Elipsės židinių atstumų iki liestinės sandauga

Andrius Grigutis

2013 m. spalio 11 d.

Uždavinys: Įrodyti, kad elipsės židinių atstumų iki bet kurios jos liestinės sandauga yra pastovi ir lygi mažosios pusašės kvadratui.

Įrodymas.
Turime elipsę:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1}$$

Jos liestinė taške (x_0, y_0) yra:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1 \quad \text{arba} \quad b^2x_0x + a^2y_0y - a^2b^2 = 0.$$

Elipsės židiniai yra du taškai $F_1(-c, 0)$ ir $F_2(c, 0)$. Skaičiuokime židinių atstumus iki tiesės $b^2x_0x + a^2y_0y - a^2b^2 = 0$. Turime:

$$d_1 = \frac{|-cb^2x_0 - a^2b^2|}{\sqrt{b^4x_0^2 + a^4y_0^2}} = \frac{|cb^2x_0 + a^2b^2|}{\sqrt{b^4x_0^2 + a^4y_0^2}} \quad \text{ir} \quad d_2 = \frac{|cb^2x_0 - a^2b^2|}{\sqrt{b^4x_0^2 + a^4y_0^2}}.$$

Sudauginkime šiuos du atstumus:

$$d_1d_2 = \frac{|c^2b^4x_0^2 - a^4b^4|}{b^4x_0^2 + a^4y_0^2}. \tag{2}$$

Iš elipsės savybės žinome, kad $c^2 = a^2 - b^2$, o iš (1) galime užrašyti:

$$a^2b^4x_0^2 + a^4b^2y_0 = a^4b^4.$$

Į lygybę (2) įstatę aukščiau gautas c^2 ir a^4b^4 išraiškas gauname:

$$d_1d_2 = \frac{|(a^2 - b^2)b^4x_0^2 - a^2b^4x_0^2 - a^4b^2y_0|}{b^4x_0^2 + a^4y_0^2} = \frac{|\cancel{a^2b^4x_0^2} - b^6x_0^2 - \cancel{a^2b^4x_0^2} - a^4b^2y_0|}{b^4x_0^2 + a^4y_0^2} =$$

$$= \frac{b^2(\cancel{b^4x_0^2 + a^4y_0^2})}{(\cancel{b^4x_0^2 + a^4y_0^2})} = b^2.$$