**§ 4. Žiedo pirminiai ir maksimalūs idealai**

Nagrinėsime komutatyvius žiedus su vienetu.

**Apibrėžimas 1.**

Komutatyvaus žiedo su vienetu idealas vadinamas pirminiu, jei su visomis sandaugomis arba .

Pavyzdžiui, žiedo idealas pirminis, ne.

**Apibrėžimas 2.**

Komutatyvaus žiedo su vienetu idealas vadinamas maksimaliu, jei

kiekvienam idealui , tokiam, kad , turime, kad arba .

Tai yra tarp ir nėra kitų idealų.

**Teorema 1.** Žiedo idealas yra pirminis tada ir tik tada kai žiedo faktoržiedis pagal šį idealą yra sveikumo sritis. (neturi nulio daliklių).

**Įrodymas.**

**Būtinumas**

Tarkime, kad yra pirminis žiedo idealas, parodysime, kad jo faktoržiedis neturi nulio daliklių. Tai reiškia, kad, jei arba

Faktoržiedis sudarytas iš ekvivalentumo klasių: ir kur .

Klasių sandauga yra apibrėžiama:

Nulinė (neutralioji klasė) yra

Imkime tokias dvi faktoržiedžio klases ir kur , kad jų sandauga būtų nulinė klasė t. y.

Tuomet,

arba , nes idealas pagal teoremos prielaidą yra pirminis. Tokiu atveju,

ir

Tai yra klasės ir yra nulinės faktoržiedžio klasės. Tokiu būdu parodėme, kad faktoržiedis neturi nulio daliklių. Būtinumas įrodytas.

**Pakankamumas**

Tarkime, kad faktoržiedis neturi nulio daliklių parodysime, kad - jo pirminis idealas.

Tegul,

Tuomet,

Tai yra yra nulinė faktoržiedžio klasė. Kadangi, faktoržiedis neturi nulio daliklių, tai arba . Tokiu būdu, ir yra nulinės faktoržiedžio klasės. Tuomet, arba - pirminis žiedo idealas. Teorema įrodyta.

**Teorema 2.** Žiedo idealas yra maksimalus tada ir tik tada kai žiedo faktoržiedis pagal šį idealą yra kūnas.

**Įrodymas.**

**Būtinumas**

Sakykime, kad yra maksimalus žiedo idealas, parodysime, kad jo faktoržiedis yra kūnas. Tam reikia parodyti, kad kiekvienam nenuliniam faktoržiedžio elementui egzistuoja atvirkštinis elementas.

Imkime, bet kokį ir apibrėžkime faktoržiedžio klasę . Ši klasė bus nenulinė. Dabar imkime idealą ( tai bus idealas, kaip dviejų idealų ir suma.

Idealas tenkina sąlygas:

1. (nes , todėl visiems );
2. (nes ir ); Taigi, .

Kadangi, maksimalus idealas, tai .

Kadangi, žiedas su vienetu, tai egzistuoja ir , kad

Tuomet, paimkime faktoržiedžio klasę . Parodysime, kad ši klasė atvirkštinė klasei .

Iš tikrųjų,

Tokiu būdu, klasių ir sandauga vienetinė klasė. Taigi,

Tokiu būdu parodėme, kad kiekvienai nenulinei faktoržiedžio klasei egzistuoja atvirkštinė klasė - kūnas.

**Pakankamumas**

Tarkime, kad yra kūnas. Parodysime, kad idealas maksimalus.

Imkime idealą tokį , kad . Tuomet, bus taip pat šio žiedo idealas. Kadangi šio idealo elementai yra , tai idealas . Tačiau, kadangi yra kūnas jo visi idealai yra 0 arba (3-čia praėjusios paskaitos teorema). Nulinis idealas yra . Taigi, galimi du atvejai,

Tuo atveju, jei , kadangi , gauname, kad

Jei, , tai reiškia, kad idealas susideda iš visų žiedo elementų t. y. . Terema įrodyta.

**Išvada:** Kiekvienas maksimalus žiedo idealas yra pirminis.

**Įrodymas**

Pagal teoremą, jei maksimalus idealas, tai yra kūnas. Jei šis kūnas neturi nulio daliklių, tuomet pagal 1-ą teoremą jis pirminis.

Tarkime, kad egzistuoja dvi nenulinės klasės ir

tokios, kad

Kadangi yra kūnas, tai elementui paimkime atvirkštinį elementą . Tada,

arba

Tai reiškia, kad yra nulinis kūno elementas. Tokiu būdu parodėme, kad kūne nulio daliklių nėra. Teorema įrodyta.

**§ 4. Žiedų homomorfizmas**

Tegul, ir du žiedai.

**Apibrėžimas 3.**

Atvaizdis vadinamas homomorfizmu, jei bet kuriems

**Teorema 3.** Jei yra homomorfizmas, tai

1. , .

**Įrodymas**

Kadangi,

tai

Tada,

Taip pat,

Iš čia,

Teorema įrodyta.

**Teorema 4.** Jei surjekcinis homomorfizmas, tai

**Įrodymas**

Jei , tai egzistuoja , kad

Tada,

analogiškai,

Tai reiškia, kad žiedo vienetas.

**Teorema 5.** Tarkime, kad ir du žiedai. Jei homomorfizmas, tai f(A) žiedo požiedis.

**Įrodymas**

Tegul, , tuomet egzistuoja , kad ir . Vadinasi,

Taigi, žiedo poaibis uždaras sudėties atžvilgiu.

Jei, , tai egzistuoja , kad , tuomet,

Taigi, - Abelio grupė. - uždaras ir daugybos atžvilgiu, nes jei

, tuomet egzistuoja , kad ir . Vadinasi,

Asociatyvumas, komutatyvumas, distributyvumas galioja, nes žiedas ir .

**Apibrėžimas 4.**

Jei žiedų ir homomorfizmas, tai žiedo poaibis

yra vadinamas homomorfizmo branduoliu.

**Pvz.**

Imkime žiedų homomorfizmą: apibrėžtą taip . Šio homomorfizmo branduolys yra

Jei homomorfizmas yra bijekcija jis vadinamas izomorfizmu. Žiedai ir vadinami izomorfiniais, žymima , jei egzistuoja izomorfizmas .

Tarkime, kad yra komutatyvus žiedas.

**Teorema 6.** Homomorfizmo branduolys yra žiedo idealas.

Žiedo faktoržiedis

**Įrodymas.**

Pirmiausia parodysime, kad yra žiedo idealas. Tegul, ir . Tada, ir ir

Taip pat turime, kad

Iš čia turime, kad žiedo idealas.

Apibrėžkime izomorfizmą

kiekvienam : .

Atvaizdis apibrėžtas korektiškai, nes jei

, tai

Atvaizdis yra homomorfizmas, nes

ir

Tai parodo, kad atvaizdis yra homomorfizmas.

Atvaizdis yra injekcinis, nes jei

Šis atvaizdis ir surjekcija, nes

Kiekvienam : , todėl .

Iš čia turime, kad . Teorema įrodyta.