Kai kurių NHTDL sprendimo būdai arba uždavinys iš egzamino

2014 m. birželio 5 d.

1 Nehomogeninių tiesinių lygčių sprendimas ne konstantų varijavimo metodu

Kai kuriais atvejais rasti n-tosios eilės nehomogeninių tiesinių diferencialinių lygčių (NHTDL) sprendinius konstantų varijavimo metodu yra labai sudėtinga. Tokiais atvejais po „I etapo", t.y. HTDL (homogeninės tiesinės diferencialinės lygties) BENDROJO sprendinio radimo, reikėtų taikyti ne konstantų varijavimo metodą, o rasti ATSKIRĄJĮ NHTDL sprendinį ir BENDRĄJĮ NHTDL sprendinį užrašyti taip:

$$y = y_H + \bar{y},$$

čia y_H yra BENDRASIS HTDL sprendinys (t.y. $y_0 = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n$), o $\bar{y}$ - ATSKIRASIS NHTDL sprendinys.

Kaip rasti kurį nors (atskirąjį) NHTDL sprendinį? Kai kuriais atvejais (plačiau žr. 8.16 poskyrį V. Mackevičiaus „Rinktinių analizės skyrių" konspekto 48 psl.) yra žinomas atskirojo NHTDL sprendinio pavidalas, o nežinomi koeficientai tame pavidale randami įstatant jį į NHTDL (neapibrėžtųjų koeficientų metodas). Pavyzdžiui, tarkime, kad dešinėje lygties pusėje yra $e^{\alpha x}(R_m(x)\cos\beta x + \bar{R}_n(x)\sin\beta x)$, t.y. lygtis atrodo šitaip

$$y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = e^{\alpha x}(R_m(x)\cos\beta x + \bar{R}_n(x)\sin\beta x),$$

čia $R_m(x)$ bei $\bar{R}_n(x)$ yra m-osios bei n-tosios eilės polinomai. Tokiu atveju atskirasis NHTDL sprendinys $\bar{y}$ randamas pagal $\lambda := \alpha \pm \beta i$ reikšmę:

- Jei $\bar{\lambda}$ nėra (HTDL lygties) charakteringosios lygties šaknis, sprendinio ieškome tokiu pavidalu (praktiškai tokiu pačiu, tik suvienodinama polinomų eilė):

  $$\bar{y} = e^{\alpha x}(Q_N(x)\cos\beta x + \bar{Q}_N(x)\sin\beta x),$$

  čia $N = max(n, m)$.

- Jei $\bar{\lambda}$ yra (HTDL lygties) charakteringosios lygties k-tojo kartotinumo šaknis, tuomet viską dauginame iš x^k:

$$\bar{y} = x^k e^{\alpha x}(Q_N(x)\cos\beta x + \bar{Q}_N(x)\sin\beta x),$$

čia (ir vėl) $N = max(n, m)$.

Kaip jau minėta, nežinomi polinomų Q_N bei $\bar{Q}_N$ koeficientai randami $\bar{y}$ įrašant į NHTDL.

Pavyzdžiui,

Uždavinys 1.1. *Su kokiais $a > 0$ diferencialinė lygtis $y'' + y = \cos ax + 2\sin ax$ turi neaprėžtų sprendinių? Raskite tuos sprendinius.*

Tai 2-osios eilės ką tik aptarto pavidalo NHTDL. Tik šįkart $\alpha = 0$, $\beta = a$, o $m = n = 0$. Tai reiškia, kad $\bar{\lambda} = 0 \pm ai = \pm ai$. Ir jei ai bus HTDL ($y'' + y = 0$) k-tojo kartotinumo šaknis, tai, atsižvelgiant į tai, kad $N = max(n, m) = max(0, 0) = 0$

$$\bar{y} = x^k(C_Q\cos ax + C_{\bar{Q}}\sin ax),$$

priešingu atveju,

$$\bar{y} = (C_Q\cos ax + C_{\bar{Q}}\sin ax).$$

Kadangi, kaip netrukus pamatysime, bendrasis HTDL sprendinys bus sudarytas tik iš aprėžtų funkcijų, tai neaprėžtų sprendinių galima gauti tik pirmuoju atveju (kur dauginama iš x^k), nes kitos funkcijos ($\cos ax$, $\sin ax$ yra aprėžtos).

Raskime bendrąjį HTDL sprendinį. Charakteringosios lygties $\lambda^2 + 1 = 0$ šaknys yra $\lambda_{1,2} = \pm i$, todėl

$$y_H = C_1\cos x + C_2\sin x$$

Vadinasi iš y_H neaprėžtų sprendinių atsirasti negali, nes tiek sin, tiek ir cos niekada neviršija 1 (absoliutiniu didumu). Tad, kaip jau ir buvo minėta, neaprėžtų funkcijų gali „atsirasti" tik pridedant (atskirąjį) NHTDL sprendinį. Ir tik tuo atveju, jei $\bar{\lambda} = \pm ai$ bus charakteringosios lygties šaknis. O taip bus tik tuomet, kai $a = 1$. Belieka tik rasti tuos sprendinius.

Kadangi $\bar{\lambda} = \pm i$ yra šaknis, kurios kartotinumas yra 1 $\bar{y}$ pavidalas bus toks

$$\bar{y} = x(C_Q\cos x + C_{\bar{Q}}\sin x).$$

Suskaičiuojame antrąją išvestinę

$$\bar{y}'' = -C_Q x\cos x - 2C_Q\sin x + 2C_{\bar{Q}}\cos x - C_{\bar{Q}}x\sin x.$$

ir statome į NHTDL:

$$-C_Q x\cos x - 2C_Q\sin x + 2C_{\bar{Q}}\cos x - C_{\bar{Q}}x\sin x + x(C_Q\cos x + C_{\bar{Q}}\sin x) = \cos x + 2\sin x$$

Suprastinus lieka

$$2C_{\bar{Q}}\cos x - 2C_Q\sin x = \cos x + 2\sin x.$$

Iš čia gauname $2C_{\bar{Q}} = 1$, t.y. $C_{\bar{Q}} = \frac{1}{2}$ ir $C_Q = -1$. Todėl šiuo atveju

$$\bar{y} = x(-\cos x + \frac{1}{2}\sin x),$$

o bendras sprendinys turės pavidalą:

$$y = y_H + \bar{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x(\frac{1}{2}\sin x - \cos x).$$