

Rinktiniai analizės skyriai. el. NAMŲ DARBAS

II

FDM 3 semestras

2014 spalio 21

1 Funkcijos tolydumas

1. Raskite A reikšmę, kad funkcija būtų tolydi visoje \mathbb{R}^2

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ A, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

2. Įrodykite, kad funkcija $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ yra tolydi tada ir tik tada, kai bet kurios atviros erdvėje \mathbb{R} aibės pirmvaizdis yra atvira erdvės \mathbb{R}^n aibė.
3. Raskite trūkio taškus

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x+y}, & x+y \neq 0 \\ 0, & x+y = 0 \end{cases}$$

4. Raskite trūkio taškus

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{x^3+y^3}, & x+y \neq 0 \\ 1, & x+y = 0 \end{cases}$$

5. Raskite trūkio taškus

$$f(x, y) = \begin{cases} \ln 1 - x^2 - y^2, & (x, y) \in U_1(0, 0) \\ 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus U_1(0, 0) \end{cases}$$

6. Įrodykite, kad funkcija $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ yra tolygiai tolydi.
7. Įrodykite, kad funkcija $f(x, y) = \arcsin \frac{x}{y}$ nėra tolygiai tolydi savo apibrėžimo srityje.

Komentaras. Tam pakaktų rasti tokias dvi „artėjančias viena prie kitos“ (t.y. $d(M_n, N_n) \rightarrow 0$) sekas iš duotosios funkcijos apibrėžimo srities $M_n(x_n, y_n)$ bei $N_n(x'_n, y'_n)$ (taip elgtūsi į tą pačią ribą (pvz. į 0) konverguojančios sekos), kad funkcijos reikšmių skirtums $|f(M_n) - f(N_n)|$ liktų pastovus (ar nemažesnis už konstantą) visiems (ar bent jau pradedant kuriuo nors) n .

2 Funkcijas dalinās ištevinės

Raskite pirmos eilės dalinās ištevinės

1. $f(x, y) = \sin \frac{x}{y} \cos \frac{y}{x}$

2. $f(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$

3. $f(x, y) = x^y$

4. $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$

5. $f(x, y, z) = \frac{x}{y} z$

6. $f(x, y, z) = x^{y^z}$