**§ 1. Tiesinės erdvės apibrėžimas**

**Apibrėžimas 1.**

Abelio grupė vadinama tiesine erdve virš kūno , jei apibrėžtas atvaizdis

tenkinantis sąlygas:

1. ;
2. ;
3. .

Tiesinės erdvės virš kūno elementai yra vadinami vektoriais, 0 grupės neutralusis elementas vadinamas nuliniu vektoriumi ir žymimas . Kūno elementai vadinami skaliarais.

**Pvz 1.**

1. Realieji skaičiai yra tiesinė erdvė virš .
2. Jei bet koks kūnas, tai yra tiesinė erdvė virš .
3. - plokštuma.

 Apibrėžkime:

Parodysime, kad

- Abelio grupė, o - tiesinė erdvė virš . Tam reikia patikrinti tiesinės erdvės apibrėžimo sąlygas.

1. ;
2. ;
3. ;
4. .

Taigi, matome, kad visos tiesinės erdvės apibrėžimo sąlygos tenkinamos, todėl - tiesinė erdvė virš .

Sakykime, kad - kūnas ir . Apibrėžkime aibę:

Šioje aibėje apibrėžkime sudėties operaciją.

Apibrėžkime atvaizdį

tokiu būdu. Kiekvienam ir bet kokiam vektoriui

Tuomet, nesunku įsitikinti, kad

yra tiesinė erdvė virš kūno . Ji vadinama mate tiesine erdve virš kūno . Kai , tai tiesinė erdvė vadinama plokštuma.

**Pvz 2.**

Aibė yra tiesinė erdvėvirš kūno **.** Šią erdvę sudarys 8 skirtingi vektoriai:

**Pvz 3.**

Polinomų žiedas yra tiesinė erdvė virš .

**Pvz 4.**

Matricų aibė tiesinė erdvė virš kūno .

**§ 2. Tiesinės erdvės savybės ir vektorių tiesinė priklausomybė**

**Teorema 1.**

Tegul, yra tiesinė erdvė virš kūno

1. ;
2. ;
3. arba ;
4. .

**Įrodymas**

1. Pagal 3-čią tiesinės erdvės apibrėžimo sąlygą turime, kad

Paėmę gauname, kad

Tai reiškia, kad yra grupės neutralusis elementas, todėl

.

1. Pagal 4-ą tiesinės erdvės apibrėžimo sąlygą turime, kad

Paėmę, gauname, kad

Tai reiškia, kad yra grupės neutralusis elementas, todėl

.

1. Tegul, ir , tuomet,

;

Jei ir , tuomet, tai

.

1. Iš 3-čios apibrėžimo sąlygos turime, kad

kai ir , tai

gavome, kad

Tai reiškia, kad yra priešingas vektorius vektoriui .

Teorema įrodyta.

**Apibrėžimas 2.**

Tiesinės erdvės virš kūno vektorių rinkinys vadinamas tiesiškai priklausomu, jei egzistuoja kūno elementai iš kurių bent vienas nelygus 0, kad

Jei (1) sąlyga galioja tik kai tai vektorių rinkinys vadinamas tiesiškai nepriklausomu.

Jei vektorių šeima yra tiesiškai priklausoma, tai visuomet vienas iš vektorių tiesiškai išreiškiamas per likusius tos šeimos vektorius.

Tarkime, kad , tuomet iš (1)-os sąlygos turime, kad

t. y. vektorius tiesiškai išreiškiamas per likusius vektorius.

Vektorių šeima, kurioje vienas vektorius yra nulinis yra tiesiškai priklausoma.

Iš tikrųjų, tarkime, kad , tuomet paėmę prie šio vektoriaus nenulinį skaliarą gausime, kad (1) sąlyga patenkinta.

Galime nesunkiai parodyti, kad jei vektorių sistemoje yra tiesiškai priklausomas posistemis, tai ir visa vektorių sistema bus tiesiškai priklausoma.

**Teorema 2.**

Jei tiesinės erdvės virš kūno vektorių šeima yra tiesiškai nepriklausoma, o šeima yra tiesiškai priklausoma, tai vektorius vieninteliu būdu tiesiškai išreiškiamas vektoriais .

**Įrodymas**

Kadangi šeima yra tiesiškai priklausoma, tai egzistuoja tokie iš kurių bent vienas nelygus 0, kad teisinga sąlyga

Jei , tai tuomet sąlyga

patenkinta su kažkokiu nenuliniu , bet to būti negali, nes sistema yra tiesiškai nepriklausoma. Todėl lieka, kad . Tuomet,

Belieka parodyti, kad ši išraiška yra vienintelė. Tarkime, kad egzistuoja du rinkiniai skaliarų

 ir

tokie, kad

ir

Panariui, atėmę iš pirmos lygybės antrąją turėsime,

Kadangi šeima yra tiesiškai nepriklausoma, tai

Iš čia,

;;...;.

Teorema įrodyta.

**Apibrėžimas 3.**

Tiesinės erdvės virš kūno vektorių šeima vadinama šios erdvės baze, jei

1. Vektorių šeimašeima yra tiesiškai nepriklausoma;
2. Kiekvienas vektorius tiesiškai išreiškiamas vektoriais t. y. egzistuoja tokie , kad

Tarkime, yra tiesinės erdvės virš kūno bazė. Tuomet erdvė vadinama mate erdve, o skaičius vadinamas erdvės dimensija. Dimensija žymima

Erdvės, kuriose egzistuoja baigtinis skaičius tiesiškai nepriklausomų vektorių vadinamos baigtiniamatėmis.

Tiesinės erdvės, kuriose kiekvienam egzistuoja tiesiškai nepriklausoma vektorių šeima iš vektorių vadinamos begaliniamatėmis.

Jei vektorių šeima yra tiesinės erdvės virš kūno bazė ir , tai

skaliarai vadinami vektoriaus koordinatėmis bazėje . Rašome

Koordinatės priklauso nuo bazės, tačiau duotoje bazėje vektoriaus koordinatės randamos vienareikšmiškai.

**Pvz. 5**

Tiesinės erdvės

vektorių šeima

;

...............................

yra šios erdvės bazė, nes šeima tiesiškai nepriklausoma ir kiekvienas vektorius vienareikšmiškai išreiškiamas vektoriais .

Erdvės dimensija