Diferencialinės lygtys

Antanas Lenkšas

PDL. Integruojamasis daugiklis.

2015–04–22

Turinys

Pilnųjų diferencialų lygtis

Apibrėžimas

$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$
vadinama pilnųjų diferencialų lygtimi (PDL), jei reiškinys
$M(x, y)dx + N(x, y)dy$
yra pilnasis diferencialas, t.y. egzistuoja tokia funkcija F, kad
$dF(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy$.

Sąlyga

$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ yra pilnųjų diferencialų lygtis, jei
$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$.

Pilnųjų diferencialų lygtis

Apibrėžimas

$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$
vadinama pilnųjų diferencialų lygtimi (PDL), jei reiškinys
$M(x, y)dx + N(x, y)dy$
yra pilnasis diferencialas, t.y. egzistuoja tokia funkcija F, kad
$dF(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy$.

Sąlyga

$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ yra pilnųjų diferencialų lygtis, jei
$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$.

Pavyzdžiai

1 uždavinys

$\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$

- Kadangi $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{x} = \frac{1}{x} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$, tai lygtis yra PDL.
- $F(x,y) = \int \frac{y}{x} dx = y \ln x + \phi(y)$
- $\frac{\partial F}{\partial y} = \ln x + \phi'(y) = y^3 + \ln x = N(x,y)$
- $\phi'(y) = y^3$
  $\phi(y) = \int y^3 dy$
  $\phi(y) = \frac{y^4}{4} + C$
- Todėl $F(x,y) = y \ln x + \frac{y^4}{4}$ t.y. bendrasis lygties integralas gali būti užrašytas $y \ln x + \frac{y^4}{4} = C$ arba $4y \ln x + y^4 = C$

Pavyzdžiai

1 uždavinys

$\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$

- Kadangi $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{x} = \frac{1}{x} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$, tai lygtis yra PDL.
- $F(x,y) = \int \frac{y}{x}dx = y\ln x + \phi(y)$
- $\frac{\partial F}{\partial y} = \ln x + \phi'(y) = y^3 + \ln x = N(x,y)$
- $\phi'(y) = y^3$
  $\phi(y) = \int y^3 dy$
  $\phi(y) = \frac{y^4}{4} + C$
- Todėl $F(x,y) = y\ln x + \frac{y^4}{4}$ t.y. bendrasis lygties integralas gali būti užrašytas $y\ln x + \frac{y^4}{4} = C$ arba $4y\ln x + y^4 = C$

Pavyzdžiai

1 uždavinys

$\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$

- Kadangi $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{x} = \frac{1}{x} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$, tai lygtis yra PDL.
- $F(x,y) = \int \frac{y}{x}dx = y\ln x + \phi(y)$
- $\frac{\partial F}{\partial y} = \ln x + \phi'(y) = y^3 + \ln x = N(x,y)$
- $\phi'(y) = y^3$
  $\phi(y) = \int y^3 dy$
  $\phi(y) = \frac{y^4}{4} + C$
- Todėl $F(x,y) = y\ln x + \frac{y^4}{4}$ t.y. bendrasis lygties integralas gali būti užrašytas $y\ln x + \frac{y^4}{4} = C$ arba $4y\ln x + y^4 = C$

Pavyzdžiai

1 uždavinys

$\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$

- Kadangi $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{x} = \frac{1}{x} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$, tai lygtis yra PDL.
- $F(x,y) = \int \frac{y}{x}dx = y \ln x + \phi(y)$
- $\frac{\partial F}{\partial y} = \ln x + \phi'(y) = y^3 + \ln x = N(x,y)$
- $\phi'(y) = y^3$
  $\phi(y) = \int y^3 dy$
  $\phi(y) = \frac{y^4}{4} + C$
- Todėl $F(x,y) = y \ln x + \frac{y^4}{4}$ t.y. bendrasis lygties integralas gali būti užrašytas $y \ln x + \frac{y^4}{4} = C$ arba $4y \ln x + y^4 = C$

Pavyzdžiai

1 uždavinys

$\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$

- Kadangi $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{x} = \frac{1}{x} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$, tai lygtis yra PDL.
- $F(x,y) = \int \frac{y}{x}dx = y \ln x + \phi(y)$
- $\frac{\partial F}{\partial y} = \ln x + \phi'(y) = y^3 + \ln x = N(x,y)$
- $\phi'(y) = y^3$
  $\phi(y) = \int y^3 dy$
  $\phi(y) = \frac{y^4}{4} + C$
- Todėl $F(x,y) = y \ln x + \frac{y^4}{4}$ t.y. bendrasis lygties integralas gali būti užrašytas $y \ln x + \frac{y^4}{4} = C$ arba $4y \ln x + y^4 = C$

Pavyzdžiai

1 uždavinys

$\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$

- Kadangi $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{x} = \frac{1}{x} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$, tai lygtis yra PDL.
- $F(x,y) = \int \frac{y}{x}dx = y \ln x + \phi(y)$
- $\frac{\partial F}{\partial y} = \ln x + \phi'(y) = y^3 + \ln x = N(x,y)$
- $\phi'(y) = y^3$
  $\phi(y) = \int y^3 dy$
  $\phi(y) = \frac{y^4}{4} + C$
- Todėl $F(x,y) = y \ln x + \frac{y^4}{4}$ t.y. bendrasis lygties integralas gali būti užrašytas $y \ln x + \frac{y^4}{4} = C$ arba $4y \ln x + y^4 = C$

Pavyzdžiai

2 uždavinys

$(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y \cos^2 x dy = 0$

- Kadangi $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2y \sin 2x = 4y \cos x \sin x = 2y \sin 2x = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$, tai lygtis yra PDL.
- $F(x, y) = \int (1 + y^2 \sin 2x)dx = x - \frac{y^2}{2} \cos 2x + \phi(y)$
- $\frac{\partial F}{\partial y} = -y \cos 2x + \phi'(y) = -2y \cos^2 x = N(x, y)$
- $-y \cos^2 x + y \sin^2 x + \phi'(y) = -2y \cos^2 x$
- $y \cos^2 x + y \sin^2 x + \phi'(y) = 0$
  $\phi(y) = -\int y$
  $\phi(y) = -\frac{y^2}{2} + C$
- Todėl
  $F(x, y) = x - \frac{y^2}{2} \cos 2x - \frac{y^2}{2} = x - \frac{y^2}{2}(1 + \cos 2x) = x - y^2 \cos^2 x$ t.y. bendrasis lygties integralas gali būti užrašytas $x - y^2 \cos^2 x = C$

2 uždavinys

$(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y \cos^2 x dy = 0$

- Kadangi $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2y \sin 2x = 4y \cos x \sin x = 2y \sin 2x = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$, tai lygtis yra PDL.
- $F(x, y) = \int (1 + y^2 \sin 2x)dx = x - \frac{y^2}{2} \cos 2x + \phi(y)$
- $\frac{\partial F}{\partial y} = -y \cos 2x + \phi'(y) = -2y \cos^2 x = N(x, y)$
- $-y \cos^2 x + y \sin^2 x + \phi'(y) = -2y \cos^2 x$
- $y \cos^2 x + y \sin^2 x + \phi'(y) = 0$
  $\phi(y) = -\int y$
  $\phi(y) = -\frac{y^2}{2} + C$
- Todėl
  $F(x, y) = x - \frac{y^2}{2} \cos 2x - \frac{y^2}{2} = x - \frac{y^2}{2}(1 + \cos 2x) = x - y^2 \cos^2 x$ t.y. bendrasis lygties integralas gali būti užrašytas $x - y^2 \cos^2 x = C$

Pavyzdžiai

2 uždavinys

$(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y \cos^2 x dy = 0$

- Kadangi $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2y \sin 2x = 4y \cos x \sin x = 2y \sin 2x = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$, tai lygtis yra PDL.
- $F(x, y) = \int (1 + y^2 \sin 2x)dx = x - \frac{y^2}{2} \cos 2x + \phi(y)$
- $\frac{\partial F}{\partial y} = -y \cos 2x + \phi'(y) = -2y \cos^2 x = N(x, y)$
- $-y \cos^2 x + y \sin^2 x + \phi'(y) = -2y \cos^2 x$
- $y \cos^2 x + y \sin^2 x + \phi'(y) = 0$
  $\phi(y) = -\int y$
  $\phi(y) = -\frac{y^2}{2} + C$
- Todėl
  $F(x, y) = x - \frac{y^2}{2} \cos 2x - \frac{y^2}{2} = x - \frac{y^2}{2}(1 + \cos 2x) = x - y^2 \cos^2 x$ t.y. bendrasis lygties integralas gali būti užrašytas $x - y^2 \cos^2 x = C$

Pavyzdžiai

2 uždavinys

$(1+y^2\sin 2x)dx - 2y\cos^2 x dy = 0$

- Kadangi $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2y\sin 2x = 4y\cos x\sin x = 2y\sin 2x = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$, tai lygtis yra PDL.
- $F(x,y) = \int(1+y^2\sin 2x)dx = x - \frac{y^2}{2}\cos 2x + \phi(y)$
- $\frac{\partial F}{\partial y} = -y\cos 2x + \phi'(y) = -2y\cos^2 x = N(x,y)$
- $-y\cos^2 x + y\sin^2 x + \phi'(y) = -2y\cos^2 x$
- $y\cos^2 x + y\sin^2 x + \phi'(y) = 0$
  $\phi(y) = -\int y$
  $\phi(y) = -\frac{y^2}{2} + C$
- Todėl
  $F(x,y) = x - \frac{y^2}{2}\cos 2x - \frac{y^2}{2} = x - \frac{y^2}{2}(1+\cos 2x) = x - y^2\cos^2 x$ t.y. bendrasis lygties integralas gali būti užrašytas $x - y^2\cos^2 x = C$

Pavyzdžiai

2 uždavinys

$(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y \cos^2 xdy = 0$

- Kadangi $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2y \sin 2x = 4y \cos x \sin x = 2y \sin 2x = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$, tai lygtis yra PDL.
- $F(x, y) = \int (1 + y^2 \sin 2x)dx = x - \frac{y^2}{2} \cos 2x + \phi(y)$
- $\frac{\partial F}{\partial y} = -y \cos 2x + \phi'(y) = -2y \cos^2 x = N(x, y)$
- $-y \cos^2 x + y \sin^2 x + \phi'(y) = -2y \cos^2 x$
- $y \cos^2 x + y \sin^2 x + \phi'(y) = 0$
  $\phi(y) = -\int y$
  $\phi(y) = -\frac{y^2}{2} + C$
- Todėl
  $F(x, y) = x - \frac{y^2}{2} \cos 2x - \frac{y^2}{2} = x - \frac{y^2}{2}(1 + \cos 2x) = x - y^2 \cos^2 x$ t.y. bendrasis lygties integralas gali būti užrašytas $x - y^2 \cos^2 x = C$

Pavyzdžiai

2 uždavinys

$(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y\cos^2 x dy = 0$

- Kadangi $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2y \sin 2x = 4y \cos x \sin x = 2y \sin 2x = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$, tai lygtis yra PDL.
- $F(x,y) = \int (1 + y^2 \sin 2x)dx = x - \frac{y^2}{2}\cos 2x + \phi(y)$
- $\frac{\partial F}{\partial y} = -y\cos 2x + \phi'(y) = -2y\cos^2 x = N(x,y)$
- $-y\cos^2 x + y\sin^2 x + \phi'(y) = -2y\cos^2 x$
- $y\cos^2 x + y\sin^2 x + \phi'(y) = 0$
  $\phi(y) = -\int y$
  $\phi(y) = -\frac{y^2}{2} + C$
- Todėl
  $F(x,y) = x - \frac{y^2}{2}\cos 2x - \frac{y^2}{2} = x - \frac{y^2}{2}(1 + \cos 2x) = x - y^2\cos^2 x$ t.y. bendrasis lygties integralas gali būti užrašytas $x - y^2\cos^2 x = C$

Pavyzdžiai

2 uždavinys

$(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y \cos^2 x dy = 0$

- Kadangi $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2y \sin 2x = 4y \cos x \sin x = 2y \sin 2x = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$, tai lygtis yra PDL.
- $F(x, y) = \int (1 + y^2 \sin 2x)dx = x - \frac{y^2}{2} \cos 2x + \phi(y)$
- $\frac{\partial F}{\partial y} = -y \cos 2x + \phi'(y) = -2y \cos^2 x = N(x, y)$
- $-y \cos^2 x + y \sin^2 x + \phi'(y) = -2y \cos^2 x$
- $y \cos^2 x + y \sin^2 x + \phi'(y) = 0$
  $\phi(y) = -\int y$
  $\phi(y) = -\frac{y^2}{2} + C$
- Todėl
  $F(x, y) = x - \frac{y^2}{2} \cos 2x - \frac{y^2}{2} = x - \frac{y^2}{2}(1 + \cos 2x) = x - y^2 \cos^2 x$ t.y. bendrasis lygties integralas gali būti užrašytas $x - y^2 \cos^2 x = C$

Integruojamasis daugiklis

Apibrėžimas

Funkcija $\mu(x, y)$ vadinama integruojamuoju daugikliu, jei
$\frac{\partial \mu M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial \mu N(x,y)}{\partial x}$, t.y.
$\mu M(x, y)dx + \mu N(x, y)dy = 0$
yra PDL

Deja, išskyrus atskirus atvejus, nėra metodo tokiam daugikliui rasti...

Integruojamasis daugiklis

Apibrėžimas

Funkcija $\mu(x, y)$ vadinama integruojamuoju daugikliu, jei
$\frac{\partial \mu M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial \mu N(x,y)}{\partial x}$, t.y.
$\mu M(x, y)dx + \mu N(x, y)dy = 0$
yra PDL

Deja, išskyrus atskirus atvejus, nėra metodo tokiam daugikliui rasti...

Atskiri atvejai

Jei $\frac{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}}{N(x,y)} = \phi(x)$, t.y. nepriklauso nuo y

Tai $\mu := \mu(x) = e^{-\int \phi(x)dx}$

Jei $\frac{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}}{M(x,y)} = \phi(y)$, t.y. nepriklauso nuo x

Tai $\mu := \mu(y) = e^{\int \phi(y)dy}$

Atskiri atvejai

Jei $\dfrac{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}}{N(x,y)} = \phi(x)$, t.y. nepriklauso nuo y

Tai $\mu := \mu(x) = e^{-\int \phi(x)dx}$

Jei $\dfrac{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}}{M(x,y)} = \phi(y)$, t.y. nepriklauso nuo x

Tai $\mu := \mu(y) = e^{\int \phi(y)dy}$

Pavyzdžiai

3 uždavinys

$(3x^2 \cos y - \sin y) \cos y dx - x dy = 0$

- $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -1 + 3x^2 2 \cos y \sin y + \cos 2y = 2(3x^2 \cos y - \sin y) \sin y$
  Kadangi $\frac{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}}{M(x,y)} = \frac{2(3x^2 \cos y - \sin y) \sin y}{(3x^2 \cos y - \sin y) \cos y} = 2tgy$ nepriklauso nuo x, tai
  $\mu = e^{\int 2tgydy} = e^{-2 \ln cosy} = \frac{1}{\cos^2 y}$

Pavyzdžiai

3 uždavinys

$(3x^2\cos y - \sin y)\cos y dx - x dy = 0$

- $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -1 + 3x^2 2\cos y \sin y + \cos 2y = 2(3x^2\cos y - \sin y)\sin y$
  Kadangi $\frac{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}}{M(x,y)} = \frac{2(3x^2\cos y - \sin y)\sin y}{(3x^2\cos y - \sin y)\cos y} = 2tgy$ nepriklauso nuo x, tai
  $\mu = e^{\int 2tgydy} = e^{-2\ln cosy} = \frac{1}{\cos^2 y}$

Pavyzdžiai

Dauginame abi puses iš μ:
$(3x^2 - tgy)dx - \frac{x}{\cos^2 y}dy = 0$
$F(x,y) = \int (3x^2 - tgy)dx = x^3 - xtgy + \phi(y)$
$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{x}{cos^2 y} + \phi'(y) = -\frac{x}{\cos^2 y} = \mu N(x,y)$
$\phi'(y) = 0$
$\phi(y) = C$
Todėl bendrasis lygties integralas gali būti užrašytas $x^3 - xtgy = C$
Beje, daugindami iš $\mu(x,y)$ praradome sprendinius, kuriems $\cos y = 0$, t.y. $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Pavyzdžiai

Dauginame abi puses iš μ:

$(3x^2 - tgy)dx - \frac{x}{\cos^2 y}dy = 0$

$F(x,y) = \int(3x^2 - tgy)dx = x^3 - xtgy + \phi(y)$

$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{x}{cos^2 y} + \phi'(y) = -\frac{x}{\cos^2 y} = \mu N(x,y)$

$\phi'(y) = 0$

$\phi(y) = C$

Todėl bendrasis lygties integralas gali būti užrašytas $x^3 - xtgy = C$

Beje, daugindami iš $\mu(x,y)$ praradome sprendinius, kuriems $\cos y = 0$, t.y. $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Pavyzdžiai

Dauginame abi puses iš μ:
$(3x^2 - tgy)dx - \frac{x}{\cos^2 y}dy = 0$
$F(x, y) = \int(3x^2 - tgy)dx = x^3 - xtgy + \phi(y)$
$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{x}{cos^2 y} + \phi'(y) = -\frac{x}{\cos^2 y} = \mu N(x, y)$
$\phi'(y) = 0$
$\phi(y) = C$
Todėl bendrasis lygties integralas gali būti užrašytas $x^3 - xtgy = C$
Beje, daugindami iš $\mu(x, y)$ praradome sprendinius, kuriems
$\cos y = 0$, t.y. $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Pavyzdžiai

Dauginame abi puses iš μ:
$(3x^2 - tgy)dx - \frac{x}{\cos^2 y}dy = 0$
$F(x, y) = \int(3x^2 - tgy)dx = x^3 - xtgy + \phi(y)$
$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{x}{cos^2 y} + \phi'(y) = -\frac{x}{\cos^2 y} = \mu N(x, y)$
$\phi'(y) = 0$
$\phi(y) = C$
Todėl bendrasis lygties integralas gali būti užrašytas $x^3 - xtgy = C$
Beje, daugindami iš $\mu(x, y)$ praradome sprendinius, kuriems $\cos y = 0$, t.y. $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Pavyzdžiai

Dauginame abi puses iš μ:

$(3x^2 - tgy)dx - \frac{x}{\cos^2 y}dy = 0$

$F(x,y) = \int(3x^2 - tgy)dx = x^3 - xtgy + \phi(y)$

$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{x}{cos^2 y} + \phi'(y) = -\frac{x}{\cos^2 y} = \mu N(x,y)$

$\phi'(y) = 0$

$\phi(y) = C$

Todėl bendrasis lygties integralas gali būti užrašytas $x^3 - xtgy = C$

Beje, daugindami iš $\mu(x,y)$ prarandome sprendinius, kuriems $\cos y = 0$, t.y. $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Pavyzdžiai

4 uždavinys

$xydx - (y^3 + x^2y + x^2)dy = 0$

- $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -x(2y+3)$

  Kadangi $\frac{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}}{M(x,y)} = \frac{-x(2y+3)}{xy} = -2 - \frac{3}{y}$ nepriklauso nuo x, tai

  $\mu = e^{-\int 2+\frac{3}{y}dy} = e^{-2y}y^{-3}$

Pavyzdžiai

4 uždavinys

$xydx - (y^3 + x^2y + x^2)dy = 0$

- $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -x(2y+3)$
  Kadangi $\frac{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}}{M(x,y)} = \frac{-x(2y+3)}{xy} = -2 - \frac{3}{y}$ nepriklauso nuo x, tai
  $\mu = e^{-\int 2+\frac{3}{y}dy} = e^{-2y}y^{-3}$

Pavyzdžiai

Dauginame abi puses iš μ:

$xy^{-2}e^{-2y}dx - e^{-2y}y^{-3}(y^3 + x^2y + x^2)dy = 0$

$F(x, y) = \int xy^{-2}e^{-2y}dx = y^{-2}e^{-2y}\frac{x^2}{2} + \phi(y)$

$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{x^2}{2}\frac{-2e^{-2y}y^2 - 2ye^{-2y}}{y^4} + \phi'(y) = -e^{-2y} - e^{-2y}\frac{x^2}{y^2} - e^{-2y}\frac{x^2}{y^3} = \mu N(x, y)$

$\phi'(y) = -e^{-2y}$

$\phi(y) = \frac{1}{2}e^{-2y} + C$

Todėl bendrasis lygties integralas gali būti užrašytas $e^{-2y}(\frac{x^2}{y^2} + 1) = C$

Pavyzdžiai

Dauginame abi puses iš μ:

$xy^{-2}e^{-2y}dx - e^{-2y}y^{-3}(y^3 + x^2y + x^2)dy = 0$

$F(x, y) = \int xy^{-2}e^{-2y}dx = y^{-2}e^{-2y}\frac{x^2}{2} + \phi(y)$

$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{x^2}{2}\frac{-2e^{-2y}y^2 - 2ye^{-2y}}{y^4} + \phi'(y) = -e^{-2y} - e^{-2y}\frac{x^2}{y^2} - e^{-2y}\frac{x^2}{y^3} = \mu N(x, y)$

$\phi'(y) = -e^{-2y}$

$\phi(y) = \frac{1}{2}e^{-2y} + C$

Todėl bendrasis lygties integralas gali būti užrašytas $e^{-2y}(\frac{x^2}{y^2} + 1) = C$

Pavyzdžiai

Dauginame abi puses iš μ:

$xy^{-2}e^{-2y}dx - e^{-2y}y^{-3}(y^3 + x^2y + x^2)dy = 0$

$F(x,y) = \int xy^{-2}e^{-2y}dx = y^{-2}e^{-2y}\frac{x^2}{2} + \phi(y)$

$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{x^2}{2}\frac{-2e^{-2y}y^2 - 2ye^{-2y}}{y^4} + \phi'(y) = -e^{-2y} - e^{-2y}\frac{x^2}{y^2} - e^{-2y}\frac{x^2}{y^3} = \mu N(x,y)$

$\phi'(y) = -e^{-2y}$

$\phi(y) = \frac{1}{2}e^{-2y} + C$

Todėl bendrasis lygties integralas gali būti užrašytas $e^{-2y}(\frac{x^2}{y^2} + 1) = C$

Pavyzdžiai

Dauginame abi puses iš μ:

$xy^{-2}e^{-2y}dx - e^{-2y}y^{-3}(y^3 + x^2y + x^2)dy = 0$

$F(x,y) = \int xy^{-2}e^{-2y}dx = y^{-2}e^{-2y}\frac{x^2}{2} + \phi(y)$

$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{x^2}{2}\frac{-2e^{-2y}y^2 - 2ye^{-2y}}{y^4} + \phi'(y) = -e^{-2y} - e^{-2y}\frac{x^2}{y^2} - e^{-2y}\frac{x^2}{y^3} = \mu N(x,y)$

$\phi'(y) = -e^{-2y}$

$\phi(y) = \frac{1}{2}e^{-2y} + C$

Todėl bendrasis lygties integralas gali būti užrašytas $e^{-2y}(\frac{x^2}{y^2} + 1) = C$

Pavyzdžiai

Dauginame abi puses iš μ:

$xy^{-2}e^{-2y}dx - e^{-2y}y^{-3}(y^3 + x^2y + x^2)dy = 0$

$F(x,y) = \int xy^{-2}e^{-2y}dx = y^{-2}e^{-2y}\frac{x^2}{2} + \phi(y)$

$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{x^2}{2}\frac{-2e^{-2y}y^2 - 2ye^{-2y}}{y^4} + \phi'(y) = -e^{-2y} - e^{-2y}\frac{x^2}{y^2} - e^{-2y}\frac{x^2}{y^3} = \mu N(x,y)$

$\phi'(y) = -e^{-2y}$

$\phi(y) = \frac{1}{2}e^{-2y} + C$

Todėl bendrasis lygties integralas gali būti užrašytas $e^{-2y}(\frac{x^2}{y^2} + 1) = C$

$i \quad 8 \quad \sum \quad \pi$