1 Kintamojo keitimas integruojant

Šis integravimo būdas remiasi diferencialo apibrėžimu. Sukonstruosime kintamojo x keitinį

$$x = \phi(u). \tag{1}$$

Tada pagal diferencialo apibrėžimą

$$dx = \phi'(u)\, du. \tag{2}$$

Dabar pritaikę (2) integralui gausime

$$\int f(x)\, dx = \int f\left(\phi\left(u\right)\right) \phi'(u)\, du. \tag{3}$$

Galima pastebėti, kad ši išraiška yra sudėtinės funkcijos išvestinės taisyklė į kitą pusę (integralas, kaip anti-diferencialas).

Praktiniuose šio būdo taikymuose yra vertinga išsivesti, o paskui tik prisiminti keitinius:

$$\begin{gathered} dx = \frac{1}{a} d(ax+b) \\ 2x\, dx = d\left(x^2\right) \\ \cos x\, dx = d(\sin x) \\ \frac{dx}{x} = d(\ln x) \text{ ir t.t.} \end{gathered}$$

1.1 Pavyzdžiai

1. Rasti integralą

   $$\int \cos 3x\, dx.$$

   Žinome, kad $\int \cos y\, dy = \sin y + C$, todėl įsiveskime keitinį

   $$\begin{aligned} y &= 3x, \\ x &= \frac{y}{3}, \\ dx &= \frac{dy}{3}. \end{aligned}$$

   Įstatę šią išraišką į integralą gauname

   $$\int \cos 3x\, dx = \int \cos y \frac{dy}{3} = \frac{1}{3} \int \cos y\, dy = \frac{1}{3} \sin y + C.$$

   Belieka grįžti prie pradinio kintamojo x

   $$\frac{1}{3} \sin y + C = \frac{1}{3} \sin 3x + C.$$

2. Keitiniu gali būti ir sudėtinės funkcijos. Skaičiuodami integralą

   $$\int \frac{1}{1-x^2} \ln \frac{1+x}{1-x}\, dx,$$

keitiniu paimkime $u = \ln \frac{1+x}{1-x}$. Tada

$$du = d \ln \frac{1+x}{1-x},$$

$$du = \frac{2}{1-x^2} dx,$$

$$dx = \frac{1-x^2}{2} du$$

ir mūsų integralas transformuojasi į

$$\int \frac{1}{1-x^2} \ln \frac{1+x}{1-x}\, dx = \frac{1}{2} \int u\, du = \frac{1}{4} u^2 + C = \frac{1}{4} \ln^2 \frac{1+x}{1-x} + C.$$

3. Tačiau ne visada pirmas į galvą šovęs keitinys yra pats tinkamiausias. Raskime integralą

$$\int \frac{x}{1+x^4}\, dx.$$

Keitiniu $u = 1 + x^4$ nieko gero negausime. Užtat, $u = x^2$ yra geresnis pasirinkimas

$$\int \frac{x}{1+x^4}\, dx = \int \frac{x}{2x\,(1+x^4)}\, du = \frac{1}{2} \int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2} \arctan u + C = \frac{1}{2} \arctan\left(x^2\right) + C.$$

4. Kartais yra patogu senąjį kintamąjį išreikšti per naująjį keitinio kintamąjį. Raskime

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x+3}}\, dx.$$

Pirmiausia, panaudokime keitinį $u = \sqrt{2x+3}$, gausime

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x+3}}\, dx = \int \frac{x\sqrt{2x+3}}{\sqrt{2x+3}}\, du = \int x\, du.$$

Dabar išreikškime senąjį kintamąjį x per naująjį kintamąjį u

$$x = \frac{u^2 - 3}{2}.$$

Gausime

$$\int x\, du = \int \frac{u^2-3}{2}\, du = \frac{u^3}{6} - \frac{3}{2} u + C = \frac{(2x+3)^{3/2}}{6} - \frac{3\sqrt{2x+3}}{2} + C.$$

5. Jeigu pointegralinis reiškinys yra trupmena, kurios skaitiklis - funkcijos išvestinė u', o vardiklis - pati funkcija u, tai galima pasinaudoti gyvenimą palengvinančia išraiška

$$\int \frac{u'\, dx}{u} = \int \frac{du}{u} = \int \ln|u| + C. \tag{4}$$

Pavyzdžiui

(a)

$$\int \frac{\sin x\, dx}{1+3\cos x} = -\frac{1}{3}\int \frac{-3\sin x\, dx}{1+3\cos x} = -\frac{1}{3}\int \frac{d(1+3\cos x)}{1+3\cos x} = -\frac{1}{3}\ln|1+3\cos x| + C.$$

(b) Išraiška (4) leidžia greitai suskaičiuoti/prisiminti tangento ir kotangento integralus

$$\int \tan x\, dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\, dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C,$$

$$\int \cot x\, dx = \int \frac{d\sin x}{\sin x} = \ln|\sin x| + C.$$

6. Žinoma, ne visada keitiniai yra tokie akivaizdūs. Pabandykime rasti

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\, dx$$

Norint apskaičiuoti šį integralą reikės pasinaudoti keitiniu

$$\left(1+\frac{1}{x^2}\right) dx = d\left(x-\frac{1}{x}\right),$$

kuris iš pirmo žvilgsnio neturi labai daug ko bendro su uždavinio sąlyga. Tačiau atlikę keletą paprastų pertvarkymų pamatysime, kad

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\, dx = \int \frac{x^2+1}{x^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}\, dx = \int \frac{1}{x^2+\frac{1}{x^2}}\, d\left(x-\frac{1}{x}\right) =$$
$$= \int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}\, d\left(x-\frac{1}{x}\right) = \int \frac{1}{u^2+2}\, du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\frac{u^2}{2}+1}\, du =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{v^2+1}\, dv = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{u}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{u}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} + C.$$

2 Integravimas dalimis

Iš sandaugos diferencialo formulės

$$d(uv) = u\, dv + v\, du \tag{5}$$

gauname integravimo dalimis formulę

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du. \tag{6}$$

Formulė (6) dažnai leidžia sudėtingus integralus redukuoti į paprastesnius, lengviau skaičiuojamus.

2.1 Pavyzdžiai

1. Rasime natūraliojo logaritmo integralą (kurio dažniausiai nėra standartinėse integralų lentelėse, būtent dėl integravimo dalimis formulės)

$$\int \ln x\, dx.$$

Tegul (6) formulėje $u = \ln x$, o $v = x$. Tada, žinodami, kad $d \ln x = \frac{1}{x}\, dx$ gausime

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - \int x\, d \ln x = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx = \\ = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C.$$

2. Dažniausiai šią formulę taikysime ne taip paprastai - be jokių pertvarkymų, o vieną iš pointegrinės funkcijos dalių įkeldami po diferencialu. Jei iškeldami iš diferencialo - diferencijavome, tai įkeldami - integruosime. Raskime

$$\int xe^{2x}\, dx.$$

Nesunku suintegruoti

$$\int e^{2x}\, dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C.$$

Vadinasi

$$e^{2x}\, dx = \frac{1}{2} de^{2x}.$$

Žinoma, jei Jums patogiau, tai prie šios išvados galėjote prieiti ir iš kitos pusės - diferencijuodami (t.y. ieškodami funkcijos, kurios išvestinė būtų e^{2x}).

Dabar belieka pritaikyti integravimo dalimis formulę

$$\int xe^{2x}\, dx = \frac{1}{2}\int xde^{2x} = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\, dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C.$$

3. Kartais pritaikytos tik vieną kartą integravimo dalimis formulės gali neužtekti. Suskaičiuokime integralą

$$\int x^3 e^{-x}\, dx.$$

Pradžiai, pritaikysime formulę panašiai, kaip ir prieš tai buvusiame pavyzdyje

$$\int x^3 e^{-x}\, dx = -\int x^3\, de^{-x} = -x^3 e^{-x} + 3\int x^2 e^{-x}\, dx.$$

Deja, bet vieno karto nepakanka. Reikia taikyti formulę dar du kartus!

$$-x^3 e^{-x} + 3\int x^2 e^{-x}\, dx = -x^3 e^{-x} - 3x^2 e^{-x} + 6\int xe^{-x}\, dx = \\ = -x^3 e^{-x} - 3x^2 e^{-x} - 6xe^{-x} - 6e^{-x} + C.$$

4. Integravimo dalimis formulė leidžia rasti integralus su funkcijomis, kurios nesiredukuoja ir kurioms integravimas dalimis atrodo neturėtų atnešti naudos! Suskaičiuokime
$$\int e^x \sin x \, dx.$$
Pirmiausia, įkelkime trigonometrinę funkciją po diferencialo ženklu ir pritaikykime (6) formulę du kartus
$$\int e^x \sin x \, dx = -\int e^x \, d\cos x = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx =$$
$$= -e^x \cos x + \int e^x \, d\sin x = -e^x \cos x + e^x \sin x + \int e^x \sin x \, dx.$$
Atrodo, kad gavome pasaką be galo... Tačiau, pažymėkime $I(x) = \int e^x \sin x \, dx$ ir užrašykime gautą išraišką dar kartą
$$I(x) = -e^x \cos x + e^x \sin x - I(x).$$
Vadinasi
$$2I(x) = -e^x \cos x + e^x \sin x$$
$$I(x) = \int e^x \sin x \, dx = \frac{-e^x \cos x + e^x \sin x}{2} + C.$$

5. Elegantiškai atrodo sprendimai, kuriuose taikomas tiek kintamojo keitimas, tiek integravimas dalimis.

   (a) Apskaičiuokime
   $$\int \frac{\ln x \, dx}{x^2}.$$
   Pirmiausia, pritaikykime keitinį $u = \frac{1}{x}$
   $$\int \frac{\ln x \, dx}{x^2} = -\int \frac{-x^2 \ln u \, du}{x^2} = \int \ln u \, du.$$
   Natūraliojo logaritmo integralą jau suskaičiavome pirmame pavyzdyje, taigi
   $$\int \ln u \, du = u \ln u + u + C = -\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C.$$

   (b) Raskime
   $$\int \sqrt{x} \ln x \, dx.$$
   Taikysime keitinį $u = \sqrt{x}$. Gauname
   $$\int \sqrt{x} \ln x \, dx = 4 \int u^2 \ln u \, du.$$

Dabar atskirai, integravimo dalimis pagalba suskaičiuosime

$$\int u^2 \ln u \, du = u^3 \ln u - \int \left(2u^2 \ln u + u^2\right) \, du =$$
$$= u^3 \ln u - \frac{u^3}{3} - 2 \int u^2 \ln u \, du.$$

Kaip ir ketvirtame pavyzdyje įsivesime pažymėjimą $I(u) = \int u^2 \ln u \, du$. Tada

$$3I(u) = u^3 \ln u - \frac{u^3}{3},$$

$$I(u) = \int u^2 \ln u \, du = \frac{u^3 \ln u}{3} - \frac{u^3}{9} + C.$$

Dabar sugrįžę prie pradinės formulės ir grąžinę pradinį kintamąjį gausime

$$\int \sqrt{x} \ln x \, dx = \frac{4u^3 \ln u}{3} - \frac{4u^3}{9} = \frac{2x^{\frac{3}{2}} \ln x}{3} - \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{9} + C.$$

Literatūra

[1] M.L.Lial, C.D.Miller, Calculus With Applications, Scott, Foresman and Company, 1989.

[2] V.P.Minorsky, Problems In Higher Mathematics, Science, Moscow, 1978.