Rinktiniai analizės skyriai. el. NAMŲ DARBAS IV

FDM 3 semestras

2014 lapkričio 18

1 Aukštesnės eilės dalinės išvestinės ir diferencialai

1. Raskite antrosios eilės dalines išvestines (laikykite, kad funkcija f yra dukart diferencijuojama)

   (a) $u = f(x + y, x^2 + y^2)$

   (b) $u = f(xy, \frac{x}{y})$

   (c) $u = \log f(x, x + y)$

3. Raskite antrąjį diferencialą

   (a) $f(x, y, z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$

   (b) $f(x, y, z) = \arctan \frac{x+y}{z}$

   (c) $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$

4. Raskite $d^3 f$, jei $f(x, y) = e^y \sin x$

5. Raskite $d^6 f$, jei $f(x, y, z) = \ln(x + y + z)$

2 Ekstremumai

1. Raskite šių funkcijų lokaliuosius ekstremumus:

   (a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 - 2xy - y^2$

   (b) $f(x, y) = e^{x+2y}(x^2 - y^2)$

   (c) $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 1$

   (d) $f(x, y, z) = x^3 + xy + y^2 - 2zx + 2z^3 + 3y - 1$

(e) $f(x,y,z) = 2x^3yz - x^2 - y^2 - z^2$

2. Raskite sąlyginius ekstremumus

   (a) $f(x,y) = x^2 + y^2$ kai $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

   (b) $f(x,y) = x^2 - y^2$ ant tiesės $2x - y - 3 = 0$

   (c) $f(x,y,z) = x + y + z^2$ su ryšio lygtimis $z - x = 1$ ir $y - xz = 1$

   (d) $f(x,y) = xy^2$, ryšio lygtis $x + 2y = 1$

   (e) $f(x,y,z) = 2x + y - 2z$, ryšio lygtis $x^2 + y^2 + z^2 = 36$

   (f) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, ryšio lygtis $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$

   Komentaras. Taškai $(0, \pm 3, 0)$, kai $\lambda = 9$ yra Lagranžo funkcijos $L(x,y,z)$ stacionarieji taškai, tačiau

   $$d^2L(0, \pm 3, 0) = 2\left(1 - \frac{9}{16}\right)dx^2 + 2\left(1 - \frac{9}{4}\right)dz^2$$

   todėl kai $dx \neq 0$ ir $dz = 0$ $d^2L(0, \pm 3, 0) > 0$, o kai $dx = 0$, o $dz \neq 0$ $d^2L(0,3,0) < 0$, t.y. d^2L įgyja tiek teigiamas, tiek ir neigiamas reikšmes ir šiuose taškuose sąlyginio ekstremumo nėra.

3. Raskite didžiausią bei mažiausią reikšmes

   (a) $f(x,y) = x^2 + 2x + y^2$, $D = \{x^2 + y^2 \leq 4\}$

   (b) $f(x,y,z) = x - y^2 - z$, $D = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$