

Pluoštų optika

Gauso pluoštai.

Gauso pluoštų savybės.

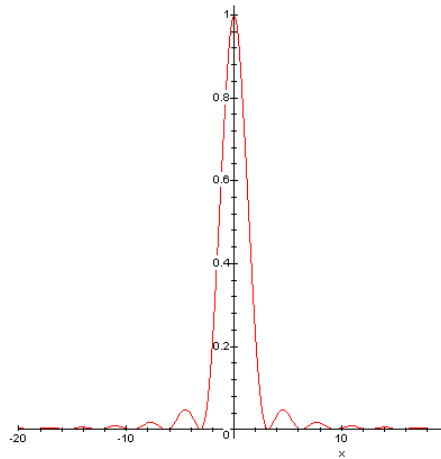
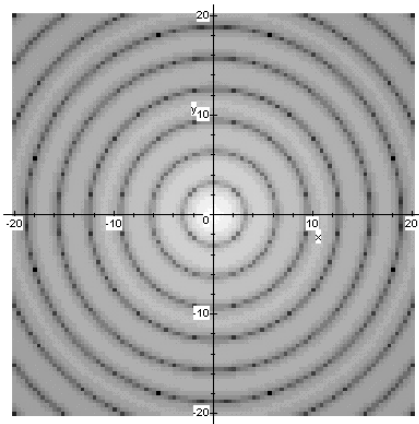
Gauso pluoštų sklidimas optiniais komponentais.

ABCD matrica.

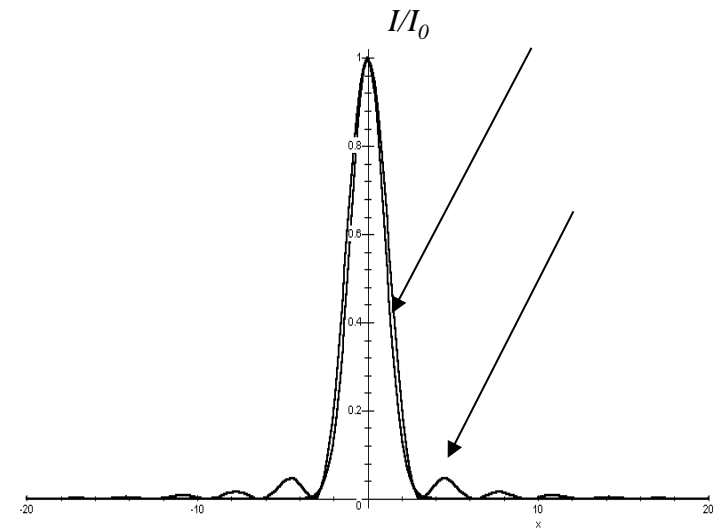
Ermito-Gauso pluoštai.

Pluoštų optika

A. Gauso pluoštai



$$I \sim \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2$$



Praėjusios pro apvalią diafragmą šviesos intensyvumo skirstinys plok.tumoje (a) ir skersinis intensyvumo pasiskirstymas (b)

Funkcijų $I \sim \exp(-x^2/2)$ ir $I \sim (\sin(x)/x)^2$ grafikai

Pluoštų optika

A. Gauso pluoštai

Plokščia banga $\exp(-jkz)$ užmoduliuota kompleksine gaubtine $A(\vec{r})$ yra paraksialinė (gretaašė) banga. Ši banga yra lėtai kintanti funkcija λ aplinkoje. Jos kompleksinė amplitudė bus:

$$U(\vec{r}) = A(\vec{r}) \cdot \exp(-jkz) \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Kompleksinė amplitudė turi tenkinti Helmholtzo lygtį:

$$\nabla^2 + k^2 U = 0.$$

Kompleksinė gaubtinė turi tenkinti paraksialinę Helmholtzo lygtį:

$$\nabla_T^2 A - j2k \frac{\partial A}{\partial z}, \quad \nabla_T^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad - \text{Laplaso operatoriaus skersinis narys}$$

Vienas paprastesnių Helmholtzo lygties sprendinys paraboloidinėms bangoms yra

$$A(\vec{r}) = \frac{A_c}{z} \exp(-jk \frac{\rho^2}{2z}), \quad \rho^2 = x^2 + y^2.$$

Paraboloidinėm banga tai sferinės bangos paraksialinė aproksimacija:

$$U(\vec{r}) = \frac{A}{r} \exp(-jk\vec{r})$$

x ir y yra ženkliai mažesni už z (paraksialinis artinys).

Pluoštų optika

A. Gauso pluoštai

Kitas Helmholtco lygties sprendinys *paraboloidinėms bangoms* yra Gauso pluoštas

$$A(\vec{r}) = \frac{A_c}{q(z)} \exp(-jk \frac{\rho^2}{2q(z)}), \quad q(z) = z - \xi. \quad \xi - \text{kompleksinis dydis}$$
$$\rho^2 = x^2 + y^2. \quad \xi = -jz_0$$

$$A(\vec{r}) = \frac{A_c}{q(z)} \exp(-jk \frac{\rho^2}{2q(z)}), \quad q(z) = z + jz_0.$$

Gauso pluošto kompleksinė
gaubtinė
 z_0 – Reilėjaus ilgis

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{z + jz_0}$$

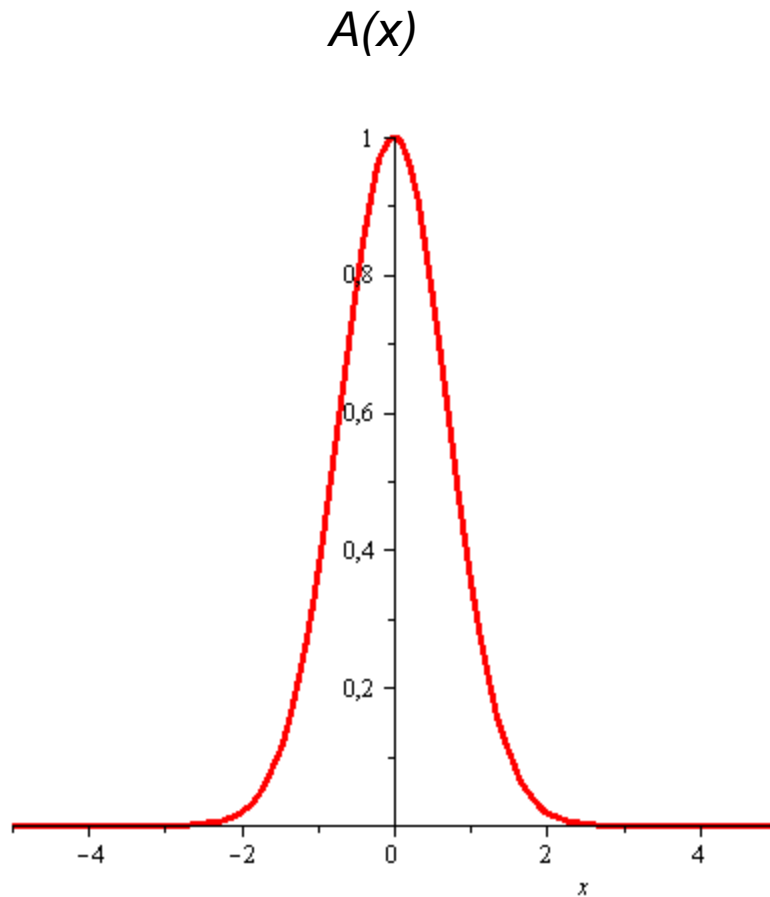
Norint atskirti realią ir menamą dalis įvedame dvi naujas funkcijas: $R(z)$ ir $W(z)$

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - j \frac{\lambda}{\pi W^2(z)}.$$

$R(z)$ – Gauso pluošto bangos fronto kreivumo radiusas,
 $W(z)$ – Gauso pluošto puspločio radiusas $1/e^2 \approx 0.135$
maksimalios amplitudės lygyje.

Pluoštų optika

A. Gauso pluoštai



$$A(\vec{r}) = \frac{A_c}{q(z)} \exp\left(-jk \frac{\rho^2}{2q(z)}\right).$$

Pluoštų optika

A. Gauso pluoštai

Gauso pluošto kompleksinės amplitudės išraiška:

$$U(\vec{r}) = A_0 \frac{W_0}{W(z)} \exp\left[-\frac{\rho^2}{W^2(z)}\right] \exp\left[-jkz - jk \frac{\rho^2}{2R(z)} + j\zeta(z)\right]$$

$$W(z) = W_0 \left[1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \text{- Gauso pluošto puspločio radiuso priklausomybė nuo } z.$$

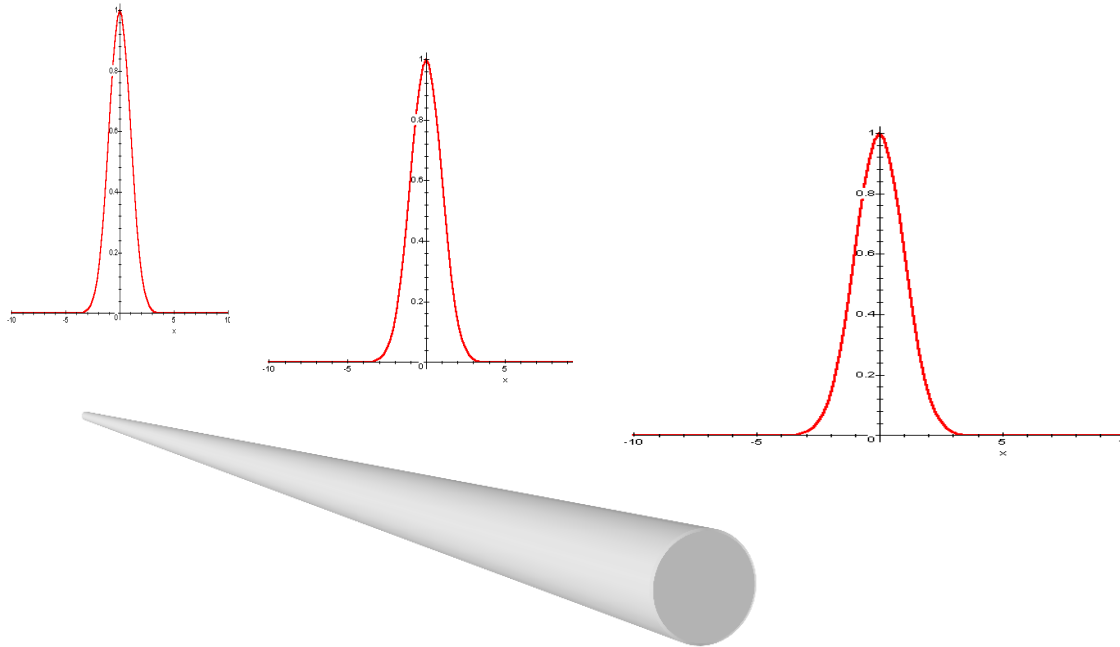
$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2 \right], \quad \text{- Gauso pluošto bangos fronto kreivumo radiuso priklausomybė nuo } z.$$

$$\zeta(z) = \arctg\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad \text{- Gauso pluošto fazės priklausomybė nuo } z.$$

$$W_0 = \left(\frac{\lambda z_0}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{- ryšys tarp Gauso pluošto puspločio radiuso sąsmaukoje } W_0 \text{ ir Reilėjaus atstumo } z_0.$$

Pluoštų optika

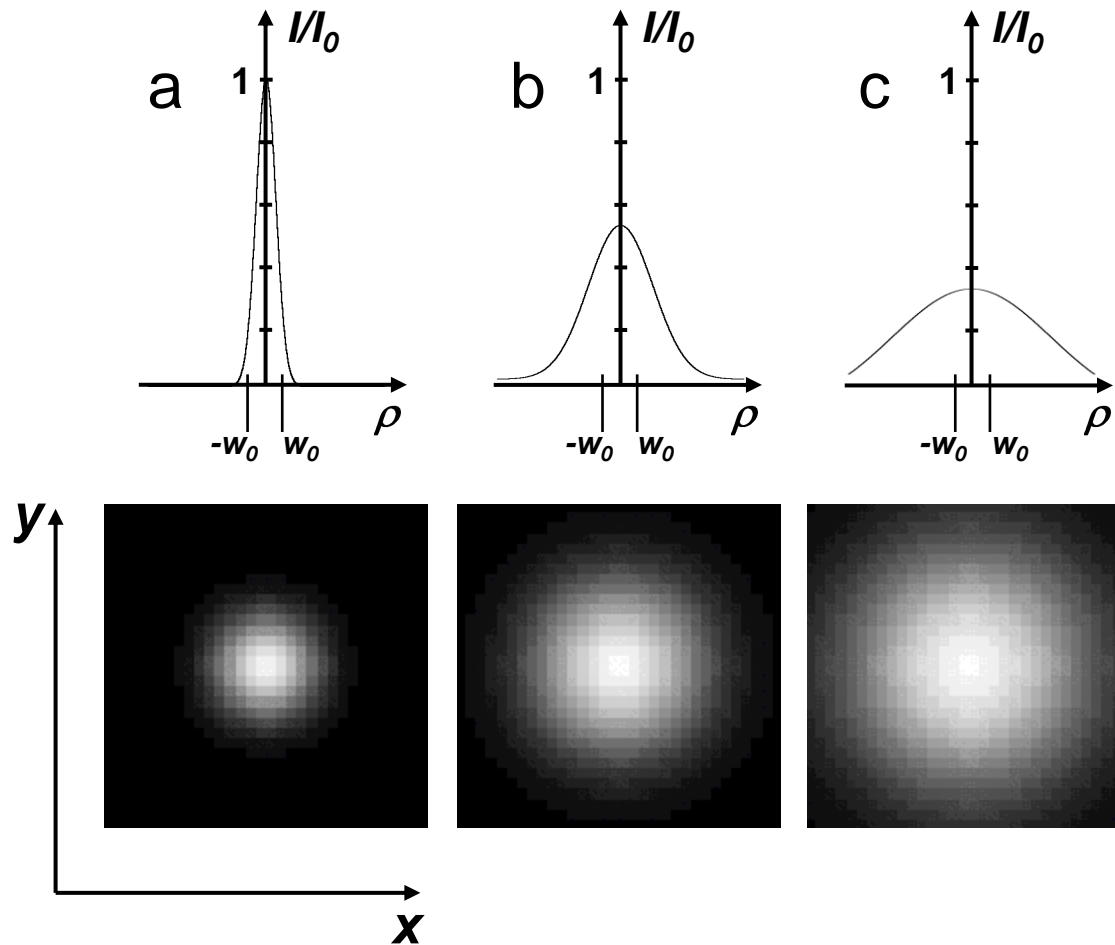
A. Gauso pluoštai



Gauso pluoštas ir intensyvumo skirstiniai jam sklindant erdvėje

Pluoštų optika

A. Gauso pluoštai



Normuoti Gauso pluošto intensyvumo skirstiniai skirtingoms z vertėms. $z=0$ (a), $z=z_0$ (b) ir $z=2z_0$ (c)

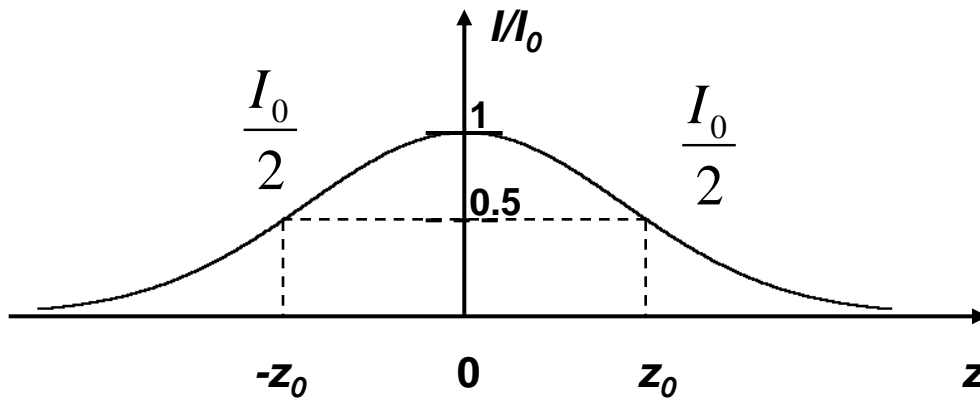
Pluoštų optika

A. Gauso pluoštai

Gauso pluoštų savybės

Intensyvumas apibrėžiamas kaip kompleksinės amplitudės absoliutaus dydžio kvadratas:

$$I(\vec{r}) = |U(\vec{r})|^2. \quad I(\rho, z) = I_0 \left[\frac{W_0}{W(z)} \right]^2 \cdot \exp \left[-\frac{2 \cdot \rho^2}{W^2(z)} \right], \quad \text{čia } I_0 = |U(\vec{r})|^2.$$



Normuotas Gauso pluošto intensyvumas ašyje

$$I(0, z) = I_0 \left[\frac{W_0}{W(z)} \right]^2 = \frac{I_0}{1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2}$$

$$\text{Kai } |z| \gg z_0 \quad I(0, z) \approx \frac{I_0 z_0^2}{z^2}.$$

Mažėja kaip $1/z^2$.

Pluoštų optika

A. Gauso pluoštai

Gauso pluoštų savybės

Optinė galia apibrėžiama kaip optinio intensyvumo integralas:

$$P = \int_0^{\infty} I(\rho, z) \cdot 2\pi\rho \cdot d\rho = \frac{1}{2} I_0(\pi W_0^2).$$

$$I(\rho, z) = \frac{2P}{\pi \cdot W^2(z)} \exp\left[-\frac{2\rho^2}{W^2(z)}\right].$$

Dalis galios esančios $\rho_0=W(z)$ radiuso apskritime z atstume:

$$\frac{1}{P} \int_0^{\rho_0} I(\rho, z) \cdot 2\pi\rho \cdot d\rho = 1 - \exp\left[-\frac{2\rho_0^2}{W^2(z)}\right].$$

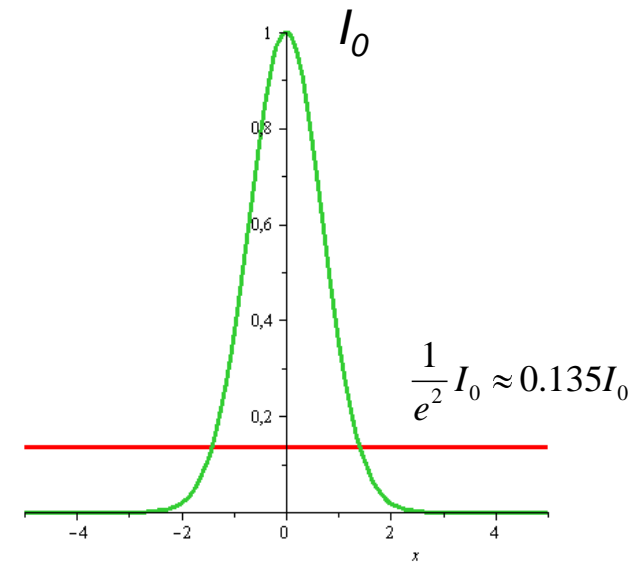
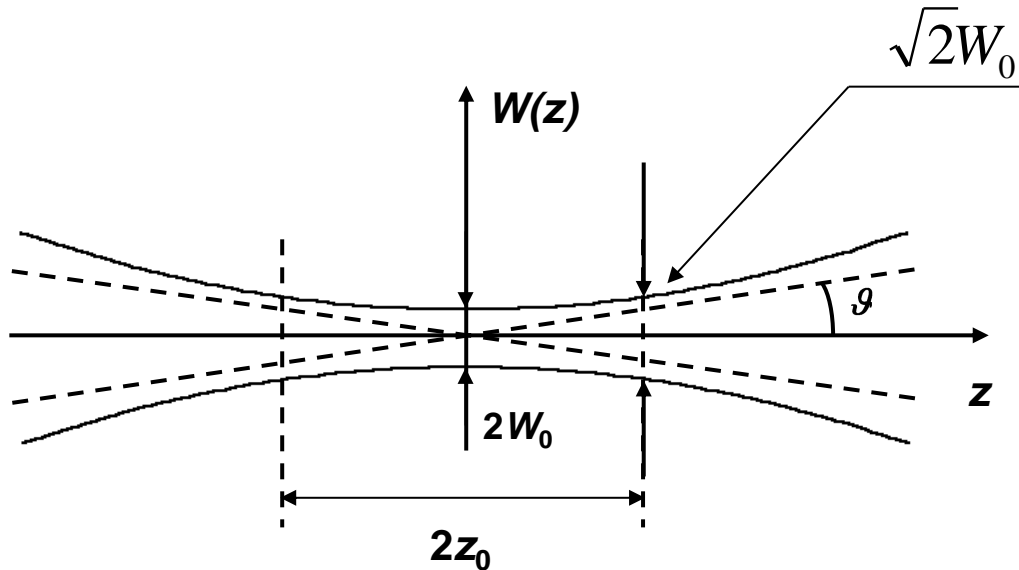
Gauso pluošto galios dalis kuri sklinda ρ_0 radiuso skritulyje yra ~ 86%.

Pluoštų optika

A. Gauso pluoštai

Gauso pluoštų savybės

Pluošto radiusas



$$W(z) = W_0 \left[1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \text{Kai } z \gg z_0 \quad W(z) \approx \frac{W_0}{z_0} z = \theta_0 z, \quad \theta_0 - \text{Gauso pluošto skėstis.}$$

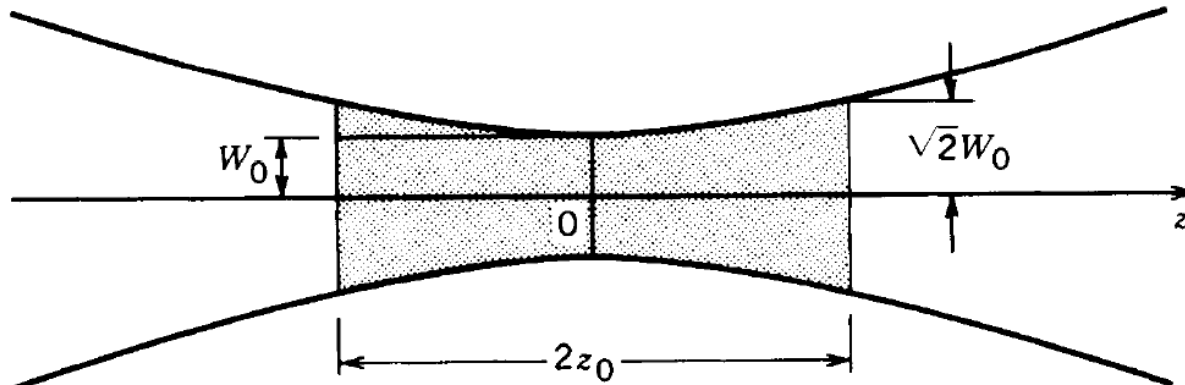
$$\theta_0 = \frac{2}{\pi} \frac{\lambda}{2W_0}. \quad \text{Kūgyje apribotame } \theta_0 \text{ sklinda } \sim 86\% \text{ Gauso pluošto galios.}$$

Pluoštų optika

A. Gauso pluoštai

Gauso pluoštų savybės

Gauso pluošto sąsmauka



$$2z_0 = \frac{2\pi W_0^2}{\lambda}$$

$2z_0$ – konfokalinis parametras,
sąsmaukos ilgis, židinio nuotolio gylis
(depth of focus, confocal parameter)

$W_0=20 \mu\text{m}$, $2z_0=3 \text{ mm}$;
 $W_0=2 \text{ cm}$, $2z_0=4 \text{ km}$.

Pluoštų optika

A. Gauso pluoštai

Gauso pluoštų savybės

Gauso pluošto fazė ir bangos frontai

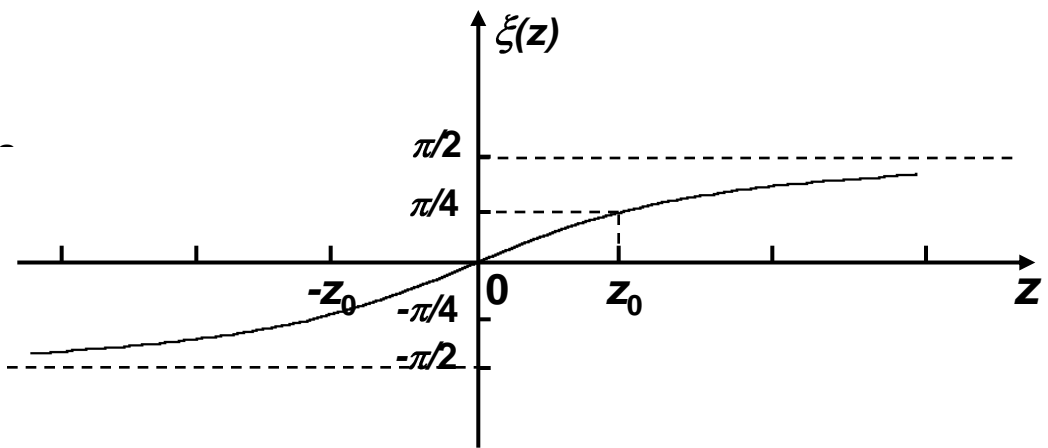
Plokščios bangos fazė



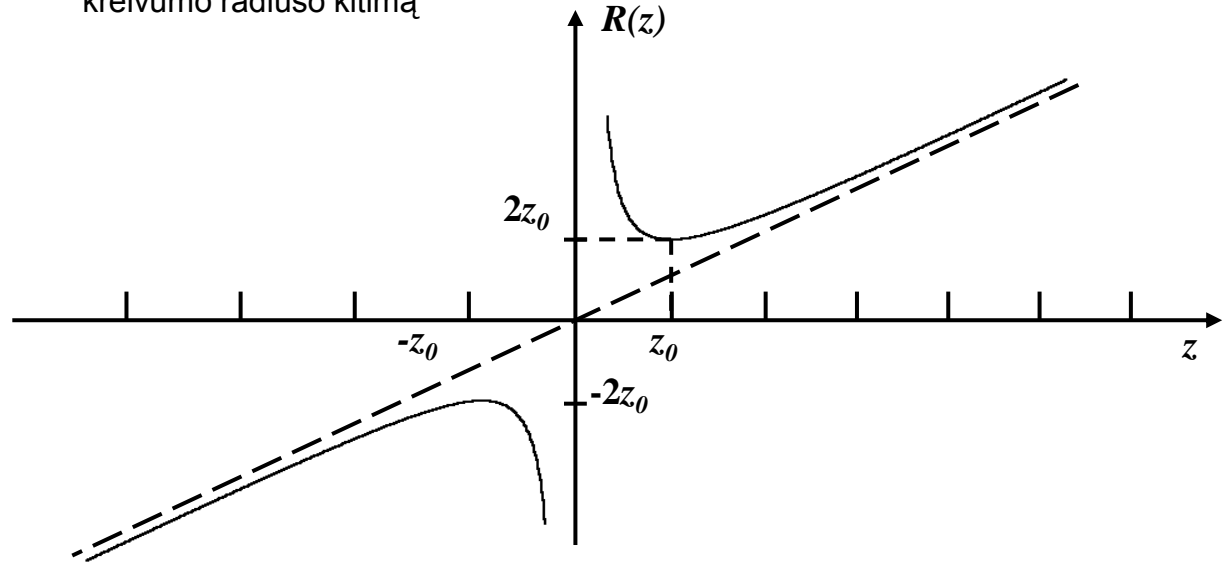
$$\varphi(\rho, z) = kz - \zeta(z) + k \frac{\rho^2}{2R(z)}$$



Gauso pluošto fazės vėlinimas lyginant su plokščia banga



Narys atsakingas už fazės vėlinimą dėl bangos fronto kreivumo kitimą



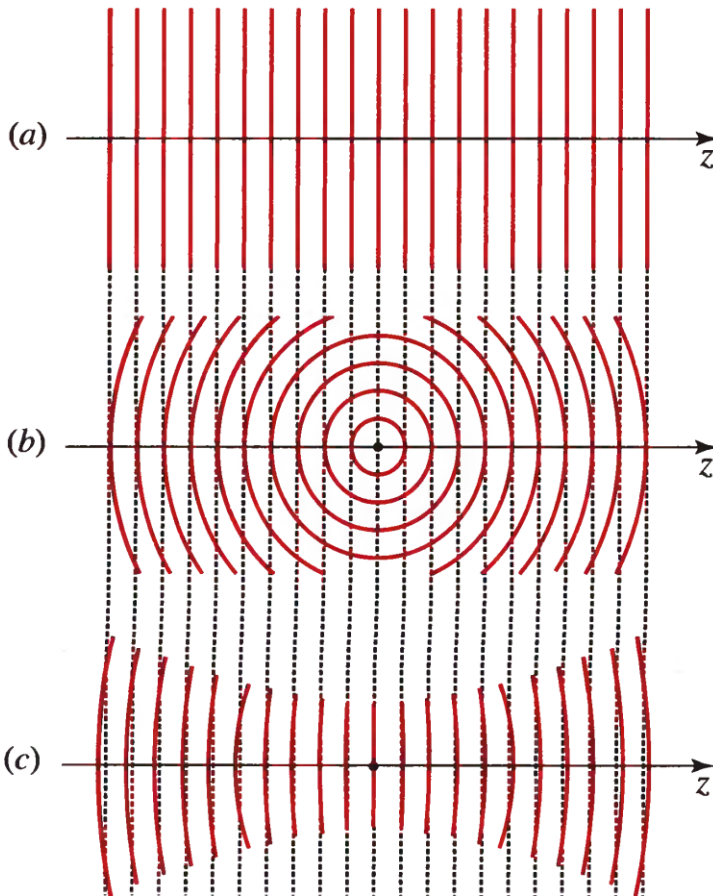
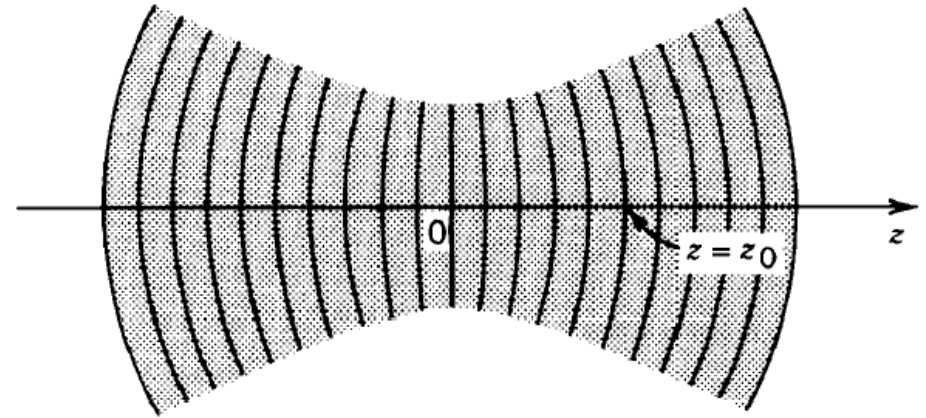
Gauso pluošto bangos fronto kreivumo radio priklausomybė nuo koordinatės z

Pluoštų optika

A. Gauso pluoštai

Gauso pluoštų savybės

Gauso pluošto fazė ir bangos frontas



$$k \left[z + \frac{\rho^2}{2R(z)} - \zeta(z) \right] = 2\pi q$$

$$z + \frac{\rho^2}{2R} = q\lambda + \frac{\xi\lambda}{2\pi}$$

Pluoštų optika

A. Gauso pluoštai

Skidimas optiniais elementais. Plonas lęšis

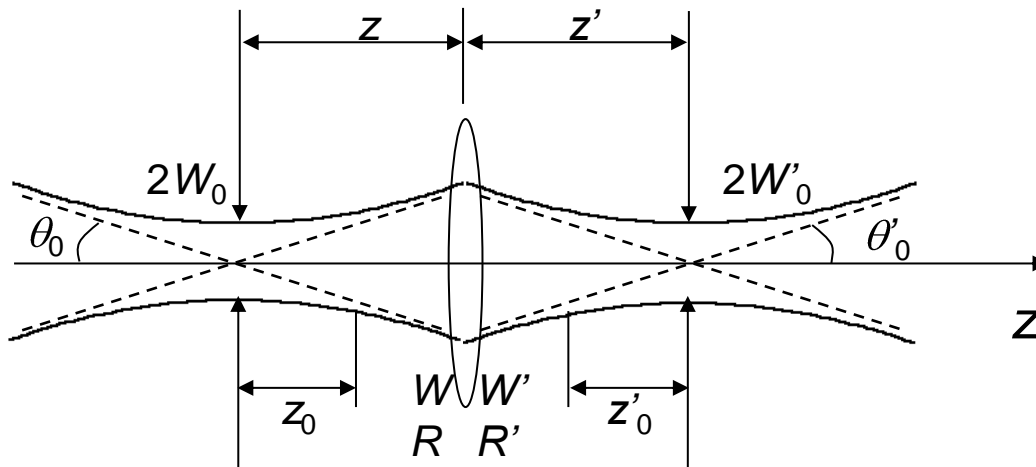
Kompleksinės amplitudės f židinio nuotolio plono lęšio pralaidumas yra proporcingas $t(x, y) = \exp\left(\frac{jk\rho^2}{2f}\right)$

Kai Gauso pluoštas sklinda per lęšį, tai reiškia kad jo kompleksinė amplitudė pasikeičia dydžiu $t(x,y)$:

$$U(\vec{r}) = A_0 \frac{W_0}{W(z)} \exp\left[-\frac{\rho^2}{W^2(z)}\right] \exp\left[-jkz - jk \frac{\rho^2}{2R(z)} + j\zeta(z)\right]$$

Kompleksinės amplitudės fazė pasikeičia

$$kz + k \frac{\rho^2}{2R} - \zeta - k \frac{\rho^2}{2f} = kz + k \frac{\rho^2}{2R'} - \zeta. \quad \frac{1}{R'} = \frac{1}{R} - \frac{1}{f}$$

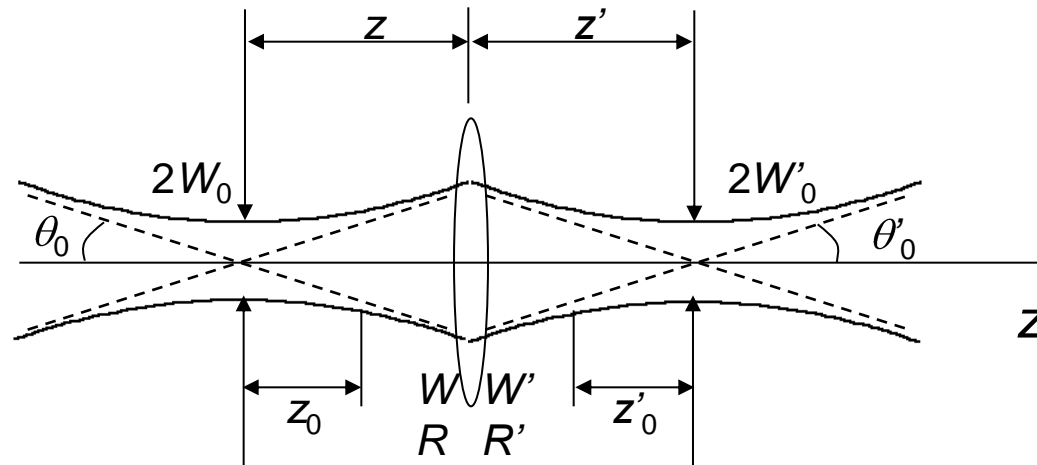


Gauso pluošto skidimas per ploną lęšį

Pluoštų optika

A. Gauso pluoštai

Skidimas optiniais elementais. Plonas lęšis



Gauso pluošto skidimas per ploną lęšį

Už lęšio pluošto radiusas sąsmaukoje bus:
$$W'_0 = \frac{W}{\sqrt{1 + \left(\frac{\pi W^2}{\lambda R'}\right)^2}},$$

Sąsmauka bus z' atstume nuo lęšio:
$$-z' = \frac{R'}{1 + \left(\frac{\lambda R'}{\pi W^2}\right)^2}.$$

Pluoštų optika

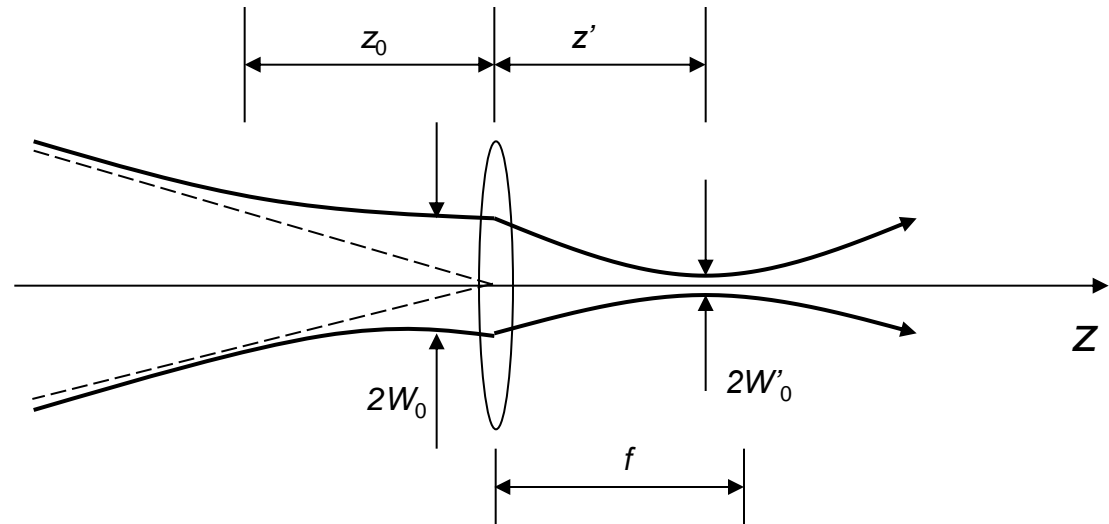
A. Gauso pluoštai

Sklidimas optiniais elementais. Pluoštų fokusavimas.

a) Lęšis yra Gauso pluošto sąsmaukoje

$$W_0' = \frac{W_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{z_0}{f}\right)^2}},$$

$$z' = \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{z_0}\right)^2}.$$



Gauso pluošto fokusavimas

Kai sąsmaukos ilgis $2z_0$ yra ženkliai didesnis už lęšio židinio nuotolį turėsime:

$$W_0' \approx \frac{\lambda}{\pi W_0} f = \theta_0 f,$$

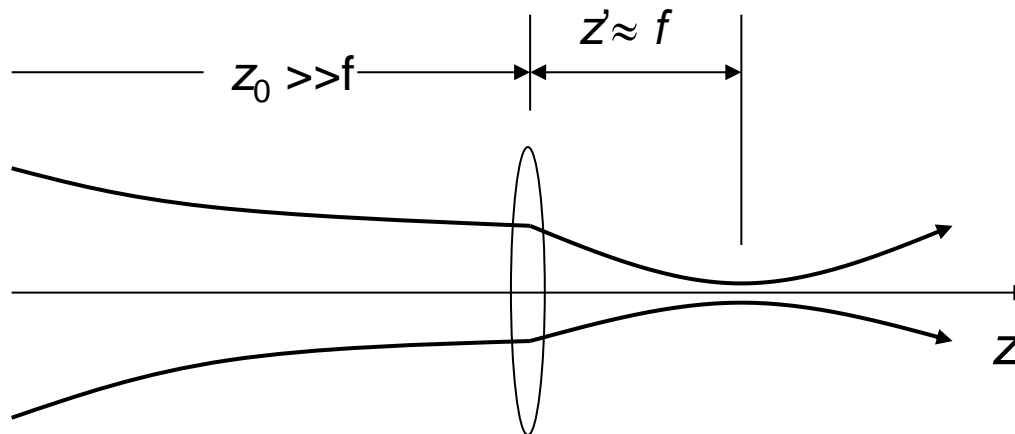
$$z' \approx f.$$

Pluoštų optika

A. Gauso pluoštai

Sklidimas optiniais elementais. Pluoštų fokusavimas.

a) Lęšis yra Gauso pluošto sąsmaukoje



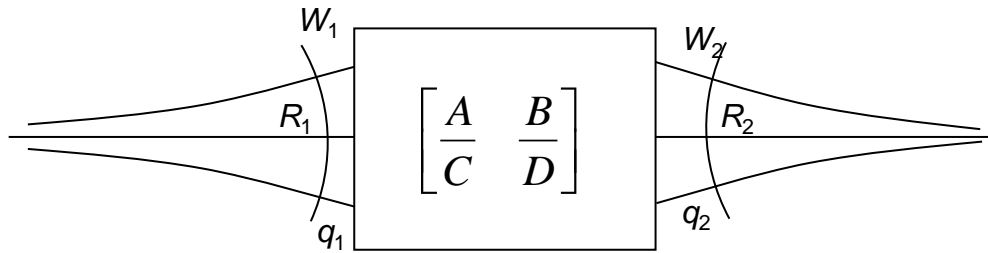
Kolimuoto Gauso pluošto fokusavimas

$$2W_0' \approx \frac{4}{\pi} \lambda \frac{f}{2W_0}.$$

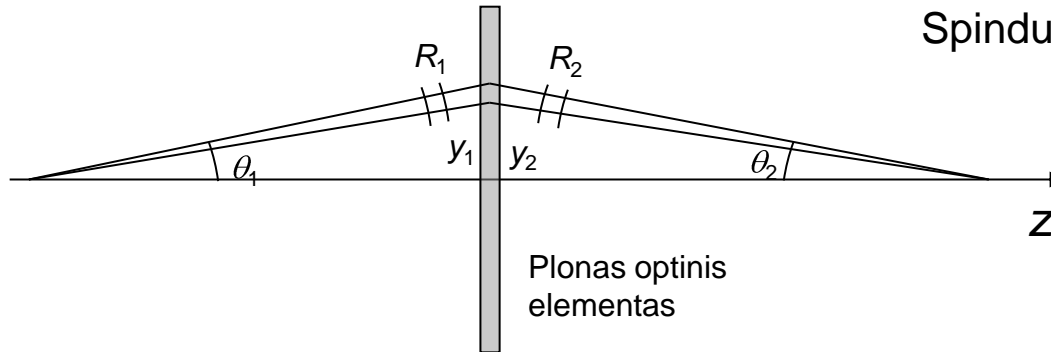
Pluoštų optika

A. Gauso pluoštai. ABCD matrica

Pluoštams



Spinduliams

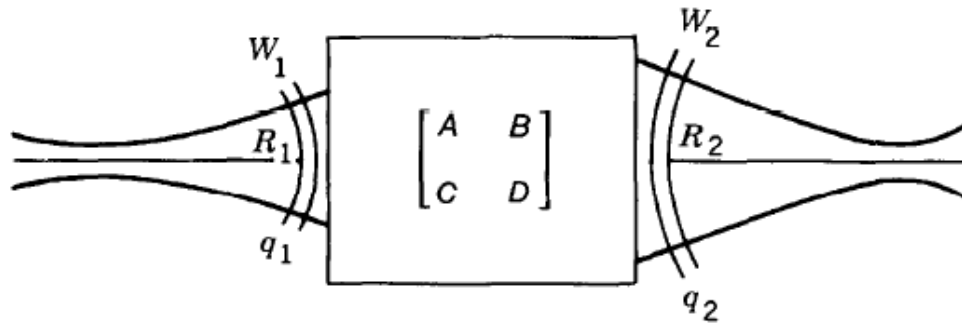


Pluoštų optika

A. Gauso pluoštai. ABCD matrica

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - j \frac{\lambda}{\pi \omega^2(z)}$$

Parametras $q(z)$ riša Gauso pluošto bangos fronto kreivumo radiusą $R(z)$ ir pluošto pusplotį $w(z)$



$$y_2 = Ay_1 + B\theta_1$$

$$\theta_2 = Cy_1 + D\theta_1$$

Spinduliams

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D}$$

Pluoštams

Pluoštų optika

A. Gauso pluoštai. ABCD matrica

Sklidimas laisva erdve



$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cy_1 + D}$$

$$y_2 = 1y_1 + d\theta_1$$

$$\theta_2 = 0y_1 + 1\theta_1$$

$$q_2 = \frac{1 \cdot q_1 + d}{0 \cdot y_1 + 1} = q_1 + d$$

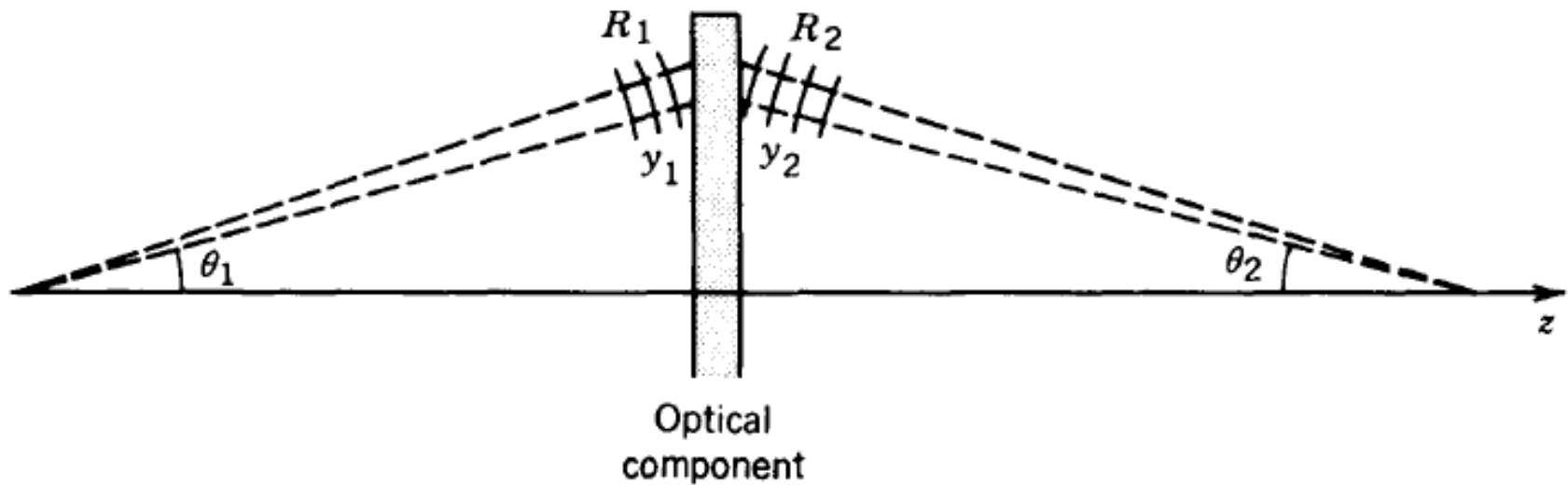
$$M = \begin{vmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A=1; B=d; C=0; D=1$$

Pluoštų optika

A. Gauso pluoštai. ABCD matrica

Skidimas aplinka kurios lūžio rodiklis yra n_2

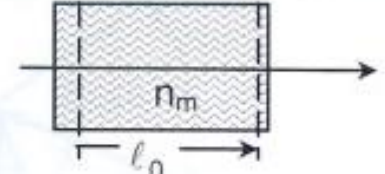
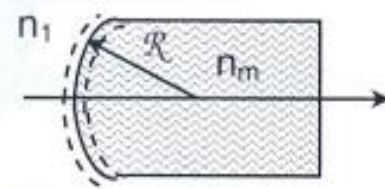
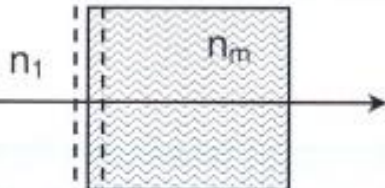


$$y_2 = y_1 \quad q_2 = \frac{1q_1}{Cy_1 + D} \quad M = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n_1/n_2 \end{vmatrix}$$
$$\theta_2 = Cy_1 + D\theta_1$$

$$A=1; B=0; C=0; D = \frac{n_1}{n_2}$$

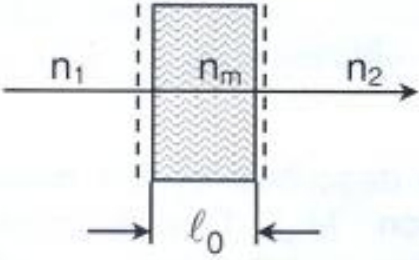
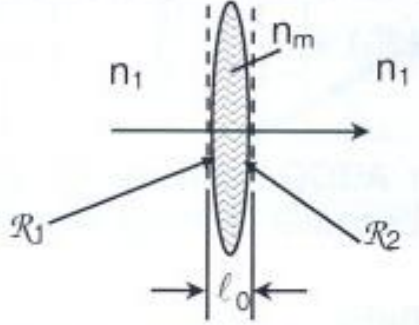
Pluoštų optika

A. Gauso pluoštai. ABCD matrica

Propagation in a homogeneous medium	 <p>A diagram showing a light ray (represented by a horizontal arrow) propagating through a rectangular medium of length l_0 and refractive index n_m. The medium is shaded with a wavy pattern. The length l_0 is indicated by a double-headed arrow below the medium.</p>	$M_{\text{prop}}(l_0) = \begin{vmatrix} 1 & l_0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$
Spherical transition refractive indices n_1, n_m ; radius of curvature $\mathcal{R} > 0$	 <p>A diagram showing a light ray (represented by a horizontal arrow) passing through a spherical transition between two media with refractive indices n_1 and n_m. The transition is a curved surface with radius of curvature \mathcal{R}. The medium with refractive index n_m is shaded with a wavy pattern.</p>	$M_S(\mathcal{R}, n_1, n_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\mathcal{R} n_m} & \frac{n_1}{n_m} \end{vmatrix}$
Refraction plane surface	 <p>A diagram showing a light ray (represented by a horizontal arrow) passing through a plane surface between two media with refractive indices n_1 and n_m. The medium with refractive index n_m is shaded with a wavy pattern.</p>	$M_B(n_1, n_m) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_m} \end{vmatrix}$

Pluoštų optika

A. Gauso pluoštai. ABCD matrica

Slab	 <p>A diagram of a slab of thickness l_0 with refractive index n_m. The slab is surrounded by media with refractive indices n_1 on the left and n_2 on the right. The thickness l_0 is indicated by a double-headed arrow at the bottom.</p>	$M_P(l_0, n_1, n_2) = \begin{vmatrix} 1 & l_0 \frac{n_1}{n_m} \\ 0 & n_1/n_2 \end{vmatrix}$
Thin Lens focal length $f \gg l_0$ $\mathcal{R}_1 > 0$; $\mathcal{R}_2 < 0$	 <p>A diagram of a thin lens with refractive index n_m and focal length f. The lens is surrounded by media with refractive indices n_1 on both sides. The radii of curvature are \mathcal{R}_1 and \mathcal{R}_2. The thickness l_0 is indicated by a double-headed arrow at the bottom.</p>	$M_f(f) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{vmatrix}$ $\frac{1}{f} = \frac{n_m - n_1}{n_1} \left(\frac{1}{\mathcal{R}_1} - \frac{1}{\mathcal{R}_2} \right)$

Pluoštų optika

A. Gauso pluoštai. ABCD matrica

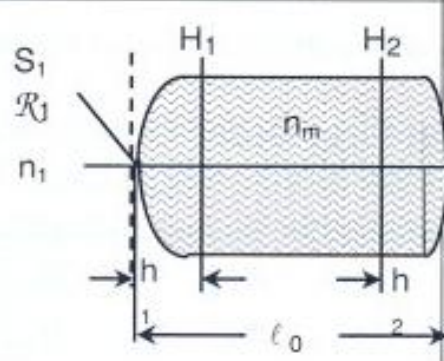
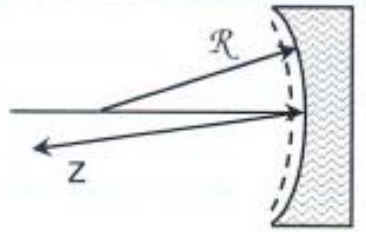
<p>Thick Lens S_1, S_2 are the nodal points, h_1, h_2 the distances of the principal planes H_1, H_2 to the nodal points $h_1 > 0, h_2 < 0$ ℓ_0 is the geometric length</p>		$M_{\theta L} = \begin{vmatrix} 1 - \frac{h_2}{f} & \ell_0 \frac{n_1}{n_m} \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{h_1}{f} \end{vmatrix}$ $\frac{1}{f} = \frac{n_m - n_1}{n_1} \left\{ \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{n_m - n_1}{n_m} \frac{\ell_0}{R_1 R_2} \right\}$ $h_{1,2} = \pm \frac{f \ell_0}{R_{2,1}} \frac{n_1 - n_m}{n_m}$
<p>Parabolic Mirror $R > 0$</p>		$M_{SP}(R) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2/R & 1 \end{vmatrix}$

Table 4.4. Ray matrices for 1-dim. case. The matrices are defined for the case where the light is incident from the left.

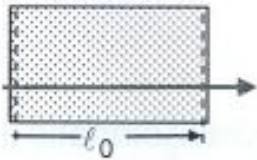
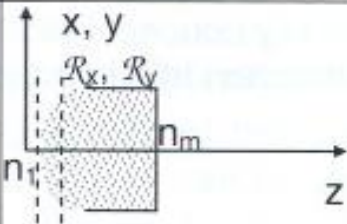
Pluoštų optika

A. Gauso pluoštai. ABCD matrica

<p><i>Stigmatic systems</i> Spherical lenses and mirrors. 1-3 free parameters</p>	$M_{ST} = \begin{vmatrix} A & 0 & B & 0 \\ 0 & A & 0 & B \\ C & 0 & D & 0 \\ 0 & C & 0 & D \end{vmatrix}$
<p><i>Simple astigmatic systems</i> Bifocal lenses and mirrors, cylinder lenses in main axis representation. The matrix of rotated simple astigmatic systems can be transformed by rotation of the reference system into the matrix M_{SA}. 2-6 free parameters + 1 parameter, if rotated.</p>	$M_{SA} = \begin{vmatrix} A_x & 0 & B_x & 0 \\ 0 & A_y & 0 & B_y \\ C_x & 0 & D_x & 0 \\ 0 & C_y & 0 & D_y \end{vmatrix}$
<p><i>General astigmatic systems</i> Two bifocal lenses, rotated against each other with a distance d. Maximal 10 free parameters.</p>	M of eq.5

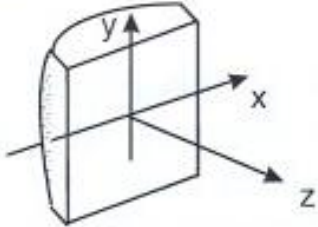
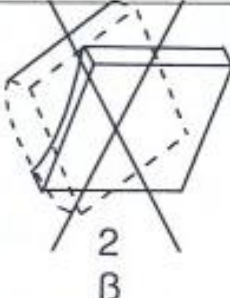
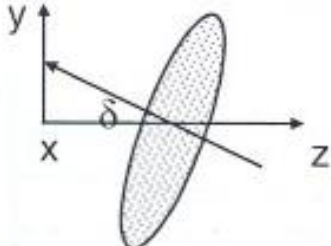
Pluoštų optika

A. Gauso pluoštai. ABCD matrica

<p>Propagation in homogeneous media</p> <p>$\ell_x = \ell_y = \ell_0$</p>		$\mathbf{M}_{\text{prop}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ell_0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ell_0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$
<p>Bifocal transition In main axes presentation</p>		$\mathbf{M}_{\text{BB}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{n_1 - n_m}{n_m \mathcal{R}_x} & 0 & \frac{n_1}{n_m} & 0 \\ 0 & \frac{n_1 - n_m}{n_m \mathcal{R}_y} & 0 & \frac{n_1}{n_m} \end{vmatrix}$

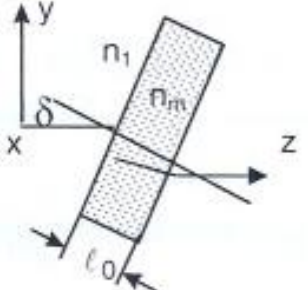
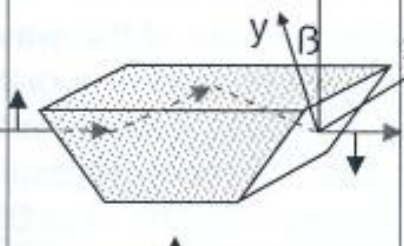
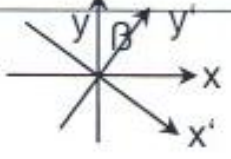
Pluoštų optika

A. Gauso pluoštai. ABCD matrica

<p>Bifocal Lens for $f_y = \infty$ a cylinder lens in x-direction results; for $f_x = f_y = f$ a spherical lens</p>		$\mathbf{M}_{BL}(\beta = 0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/f_x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/f_y & 0 & 1 \end{vmatrix}$
<p>Stokes Lens pair. A positive and a negative lens with equal absolute values of the two focal lengths, are rotated by β.</p> <p>$M_{st} = D(-\beta)M_z^-D(\beta)D(\beta)M_z^+D(-\beta)$</p>		$\mathbf{M}_{st} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin 2\beta / f & 1 & 0 \\ \sin 2\beta / f & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$
<p>Tilted thin lens</p>		$\mathbf{M}_{t,\delta} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\cos \delta / f & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/f \cos \delta & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Pluoštų optika

A. Gauso pluoštai. ABCD matrica

<p>Tilted slab</p>	 <p>A diagram showing a rectangular slab of thickness l_0 tilted at an angle δ relative to the x-axis. The slab has a core refractive index n_1 and is surrounded by a medium with refractive index n_m. A coordinate system with x, y, and z axes is shown.</p>	$M_{P,\delta} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & l_0 n_1 / n_m & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{l_0 (n_1 / n_m) \cos^2 \delta}{(1 - (n_1 / n_m)^2 \sin^2 \delta)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$
<p>Dove Prisma main axis rotated by β</p>	 <p>A diagram of a Dove prism with its main axis rotated by an angle β. A coordinate system with x, y, and z axes is shown, along with a rotated system x', y'.</p>	$M_{DV} = \begin{vmatrix} \cos 2\beta & -\sin 2\beta & 0 & 0 \\ -\sin 2\beta & \cos 2\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$
<p>Rotation of the reference system by β $M(\beta) = D(-\beta)M(0)D(+\beta)$</p>	 <p>A diagram showing the rotation of a reference coordinate system by an angle β. The original axes are x and y, and the rotated axes are x' and y'.</p>	$D(\beta) = \begin{vmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}$

Pluoštų optika

A. Gauso pluoštai. ABCD matrica

Opticslab.com



OpticsLab.exe

1. Sklidimas laisva erdve.
2. Sklidimas per teigiamą lęšį.
3. Sklidimas per neigiamą lęšį.

Pluoštų optika

B. Realūs Gauso pluoštai

Idealiam Gauso pluoštui:

$$2W_0 \cdot 2\theta_0 = \frac{4\lambda}{\pi}$$

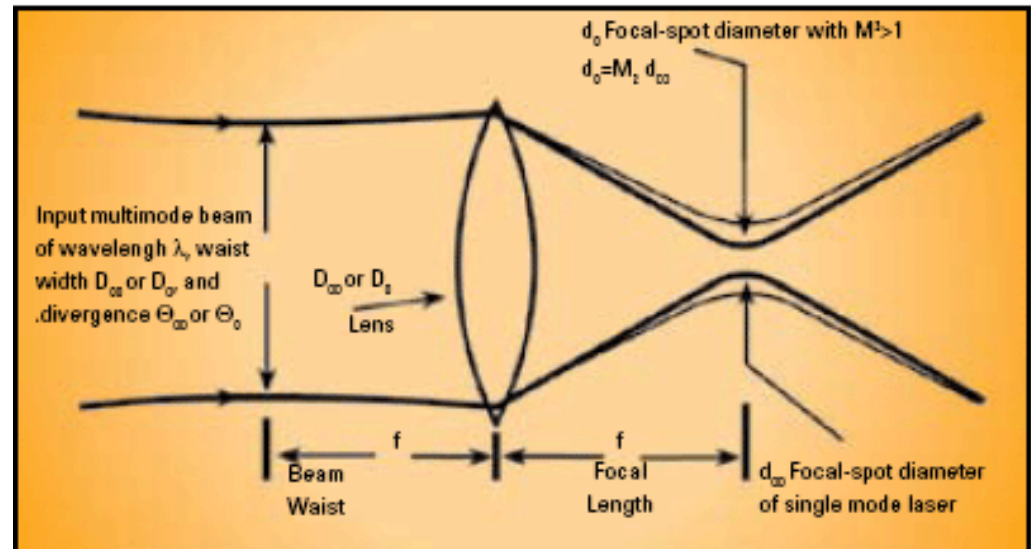
Realiam Gauso pluoštui:

$$M^2 = \frac{\theta_m}{\theta_0},$$

$$M^2 = \frac{2W_m \cdot 2\theta_m}{4\lambda/\pi}.$$

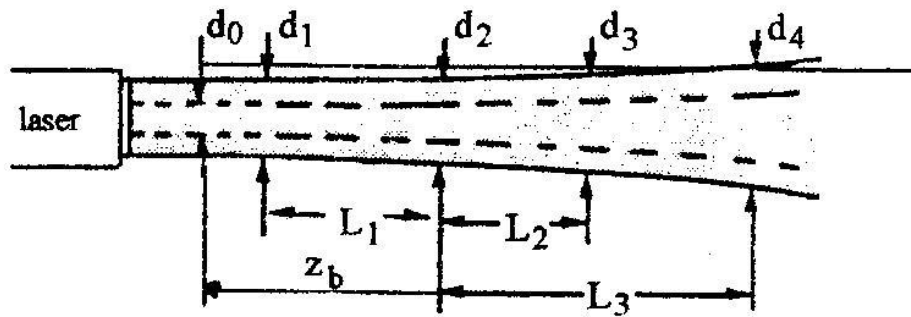
$$W_m(z) = W_{0m} \sqrt{\left[1 + \left(\frac{z\lambda M^2}{\pi W_{0m}^2} \right)^2 \right]},$$

$$R_m = z \left[1 + \left(\frac{\pi W_{0m}^2}{z\lambda M^2} \right)^2 \right].$$



Pluoštų optika

B. Realūs Gauso pluoštai



$$L_1 = \frac{\pi d_1^2}{4\lambda},$$

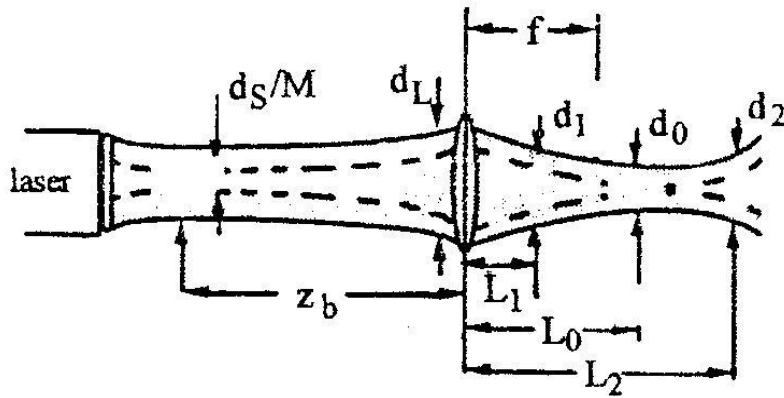
$$z_b = \frac{L_3^2 \left(\frac{1}{d_3^2} - \frac{1}{d_2^2} \right) - L_2^2 \left(\frac{1}{d_4^2} - \frac{1}{d_2^2} \right)}{2 \left[L_2 \left(\frac{1}{d_4^2} - \frac{1}{d_2^2} \right) - L_3 \left(\frac{1}{d_3^2} - \frac{1}{d_2^2} \right) \right]},$$

$$d_0 = \left[\frac{16\lambda^2 \left(\frac{1}{d_2^2} \epsilon_b - L_3 \right) - d_4^2 z_b^2}{\pi^2 \left(\frac{1}{d_4^2} - \frac{1}{d_2^2} \right)} \right]^{1/4},$$

$$M^2 = \frac{\left(\frac{d_4}{d_0} \right)^2}{1 + \left[\frac{4\lambda \left(\epsilon_b + L_3 \right)}{\pi d_0^2} \right]^2}.$$

Pluoštų optika

B. Realūs Gauso pluoštai



$$M^2 = \frac{\pi d_0^2}{2\lambda(L_2 - L_1)} \sqrt{\left(\frac{d_1^2}{d_0^2} - 1\right)},$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{f} - \frac{1}{L_0 \left(1 + \frac{d_0^2}{\lambda L_0} \right)},$$

$$d_L = d_0 \sqrt{1 + \frac{\lambda L_0 M^2}{\pi d_0^2}},$$

$$d_S = \frac{d_L}{\sqrt{1 + \frac{d_L^2}{\lambda R}}},$$

$$z_b = \frac{R}{1 + \frac{\lambda R}{\pi d_L^2}}.$$

Pluoštų optika

B. Realūs Gauso pluoštai

Pluoštų optika

C. Ermito ir Gauso pluoštai

Gauso pluoštas nėra vienintelis paraksialinės Helmholco lygties sprendinys. Šios lygties sprendiniai gali būti ir pluoštai kurių intensyvumo skirstiniai skiriasi nuo Gauso pasiskirstymo. Išskirtinį dėmesį pritraukia sprendiniai pluoštams kurių bangos frontai yra paraboloidiniai kaip ir Gauso pluošto, bet jų intensyvumo skirstiniai yra skirtingi. Susidomėjimas tokiomis bangomis tampa suprantamas jeigu nagrinėti atvejus kai tokių bangų bangos fronto kreivumo radiusas yra toks pats kaip ir didelio kreivumo radiuso sferiniai veidrodžiai. Sistemoje susidedančioje iš dviejų tokių veidrodžių (optinis rezonatorius) galima rasti sąlygas, kai pluoštai paeiliui atsispindėdami nuo tų veidrodžių gali egzistuoti nekeisdami savo matmenų, t.y. neplisdami. Tokios atsistatančios bangos yra vadinamos rezonatoriaus skersinėmis modomis.

Panagrinėkime tokias bangas. Tegul Gauso bangos kompleksinė amplitudė yra:

$$A_G(x, y, z) = \frac{A_1}{q(z)} \exp\left[-jk \frac{x^2 + y^2}{2q(z)}\right], \quad q(z) = z + jz_0 \quad R(z)$$

yra

Bangos radiusas ir bangos fronto kreivumo radiusas yra:

$$W(z) = W_0 \left[1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2 \right]$$

Pluoštų optika

C. Hermito ir Gauso pluoštai

Dabar tegul yra banga kurios kompleksinė amplitudė yra moduluota Gauso banga

$$A(x, y, z) = X \left[\sqrt{2} \frac{x}{W(z)} \right] Y \left[\sqrt{2} \frac{y}{W(z)} \right] \exp \left[i Z(z) \right] \cdot A_G(x, y, z)$$

$X(\cdot), Y(\cdot), Z(\cdot)$ - yra realios funkcijos.

Šios bangos fazė yra tokia pati kaip ir Gauso pluošto išskyrus priedą $Z(z)$ kuris yra nepriklausomas nuo x ir y . Jeigu $Z(z)$ yra lėtai kintanti z funkcija, tai dvi bangos turi paraboloidinės formos bangos frontą kurių radiusas yra $R(z)$. Šios dvi bangos ir fokusuojamos plonais lęšiais lygiai taip pat.

Dydis:

$$A_0 X \left[\sqrt{2} \frac{x}{W(z)} \right] Y \left[\sqrt{2} \frac{y}{W(z)} \right] \left[\frac{W_0}{W(z)} \right] \exp \left[- \frac{x^2 + y^2}{W^2(z)} \right]$$

yra $x/W(z)$ ir $y/W(z)$ funkcija, kurios puspločiai x ir y koordinatėse kinta kintant z pagal $W(z)$ dėsnį ($A_0 = A_1/jz_0$). Kai z didėja, intensyvumo pasiskirstymas skersinėje plokštumoje pasilieka nepasikeitęs, tik pakinta dėl dydžio $W(z)$ kitimo. Šis intensyvumo pasiskirstymas yra Gauso funkcija, kuri yra užmoduluota x ir y kryptimis funkcijomis $X^2(\cdot)$ ir $Y^2(\cdot)$.

Pluoštų optika

C. Ermito ir Gauso pluoštai

Tokia moduluota banga turi intensyvumo skirstinį kitokį negu Gauso pluoštas, bet jos bangos fronto kreivumo radiusas ir skėstis yra tokie pat kaip Gauso pluošto.

Ši banga egzistuoja, kai $A(x,y,z)$ tenkina paraksialinę Helmholtco lygtį ir galima rasti realias funkcijas $X[]$, $Y[]$ ir $Z[]$. Įvedę naujus kintamuosius u ir v gauname lygtį

$$u = \sqrt{2} x/W(z) \quad v = \sqrt{2} y/W(z)$$

$$\frac{1}{X} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} - 2u \frac{\partial X}{\partial u} \right) + \frac{1}{Y} \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial v^2} - 2v \frac{\partial Y}{\partial v} \right) + kW^2(z) \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{1}{X} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} - 2u \frac{\partial X}{\partial u} \right) = -2\mu_1$$

$$\frac{1}{Y} \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial v^2} - 2v \frac{\partial Y}{\partial v} \right) = -2\mu_2$$

$$kW^2(z) \frac{\partial Z}{\partial z} = 2(\mu_1 + \mu_2)$$

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} - 2u \frac{\partial X}{\partial u} \right) = -\mu_1 X$$

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial v^2} - 2v \frac{\partial Y}{\partial v} \right) = -\mu_2 Y$$

$$z_0 \left[1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2 \right] \frac{\partial Z}{\partial z} = \mu_1 + \mu_2$$

Šis narys aprašo tikrines dydžio $\mu_1=l$ ($l=0,1,2,\dots$) vertes ir kurios yra tikrinės funkcijos – Ermito polinomiali:

$$X(u) = H_l(u), l = 0,1,2,\dots$$

Šis narys aprašo tikrines dydžio $\mu_2=m$ ($m=0,1,2,\dots$) vertes ir kurios yra tikrinės funkcijos – Ermito polinomiali:

$$Y(v) = H_m(v), m = 0,1,2,\dots$$

Pluoštų optika

C. Ermito ir Gauso pluoštai

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} - 2u \frac{\partial X}{\partial u}\right) = -\mu_1 X$$

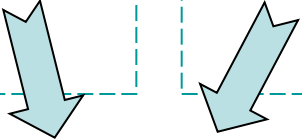
Šis narys aprašo tikrines dydžio $\mu_1=l$ ($l=0,1,2,\dots$) vertes ir kurios yra tikrinės funkcijos – Ermito polinomai:

$$X(u) = H_l(u), l = 0,1,2,\dots$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial v^2} - 2v \frac{\partial Y}{\partial v}\right) = -\mu_2 Y$$

Šis narys aprašo tikrines dydžio $\mu_2=m$ ($m=0,1,2,\dots$) vertes ir kurios yra tikrinės funkcijos – Ermito polinomai:

$$Y(v) = H_m(v), m = 0,1,2,\dots$$


$$z_0 \left[1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2 \right] \frac{\partial Z}{\partial z} = \mu_1 + \mu_2$$

$$Z(z) = (l+m)\xi(z) \text{ kur } \xi(z) = \arctan(z/z_0)$$

Fazinis narys $Z(z)$ kinta lėtai tarp verčių $-(l+m)\frac{\pi}{2}$ ir $(l+m)\frac{\pi}{2}$ kai z yra nuo $-\infty$ iki $+\infty$.

$$H_{l+1}(u) = 2uH_l(u) - 2lH_{l-1}(u)$$

$$H_0(u) = 1$$

$$H_1(u) = 2u$$

$$H_2(u) = 4u^2 - 2$$

$$H_3(u) = 8u^3 - 12u$$

Pluoštų optika

C. Ermito ir Gauso pluoštai

Pilna Ermito-Gauso pluošto kompleksinė amplitudė bus

$$U_{l,m}(x, y, z) = A_{l,m} \left[\frac{W_0}{W(z)} \right] G_l \left[\sqrt{2} \frac{x}{W(z)} \right] G_m \left[\sqrt{2} \frac{y}{W(z)} \right] \times \exp \left[-jkz - jk \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} + j(l+m+1)\xi(z) \right]$$

$$G_l(u) = H_l(u) \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right), l = 0, 1, 2, \dots \quad l - \text{eilės Ermito-Gauso funkcija}$$

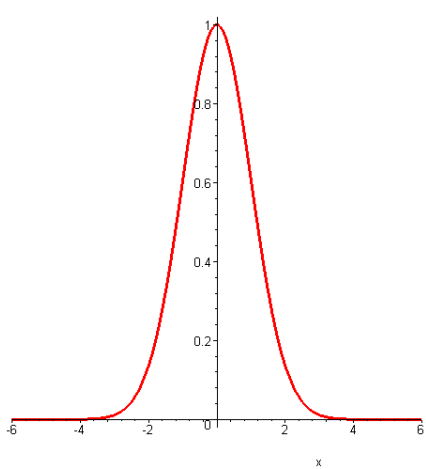
Pluoštų optika

C. Ermito ir Gauso pluoštai

$$l = 0$$

$$H_0(u) = 1$$

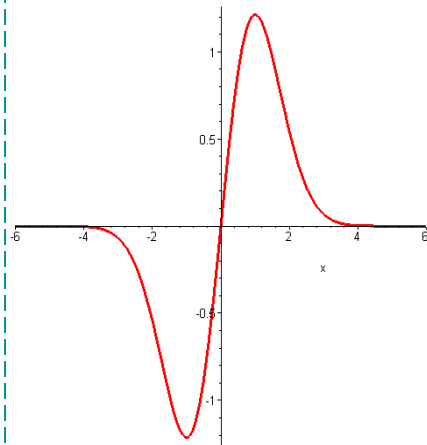
$$G_0(u) = \exp\left(\frac{-u^2}{2}\right)$$



$$l = 1$$

$$H_1(u) = 2u$$

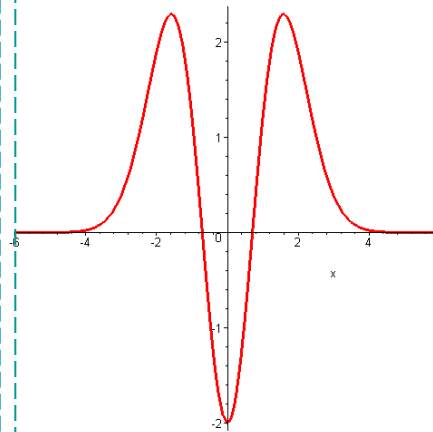
$$G_1(u) = 2u \exp\left(\frac{-u^2}{2}\right)$$



$$l = 2$$

$$H_2(u) = 4u^2 - 2$$

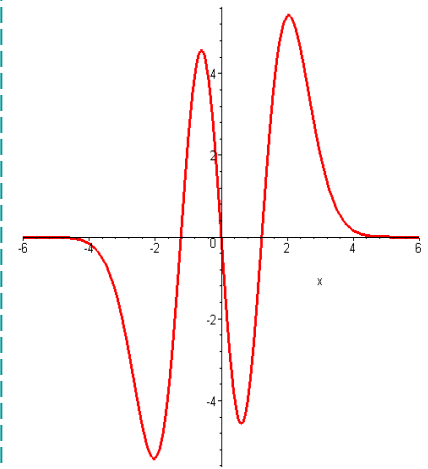
$$G_2(u) = (4u^2 - 2) \exp\left(\frac{-u^2}{2}\right)$$



$$l = 3$$

$$H_3(u) = 8u^3 - 12u$$

$$G_2(u) = (8u^3 - 12u) \exp\left(\frac{-u^2}{2}\right)$$

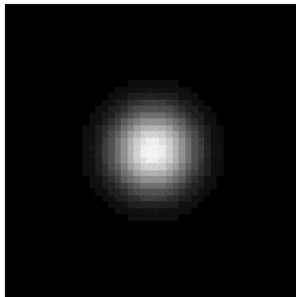


Pluoštų optika

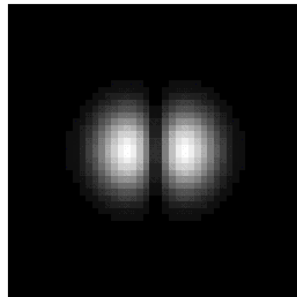
C. Ermito ir Gauso pluoštai

Ermito-Gauso pluošto intensyvumas:

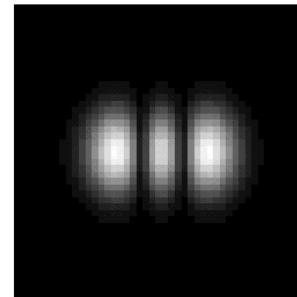
$$I_{l,m}(x, y, z) = |A_{l,m}|^2 \left[\frac{W_0}{W(z)} \right]^2 G_l^2 \left[\frac{\sqrt{2}x}{W(z)} \right] G_m^2 \left[\frac{\sqrt{2}y}{W(z)} \right]$$



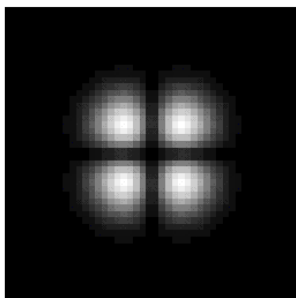
TEM 00



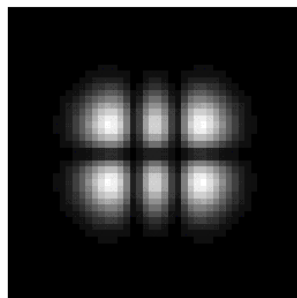
TEM 10



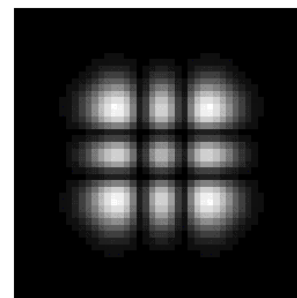
TEM 20



TEM 11



TEM 21



TEM 22

Pluoštų optika

C. Hermito ir Gauso pluoštai