**§ 1. Polinomai**

Tegul, komutatyvus žiedas su vienetu.

**Apibrėžimas 1.**

Begalinę sumą:

, vadinsime kintamojo polinomu ( daugianariu) su koeficientais žiede , jei egzistuoja , kad kiekvienam ,

**Apibrėžimas 2.**

Polinomai

ir

su koeficientais žiede vadinami lygiais (rašome , jei kiekvienam , .

Visų kintamojo polinomų žiede aibę žymėsime .

Polinomą vadinsime nuliniu ir sutapatinsime su žiedo nuliu 0.

Jei polinomo

koeficientai , kai , tai vietoje

rašysime baigtinę sumą

Skaičius vadinamas nenulinio polinomo

laipsniu, jei .

Polinomo laipsnis žymimas . Nulinio polinomo laipsnį pagal susitarimą žymime t. y. .

**Pvz.** polinomas yra trečiojo laipsnio, o

laipsnis yra 0.

Antrojo laipsnio polinomai vadinami kvadratiniais, trečiojo laipsnio kubiniais polinomais.

**§ 2. Polinomų žiedas**

Žiede apibrėžkime polinomų (su koeficientais žiede ) sumą ir sandaugą.

Tegul,

ir

Tada,

Iš šių apibrėžimų matyti, kad dviejų polinomų sandauga, taip pat yra polinomas.

**Teorema 1.**

Aibė polinomų sudėties ir daugybos atžvilgiu yra komutatyvus žiedas su 1.

**Įrodymas**

Apibrėžus polinomų sumą pagal formulę (1) matome, kad

- Abelio grupė.

Polinomų daugyba asociatyvi. (Įrodyti savarankiškai pagal (2) formulę.)

Žiedo elementas 1 yra aibės neutralusis elementas. Be to nesunku matyti, kad polinomų daugyba yra ir komutatyvi.

Įrodysime, kad sudėtis ir daugyba susijusios distributyvumo dėsniu.

Imkime 3 polinomus:

; ir

Tuomet,

Taigi parodėme, kad yra žiedas. Šis žiedas vadinamas kintamojo polinomų žiedu su koeficientais žiede .

**Teorema 2.** Jeižiedas neturi nulio daliklių, tai ir polinomų žiedas neturi nulio daliklių.

**Įrodymas**

Tegul,

ir

yra tojo ir tojo laipsnio polinomai su koeficientais žiede . Tai reiškia, kad

 ir .

Tada,

Kadangi žiedas neturi nulio daliklių, tai , todėl ir .

Taigi su bet kokiais nenuliniais polinomais ir , turime, kad ir

 . Taigi žiedas neturi nulio daliklių. Teorema įrodyta.

**Išvada.** Jei žiedas neturi nulio daliklių ir ir , tai

**Apibrėžimas 3.**

Tarkime, kad ir ir . Sakysime, kad polinomas dalija polinomą (arba polinomas yra polinomo daliklis ir žymėsime , jei egzistuoja toks polinomas , kad .

Toliau, laikysime, kad žiedas yra ir kūnas. Jį žymėsime .

**Teorema 3. (Dalybos su liekana teorema)**

Sakykime, kad ir ir . Tada egzistuoja vieninteliai polinomai ir , kad:

ir

**Pvz.**



Todėl,

**Apibrėžimas 4.**

Polinomas vadinamas polinomų , ,..., didžiausiu bendruoju dalikliu ir žymimas DBD , jei:

1. , , ..., ,
2. Jei ir , , ..., ,

tai .

Polinomų , ,..., didžiausias bendras daliklis yra apibrėžiamas skaičiaus tikslumu.

 kūno vieneto daliklių aibė.

Tarkime, kad

, . Tuomet,

......................................................................................................................................................

Šių lygybių seka sudaro Euklido algoritmą.

**Teorema 4.**

Paskutinė, nelygi nuliui liekana yra polinomų ir

didžiausias bendras daliklis.

**Įrodymas.**

Tarkime, kad yra bet kuris polinomų ir daliklis, t. y.

ir

Parodysime, kad

 ir .

Iš paskutinės Euklido algoritmo lygybės turime, kad

Tada iš priešpaskutinės

Tęsdami procesą gauname, kad

 ir .

Kadangi,

ir

tai iš Euklido algoritmo pirmos lygybės gauname, kad

Tuomet, iš antrosios, kad

Tęsdami procesą iš paskutinės lygybės randame, kad

Teorema įrodyta.

**Apibrėžimas 5.**

Polinomai vadinami tarpusavyje pirminiais, jei jų bendras didžiausias daliklis yra 1.

**Teorema 5.**

Jei polinomų ir didžiausias bendras daliklis yra polinomas , tuomet egzistuoja tokie žiedo polinomai ir , kad

(1)- oji išraiška, vadinama didžiausio bendrojo daliklio tiesine išraiška.

**Įrodymas.**

Iš Euklido algoritmo priešpaskutinės lygybės turime, kad

 .

Teorema įrodyta.