**§ 1. Žiedo polinomai**

Žiedo polinomus sudaro tokie polinomai, kurių koeficientai kompleksiniai skaičiai.

**Apibrėžimas 1.**

Kūnas vadinamas algebriškai uždaru, jei kiekvienas teigiamo laipsnio polinomas šiame žiede išsiskaido pirmojo laipsnio polinomų sandauga:

, ,

**Apibrėžimas 2.**

Kūnas vadinamas algebriškai uždaru, jei kiekvienas teigiamo laipsnio polinomas šiame kūne turi bent vieną šaknį.

Šie du apibrėžimai yra ekvivalentūs, nes kiekvienas pirmojo laipsnio polinomas turi vieną šaknį ir atvirkščiai teigiamo laipsnio polinomas turintys kūne šaknį išsiskaido šiame kūne į pirmojo laipsnio polinomus.

**Teorema 1. (Pagrindinė algebros teorema)**

Kompleksinių skaičių kūnas yra algebriškai uždaras.

**Teorema 2. (Pagrindinė algebros teorema)**

Kiekvienas teigiamo laipsnio polinomas su kompleksiniais koeficientais kūne turi bent vieną šaknį.

Šią teoremą 1799 metais įrodė K. Gausas. Jos pavadinimas kilo iš to, kad tuo metu pagrindinis algebros uždavinys buvo algebrinių lygčių sprendimas. Dabar ši teorema priklauso eilinių algebros teiginių grupei.

Iš to, kad kompleksinių skaičių kūnas yra algebriškai uždaras išplaukia, kad šiame kūne tojo laipsnio polinomas turi išsiskaidyti pirmojo laipsnio polinomų sandauga t.y.

, ,

Taigi, kiekvienas tojo laipsnio polinomas ( kompleksinių skaičių kūne turi šaknų, jei kiekvieną šaknį skaičiuoti tiek kartų koks yra jos kartotinumas.

**§ 2. Žiedo polinomai**

**Teorema 3.**

Jei kompleksinis skaičius yra polinomo šaknis, tai jungtinis kompleksinis skaičius taip pat yra šio polinomo šaknis. Be to šaknų ir kartotinumai sutampa.

**Įrodymas**

Imkime tojo laipsnio polinomas :

, .

Tegul, yra jo šaknis, tuomet

Kompleksiniams skaičiams teisingos lygybės:

ir

Beto realaus skaičiaus jungtinis lygus jam pačiam.

Todėl,

Iš pastarosios lygybės matyti, kad kompleksinis skaičius yra polinomo šaknis.

Dabar parodysime, kad šaknies ir kartotinumai sutampa.

Jei , tai ir teoremos tvirtinimas tampa akivaizdus. Todėl tarkime, kad ir šaknies kartotinumas yra , o šaknies kartotinumas yra

Nemažinant bendrumo galime laikyti, kad .

Polinomą galime užrašyti tokiu būdu

kur ir , bei .

Kadangi,

Kadangi ir , tai polinomas

Iš polinomo išraiškos matome, kad yra polinomo šaknis, todėl pagal įrodytą teoremos dalį yra taip pat polinomo šaknis, tačiau taip nėra, nes . Iš čia išplaukia, kad taip pat negali būti šio polinomo šaknis, todėl

.

Teorema įrodyta.

**Išvada 1.**

Polinomo su realiaisiais koeficientais šaknų aibė kompleksinėje plokštumoje simetriška realiosios ašies atžvilgiu.

**Išvada 2.**

Nelyginio laipsnio polinomas su realiaisiais koeficientais turi bent vieną realią šaknį.

**Įrodymas**

Jei yra tojo laipsnio polinomas, tai jo grynai kompleksinių šaknų skaičius turi būti lyginis, nes kiekviena šaknis turi jungtinę šaknį. Vadinasi, jei nelyginis, tai polinomas turi turėti bent vieną realią šaknį.

**Teorema 4.**

Kiekvienas pirminis žiedo polinomas yra pirmojo arba antroji laipsnio.

**Įrodymas**

Tegul, - pirminis žiedo polinomas ir . Toks polinomas turi šaknų kompleksinių skaičių kūne . Tegul, yra šio polinomo šaknis. (Realių šaknų toks polinomas neturi, nes jei , tai polinomas dalijasi iš taigi nėra pirminis.)

Taigi, yra grynai kompleksinė šio polinomo šaknis, tuomet kompleksinis skaičius yra taip pat šio polinomo šaknis, todėl galime užrašyti

Tačiau, kadangi

Tai rodo, kad polinomas nėra pirminis, nes

, kadangi . Teorema įrodyta.

**Išvada**

Kiekvienas normuotas (polinomas, kurio koeficientas prie aukščiausio laipsnio lygus 1) tojo laipsnio polinomas su realiaisiais koeficientais, vieninteliu būdu ( jei nekreipsime dėmesio į dauginamųjų tvarką) išreiškiamas tiesinių polinomų atitinkančių realiąsias šaknis , ir kvadratinių polinomų neturinčių realiųjų šaknų sandauga.

**§ 3. Žiedo polinomai**

**Teorema 5.**

Jei racionalusis skaičius , , , yra nenulinio polinomo

šaknis, tai ir .

**Įrodymas**

Jei yra polinomo

šaknis, tai

Padauginę šią lygybę iš , turėsime, kad

Tuomet,

Kadangi, , tai .

Iš (1) taip pat turime, kad

iš čia . Teorema įrodyta.

**Išvada**

Jei polinomas

Turi racionalią šaknį, tai ši šaknis yra sveikasis skaičius, kuris dalija laisvąjį narį .

**Įrodymas**

Jei racionalusis skaičius , , yra nenulinio polinomo, tai

ir . Jei , tai , todėl .

**Teorema 6.**

Jei sveikasis skaičius yra polinomo

šaknis, tai ; ir .

**Įrodymas**

Kadangi, yra polinomo šaknis, tai ir egzistuoja , kad

Į šią lygybę įsistatę ; ir , turėsime, kad

Teorema įrodyta.

**Apibrėžimas 3.**

Polinomas

Vadinamas primityviuoju, jei DBD(.

**Gauso lema**

Dviejų primityviųjų polinomų sandauga yra primityvusis polinomas.

12-oje paskaitoje buvome pateikę redukuojamo polinomo apibrėžimą

**Apibrėžimas 4.**

Nenulinis polinomas vadinamas redukuojamu virš kūno , jei egzistuoja polinomai ir , tokie, kad

ir

,

.

Iš šio apibrėžimo seka, kad redukuojamo virš kūno polinomo mažiausias laipsnis yra 2.

**Apibrėžimas 5.**

Nenulinis polinomas vadinamas redukuojamu virš žiedo , jei egzistuoja polinomai ir , tokie, kad ir ir

Iš šio apibrėžimo jau neseka, kad redukuojamo virš žiedo polinomo mažiausias laipsnis yra 2. Pavyzdžiui, yra redukuojamas virš žiedo .

Todėl, jei polinomas redukuojamas virš racionaliųjų skaičių kūno , tai jis redukuojamas ir virš sveikųjų skaičių žiedo .

**Teorema 7. (Ezenšteino kriterijus)**

Tarkime, kad yra pirminis skaičius, o polinomo , visi koeficientai , . dalijasi iš . Jei polinomo laisvasis narys nesidalija iš , tai polinomas neredukuojamas virš kūno .

**Pvz.**

Polinomas nėra redukuojamas virš racionaliųjų skaičių kūno , nes 3|12; 3|6 ir 3|15, bet 9 pagal Ezenšteino kriterijų toks polinomas nėra redukuojamas.

**Pastaba:**

Jei polinomas neredukuojamas virš vadinasi jis neturi racionaliųjų šaknų.

**§ 4. Polinomo šaknų lokalizavimas**

**Teorema 8.**

Jei kompleksinis skaičius yra nenulinio polinomo šaknis, tai

kur

**Įrodymas**

Jei , tai teoremos tvirtinimas akivaizdus. Todėl laikysime, kad .

Kadangi yra polinomo šaknis, tai

Iš čia,

Iš pastarosios gauname teoremos tvirtinimą.