Trumpas komentaras apie kai kurias kontrolinio užduotis

2015 m. gegužės 21 d.

Uždavinys 1. *Tarkime, kad funkcija $y_1(x)$ yra funkcijos $f(x)$ pirmykštė funkcija. Raskite (bent vieną) diferencialinės lygties*

$$f(x) - y_1(x) = e^x y'$$

sprendinių.

Sprendimas
Perrašome

$$y' = \frac{f(x) - y_1(x)}{e^x}$$

Vadinasi,

$$y = \int \frac{f(x) - y_1(x)}{e^x} dx$$

t.y. reikia rasti bent vieną funkcijos

$$\frac{f(x) - y_1(x)}{e^x}$$

pirmykščių funkcijų. Ją nesunkiai randame pastebėję, kad

$$\frac{f(x) - y_1(x)}{e^x} = \frac{(f(x) - y_1(x))e^x}{e^x e^x} = \left(\frac{y_1(x)}{e^x}\right)'$$

Uždavinys 2. *Apskaičiuokite*

$$\int\limits_L \frac{ze^{\frac{a}{z+1}}}{z+1} dz,$$

jei $L : x^2 + y^2 = a^2$, o $a > 1$.

Sprendimas
Integralo skaičiavimui reikia rasti reziduumą:

$$Res_{z=-1}\frac{ze^{\frac{a}{z+1}}}{z+1}$$

Šį reziduumą rasime iš skleidinio Lorano eilute. Skleidžiame analogiškai, kaip ir namų darbų apie reziduumus uždavinyje Nr. 4, prieš tai pastebėję, kad

$$\frac{ze^{\frac{a}{z+1}}}{z+1} = \left(1 - \frac{1}{z+1}\right) e^{\frac{a}{z+1}}$$

Uždavinys 3. *Išspręskite*

$$\left(1 - \frac{x}{y}\right) dx + \left(2xy + \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2}\right) dy = 0$$

Sprendimas

Integruojamąjį daugiklį galime rasti tiek iš formulės, tiek pertvarkydami reiškinį.

$$M'_y = \frac{x}{y^2}$$

$$N'_x = 2y + \frac{1}{y} + \frac{2x}{y^2}$$

$$\frac{M'_y - N'_x}{N} = \frac{\frac{x}{y^2} - 2y - \frac{1}{y} - \frac{2x}{y^2}}{2xy + \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2}} = \frac{-2y - \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}}{x\left(2y + \frac{1}{y} + \frac{x}{y^2}\right)} = -\frac{1}{x}$$

t.y. nepriklauso nuo y.