**§ 1. Polinomų šaknys**

Tegul, komutatyvus žiedas su vienetu.

**Apibrėžimas 1.**

Žiedo elementas

vadinamas polinomo reikšme taške . Žymima .

**Apibrėžimas 2.**

Elementas vadinamas nenulinio polinomo šaknimi žiede , jei .

**Pvz.** Skaičius 2 yra polinomo šaknis sveikųjų skaičių žiede , nes .

Polinomas neturi šaknų racionaliųjų skaičių žiede .

Iš tikrųjų, jei jis turėtų šaknų šiame žiede, tuomet egzistuotų toks racionalusis skaičius , su kuriuo būtų teisinga lygybė . Tai reikštų, kad skaičius yra racionalusis, tačiau žinome, kad taip nėra.

Žiede šis polinomas turi dvi skirtingas šaknis.

Toliau laikysime, kad žiedas yra kūnas .

**Teorema 1.**

Tegul, ir . Tuomet, egzistuoja polinomas , kad

**Įrodymas**

Iš Euklido algoritmo turime, kad

ir

, nes . Tuomet, polinomas yra konstanta ir ši konstanta turi būti lygi . Teorema įrodyta.

**Teorema 2. (Bezu)** Tegul, ir. Tuomet, yra polinomo šaknis tada ir tik tada, kai .

**Įrodymas**

**Būtinumas**

Jei yra polinomo  šaknis, tai . Tuomet, pagal Teoremą 1

.

**Pakankamumas**

Tarkime, kad egzistuoja polinomas , kad

Paėmę , turime, kad . Taigi, kūno elementas yra polinomo šaknis. Teorema įrodyta.

**Apibrėžimas 3.**

Tegul, . Elementas vadinamas nenulinio polinomo  tojo kartotinumo šaknimi, jei , bet .

Polinomo pirmojo kartotinumo šaknis vadinama jo paprastąja šaknimi.

Iš apibrėžimo, matome, kad jei yra nenulinio polinomo tojo kartotinumo šaknis, tada ir tik tada kai ir .

Iš Bezu teoremos turime, kad nėra polinomo šaknis, tai yra .

**Teorema 3.**

Tarkime, kad , ,..., yra nenulinio polinomo , , ,..., kartotinumo šaknys, tuomet egzistuoja polinomas , kad

ir

,

**Įrodymas**

Teoremą įrodysime matematinės indukcijos metodu pagal šaknų skaičių .

Tarkime, kad , ,..., yra nenulinio polinomo , , ,..., kartotinumo šaknys. Kadangi, yra kartotinumo šaknis, tai ir

bei .

Tarkime, kad teoremos tvirtinimas yra teisingas visiems t. y.

bei ,

Kadangi, yra taip pat šio polinomo kartotinumo šaknis, tai

ir

.

Be to,

; ;...;, todėl

.

Taigi polinomai ir yra tarpusavyje pirminiai. Pagal didžiausio bendrojo daliklio tiesinę išraišką turime, kad egzistuoja polinomai ir , kad

Padauginę pastarąją lygybę iš polinomo turėsime,

Taigi turime,

Kadangi,

, tai iš (2) sąlygos turime, kad ). Taigi,

 )

ir , nes yra tik kartotinumo šaknis.

Be to kadangi,

)

ir

, tai

, . Tuomet, pasinaudojus (1)-ąja formule

ir , . Teorema įrodyta.

**Išvada1.**

Kūne - tojo laipsnio polinomas turi ne daugiau, kaip šaknų. Šaknų kartotinumai sudedami.

**Įrodymas**

Pagal 3 teoremą, turime, kad

ir

,

Kadangi kūnas neturi nulio daliklių, tai pagal praėjusios paskaitos Teoremos 2 išvadą, polinomo laipsnis lygus jį sudarančių dauginamųjų laipsnių sumai t. y.

Kadangi, , tai ir , todėl , todėl

**Išvada2.**

Jei kūne , du nenuliniai n-tojo laipsnio polinomai sutampa , taške, tai jie yra lygūs.

**Įrodymas**

Turime, kad

,

Iš čia,

,

Taigi kūno elementai , yra tojo laipsnio polinomo

šaknys. Tačiau tokių šaknų pagal Išvadą 1 gali būti ne daugiau, kaip , o mes turime šaknį. Vadinasi, . Iš čia, su visais kūno elementais.

**Pastaba:** Išvada 1 nėra teisinga, kai nėra kūnas, o tik žiedas.

Pvz.: Imkime polinomą ir liekanų klasių moduliu 8 žiedą .

Nesunku patikrinti, kad šiame žiede šis polinomas turi 4 šaknis: 0,2,4,6.

Iš tikrųjų,

**§ 2. Lagranžo interpoliacinė ir Vijetos formulės.**

**Polinomo išvestinė.**

**Teorema 4.**

Tarkime, kad , ,..., yra skirtingi kūno elementai, tuomet egzistuoja vienintelis polinomas , kad , kad ,

**Įrodymas**

Polinomą apibrėškime taip

Pažymėkime

Tada,

Tuomet,

Nesunku matyti, kad

,

. Polinomas pagal Išvadą 2 bus vienintelis. Teorema įrodyta.

**Teorema 5.**

Tarkime, kad , ,..., , nebūtinai visos skirtingos yra polinomo

šaknys, tuomet,

 ...

**Įrodymas**

Kadangi, , ,..., yra polinomo šaknys, tai

Tada,

 ...

Iš čia, matosi teoremos įrodymas.

**Apibrėžimas 4.**

Tegul, yra -tojo laipsnio polinomas t. y

tuomet polinomo išvestine vadinamas polinomas

Jei , tai t. y. polinomo, kurio laipsnis mažesnis arba lygus 0 išvestinė yra nulinis polinomas.

**Teorema 6.**

Jei ir ir , tai

ir

( be įrodymo).

Polinomo aukštesnės eilės išvestinės apibrėžiamos indukcijos būdu:

,

.

Polinomų sandaugos išvestinei galioja Leibnico formulė:

**Teorema 7.**

Kūno elementas yra polinomo kartotinė šaknis tada ir tik tada, kai

**Įrodymas**

**Būtinumas**

Tarkime, kad yra polinomo kartotinė šaknis. Tuomet, . Tai yra egzistuoja , kad

Tuomet,

ir

Vadinasi, ir .

**Pakankamumas**

Tarkime, kad polinomas tenkina sąlygą .

Padalinkime iš polinomo su liekana

Taigi .

Tarkime, kad polinomas yra ojo laipsnio, t. y.

Tada,

Iš čia,

Tada,

ir

Taigi liekana lygi 0. Tuomet, . Tai reiškia, kad polinomo kartotinė šaknis. Teorema įrodyta.