**§ 1. Grupės faktorgrupė pagal normalųjį pogrupį**

**Apibrėžimas 1.**

Tegul, - grupės normalusis pogrupis. Apibrėžkime aibę

Ši aibė vadinama grupės faktorgrupe pagal pogrupį .

Faktorgrupėje tarp klasių apibrėžkime algebrinę operaciją:

**Teorema 1.** Grupės faktorgrupė yra grupė apibrėžtos operacijos (1) atžvilgiu.

**Įrodymas.**

Parodysime, kad lygybe (1) apibrėžta grupės operacija yra korektiška. Tam reikia parodyti, kad jei dvi faktorgrupės klasės sutampa, tai jų operacija bus ta pati klasė. Tai yra, jei

 ir , tai .

Iš tikrųjų, jei

,

ir

,

Tuomet,

Iš pastarosios lygybės turime, kad

Toliau lieka patikrinti tik grupės apibrėžimo sąlygas.

Asociatyvumas:

Neutralusis elementas:

nes

Atvirkštinė klasė klasei yra , nes

.

Teorema įrodyta.

**§ 2. Grupių atvaizdžiai**

Tarkime, ir dvi grupės.

**Apibrėžimas 2.**

Atvaizdis vadinamas homomorfizmu, jei bet kuriems ir :

 ))

Homomorfizmas vadinamas izomorfizmu, jei atvaizdis f- bijekcija. Jei egzistuoja grupių ir izomorfizmas, tai grupės vadinamos izomorfinėmis ir žymima .

Izomorfizmas vadinamas grupės automorfizmu.

Jei tarp grupių galima apibrėžti izomorfizmą, tai struktūriniu požiūriu grupės yra identiškos, nors patys izomorfiniai objektai gali būti ir skirtingos prigimties. Bendru atveju nėra metodo nustatyti ar skirtingos grupės yra izomorfinės, tai galima padaryti tik atskiroms grupių klasėms.

**Pvz.: 1.**

Tegul, . Tuomet, ir yra grupės, o atvaizdis

Yra šių grupių izomorfizmas.

Iš logaritmų savybių turime, kad . Be to logaritmas yra bijektyvus atvaizdis.

**Pvz.: 2.**

Taip pat izomorfizmas, kuris yra grupės automorfizmas.

**Pvz.: 3.**

Nėra izomorfizmas, , bet yra homomorfizmas, nes atvaizdis nėra bijekcija.

Toliau grupės neutralųjį elementą žymėsime , o grupės neutralųjį elementą žymėsime .

Parodysime, kad homomorfizmas grupės neutralųjį elementą perveda į grupės neutralųjį elementą , o atvirkštinį elementą į atvirkštinį elementą.

**Teorema 2.** Jei yra grupių ir homomorfizmas, tai

1. , visiems

**Įrodymas.**

Turime, kad

Iš čia,

čia

.

2.

Iš čia,

.

Teorema įrodyta.

**Apibrėžimas 3.**

Tegul, grupių ir homomorfizmas, tuomet grupės poaibis

vadinamas homomorfizmo branduoliu.

**Teorema 3.** Jei, grupių ir homomorfizmas, tuomet

jo branduolys yra grupės normalusis pogrupis.

**Įrodymas.**

Pradžioje parodysime, kad yra grupės pogrupis. Remsimės pirmuoju pogrupio apibrėžimu.

Imkime ir . Tada ir . Tuomet,

 )) .

Taip pat, jei , tai

.

Parodėme, kad branduolys yra pogrupis. Belieka parodyti, kad šis pogrupis normalusis.

Remsimės praėjusioje paskaitoje įrodyta teorema.

Tegul, ir , tada

 )))))))) .

Taigi grupės normalusis pogrupis.

Teorema įrodyta.

**Pvz.: 1.** Nagrinėkime automorfizmą

Šio automorfizmo branduolys .

**Pvz.: 2.** Nagrinėkime homomorfizmą

Šio homomorfizmo branduolys .

**Teorema 4.** Jei, grupių ir homomorfizmas, tuomet tada ir tik tada, kai - injekcinis homomorfizmas.

**Įrodymas.**

**Būtinumas.**

Tarkime, kad homomorfizmo branduolį sudaro tik vienas neutralusis grupės elementas t. y. . Parodysime, kad atvaizdis yra injektyvus.

Tam reikia parodyti, kad .(injekcijos apibrėžimas)

Įrodysime priešingai, jei ir , kad . Tuomet bus teisingas ir priešingas teiginys.

Imkime, ir tokius, kad .

**Pakankamumas.**

Tarkime, kad - injekcinis homomorfizmas ir priešingai teoremos sąlygai .

Tuomet paimkime . . Tuomet, )). Tai reiškia, kad skirtingi grupės elementai ir turi tą patį vaizdą. Prieštara.

Teorema įrodyta.

**Išvada.** Baigtinės izomorfinės grupės turi tą patį tos pačios eilės elementų skaičių.

Jei Jei, baigtinių grupių ir izomorfizmas, tai grupėse turi būti tas pats elementų skaičius. Parodysime, kad n-tos eilės elementas yra pervedamas į n- tos eilės elementą. Tegul yra grupės n- tos eilės elementas. Tuomet,

Be to, su visais :

, kadangi . Iš to išplaukia, kad yra grupės n- tos eilės elementas.

**Teorema 5.** Jei, grupių ir homomorfizmas, tuomet, jei yra grupės pogrupis, tai yra grupės pogrupis.

**Įrodymas.**

Remsimės antruoju pogrupio apibrėžimu. Tegul, . Tuomet, , todėl

Taigi, - pogrupis.

**§ 3. Grupės faktorgrupė pagal branduolį**

**Teorema 6.** Jei, grupių ir homomorfizmas. Tuomet, grupės G faktorgrupė pagal homomorfizmo branduolį izomorfiška grupės G vaizdui. Tai yra

**Įrodymas.**

Apibrėžkime atvaizdį tokiu būdu:

, .

Kadangi normalusis pogrupis, tai faktorgrupė, pagal teoremą 1

Parodysime, kad atvaizdis apibrėžtas korektiškai. Imkime . Parodysime, kad .

Jei , tai ( pagal 2-ąją praėjusios paskaitos teoremą), todėl

)) .

Dabar parodysime, kad - homomorfizmas.

Tegul, ir , tada

Dabar parodysime, kad -injekcija. Tegul, )) (pagal praėjusios paskaitos 2-ąją teoremą.)

Kadangi su visais , tai . Taigi

.

Teorema įrodyta.

**Pvz.:1.** Nagrinėkime homomorfizmą

Nesunku, matyti, kad

Tuomet, pagal 6-ąją teoremą gauname, kad

.

**Pvz.: 2.** Nagrinėkime grupės homomorfizmą

Matome, kad

Todėl,

.