Diferencialinės lygtys

Antanas Lenkšas

NHTDL

2015–05–13

Turinys

Nehomogeninės tiesinės diferencialinės lygtys

Apibrėžimas

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

vadinama n-tosios eilės nehomogenine tiesine diferencialine lygtimi (NHTDL), jei reiškinys

$$f(x) \neq 0$$

I sprendimo etapas

I etapas

Sprendžiame homogeninę lygtį (t.y. $f(x) := 0$):

$$y^n + a_{n-1}y^{n-1} + a_{n-2}y^{n-2} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Randame bendrąjį homogeninės lygties sprendinį:

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$$

I sprendimo etapas

I etapas

Sprendžiame homogeninę lygtį (t.y. $f(x) := 0$):

$$y^n + a_{n-1}y^{n-1} + a_{n-2}y^{n-2} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Randame bendrąjį homogeninės lygties sprendinį:

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$$

II sprendimo etapas

Konstantų varijavimo metodas

NHTDL sprendinių ieškosime, laikydami, kad $C_1, C_2, \ldots, C_n$ yra ne konstantos, o funkcijos, t.y.

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \ldots + C_n(x)y_n(x)$$

Suprantama, reikės n lygčių rasti tas funkcijas.

Lygtis sudarysime n kartų diferencijuodami y.

II sprendimo etapas

Konstantų varijavimo metodas

NHTDL sprendinių ieškosime, laikydami, kad $C_1, C_2, \ldots, C_n$ yra ne konstantos, o funkcijos, t.y.

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \ldots + C_n(x)y_n(x)$$

Suprantama, reikės n lygčių rasti tas funkcijas.

Lygtis sudarysime n kartų diferencijuodami y.

II sprendimo etapas

Konstantų varijavimo metodas

NHTDL sprendinių ieškosime, laikydami, kad $C_1, C_2, \ldots, C_n$ yra ne konstantos, o funkcijos, t.y.

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \ldots + C_n(x)y_n(x)$$

Suprantama, reikės n lygčių rasti tas funkcijas.

Lygtis sudarysime n kartų diferencijuodami y.

Pirmoji išvestinė

Diferencijuodami y gauname:

$$y' = C_1' y_1 + C_2' y_2 + \ldots + C_n' y_n + \\ + C_1 y_1' + C_2 y_2' + \ldots + C_n y_n'$$

$C_1, C_2, \ldots, C_n$ parinksime taip, kad pirmoji eilutė būtų lygi 0:

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 + \ldots + C_n' y_n = 0$$

Taip gausime ir pirmąją sistemos lygtį.

Tokiu atveju:

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' + \ldots + C_n y_n'$$

Pirmoji išvestinė

Diferencijuodami y gauname:

$$y' = C_1'y_1 + C_2'y_2 + \ldots + C_n'y_n + \\ + C_1y_1' + C_2y_2' + \ldots + C_ny_n'$$

$C_1, C_2, \ldots, C_n$ parinksime taip, kad pirmoji eilutė būtų lygi 0:

$$C_1'y_1 + C_2'y_2 + \ldots + C_n'y_n = 0$$

Taip gausime ir pirmąją sistemos lygtį.

Tokiu atveju:

$$y' = C_1y_1' + C_2y_2' + \ldots + C_ny_n'$$

Pirmoji išvestinė

Diferencijuodami y gauname:

$$y' = C_1'y_1 + C_2'y_2 + \ldots + C_n'y_n + \\ + C_1y_1' + C_2y_2' + \ldots + C_ny_n'$$

$C_1, C_2, \ldots, C_n$ parinksime taip, kad pirmoji eilutė būtų lygi 0:

$$C_1'y_1 + C_2'y_2 + \ldots + C_n'y_n = 0$$

Taip gausime ir pirmąją sistemos lygtį.

Tokiu atveju:

$$y' = C_1y_1' + C_2y_2' + \ldots + C_ny_n'$$

Antroji išvestinė

Analogiškai tęsdami (diferencijuodami y toliau) gauname:

$$y'' = C_1'y_1' + C_2'y_2' + \ldots + C_n'y_n' + \\ + C_1y_1'' + C_2y_2'' + \ldots + C_ny_n''$$

$C_1, C_2, \ldots, C_n$ ir vėl parinksime taip, kad pirmoji eilutė būtų lygi 0:

$$C_1'y_1' + C_2'y_2' + \ldots + C_n'y_n' = 0$$

Tai bus antroji sistemos lygtis.

Be to:

$$y'' = C_1y_1'' + C_2y_2'' + \ldots + C_ny_n''$$

Antroji išvestinė

Analogiškai tęsdami (diferencijuodami y toliau) gauname:

$$y'' = C_1'y_1' + C_2'y_2' + \ldots + C_n'y_n' +$$
$$+ C_1y_1'' + C_2y_2'' + \ldots + C_ny_n''$$

$C_1, C_2, \ldots, C_n$ ir vėl parinksime taip, kad pirmoji eilutė būtų lygi 0:

$$C_1'y_1' + C_2'y_2' + \ldots + C_n'y_n' = 0$$

Tai bus antroji sistemos lygtis.

Be to:

$$y'' = C_1y_1'' + C_2y_2'' + \ldots + C_ny_n''$$

Antroji išvestinė

Analogiškai tęsdami (diferencijuodami y toliau) gauname:

$$y'' = C_1'y_1' + C_2'y_2' + \ldots + C_n'y_n' + \\ + C_1y_1'' + C_2y_2'' + \ldots + C_ny_n''$$

$C_1, C_2, \ldots, C_n$ ir vėl parinksime taip, kad pirmoji eilutė būtų lygi 0:

$$C_1'y_1' + C_2'y_2' + \ldots + C_n'y_n' = 0$$

Tai bus antroji sistemos lygtis.

Be to:

$$y'' = C_1y_1'' + C_2y_2'' + \ldots + C_ny_n''$$

n-toji išvestinė

Galiausiai :

$$y^n = C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} +$$
$$+ C_1 y_1^{(n)} + C_2 y_2^{(n)} + \ldots + C_n y_n^{(n)}$$

Šį sykį $C_1, C_2, \ldots, C_n$ parinksime taip, kad pirmoji eilutė būtų lygi $f(x)$:

$$C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x)$$

Tai bus n-toji ieškomos sistemos lygtis.

Galiausiai :

$$y^n = C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} + \\ + C_1 y_1^{(n)} + C_2 y_2^{(n)} + \ldots + C_n y_n^{(n)}$$

Šį sykį $C_1, C_2, \ldots, C_n$ parinksime taip, kad pirmoji eilutė būtų lygi $f(x)$:

$$C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x)$$

Tai bus n-toji ieškomos sistemos lygtis.

Sistema

Taigi, gauname tokią lygčių sistemą

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 + \ldots + C_n'y_n = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' + \ldots + C_n'y_n' = 0 \\ \ldots \\ C_1'y_1^{(n-2)} + C_2'y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'y_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1'y_1^{(n-1)} + C_2'y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

Sistema

Jei $C_1, C_2, \ldots, C_n$ tenkina šią sistemą, tai, į lygtį

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

įrašę išvestinių išraiškas

$$\begin{aligned}
y &= C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n \\
y' &= C_1 y_1' + C_2 y_2' + \ldots + C_n y_n' \\
y'' &= C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + \ldots + C_n y_n'' \\
&\ldots \\
y^{(n)} &= C_1 y_1^{(n)} + C_2 y_2^{(n)} + \ldots + C_n y_n^{(n)} + f(x)
\end{aligned}$$

matome, kad ji akivaizdžiai tenkinama (stulpeliais - atskirųjų HTDL sprendinių $y_1, \ldots, y_n$ sumos, t.y. visos tokios sumos lygios 0)

Sistema

Jei $C_1, C_2, \ldots, C_n$ tenkina šią sistemą, tai, į lygtį

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

įrašę išvestinių išraiškas

$$\begin{aligned}
y &= C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n \\
y' &= C_1 y_1' + C_2 y_2' + \ldots + C_n y_n' \\
y'' &= C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + \ldots + C_n y_n'' \\
&\ldots \\
y^{(n)} &= C_1 y_1^{(n)} + C_2 y_2^{(n)} + \ldots + C_n y_n^{(n)} + f(x)
\end{aligned}$$

matome, kad ji akivaizdžiai tenkinama (stulpeliais - atskirųjų HTDL sprendinių $y_1, \ldots, y_n$ sumos, t.y. visos tokios sumos lygios 0)

Sistema

Jei $C_1, C_2, \ldots, C_n$ tenkina šią sistemą, tai, į lygtį

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \ldots + a_1y' + a_0y = f(x)$$

įrašę išvestinių išraiškas

$$\begin{aligned}
y &= C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n \\
y' &= C_1y_1' + C_2y_2' + \ldots + C_ny_n' \\
y'' &= C_1y_1'' + C_2y_2'' + \ldots + C_ny_n'' \\
&\ldots \\
y^{(n)} &= C_1y_1^{(n)} + C_2y_2^{(n)} + \ldots + C_ny_n^{(n)} + f(x)
\end{aligned}$$

matome, kad ji akivaizdžiai tenkinama (stulpeliais - atskirųjų HTDL sprendinių $y_1, \ldots, y_n$ sumos, t.y. visos tokios sumos lygios 0)

Pavyzdžiai

1 uždavinys

$$y'' + y = 4\sin x$$

- Pirmiausia sprendžiame HTDL:

$$y'' + y = 0$$

Sudarome HTDL charakteringąją lygtį:

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

Jos šaknys $\lambda_{1,2} = \pm i$

- Todėl bendrasis HTDL sprendinys yra:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

Pavyzdžiai

1 uždavinys

$$y'' + y = 4\sin x$$

- Pirmiausia sprendžiame HTDL:

$$y'' + y = 0$$

Sudarome HTDL charakteringąją lygtį:

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

Jos šaknys $\lambda_{1,2} = \pm i$

- Todėl bendrasis HTDL sprendinys yra:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

Pavyzdžiai

1 uždavinys

$$y'' + y = 4\sin x$$

- Pirmiausia sprendžiame HTDL:

$$y'' + y = 0$$

Sudarome HTDL charakteringąją lygtį:

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

Jos šaknys $\lambda_{1,2} = \pm i$

- Todėl bendrasis HTDL sprendinys yra:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

Konstantų varijavimo metodas

C_1, C_2 laikome ne konstantomis, o funkcijomis:

$$y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$$

- Sudarome lygčių sistemą:

$$\begin{cases} C_1'\cos x + C_2'\sin x = 0 \\ -C_1'\sin x + C_2'\cos x = 4\sin x \end{cases}$$

- Daugindami 1-ąją lygtį iš $\cos x$, o antrąją iš $\sin x$, bei iš pirmosios atimdami antrąją, gauname

$$C_1' = -4\sin^2 x$$

- Analogiškai, 1-ąją lygtį daugindami iš $\sin x$, o antrąją iš $\cos x$, bei abi sudėdami, gauname

$$C_2' = 4\sin x\cos x$$

Konstantų varijavimo metodas

C_1, C_2 laikome ne konstantomis, o funkcijomis:

$$y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$$

- Sudarome lygčių sistemą:

$$\begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0 \\ -C_1' \sin x + C_2' \cos x = 4 \sin x \end{cases}$$

- Daugindami 1-ąją lygtį iš $\cos x$, o antrąją iš $\sin x$, bei iš pirmosios atimdami antrąją, gauname

$$C_1' = -4\sin^2 x$$

- Analogiškai, 1-ąją lygtį daugindami iš $\sin x$, o antrąją iš $\cos x$, bei abi sudėdami, gauname

$$C_2' = 4\sin x \cos x$$

Konstantų varijavimo metodas

C_1, C_2 laikome ne konstantomis, o funkcijomis:

$$y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$$

- Sudarome lygčių sistemą:

$$\begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0 \\ -C_1' \sin x + C_2' \cos x = 4\sin x \end{cases}$$

- Daugindami 1-ąją lygtį iš $\cos x$, o antrąją iš $\sin x$, bei iš pirmosios atimdami antrąją, gauname

$$C_1' = -4\sin^2 x$$

- Analogiškai, 1-ąją lygtį daugindami iš $\sin x$, o antrąją iš $\cos x$, bei abi sudėdami, gauname

$$C_2' = 4\sin x \cos x$$

Konstantų varijavimo metodas

Belieka suintegruoti:

$$C_1 = -2\int(1-\cos 2x)dx = -2x + \sin 2x + C_1$$
$$C_2 = 2\sin^2 x + C_2$$

- Todėl

$$\begin{aligned} y &= (-2x + \sin 2x + C_1)\cos x + (2\sin^2 x + C_2)\sin x \\ &= C_1\cos x + C_2\sin x - 2x\cos x + 2\cos^2 x\sin x + 2\sin^2 x\sin x \\ &= C_1\cos x + C_2\sin x - 2x\cos x + 2\sin x \end{aligned}$$

Konstantų varijavimo metodas

Belieka suintegruoti:

$$C_1 = -2\int(1-\cos 2x)dx = -2x + \sin 2x + C_1$$
$$C_2 = 2\sin^2 x + C_2$$

- Todėl

$$\begin{aligned} y &= (-2x + \sin 2x + C_1)\cos x + (2\sin^2 x + C_2)\sin x \\ &= C_1\cos x + C_2\sin x - 2x\cos x + 2\cos^2 x\sin x + 2\sin^2 x\sin x \\ &= C_1\cos x + C_2\sin x - 2x\cos x + 2\sin x \end{aligned}$$

Klausimai