

Rinktiniai analizės skyriai

FDM 4 semestras
el. namų darbas VII

2015 04 20

1 Reziduukai

Izoliuotieji ypatingieji taškai

Raskite šių funkcijų izoliuotuosius ypatinguosius taškus ir nustatykite jų rūšį.

Uždavinys 1. $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$

Ats.: $z = 0$ pašalinamas taškas; $z = 2\pi k$ - pirmosios eilės poliai.

Uždavinys 2. $f(z) = \frac{1}{z^2} + \sin \frac{1}{z}$

Reziduukai

Raskite reziduumus šių funkcijų izoliuotuose ypatinguosiuose taškuose.

Uždavinys 3. $f(z) = \frac{1}{z^3 - z^5}$

Uždavinys 4. $f(z) = z^3 \cos \frac{1}{z-2}$

Ats.: $\text{Res}_{z=2} f(z) = -\frac{143}{24}$.

Uždavinys 5. $f(z) = \frac{1}{\sin z}$

Ats.: $\text{Res}_{z=k\pi} f(z) = (-1)^k$.

Uždavinys 6. $f(z) = \frac{1}{z+1} e^{\frac{1}{z}}$

Ats.: $\text{Res}_{z=0} f(z) = 1 - e^{-1}$, $\text{Res}_{z=-1} f(z) = e^{-1}$.

Sprendimas

Taškas $z = 0$ yra esmingai ypatingas taškas, todėl reziduumą teks rasti skleidžiant Lorano eilute. Kai $|z| > 0$:

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{4!z^4} + \dots$$

Kai $|z| < 1$:

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - z^5 + \dots$$

Belieka sudauginti ir „išrankioti“ narius su $\frac{1}{z}$:

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{2!z} + \frac{1}{3!z} - \frac{1}{4!z} + \frac{1}{5!z} - \frac{1}{6!z} + \dots$$

Vadinasi, koeficientas c_{-1} lygus

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!} + \dots = 1 - e^{-1}$$

Uždavinys 7. $f(z) = (1 + z + z^2) \sin \frac{1}{z}$

Ats.: $\text{Res}_{z=0} f(z) = \frac{5}{6}$.

Raskite reziduumus šių funkcijų be galo nutolusiuose taškuose.

Uždavinys 8. $f(z) = \frac{z^2+1}{(z+1)(z+2)(z+3)}$

Ats.: -1 .

Uždavinys 9. $f(z) = \frac{z^4+1}{z^6+1}$

Ats.: 0 .

Reziduumų taikymai

Naudodamiesi tuo, kad $\int_L f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}_{z=z_k} f(z)$, jei L - uždara ištiesinama Žordano kreivė, o taškai z_k yra funkcijos $f(z)$ izoliuotieji ypatingieji taškai, patenkantys į kreivę L apribotos srities vidų, raskite nurodytus integralus.

Uždavinys 10. $\int_{|z|=2} \frac{5z-2}{z(z-1)} dz = 10\pi i$

Uždavinys 11. $\int_{|z|=3} \frac{e^z}{z(1-z)^2} dz = 2\pi i$

Uždavinys 12. $\int_{|z|=2} \frac{1}{1+z^8} dz$

Uždavinys 13. $\int_{|z+2i|=1} \frac{e^{-3iz}}{(z+2i)^2(z-1)} dz$

Uždavinys 14. $\int_{|z|=0.5} \frac{z \sin z}{(z-1)^5} dz$

Uždavinys 15. $\int_{|z|=1} z^3 \sin \frac{1}{z} dz$

Žordano lema

Naudodamiesi tuo, kad netiesioginis integralas $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}_{z=z_k} f(z)$, o $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}_{z=z_k} (f(z) e^{i\alpha z})$ jei $f(z)$ yra analizinė srityje $\text{Im} z \geq 0$, išskyrus baigtinį skaičių taškų z_1, z_2, \dots, z_k (čia $\text{Im} z_k \geq 0$) ir tenkina Žordano lemos sąlygas, raskite nurodytus integralus.

Uždavinys 16. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{(x^2+4)(x^2+9)} dx = \frac{7\pi}{30}$

Uždavinys 17. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx = \frac{5\pi}{12}$

Uždavinys 18. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)^2} dx = \frac{\pi(a+2b)}{2ab^3(a+b)^2}, \quad a > 0, b > 0$

Uždavinys 19. $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$

Uždavinys 20. $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^6 + 1} dx = \frac{\pi}{6}$

Uždavinys 21. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 3x}{x^2 - 10x + 41} dx = \frac{\pi}{4} e^{-12} (5 \sin 15 + 4 \cos 15)$

Uždavinys 22. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 8x}{x^2 + 8x + 25} dx = \frac{\pi}{3} e^{-24} (\cos 32)$