**§ 1. Nulinės charakteristikos kūnas**

**Apibrėžimas 1.**

Kūnas vadinamas nulinės charakteristikos kūnu, jei jo vienetui teisinga sąlyga: su kiekvienu natūraliuoju .

**Pvz.** Kūnai yra nulinės charakteristikos kūnai. Liekanų klasių žiedas kur - pirminis yra taip pat kūnas, tačiau jis nenulinės charakteristikos, nes

Jei kūnas yra nulinės charakteristikos ir , tai

Kai kūnas nėra nulinės charakteristikos, tai (1) formulė neteisinga. Pavyzdžiui, paėmus kūną ir polinomą , turime, kad

, tuomet bet kokiam nenuliniam , .

 nulinis polinomas, taigi jo laipsnis .

Jei kūnas nėra nulinės charakteristikos, tai tuomet egzistuoja toks natūralusis , kad

**Teorema 1. (Teiloro formulė)**

Jei yra nulinės charakteristikos kūnas, tai bet kuriam tojo laipsnio polinomui ir bet kokiam , teisinga formulė:

**Įrodymas**

Tegul,

Tuomet,

, , .

Polinomas yra tojo laipsnio. Tegul,

ir

Tada,

Randame (3) išraiškos tos eilės išvestinę:

,

Tada,

Tada, iš (3) turime, kad

 išraiškos išvestinė lygi

,

ir

Procesą tęsiame, kol gauname

ir

Taigi, gavome, kad

Teorema įrodyta.

**Teorema 2.** Tegul, yra nenulinės charakteristikos kūnas ir . Tuomet, yra nenulinio polinomo tojo kartotinumo šaknis tada ir tik tada, kai

ir

.

**Įrodymas**

**Būtinumas**

Tarkime, kad yra polinomo  tojo kartotinumo šaknis. Tuomet, pagal kartotinės šaknies apibrėžimą egzistuoja polinomas , kad

ir

.

Iš čia, turime, kad .

Randame polinomo apibrėžto (4) formule tąją išvestinę,

Pasinaudojus, praėjusioje paskaitoje pateikta Leibnico formule randame, kad

Kadangi , iš (5) išraiškos matome, kad dalosi iš . Remiantis Bezu teorema, turime, kad yra polinomo šaknis, todėl ,.

Dabar skaičiuojame (4) išraiškos tąją išvestinę

nes

Kadangi, ir nulinės charakteristikos, tai , iš čia .

**Pakankamumas**

Tarkime, kad polinomas , tenkina sąlygą:

ir

.

Iš Teiloro formulės turime, kad

Kadangi, šioje formulėje pirmi dėmenys lygūs 0, tai gauname, kad

Paėmę , turime, kad . Tai rodo, kad yra polinomo  tojo kartotinumo šaknis. Teorema įrodyta.

**Pvz.**

Parodysime, kad yra polinomo trečiojo kartotinumo šaknis.

Nesunku patikrinti, kad

ir

. Pagal 2-ąją teoremą yra polinomo trečiojo kartotinumo šaknis.

**§ 2. Neredukuojami polinomai**

Tegul, yra bet koks kūnas.

**Apibrėžimas 2.**

Nenulinis polinomas vadinamas redukuojamu virš kūno , jei egzistuoja polinomai ir , tokie, kad

ir

,

.

Polinomas , vadinamas neredukuojamu (pirminiu) virš kūno , jei jo neįmanoma išskaidyti į dviejų polinomų, kurių laipsniai mažesni už sandaugą.

Iš apibrėžimo, matyti, kad redukuojamo polinomo laipsnis

Pirmojo laipsnio polinomai yra visada pirminiai.

**Pvz.**

Imkime polinomą

Tai antrojo laipsnio polinomas ir jis yra pirminis virš racionaliųjų skaičių kūno . Tai yra jo neįmanoma išskaidyti į dviejų polinomų sandaugą, kurio koeficientai racionalūs skaičiai. Virš kūno šis polinomas jau nėra pirminis, nes yra išskaidomas į dviejų žemesnio laipsnio polinomų sandaugą, kurio kurių koeficientai realūs skaičiai:

.

Iš pavyzdžio matome, kad polinomas turi šaknį kūne , bet neturi šaknų kūne .

Bendru atveju teisinga tokia teorema.

**Teorema 3.**

Jei yra antrojo arba trečiojo laipsnio polinomas, tai jis redukuojamas virš kūno tada ir tik tada, kai jis turi šaknį šiame kūne.

**Įrodymas**

**Būtinumas**

Tarkime, kad yra antrojo arba trečiojo laipsnio polinomas redukuojamas virš kūno . Tuomet, egzistuoja polinomai ir , kad

 ir

.

Kadangi, yra antrojo arba trečiojo laipsnio polinomas, tai vieno iš polinomų arba turi būti 1. Tarkime, kad . Tuomet, , kur . Bet tuomet, yra polinomo šaknis kūne , nes . Tuomet, yra kartu ir polinomo šaknis.

**Pakankamumas**

Tarkime, kad polinomas turi šaknį kūne . Tuomet,

ir

.

Tai reiškia, kad redukuojamas virš kūno . Teorema įrodyta.

**Apibrėžimas 3.**

Polinomas vadinamas normuotu, jei jo koeficientas prie aukščiausio laipsnio lygus 1, t. y. , jei

.

**Teorema 4.**

Jei žiedo pirminis polinomas dalija polinomų ir sandaugą , tai dalija bent vieną iš polinomų ar . (analogiška teorema buvo įrodyta sveikųjų skaičių žiede).

**Įrodymas**

Tarkime, kad pirminis polinomas dalija sandaugą . Jei , tai . Tuomet, egzistuoja polinomai ir , kad

Padauginę pastarosios lygybės abi puses iš polinomo turėsime, kad

Iš čia matyti, kad dalija šios lygybės kairiąją pusę, taigi turi dalyti ir dešinę.

Teorema įrodyta.

**Teorema 5.**

Kiekvienas nenulinis polinomas išskaidomas vieneto daliklio ir normuotų pirminių polinomų virš kūno sandauga. Šis skaidinys randamas vienareikšmiškai, jei neatsižvelgiama į dauginamųjų tvarką.

Pagal šią teoremą kiekvienas nenulinis polinomas vieninteliu būdu gali būti užrašytas:

čia , o , ,...,- skirtingi normuoti polinomai .

(6) išraiška vadinama polinomo kanoniniu skaidiniu.

 **Teorema 6.**

Jei ir yra du nenulinės charakteristikos kūnai ir ir polinomas yra pirminis virš , tai kūne polinomas neturi kartotinių šaknų.

**Įrodymas**

Kadangi, - nulinės charakteristikos kūnas, tai polinomo išvestinė yra nenulinis polinomas, kurio laipsnis yra 1 mažesnis už polinomo laipsnį. Todėl, polinomai ir yra tarpusavyje pirminiai. Tada, egzistuoja polinomai ir , kad būtų teisinga lygybė

Kadangi, , tai (7) sąlyga galioja ir kūne . Tarkime, priešingai, kad polinomas kūne turi kartotinę šaknį . Tuomet,

Ir iš (7) sąlygos, gauname prieštarą Teorema įrodyta.

**§ 3. Racionaliosios trupmenos**

Tegul, - kūnas. Tuomet, žiedas neturi nulio daliklių. Nagrinėsime žiedo racionaliųjų trupmenų kūną, tai yra kūną sudarytą iš trupmenų

kai, , . Žiedas yra kūno požiedis.

Kūno racionalioji trupmena vadinama:

1. Nesuprastinama, jei ;
2. Taisyklingaja, jei

Galima įrodyti, kad kiekviena racionalioji trupmena išreiškiama polinomo ir taisyklingosios trupmenos suma.

**Apibrėžimas 4.**

Taisyklingoji trupmena vadinama paprastąja, jei egzistuoja neredukuojamas virš kūno polinomas ir polinomas , kad

 .

**Pvz.**

Trupmena

yra paprastoji kūne , bet nėra paprastoji kūne , nes polinomas yra redukuojamas žiede : .

Galima įrodyti, kad kiekviena taisyklingoji trupmena vieninteliu būdu išreiškiama paprastųjų trupmenų suma.

**§ 4. Hornerio schema**

Šiame skyrelyje aptarsime polinomo dalybą iš dvinario .

Padaliję polinomą ) iš dvinario turime, kad

čia ,

Jei , tai . Tada galime parašyti,

Iš čia matome, kad

..................... ........................................

............................................................

Tegul,

Tuomet,

 ,

 bei

 .

Algoritmas koeficientų radimui vadinamas Hornerio schema.

Jis lengviausiai realizuojamas pildant tokią lentelę:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | .... |  |  |
|  |  |  |  | .... |  |  |