**§ 1. Žiedo idealų struktūra**

8- oje paskaitoje apibrėžėme žiedo idealą.

**Apibrėžimas 5.**

Netuščia aibė vadinama komutatyvaus žiedo idealu, jei

1. Visiems
2. Kiekvienam ir

Tegul, , apibrėžkime aibę

Ši aibė yra idealas ir šis idealas vadinamas pagrindiniu žiedo idealu. Žiedas, kurio visi idealai yra pagrindiniai vadinamas pagrindiniu idealu žiedu.

Per 8-ąsias pratybas parodėme kad žiedo visi idealai yra pagrindiniai, taigi jis yra pagrindinių idealų žiedas. Šioje paskaitoje nagrinėsime polinomų žiedą su koeficientais iš žiedo . Parodysime, kad jis taip pat yra pagrindinių idealų žiedas.

**Teorema 1.**

Žiedas yra pagrindinių idealų žiedas.

**Įrodymas**

Tegul, - bet kuris žiedo idealas. Jei yra nulinis idealas, tai yra , tai šis idealas bus pagrindinis žiedo idealas, nes be kokiam polinomui turėsime, kad - taigi idealas yra pagrindinis žiedo idealas.

Tarkime, kad , bet kuris žiedo idealas ir - mažiausio laipsnio nenulinis polinomas priklausantis šiam idealui. Parodysime, kad

Tegul, , tuomet polinomą padaliję iš polinomo su liekana turėsime

ir

, .

Tuomet, matome, kad

(pagal idealo apibrėžimo 1-ąją sąlygą).

Pagal mūsų prielaidą - mažiausio laipsnio nenulinis polinomas priklausantis idealui .

Kadangi, yra mažesnio laipsnio polinomas priklausantis šiam idealui, tai jis turi būti nulinis polinomas t. y. .

Tuomet, turime, kad

1. Sąlyga rodo, kad polinomas priklauso ir idealui , taigi

Iš kitos pusės , nes ir todėl bet kokiam polinomui , turime, kad (pagal 2-ą idealo apibrėžimo sąlygą).

Gavome, kad bet koks žiedo idealas

kur mažiausio laipsnio nenulinis polinomas priklausantis idealui .Teorema įrodyta.

Iš pirmos teoremos įrodymo matome, kad sąryšis

teisingas, jei . Iš tikrųjų, jei , tai bet kokiam teisinga, kad .

Todėl, lygybė teisinga tada ir tik tada, kai ir .

Taip gali būti tik tuo atveju, jei polinomai ir yra ekvivalentūs, tai yra skiriasi tik konstanta.

9-oje paskaitoje buvo pateiktas maksimalaus idealo apibrėžimas.

**Apibrėžimas 2.**

Komutatyvaus žiedo su vienetu idealas vadinamas maksimaliu, jei

kiekvienam idealui , tokiam, kad , turime, kad arba .

Tai yra tarp ir nėra kitų idealų.

**Teorema 2.**

Žiedo idealas , kur yra maksimalus tada ir tik tada kai polinomas pirminis virš kūno .

**Įrodymas**

**Būtinumas**

Tarkime, kad nėra pirminis polinomas virš kūno . Tuomet,

,

Tuomet, , todėl

Be to, , nes

ir

nes tai reikštų, kad žiedą sudaro tik polinomai, kurie dalijasi iš .

Taigi, nėra maksimalus polinomų žiedo idealas. Todėl galioja priešingas teiginys, jei yra maksimalus idealas, tai yra pirminis žiedo polinomas.

**Pakankamumas**

Tarkime, kad polinomas pirminis virš kūno . Imkime idealą ir tegul

, tuomet .

Kadangi, - pirminis žiedo polinomas, tai galimi du atvejai:

1. , bet tuomet
2. , tuomet

Iš šių abiejų sąlygų matome, kad tenkina maksimalaus žiedo idealo apibrėžimą. Teorema įrodyta.

**§ 2. Šaknies prijungimo procedūra**

8-oje paskaitoje buvome apibrėžę žiedo faktoržiedą

Faktoržiedą sudaro ekvivalentumo klasės

, .

9- oje paskaitoje buvo įrodyta, kad žiedo faktoržiedas pagal maksimalų idealą yra kūnas.

Šioje paskaitoje toliau nagrinėsime žiedo faktoržiedą pagal maksimalų idealą . Jei maksimalus žiedo idealas, tuomet įrodėme, kad yra pirminis polinomas virš kūno .

**Teorema 3.**

Tegul, yra maksimalus žiedo idealas, tuomet faktoržiedas yra kūno plėtinys (Kūnas yra kūno pokūnis) kuriame polinomas turi šaknį.

**Įrodymas**

Apibrėžkime atvaizdį

tokiu būdu:

(t. y. kūno elementui priskiriama jo ekvivalentumo klasė pagal maksimalų idealą )

Parodysime, kad atvaizdis yra injekcinis homomorfizmas, tai reikš, kad , tai yra kūno pokūnis.

Imkime , tokius, kad . Tuomet, . Tačiau, - pirminis žiedo polinomas, todėl . Tuo tarpu

, nes tai kūno elementas, todėl , t. y. .

Tai reiškia, kad atvaizdis yra injekcija.

Imkime, , tuomet

;

ir

;

Pastarosios dvi lygybės įrodo, kad atvaizdis - homomorfizmas, taigi ir izomorfizmas.

Tokiu būdu .

Tai įrodo, kad kūnas yra kūno plėtinys.

Parodysime, kad polinomas kūne turi šaknį.

Tegul, , ir , tuomet

Niutono-Leibnico formulė:

Kadangi, idealas yra nulinis faktoržiedo elementas, tai reiškia, kad yra polinomo šaknis kūne . Teorema įrodyta.

**Pvz.**

Polinomų žiedo idealas yra maksimalus, nes polinomas neredukuojamas virš kūno . Tuomet, žiedo yra kūnas. Šio kūno vienetas, bus klasė 1+, o faktoržiedas bus sudarytas iš ekvivalentumo klasių:

Apibrėžkime sudėties ir daugybos operacijas šiame faktoržiedyje.

Tegul,

Tuomet,

ir

Taigi, faktoržiedis uždaras sudėties ir daugybos atžvilgiu.

Raskime elementui

atvirkštinio elemento

išraišką.

Jei

Tai,

Tada,

Taigi,

Kūnas izomorfiškas kūnui

Užtenka apibrėžti bijekciją

Kūnas yra kūno plėtinys kuriame polinomas turi šaknį. (Teorema 3).