1 Tiesinės diferencialinės lygtys

1. Uždavinys.

$$y'' + 4y' + 3y = 0$$

Tai yra homogeninė tiesinė 2-osios eilės diferencialinė lygtis (su pastoviais koeficientais). Jai išspręsti sudarome charakteringąją lygtį:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$$

Ši lygtis turi dvi šaknis $\lambda_1 = -1$ ir $\lambda_2 = -3$, kurias atitinka atskirieji homogeninės tiesinės diferencialinės lygties sprendiniai e^{-x} ir e^{-3x}. Šie sprendiniai yra tiesiškai nepriklausomi ir sudaro fundamentaliąją lygties sprendinių sistemą. Tiesinė šios sistemos kombinacija ir yra ieškomas bendrasis sprendinys:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}.$$

2. Uždavinys.

$$y^{IV} + 4y'' + 3y = 0$$

Sudarome charakteringąją lygtį:

$$\begin{aligned} \lambda^4 + 4\lambda^2 + 3 &= 0 \\ (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 + 3) &= 0 \end{aligned}$$

Visos šios lygties šaknys menamos. $(\lambda^2 + 1)$ (kompleksinių (jungtinių) šaknų pora i ir $-i$) atitinka sprendinius $\cos x$ bei $\sin x$, tuo tarpu $(\lambda^2 + 3)$ (kompleksinių šaknų pora $\sqrt{3}i$ ir $-\sqrt{3}i$) atitinka sprendinius $\cos\sqrt{3}x$ bei $\sin\sqrt{3}x$, todėl bendrasis sprendinys yra:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 \cos\sqrt{3}x + C_4 \sin\sqrt{3}x$$

3. Uždavinys.

$$y'' - 2y' + y = 0$$

Charakteringoji lygtis

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 2\lambda + 1 &= 0 \\ (\lambda - 1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

turi vieną realiąją šaknį $\lambda = 1$, kurios kartotinumas yra 2. Ši šaknis atitinka du atskirus sprendinius e^x ir xe^x. Todėl:

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x = e^x (C_1 + C_2 x)$$

4. Uždavinys.

$$y^{IV} + 4y = 0$$

Charakteringoji lygtis

$$\lambda^4 + 4 = 0$$

turi keturias kompleksines šaknis (dvi kompleksinių jungtinių šaknų poras), kurias rasime iš lygybės $\lambda = \sqrt[4]{-4}$.

$$\begin{aligned}\lambda &= \sqrt[4]{4}\left(\cos(\tfrac{\pi+2\pi k}{4}) + i\sin(\tfrac{\pi+2\pi k}{4})\right)\\ &= \sqrt{2}\left(\cos(\tfrac{\pi+2\pi k}{4}) + i\sin(\tfrac{\pi+2\pi k}{4})\right)\\ &= \sqrt{2}e^{\frac{\pi+2\pi k}{4}},\end{aligned}$$

kur $k = \overline{0,3}$.

Iš čia randame

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= 1 \pm i\\ \lambda_{3,4} &= -1 \pm i,\end{aligned}$$

kurias atitinka sprendinių poros $e^x \cos x$, $e^x \sin x$ bei $e^{-x}\cos x$, $e^{-x}\sin x$. Todėl bendrasis sprendinys yra:

$$\begin{aligned}y &= C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x + C_3 e^{-x}\cos x + C_4 e^{-x}\sin x\\ &= e^x\left(C_1\cos x + C_2 \sin x\right) + e^{-x}\left(C_3 \cos x + C_4 \sin x\right)\end{aligned}$$

5. Uždavinys.

$$y^V + 8y''' + 16y' = 0$$

Charakteringosios lygties

$$\begin{aligned}\lambda^5 + 8\lambda + 16\lambda &= 0\\ \lambda(\lambda^2+4)^2 &= 0.\end{aligned}$$

šaknys $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm 2i$ (pastarųjų kartotinumas yra lygus 2). Realioji šaknis $\lambda = 0$ atitinka sprendinį $e^{0x} = 1$. Kompleksinių jungtinių šaknų pora $\lambda_{2,3} = \pm 2i$, atsižvelgus į kartotinumą, atitinka keturis sprendinius $\cos 2x$, $\sin 2x$ bei $x\cos 2x$, $x \sin 2x$, todėl

$$\begin{aligned}y &= C_1 + C_2\cos 2x + C_3 x\cos 2x + C_4 \sin 2x + C_5 x \sin 2x =\\ &= C_1 + (C_2 + C_3 x)\cos 2x + (C_4 + C_5 x)\sin 2x\end{aligned}$$

6. Uždavinys.

$$y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$$

Tai yra tiesinė 2-osios eilės diferencialinė lygtis. Ją spręsime dviem etapais: pirmajame rasime bendrąjį homogeninės lygties sprendinį, o antrajame - "parinksime" konstantas (konstantų varijavimo metodas).

I etapas. Homogeninei lygčiai

$$y'' - 2y' - 3y = 0$$

sudarome charakteringąją lygtį

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0,$$

kuri turi dvi realiąsias šaknis $\lambda = 3$ bei $\lambda = -1$. Jas atitinka sprendiniai e^{3x} bei e^{-x}, todėl bendrasis homogeninės lygties sprendinys yra:

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} (*)$$

II etapas. C_1 ir C_2 laikydami funkcijomis ($C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$) sudarome lygčių sistemą:

$$\begin{cases} C_1' e^{3x} + C_2' e^{-x} = 0 \\ 3C_1' e^{3x} - C_2' e^{-x} = e^{4x} \end{cases}$$

Sudėję abi sistemos lygtis gauname, kad $C_1' = \frac{1}{4}e^x$. Todėl (pavyzdžiui iš pirmosios lygties) $C_2' = -\frac{1}{4}e^{5x}$.

Integruodami randame:

$$C_1 = \int \frac{1}{4} e^x dx = \frac{1}{4} e^x + \tilde{C}_1$$

ir

$$C_2 = -\int \frac{1}{4} e^{5x} dx = -\frac{1}{20} e^{5x} + \tilde{C}_2$$

Įstatome gautas išraiškas į (*):

$$\begin{aligned} y &= \left(\tfrac{1}{4}e^x + C_1\right) e^{3x} + \left(-\tfrac{1}{20}e^{5x} + C_2\right) e^{-x} \\ &= -\tfrac{1}{4}e^{4x} + C_1 e^{3x} - \tfrac{1}{20}e^{4x} + C_2 e^{-x} \\ &= \tfrac{1}{5}e^{4x} + C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} \end{aligned}$$

7. Uždavinys.

$$y'' + y = 4e^x, \quad y(0) = 4 \;\; y'(0) = -3$$

Tai 2-os eilės tiesinė diferencialinė lygtis su pradinėmis sąlygomis. Pirmiausia rasime bendrąjį sprendinį (konstantų varijavimo metodu).

Bendrasis homogeninės lygties sprendinys yra

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.(*)$$

Parenkame C_1 ir C_2 (laikydami jas funkcijomis) išspręsdami lygčių sistemą:

$$\begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0 \\ -C_1' \sin x + C_2' \cos x = 4e^x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} C_1' &= -4e^x \sin x \\ C_2' &= 4e^x \cos x \end{aligned}$$

ir integruodami gautas C_1' bei C_2' išraiškas:

$$\begin{aligned} C_1 &= \int -4e^x \sin x dx = 2e^x(\cos x - \sin x) + \tilde{C}_1 \\ C_2 &= \int 4e^x \cos x dx = 2e^x(\cos x + \sin x) + \tilde{C}_2. \end{aligned}$$

Galiausiai, gautas C_1 ir C_2 reikšmes įstatę į (*) ir sutvarkę, gauname bendrąjį tiesinė diferencialinės lygties sprendinį

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2e^x.$$

Jo išvestinė lygi

$$y' = C_2 \cos x - C_1 \sin x + 2e^x.$$

Galiausiai atsižvelgiame į pradines sąlygas

$$\begin{aligned} 4 = y(0) = C_1 + 2 \\ -3 = y'(0) = C_2 + 2 \end{aligned}$$

ir gauname, kad

$$\begin{aligned} C_1 = 2 \\ C_2 = -5. \end{aligned}$$

Todėl

$$y = 2\cos x - 5\sin x + 2e^x$$