)*** *Apibrėžkime*

$$X_t = e^{-t} W_{e^{2t}}, \quad t \geq 0.$$

*Procesas $X = (X_t, t \geq 0)$ vadinamas Orstein-Uhlenbeck'o procesu.*

Tai yra Gauso procesas, kurio vidurkis yra nulis, o kovariacinė funkcija yra

$$EX_t X_s = e^{-|t-s|}, \quad t, s \geq 0.$$

Taigi didėjant atstumui tarp laiko momentų $t$ ir $s$, koreliacija tarp proceso elgesio tais laiko momentais mažėja eksponentiškai.

Apibrėžkime Vynerio procesą atitinkančią filtraciją. Nagrinėkiome procesą $W = (W_t, t \geq 0)$, apibrėžtą tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Kiekvienam laiko momentui $t$, tegu $\mathcal{F}_t$ yra $\sigma$ algebra generuota atsitiktinių dydžių $\sigma\{W_s, s \leq t\}$ ir $\mathcal{F}$ aibių, kurių tikimybės yra nulinės. Kitaip tariant, $\mathcal{F}_t$ yra mažiausia $\sigma$ algebra, kuriai priklauso aibės pavidalo

$$\{W_s \in A\} \cup N;$$

čia $0 \leq s \leq t$, $A \subset \mathbb{R}$ yra Borelio aibė, $N \in \mathcal{F}$ tokia aibė, kad $P(N) = 0$. Galime pastebėti, kad $\mathcal{F}_u \subset cf_t$, jei $u \leq t$. Kitaip tariant, šeima $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ yra tikimybinės erdvės $(\Omega, , \mathsf{P})$ filtracija.

***6.3 teiginys.*** *$\sigma$ algebrų šeima $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ yra tolydi iš dešinės, t.y., su visais $t \geq 0$,*

$$\bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t.$$

***6.4 teiginys.*** *Procesai*

*(1)* $(W_t, t \geq 0)$;

*(2)* $(W_t^2 - t, t \geq 0)$;

*(3)* $(\exp\{aW_t - a^2 t/2\}, t \geq 0)$ *su bet kuriuo* $a \neq 0$,

*yra martingalai filtracijos $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ atžvilgiu.*

*Įrodymas.* Brauno judesio procesas yra martingalas, nes $E(W_s|\mathcal{F}_s) = W_s$, o

$$E(W_t - W_s|\mathcal{F}_s) = E(W_t - W_s) = 0.$$

Imdami $s < t$ bei taikydami sąlyginio vidurkio savybes suskaičiuojame

$$\begin{aligned}
E(W_t^2|\mathcal{F}_s) &= E((W_t - W_s + W_s)^2|\mathcal{F}_s) \\
&= E((W_t - W_s)^2|\mathcal{F}_s) + 2E((W_t - W_s)W_s)|\mathcal{F}_s) + E(W_s^2|\mathcal{F}_s) \\
&= E(W_t - W_s)^2 + 2W_s E((W_t - W_s)|\mathcal{F}_s) + W_s^2 \\
&= t - s + W_s^2.
\end{aligned}$$

Panašiai įsitikiname, kad ir trečiasis procesas yra martingalas:

$$\begin{aligned}
E(\exp\{aW_t - a^2t/2\}|\mathcal{F}_s) &= e^{aW_s} E(\exp\{a(W_t - W_s) - a^2t/2\}|\mathcal{F}_s) \\
&= e^{aW_s} E \exp\{a(W_t - W_s) - a^2t/2\} \\
&= \exp\{aW_s\} \exp\{a^2(t-s)/2 - a^2t/2\} = \exp\{aW_s - a^2s/2\}.
\end{aligned}$$

Teiginį įrodėme. ■

## 6.3 Vynerio proceso modeliavimas

### Invariantiškumo principas

Tarkime, $X_1, X_2, \dots, X_n$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, $EX_1 = 0$. Apibrėžkime $S_0 = 0$ ir

$$S_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Nagrinėkime atsitiktinį procesą

$$\xi_n(t) = n^{-1/2}\Big(S_{[nt]} + (nt - [nt])X_{[nt]+1}\Big), \quad t \in [0,1].$$

Akivaizdu, kad to proceso visos trajektorijos yra tolydžios. Vienu svarbiausių atsitiktinių procesų teorijos rezultatų yra taip vadinamas Donskerio invariantiškumo principas.

***6.1 teorema.*** ***(Donsker-Prohorov)*** *Tarkime, $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su vidurkiu $EX_1 = 0$ ir dispersija $EX_1^2 = 1$. Iš jų sukonstruotas sukonstruotas laužčių procesas $(W_n(t), t \in [0,1])$ konverguoja pagal skirstinį erdvėje $C[0,1]$ prie standartinio Vynerio proceso $(W_t, t \in [0,1])$.*

Nenorėdami gilintis į konvergavimo pagal skirstinį erdvėje $C[0,1]$ apibrėžimą (tai išeina už šio kurso ribų), pateiksime kelias išvadas iš invariantiškumo principo.

Tarkime, kad laužčių procesas $W_n = (W_n(t), t \in [0,1])$ yra sukonstruotas iš nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ su vidurkiu $EX_1 = 0$ ir dispersija $EX_1^2 = 1$.

***6.1 išvada.*** *Atsitiktinio proceso $W_n$ baigtiniamačiai skirstiniai konverguoja prie atitinkamų Vynerio proceso baigtiniamačių skirstinių:*

$$\lim_{n]to\infty} P(W_n(t_1) \le x_1, \dots, W_n(t_d) \le x_d) = P(W_{t_1} \le x_1, \dots, W_{t_d} \le x_d)$$

*su visais $x_1, \dots, x_d \in \mathbb{R}$ ir $d \ge 1$.*

Atvaizdis $T : C[0,1] \to \mathbb{R}$ yra tolydus taške $f_0$, jei

$$\lim_{n\to\infty} T(f_n) = T(f_0)$$

su bet kuria tokia seka $(f_n) \subset C[0,1]$, kad

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f_0(t)| = 0.$$

Atvaizdis $T$ yra tolydus, jei jis tolydus kiekviename ta6ke $f_0 \in C[0,1]$.

***6.2 išvada.*** *Bet kuriam tolydžiam atvaizdžiui $T : C[0,1] \to \mathbb{R}$,*

$$T(W_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} T(W).$$

Panagrinėkime keletą pavyzdžių.

***6.1 pavyzdys.*** Imkime funkcijas $T_i : C[0,1] \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$,

$$T_1(f) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|, \quad T_2(f) = \sup_{t\in[0,1]} f(t).$$

Galima įsitikinti, kad abi funkcijos $T_1$ ir $T_2$ yra tolydžios. Pavyzdžiui,

$$|T_i(f) - T_i(g)| \le \sup_{0\le t\le 1} |f(t) - g(t)|,$$

bet kurioms funkcijoms $f, g \in C[0,1]$.

Be to, $T_1(W_n) = n^{-1/2} \max_{1\le k\le n} |S_k|$, o $T_2(W_n) = n^{-1/2} \max_{1\le k\le n} S_k$. Taigi, iš invariantiškumo principo gauname, kad

$$n^{-1/2} \max_{1\le k\le n} |S_k| \xrightarrow{\mathcal{D}} \sup_{1\le t\le 1} |W_t|,$$

o

$$n^{-1/2} \max_{1\le k\le n} S_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \sup_{1\le t\le 1} W_t.$$

Abiejų ribinių atsitiktinių dydžių pasiskirstymo fumkcijos yra tolydžios ir yra žinomos jų analitinės išraiškos. Taigi teisinga ši išvada:

***6.3 išvada.*** *(a) Su kiekvienu $x \ge 0$,*

$$\lim_{n\to\infty} P(n^{-1/2} \max_{1\le k\le n} |S_k| \le x) = P(\sup_{1\le t\le 1} |W_t| \le x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \exp\{-(2k+1)2\pi^2/(8x^2)\}.$$

*(b) Su kiekvienu $x$,*

$$\lim_{n\to\infty} P(n^{-1/2} \max_{1\le k\le n} S_k \le x) = 1 - 2\Phi(x).$$

Pastarasis ribinis skirstinys gaunamas remiantis tuom, kad Brauno judesio maksimumas iki laiko momento $T$ turi tą patį skirstinį, kaip modulio reikšmė taške $T$:

$$P(\max_{0\le t\le T} W_t \ge a) = 2P(W_T \ge a), \quad a \ge 0.$$

## Lévy, Kampé de Fériet skleidinys

Tegu $\mathrm{D}_j$ žymi $j$'ojo lygmens intervalo $[0,1]$ diadinius skaičius t.y.,

$$\mathrm{D}_0 = \{0,1\}, \qquad \mathrm{D}_j = \left\{(2l-1)2^{-j};\ 1 \le l \le 2^{j-1}\right\}, \quad j \ge 1.$$

Skaiti visų diadinių intervalo $[0,1]$ skaičių aibė yra

$$\mathrm{D} = \bigcup_{j=0}^{\infty} \mathrm{D}_j.$$

Diadinius skaičius galime perindeksuoti natūraliaisiais, naudodamiesi tuom, kad kiekvieną natūralųjį skaičių $n \ge 2$ galime užrašyti $n = k + 2^j$; čia $k = 1, \ldots, 2^j$, $j \ge 0$. Taigi eilutę $\sum_{r\in\mathrm{D}} f(r)$ reikia suprasti kaip $\sum_{n=0}^{\infty} f(r_n)$. Skaičiams $r \in \mathrm{D}_j$, $j \ge 0$, apibrėžkime

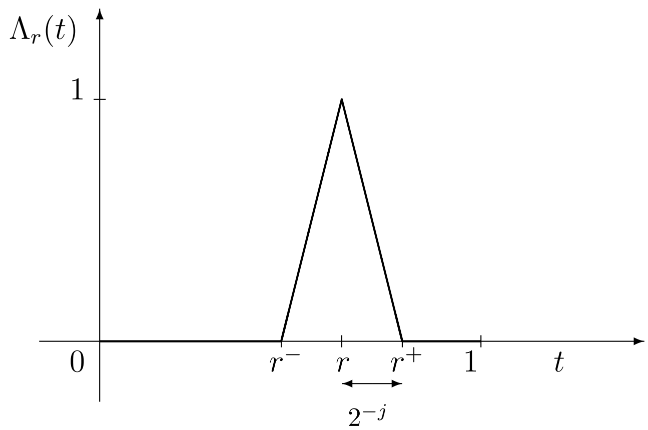
$$r^- := r - 2^{-j}, \quad r^+ := r + 2^{-j}.$$

Skaičių $r \in \mathrm{D}_j$, $j \ge 1$ atitinkanti Faber-Schauder kepuraitė yra funkcija

$$\Lambda_r(t) = \begin{cases} (t-r^-)/(r-r^-) = 2^j(t-r^-) & \text{if } t \in (r^-, r]; \\ (r^+-t)/(r^+-r) = 2^j(r^+-t) & \text{if } t \in (r, r^+]; \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

Atskiru atveju, kai $j = 0$,

$$\Lambda_0(t) = 1 - t, \quad \Lambda_1(t) = t, \quad t \in [0,1].$$




11 pav. Faberio–Šauderio funkcijos $\Lambda_r$

Vynerio proceso konstrukcija remiasi tuom, kad kiekvieną tolydžią funkciją $f : [0,1] \to R$ galime išreikšti eilute

$$f(t) = \sum_{r \in \mathrm{D}} \lambda_r(f)\Lambda_r(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{r \in \mathrm{D}_j} \lambda_r(f)\Lambda_r(t), \quad t \in [0,1],$$

kuri konverguoja tolygiai intervale $[0,1]$. Schauder'io koeficientai $\lambda_r(f)$ yra apibrėžti šia formule:

$$\lambda_r(f) := \begin{cases} f(r) - \frac{1}{2}(f(r^+) + f(r^-)), & \text{if } r \in \mathrm{D}_j,\, j \geq 1, \\ f(r) & \text{if } r \in \mathrm{D}_0. \end{cases} \tag{6.1}$$

Standartinio Brauno judesio proceso sklaidimas eilute atžvilgiu Feber-Schauder kepuraičių buvo įrodytas Lévy ir Kampé de Fériet.

***6.2 teorema.*** *Tarkime, $\{X_r; r \in \mathrm{D} \setminus \{0\}\}$ yra nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių standartinių normaliųjų atsitiktinių dydžių seka. Tuomet funkcinė eilutė*

$$W_t := X_1\Lambda_1(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{r \in \mathrm{D}_j} 2^{-(j+1)/2} X_r \Lambda_r(t), \quad t \in [0,1] \tag{6.2}$$

*konverguoja tolygiai beveik tikrai. $W$ yra Brauno judesio procesas. (6.2) formulėje pašalinę pirmąjį narį $X_1\Lambda_1$, gauname Brauno tilto procesą $B$.*

## Paley-Wiener skleidinys

Brauno judesį galime modeliuoti taikydami taip vadinamą Paley-Wiener skaidinį:

$$W_t = \gamma_0 \frac{t}{\sqrt{2\pi}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt/2)}{n} \gamma_k,$$

$t \in [0, 2\pi]$. Čia $\gamma_0, \gamma_1, \ldots$ yra nepriklausomi standartiniai normaliniai atsitiktiniai dydžiai. Naudojant šį dėstinį, reikia pasirinkti svaikuosius skaičius $M$ ir $N$ ir modeliuoti

$$\gamma_0 \frac{t_j}{\sqrt{2\pi}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{M} \frac{\sin(nt_j/2)}{n} \gamma_k,$$

$t_j = (2\pi j)/N$, $j = 0, 1, \ldots, N$.

## 6.4 Trajektorijų savybės

### Savipanašumas

Atsitiktinio proceso trajektorijų savipanašumą aprašo šis teiginys.

***6.5 teiginys.*** *Jei atsitiktinis procesas $(W_t, t \geq 0)$ yra standartinis Vynerio procesas ir skaičius $a > 0$ tai atsitiktinis procesas $X_t, t \geq 0)$ apibrėžtas formule*

$$X_t = a^{-1} W_{a^2 t}, \quad t \geq 0,$$

*taip pat yra standartinis Vynerio procesas.*

*Įrodymas.* Trajektorių tolydumas, proceso prieaugių stacionarumas ir nepriklausomumas nesikeičia pakeitus skalę bei mastelį. Lieka pastebėti, kad su bet kuriais $t > s \geq 0$, atsitiktinis dydis $X_t - X_s = a^{-1}(W_{a^2 t} - W_{a^2 s})$ yra normalinis su nuliniu vidurkiu ir dispersija $a^{-2}(a^2 t - a^2 s) = t - s$. ■

***6.6 teiginys.*** *Apibrėžkime procesą*

$$X_t = \begin{cases} tW_{1/t}, & \textit{kai} \quad t > 0 \\ 0, & \textit{kai} \quad t = 0. \end{cases}$$

*Tuomet $(X_t, t \geq 0)$ taip pat yra standartinis Vynerio procesas.*

*Įrodymas.* Galime įsitikinti, kad $(X_t, t \geq 0)$ yra Gauso procesas. Be to, jo vidurkis yra nulis, o kovariacija

$$EX_t X_s = stEW_{1/t} W_{1/s} = st \min\{1/t, 1/s\} = \min s, t, \quad s, t > 0.$$

Lieka įsitikinti, kad procesas $(X_t, t \geq 0)$ yra tolydus. kadangi tolydumas bet kokiame taške $t > 0$ nekelia abejonių, lieka patikrinti tolydumą nulyje, t.y.,

$$\lim_{t \downarrow 0} X_t = 0 \quad \text{b.t.}$$

Tam reikia pastebėti, kad

$$\lim_{t \downarrow 0} X_t = \lim_{s \to \infty} \frac{1}{s} B_s = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} B_n,$$

o pastaroji riba yra nulis beveik tikrai, reimiantis didžiųjų skaičių dėsniu ir Brauno judesio prieaugių nepriklausomumu arba 6.5 teorema. ■

### Trajektorijų Hiolderiškumas

Tegu $W = (W_t, t \geq 0)$ yra standartinis Vynerio procesas.

***6.3 teorema.*** *tegu $0 < \alpha < 1/2$. Egzistouja toks atsitiktinis dydis $M > 0$, kad beveik tikrai su visais $0 \leq s < t \leq 1$*

$$|W_t - W_s| \leq M|t - s|^\alpha. \tag{6.3}$$

Trajektorijos, kurioms teisinga (6.3) savybė, vadinamos Hiolderio su rodikliu $\alpha$. Taigi, su kiekvienu $0 \le \alpha < 1/2$ Vynerio proceso trajektorijos yra beveik tikrai Hiolderio su rodikliu $\alpha$.

*Įrodymas.* Įrodymui pasinaudosime Vynerio proceso Lévy, Kampé de Fériet skleidiniu. Fiksuokime $s, t \in [0, 1]$. Iš Lévy, Kampé de Fériet skleidinio gauname

$$W_t - W_s = Y_1(t-s) + \sum_{j\ge 1} 2^{-(j+1)/2} \sum_{r\in D_j} Y_r(\Lambda_r(t) - \Lambda_r(s)).$$

Toliau pastebėkime, kad fiksuotiems $s$ ir $t$ sumoje $\sum_{r\in D_j} Y_r(\Lambda_r(t) - \Lambda_r(s))$ yra ne daugiau kaip du nenuliniai nariai. Be to,

$$|\Lambda_{jk}(t) - \Lambda_{jk}(s)| \le \min\{1; 2^{j+1}|t-s|\}.$$

Taigi

$$|W_t - W_s| \le |Y_1||s-t| + 2\sum_{j\ge 1} 2^{-(j+1)/2} \max_{r\in D_j} |Y_r| \min\{1, 2^{j+1}|t-s|\}.$$

Išskaidę sumą į dvi: pagal $j : 2^{j+1}|t-s| \le 1$ ir $j : 2^{j+1}|t-s| > 1$ pirmoje sumoje esančius narius įvertiname dydžiu

$$2^{-(j+1)/2} \max_{r\in D_j} |Y_r| 2^{j+1}|t-s| \le 2^{-(j+1)(1/2-\alpha)} \max_{r\in D_j} |Y_r||t-s|^{\alpha}$$

o antroje sumoje dydžiu

$$2^{-(j+1)/2} \max_{r\in D_j} |Y_r| \le 2^{-(j+1)(1/2-\alpha)} \max_{r\in D_j} |Y_r||t-s|^{\alpha}$$

Taigi

$$|W_t - W_s| \le 2\sum_{j\ge 1} 2^{-(j+1)(1/2-\alpha)} \max_{r\in D_j} |Y_r||t-s|^{\alpha}$$

ir

$$\sup_{s\ne t} \frac{|W_t - W_s|}{|t-s|^{\alpha}} \le 2\sum_{j\ge 1} 2^{-(j+1)(1/2-\alpha)} \max_{r\in D_j} |Y_r|.$$

Lieka įsitikinti, kad

$$M := 2\sum_{j\ge 1} 2^{-(j+1)(1/2-\alpha} \max_{r\in D_j} |Y_r| < \infty \quad \text{b.t.}$$

Tam pakanka pasinaudoti tokia paprasta nelygybe.

***6.1 lema.*** *Jei $\eta_1, \dots, \eta_m, \dots$ yra nepriklausomi standartiniai Gauso a.d. Tuomet egzistuoja tokia absoliutinė konstanta $c > 0$, kad su kiekvienu $m \ge 1$,*

$$E \max_{1\le k\le m} |\eta_k| \le c\sqrt{\log m}.$$

Pritaikę šią lemą, gauname

$$\sum_{j\ge 1} 2^{-(j+1)(1/2-\alpha)} E \max_{r\in D_j} |Y_r| \le c \sum_{j\ge 1} 2^{-(j+1)(1/2-\alpha)} \sqrt{j} < \infty.$$

Lieka pasnaudorti Kolmogorovo trijų eilučių teorema. ■

Šiek tiek tiksliau Vynerio proceso elgesį aprašo Levy teorema.

***6.4 teorema.*** ***(Levy, 1937)*** *beveik tikrai*

$$\limsup_{h\downarrow 0} \sup_{0\le t\le 1-h} \frac{|W_{t+h} - W_t|}{\sqrt{2h\log(1/h)}} = 1.$$

## Elgesys begalybėje ir nulyje

Vynerio proceso elgesį begalybėje ir nulyje tiksliai aprašo vadinamas kartotinio logaritmo dėsnis.

***6.5* teorema.** *tarkime, $W = (W_t, t \geq 0)$ yra standartinis Vynerio procesas. Tuomet*

$$P(\limsup_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\log\log t}} = 1) = 1,$$

*ir*

$$P(\liminf_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\log\log t}} = -1) = 1.$$

Nulyje:

$$P(\limsup_{h\downarrow 0} \frac{|W_h|}{\sqrt{2h\log\log(1/h)}} = 1) = 1.$$

Kokį bepaimtume $T > 0$, intervale $(0, T)$ Vynerio procesas turi be galo daug nulių. Tačiau jo nulių aibė yra beveik tikrai uždara, neskaiti ir jos Lebego matas yra nulis, nėra izoliuotų taškų.

Jei $f : [0, 1] \to R$ tenkina $f(t) > 0$ yra didėjanti, o $f(t)/\sqrt{t}$ yra mažėjanti kurioje nors nulio aplinkoje, tuomet

$$P(|W(t) < r(t) \forall t \in [0, t_0] \quad \text{ka=kuriam} \quad t_0) = 1$$

tada ir tik tada, kai

$$\int_0^1 t^{-3/2} r(t) e^{-r^2(t)/2t}\,\mathrm{d}t < \infty.$$

## Trajektorijų nediferencijuojamumas

Pagal apibrėžimą, Vynerio proceso trajektorijos yra tolydžios. tačiau apskritai jos yra nereguliarios. Kokia prasme netrukus paaiškės.

***6.7* teiginys.** *Beveik tikrai su bet kuriais $0 < a < b < \infty$, Brauno judesio procesas nėra monotoninis intervale $[a, b]$.*

*Įrodymas.* Pirmiausia fiksuokime teigiamo ilgio intervalą $[a, b]$. Jei jis yra Brauno judesio monotoniškumo intervalas, tuomet $W_s \leq W_t$ su visais $a \leq s \leq t \leq b$. Paimkime bet kurį intervalo $[a, b]$ suskaidymą: $a = 1_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{n+1} = b$ į $n$ intervaliukų $[a_i, a_{i+1}]$. Kiekviename tokiame intervale $W_{t_i} - W_{t_{i+1}}$ turi tą patį ženklą. Kadangi proceso prieaugiai yra nepriklausomi, tai

$$\begin{aligned}
&P(\{W_{t_i} - W_{t_{i+1}} \geq 0, i = 1, \ldots, n\} \cup \{W_{t_i} - W_{t_{i+1}} \leq 0, i = 1, \ldots, n\}) \\
&\leq P(W_{t_i} - W_{t_{i+1}} \geq 0, i = 1, \ldots, n) + P(W_{t_i} - W_{t_{i+1}} \leq 0, i = 1, \ldots, n) \\
&= \prod_{i=1}^n P(W_{t_i} - W_{t_{i+1}} \geq 0) + \prod_{i=1}^n P(W_{t_i} - W_{t_{i+1}} \leq 0) \\
&= 22^{-n} \to 0,
\end{aligned}$$

kai $n \to \infty$. Taigi $P(W \quad$ yra monotoninis intervale $\quad [a, b]) = 0$. Imdami skaičias sąjungas įsitikiname, kad beveik tikrai nėra neišsigimusio Vynerio proceso monotoniškumo intervalo su racionaliais galais. Tačiau bet kuris monotoniškumo intervalas savyje turėtų intervalą su racionaliais galais. ■

Priminsime, kad dešinioji ir kairioji funkcijos $f$ išvestinės taške $t$ yra atitinkamai

$$D^* f(t) = \lim_{h\downarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h},$$

ir

$$D_*f(t) = \lim_{h\uparrow\uparrow 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}.$$

***6.8* teiginys.** *Tegu $t \geq 0$ yra fiksuotas. Tuomet Vynerio procesas beveik tikrai nediferencijuojamas taške $t$. Be to,*

$$D^*W_t = +\infty, \quad o \quad D_*W_t = -\infty.$$

*Įrodymas.* Imdami standartinį Vynerio procesą $(W_t, t \geq 0)$ sukonstruokime proces1 $(X_t, t \geq 0)$ kaip 6.6 teiginyje. Šiam procesui

$$D^*X_0 \geq \limsup_{n\to\infty} \frac{X_{1/n}-X_0}{1/n} = \limsup_{n\to\infty} nX^{1/n} = \infty$$

remiantis kartotinio logaritmo dėsniu. Analogiškai išvedame, kad $D_*X_0 = -\infty$. Tai įrodo, kad procesas nėra diferencijuojamas nulyje. Su bet kuriuo $s > 0$ procesas $(W_{t+s} - W_s, t \geq 0)$ yra Vynerio, o jo diferencijuojamumas nulyje ekvivalentus digerencijuojamumui taške $s$. ■

***6.6* teorema.** ***(Paley, Wiener ir Zygmund, 1933)*** *beveik tikrai Vynerio procesas yra nediferencijuojamas jokiame taške. Be to, su visais $t$*

$$D^*W_t = +\infty, \quad o \quad D_*W_t = -\infty.$$

## Trajektorijų šiurkštumas

Šiurkščiomis įprasta vadinti funkcijas, kurių variacija yra begalinė. Priminsime, kad tolydi iš dešinės funkcija $f : [0,t] \to \mathbb{R}$ vadinama baigtinės variacijos, jei

$$V_f^{(1)}(t) = \sup \sum_{j=1}^{m} |f(t_j) - f(t_{j-1}| < \infty$$

kai tikslusis viršutinis rėžis skaičiuojamas pagal visus $m \geq 1$ ir visus galimus intervalo $[0,t]$ skaidinius $0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_m = t$.

Funkcija turi baigtinę variaciją tada ir tik tada, kai ją galima užrašyti dviejų didėjančių funkcijų skirtumu.

***6.7* teorema.** *Tarkime, su kiekvienu $n \geq 1$ turime smulkėjančius skaidinius*

$$0 = t_0^{(n)} \leq t_1^{(n)} \leq \cdots \leq t_{k(n)}^{(n)} = t$$

*ta prasme, kad kiekviename žingsnyje pridedami nauji padalijimo taškai. Tegu*

$$\Delta_n = \sup_{1\leq j\leq k(n)} (t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}) \to 0,$$

*kai $n \to \infty$. Tuomet beveik tikrai*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k(n)} (W_{t_j^{(n)}} - W_{t_{j-1}^{(n)}})^2 = t.$$

***6.4* išvada.** *Brauno judesio proceso trajektorijos su tikimybe vienas turi begalinę pilnąją variaciją.*

Tikrai, jei $V_W^{(1)}(t)$ būtų baigtinis dydis, tai

$$\sum_{k=1}^{n}(\Delta W_k)^2 \leq \sup_k |\Delta W_t| \sum_{k=1}^{n} |\Delta W_k| \leq V \max_k |\Delta W_k| \to 0,$$

kai $|\pi| \to 0$, nes Brauno judesio trajektorijos yra tolydžios. Bet tas prieštarautų ką tik įrodytam faktui, kad $\sum_{k=1}^{n}(\Delta W_k)^2$ konverguoja kvadratinio vidurkio prasme prie intervalo ilgio $t$, tai $\pi| \to 0$.

### Arksinuso dėsniai

Sakoma, kad atsitiktinis dydis $X$ intervale $(0,1)$ turi arksinuso skirstinį, jei jo tankio funkcija yra

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}, \quad \text{kai} \quad x \in (0,1).$$

Jo pasiskirstymo funkcija yra

$$P(X \leq x) = \frac{2}{\pi}\arcsin(\sqrt{x}), \quad \text{kai} \quad x \in (0,1).$$

Nagrinėkime standartinį Vynerio procesą $W = (W_t, t \in [0,1])$.

**6.8 teorema.** **(Pirmasis arcsinuso dėsnis)** *(a) Tegu $T = \operatorname{argmax}_{0\leq t\leq 1} W(t)$. Atsitiktinis dydis $T$ yra beveik tikrai vienintelis ir turi arksinuso skirstinį.*

*(b) Jei $L = \sup\{t \in [0,1] : W(t) = 0\}$, tai a.d. $L$ turi arksinuso skirstinį.*

Kaip išvadą iš invariantiškumo principo ir Brauno judesio proceso arksinuso dėsnio gauname šį teiginį.

**6.9 teiginys.** *tarkime, $(X_k, k \geq 1)$ yra seka nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių a.d., $EX_1 = 0$, $0 < EX_1^2 = 1$. Tegu $S_n, n \geq 1)$ yra atitinkama dalinių sumų seka. Tuomet a.d.*

$$N_n = \max\{1 \leq k \leq n : S_k S_{k-1} \leq 0\},$$

*kuris reiškia paskutinį momentą iki $n$'ojo, kai atsitiktinis klaidžiojimas keičia ženklą, tenkina*

$$\lim_{n\to\infty} P(N_n \leq xn) = \frac{2}{\pi}\arcsin(\sqrt{x}),$$

*su visaais $x \in (0,1)$.*

## 6.5 Stochastinis integralas

## 6.6 Pratimai

***6.1 pratimas.*** Įrodykite, kad Gauso procesas $X = (X_t, t \geq 0$, kuris turi nulinį vidurkį ir kovariacinę funkciją $\Gamma(s,t_) = \min\{s,t\}, s,t \geq 0$, turi jis prasideda nulyje, turi nepriklausomus prieaugius ir $X_t - X_s \sim N(0, t-s)$ su visais $t > s > 0$.

***6.2 pratimas.*** Įrodykite, kad Gauso procesas $X = (X_t, t \in [0,1])$, kuris turi nulinį vidurkį ir kovariacinę funkciją $\Gamma(s,t_) = \min\{s,t\}, s,t \in [0,1]$, turi tolydžią versiją.

***6.3*** ***pratimas.*** Vynerio procesui $W$, kuris prasideda nulyje $W(0) = 0$ įrodykite, kad

$$P(W_s > 0, W_t > 0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \arcsin^{-1} \sqrt{s/t},$$

kai $s < t$. Raskite $P(W_s > 0, W_t > 0, W_u > 0)$, kai $s < t < u$.

***6.4*** ***pratimas.*** Tegu $W$ yra standartinis Vynerio procesas, $a > 0$. Įrodykite, kad šie procesai taip pat yra standartiniai Vynerio procesai:

(a) $V_t = aW_{t/a^2}$,

(b) $W_{t+a} - W_t$,

(c) $V_t = wW_{1/t}$, kai $t \neq 0$, $V_0 = 0$,

(d) $W_1 - W_{1-t}, t \in [0, 1]$.

***6.5*** ***pratimas.*** Kokios turi būti parametrų $\lambda_1, \lambda_2$ reikšmės, kad procesas $\lambda_1 W^{(1)} + \lambda_2 W^{(2)}$ būtų standartinis Vynerio procesas, kai $W^{(1)}$ ir $W^{(2)}$ yra nepriklausomi standartiniai Vynerio procesai.

***6.6*** ***pratimas.*** Tegu $W$ yra standartinis Vynerio procesas. Raskite šių procesų vidurkius ir kovariacines funkcijas:

(a) $_t = |W_t|$,

(b) $Y_t = e^{W_t}$,

(c) $Z_t = \int_0^t W_s ds$.

# Literatūra

[1] Marc A. Berger (1992). *An Introduction to Probability and Stochastic Processes*, Springer-Verlag, New York.

[2] R. M. Dudley (1998) *Real Analysis and Probability.* Wadsworth& Brooks/Cole.

[3] Rick Durrett (1997). *Essentials of Stochastic Processes*, Springer, New York.

[4] V. Kabaila *Matematinė analizė.* I, II d. Vilnius: Mokslas, 1983, 408 p.; 1986, 482 p.

[5] V. Mackevičius (1998). *Integralas ir Matas*, Vilnius: TEV.

[6] K.R. Parthasarathy, *Introduction to Probability and measures*, Academic Press, New York and London, 1980.

[7] Sidney Resnick (1992). *Adventures in Stochastic Processes*, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin

[8] Hsu Hwei P. (1997) *Probability, Random Variables and Random Processes*, Schaum's Outlines Series, McGraw-Hill, New-York.ne