Furje optika

Furje transformacijos optikoje

Plokščia banga aprašoma funkcija

$$U(x,y,z) = A\exp[-j(k_x x + k_y y + k_z z)]$$

Bet kuriam taške funkcija *U(x,y,z)* yra harmoninė erdvės funkcija. Plokštumoje z=0, funkcija *U(x,y,0)* yra funkcijos *f(x,y)* harmoninė funkcija

$$f(x,y) = A\exp[-j2\pi(\nu_x x + \nu_y y)] \quad \text{čia} \quad \nu_x = \frac{k_x}{2\pi} \quad \nu_y = \frac{k_y}{2\pi}$$

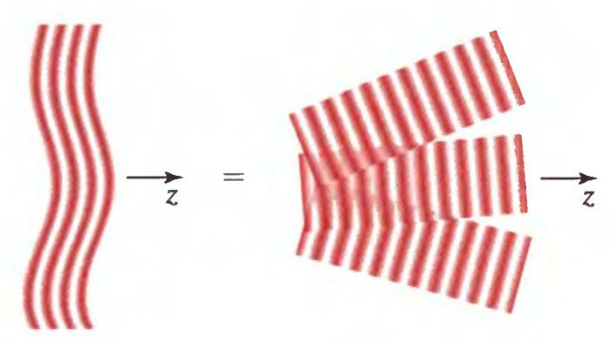
(tai yra erdviniai dažniai (ciklai/sek), ir k_x, k_y yra erdviniai kampiniai dažniai)

.

Furje optika

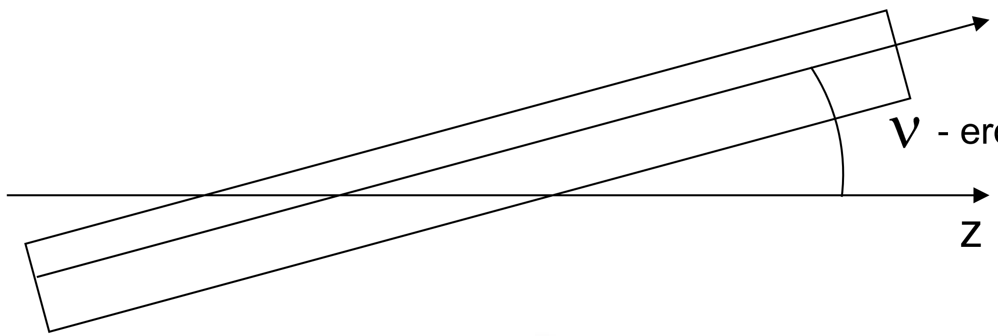
Furje transformacijos optikoje

Bet kokį šviesos darinį (pluoštą) galima aprašyti kaip monochromatinių bangų superpoziciją.



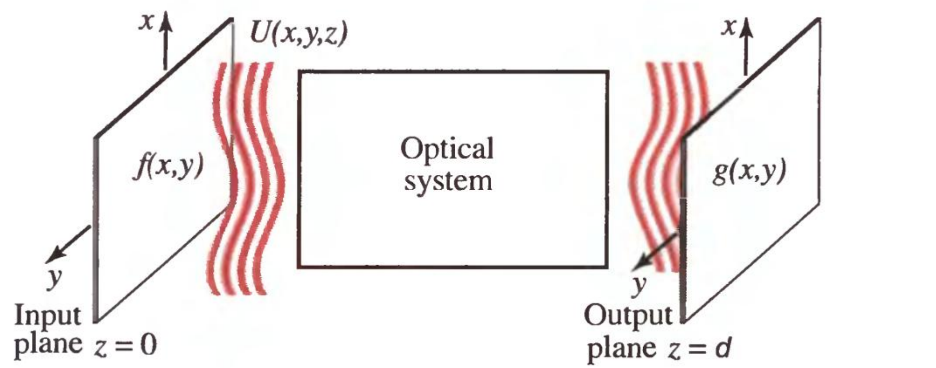
$$F(\nu_x,\nu_y)\exp[-j2\pi(\nu_x x+\nu_y y)]$$

$F(\nu_x,\nu_y)$ - kompleksinė amplitudė



ν - erdviniai dažniai (svyravimai ilgio vienetui)

.



$$f(x,y)=U(x,y,0) \qquad g(x,y)=U(x,y,z)$$

Furje optika

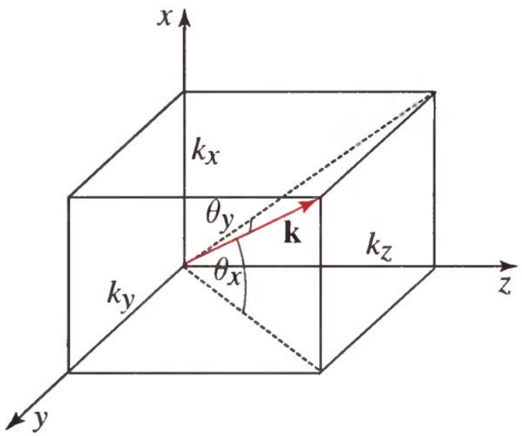
Furje transformacijos optikoje

$$U(x,y,z) = A\exp[-j(k_x x + k_y y + k_z z)]$$

$\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ - bangos vektorius

$k = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2} = 2\pi/\lambda$ - bangos skaičius

λ - bangos ilgis, A – kompleksinė amplitudė

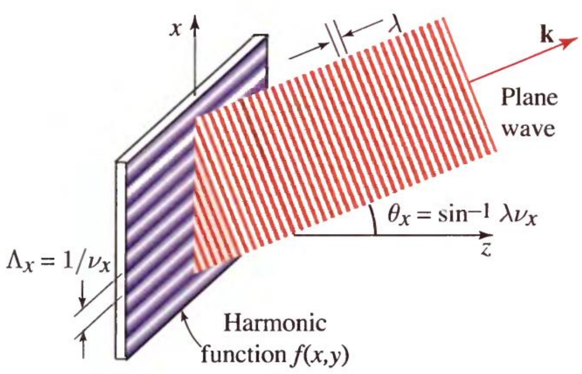


$$\theta_x = \arcsin(k_x/k) \qquad \theta_x = \arcsin(\lambda \nu_x)$$

$$\theta_y = \arcsin(k_y/k) \qquad \theta_y = \arcsin(\lambda \nu_y)$$

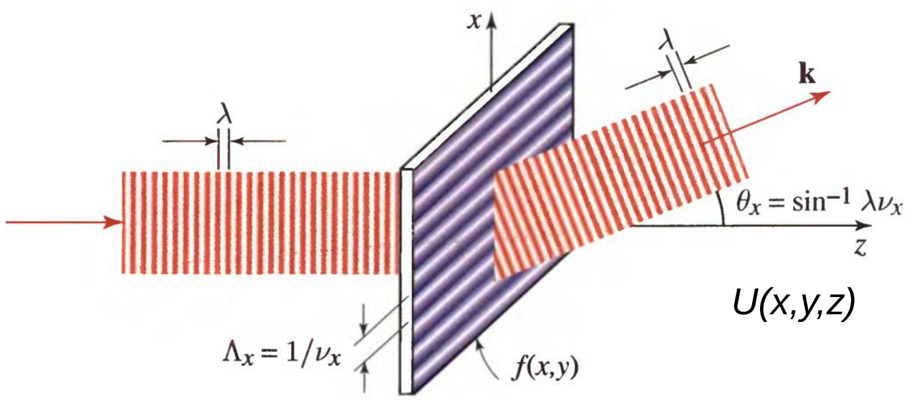
Paraksialiniam atvejui:

$$\theta_x \approx \lambda \nu_x \qquad \theta_y \approx \lambda \nu_y$$



Furje optika

Furje transformacijos optikoje. Erdvinė spektrinė analizė



U(x,y,z)

$$f(x,y) = \exp[-j2\pi(\nu_x x + \nu_y y)$$

$$U(x,y,0) = f(x,y)$$

Jeigu f(x,y) yra harmoninių funkcijų superpozicijos integralas

$$f(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int F(\nu_x,\nu_y)\exp[-j2\pi(\nu_x x + \nu_y y)d\nu_x d\nu_y$$

tai $U(x,y,z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int F(\nu_x,\nu_y)\exp[-j2\pi(\nu_x x + \nu_y y)]\exp(-jk_z z)\,d\nu_x d\nu_y$- plokščių bangų superpozicija, kur

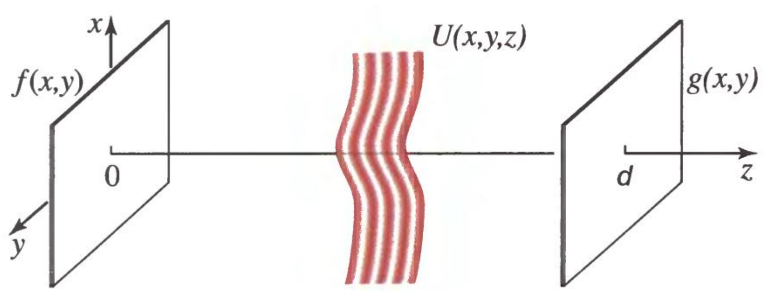
$$k_z = (k^2 - k_x^2 - k_y^2)^{1/2} = 2\pi(1/\lambda^2 - \nu_x^2 - \nu_y^2)^{1/2}$$

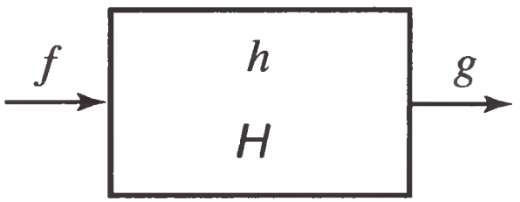
Furje optika

Furje transformacijos optikoje. Erdvinė spektrinė analizė

Furje optika

Furje transformacijos optikoje. Laisvos erdvės perdavimo funkcija

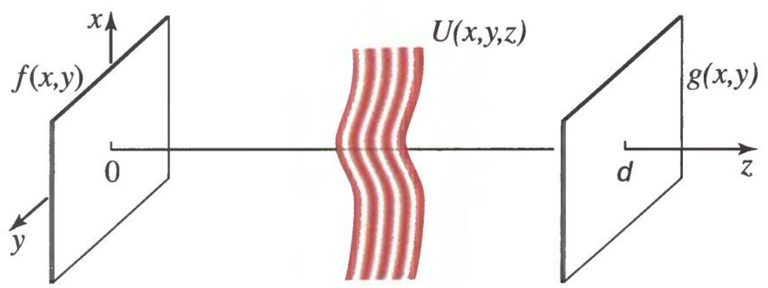


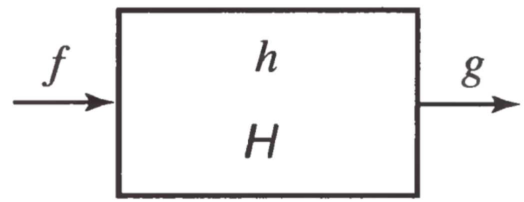


Monchromatinei šviesos bangai sklindant laisvoje erdvėje tarp plokštumų z=0 ir z=d, kompleksinė bangos gaubtinė įėjimo plokštumoje U(x,y,0)=f(x,y), tai išėjimo plokštumoje z=d kompleksinė gaubtinė bus g(x,y)=U(x,y,d).
Kai nagrinėjamas monchromatinės šviesos bangos sklidimas laisvoje erdvėje, t.y. tiesinėje sistemoje, banga tarp plokštumų z=0 ir z=d pakinta tiesiškai, šis kitimas nesunkiai gali būti susietas su koordinačių sistemos tiesine transformacija, t.y. koordinačių sistemos perkėlimu iš vieno erdvės taško į kitą. Šiuo atveju tiesinė sistema gali būti aprašyta impulsinio atsako funkcija *h(x,y)* (kai nagrinėjama funkcija priklauso nuo laiko) arba perdavimo funkcija $\Psi(x,y)$. Savo prasme, perdavimo funkcija $\Psi(x,y)$ yra daugiklis kuriuo įėjimo erdvinė harmoninė funkcija, kurios erdviniai dažniai yra v_x, v_y dauginama norint gauti išėjimo harmoninę funkciją. Įėjimo harmoninė funkcija yra $f(x,y)=A\exp(-j2\pi(vxx+vyy))$.
Tai atitinka plokščią bangą $U(x,y,z)= A\exp(-j2\pi(kxx+kyy+kzz))$.

Furje optika

Furje transformacijos optikoje. Laisvos erdvės perdavimo funkcija





$$\aleph(\nu_x,\nu_y) = \exp\left[-\,j2\pi\left(\frac{1}{\lambda^2}-\nu_x^2-\nu_y^2\right)^{1/2} d\right]$$

$$2\pi\left(\frac{1}{\lambda^2}-\nu_x^2-\nu_y^2\right)^{1/2} d = 2\pi\frac{d}{\lambda}(1-\theta^2)^{1/2} = 2\pi\frac{d}{\lambda}\left(1-\frac{\theta^2}{2}+\frac{\theta^4}{8}-\ldots\right)$$

$$\aleph(\nu_x,\nu_y) \approx \aleph_0 \exp\left[j2\pi d\left(\nu_x^2+\nu_y^2\right)^{1/2}\right]$$ - tai laisvos erdvės perdavimo funkcijos Frenelio aproksimacija

$$\aleph_0 = \exp(-jkd)$$

Furje optika

Furje transformacijos optikoje

Furje optika

$$\theta_x \approx \lambda \nu_x$$

$$\theta_y \approx \lambda \nu_y$$

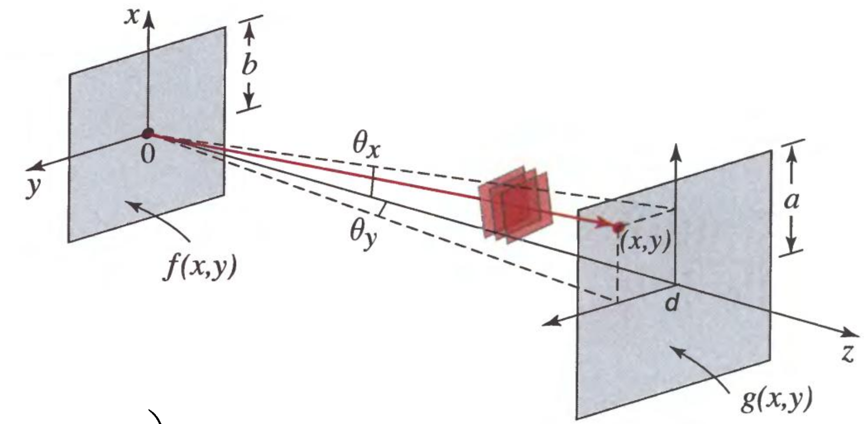
Tolimojo lauko Furje transformacija

$$k_x \approx (x/d)k$$

$$k_y \approx (y/d)k$$

$$\nu_y = y/\lambda d$$

$$\nu_x = x/\lambda d$$



$$g(x,y) \approx h_0 F\left(\frac{x}{\lambda d}, \frac{y}{\lambda d}\right)$$

$F(\nu_x, \nu_y)$ - Funkcijos f(x,y) Furje transformacija

$h_0 = (j/\lambda d)\exp(-jkd)$ - atsako funkcija

Ryšis tarp funkcijų f(x,y) ir g(x,y) duodama grįžte:

$$g(x,y) = h_0 \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x', y') \exp\left(-j\pi \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{\lambda d}\right) dx'\,dy'$$

Furje optika

$$\theta_x \approx \lambda \nu_x$$

$$\theta_y \approx \lambda \nu_y$$

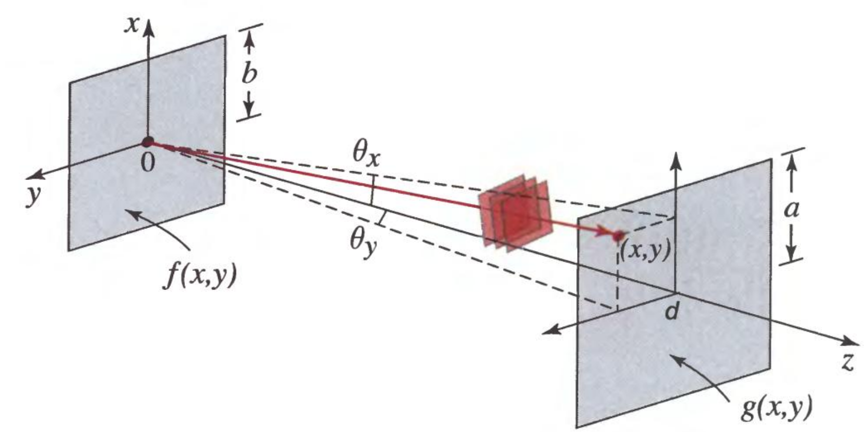
$$k_x \approx (x/d)k$$

$$k_y \approx (y/d)k$$

$$\nu_y = y/\lambda d$$

$$\nu_x = x/\lambda d$$

Tolimojo lauko Furje transformacija



Kai Frenelio skaičius labai mažas $N_F = a^2/\lambda d << 1$

$$g(x,y) = h_0 \exp\left(-j\pi \frac{x^2+y^2}{\lambda d}\right) \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int f(x',y') \exp\left(j2\pi \frac{xx'+yy'}{\lambda d}\right)$$

$$g(x,y) = h_0 \exp\left(-j\pi \frac{x^2+y^2}{\lambda d}\right) F\left(\frac{x}{\lambda d}, \frac{y}{\lambda d}\right)$$

$$g(x,y) = h_0 F\left(\frac{x}{\lambda d}, \frac{y}{\lambda d}\right)$$ $N_F << 1$

Furje optika

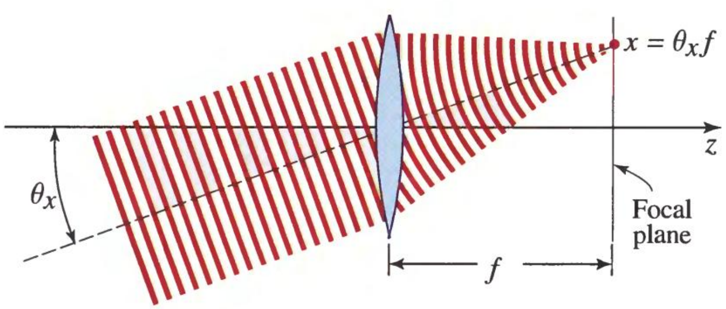
Furje transformacija naudojant lęšį

Kitas būdas atlikti optinę Furje transformaciją yra naudojant ploną sferinį lęšį. Plonas sferinis lęšis transformuoja plokščią bangą į paraboloidinę bangą, kuri lęšio židinio plokštumoje fokusuojama į tašką. Plonas lęšis kiekvieną plokščią bangą sklindančią kryptimi transformuoja į tašką židinio plokštumoje, t. y. atskiria lęšio židinio plokštumoje visas plokščias bangas.

Tegul *f(x,y)* yra bangos kompleksinė amplitudė įėjimo plokštumoje (z=0). Šviesa gali būti išskaidyta į plokščias bangas, kurios sklinda mažais kampais į optinę ašį ir jų kompleksinės amplitudės yra proporcingos Furje transformacijai $F(\nu_x,\nu_y)$.

$$\theta_x \approx \lambda \nu_x$$

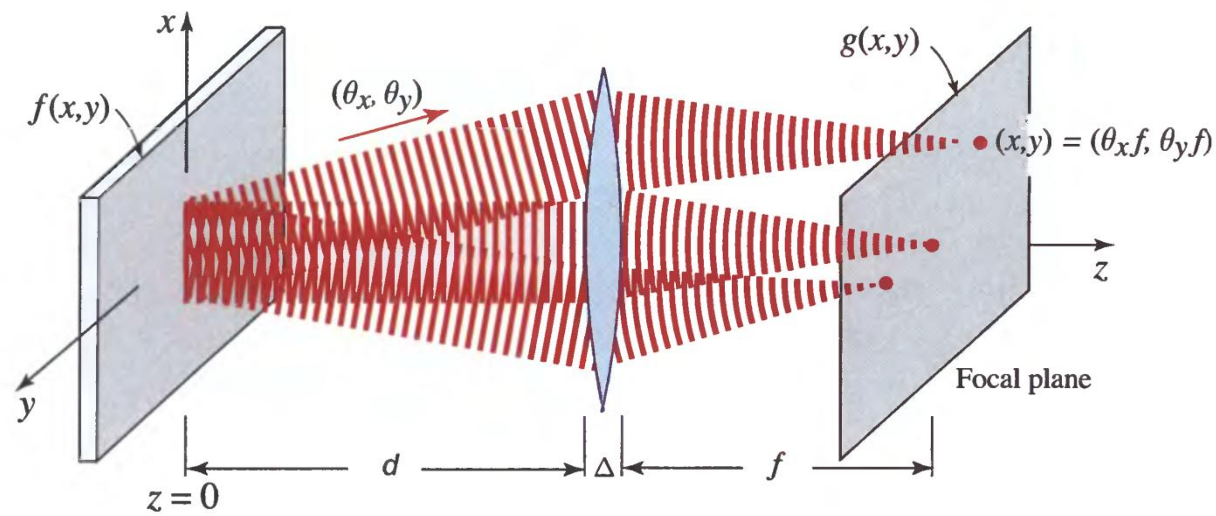
$$\theta_y \approx \lambda \nu_y$$



$$g(x,y) \propto F\left(\frac{x}{\lambda f},\frac{y}{\lambda f}\right)$$

Furje optika

Furje transformacija naudojant lęšį



$$U(x, y, 0) = F(\nu_x, \nu_y)\exp\left[-j2\pi(\nu_x x + \nu_y y)\right]$$ z=0

$$U(x, y, d) = \aleph(\nu_x, \nu_y)F(\nu_x, \nu_y)\exp\left[-j2\pi(\nu_x x + \nu_y y)\right]$$ z=d

$$\aleph(\nu_x, \nu_y) \approx \aleph_0 \exp\left[2\pi d\left(\nu_x^2 + \nu_y^2\right)\right]$$ - laisvos erdvės perdavimo funkcija

$$\aleph_0 = \exp(-jkd)$$

Furje optika

Furje transformacija naudojant lęšį

Praėjus lęšį kompleksinė amplitudė pasikeičia t. y. padauginama iš daugiklio

$$\exp\left[j\pi\left(x^2+y^2\right)/\lambda f\right]$$

$$U(x,y,d+\Delta)=\aleph_0\exp\left(j\pi\frac{x^2+y^2}{\lambda f}\right)\exp\left[j\pi\lambda d(\nu_x^2+\nu_y^2)\right]F(\nu_x,\nu_y)\exp\left[-j2\pi(\nu_x x+\nu_y y)\right]$$

arba

$$U(x,y,d+\Delta)=A(\nu_x,\nu_y)\exp\left[j\pi\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{\lambda f}\right]$$

$$g(x,y)=h_0\exp\left(j\pi\frac{\left(x^2+y^2\right)\left(d-f\right)}{\lambda f^2}\right)F\left(\frac{x}{\lambda f},\frac{y}{\lambda f}\right)$$

Kadangi $\left|h_l = 1/\lambda f\right|$ šviesos intensyvumas išėjimo plokštumoje yra

$$I(x,y)=\frac{1}{\left(\lambda f\right)^2}\left|F\left(\frac{x}{\lambda d},\frac{y}{\lambda d}\right)\right|^2$$

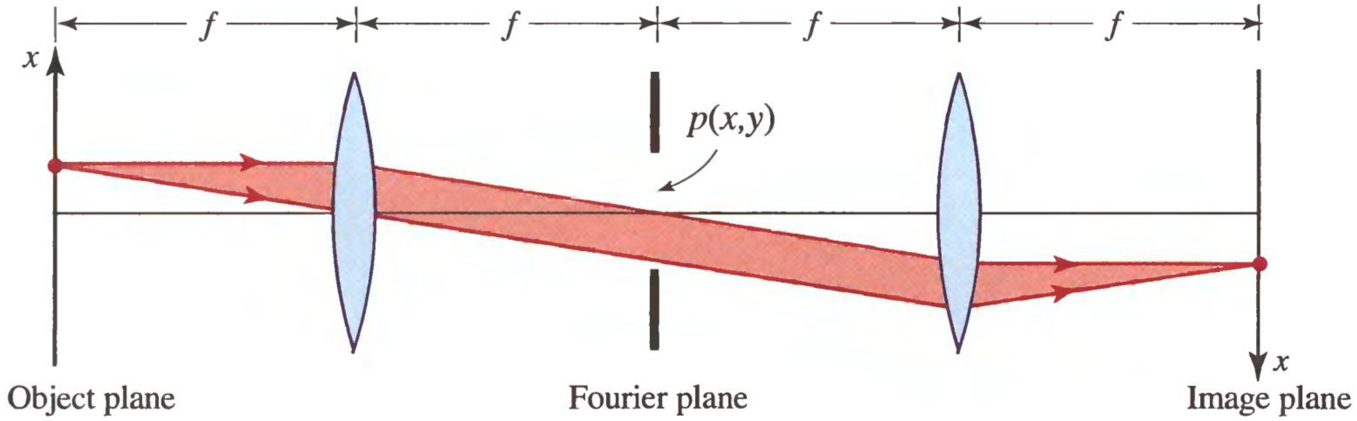
Šviesos intensyvumas išėjimo plokštumoje visada yra proporcingas bangos įėjimo plokštumoje kompleksinės amplitudės Furje transformacijos absoliučios vertės kvadratui, užlaikytam atstumu d. Fazinis daugiklis išraiškoje dingsta kai d=f ir galutinai gauname

$$g(x,y)=h_l F\left(\frac{x}{\lambda f},\frac{y}{\lambda f}\right)$$

$$h_l=\left(j/\lambda f\right)\exp(-jkf)$$

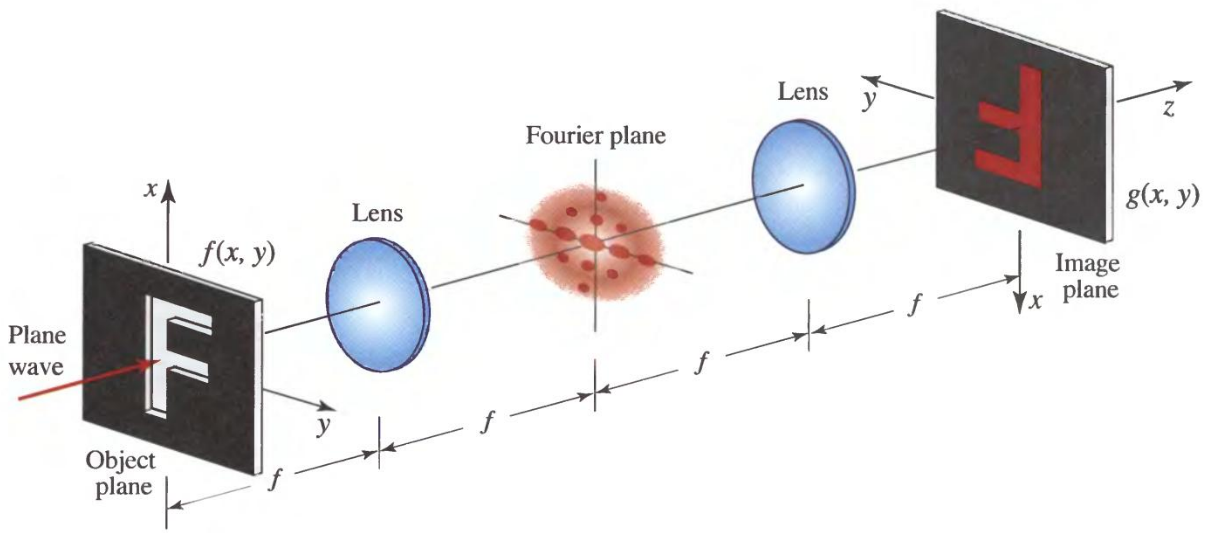
Furje optika

Furje transformacijos optikoje



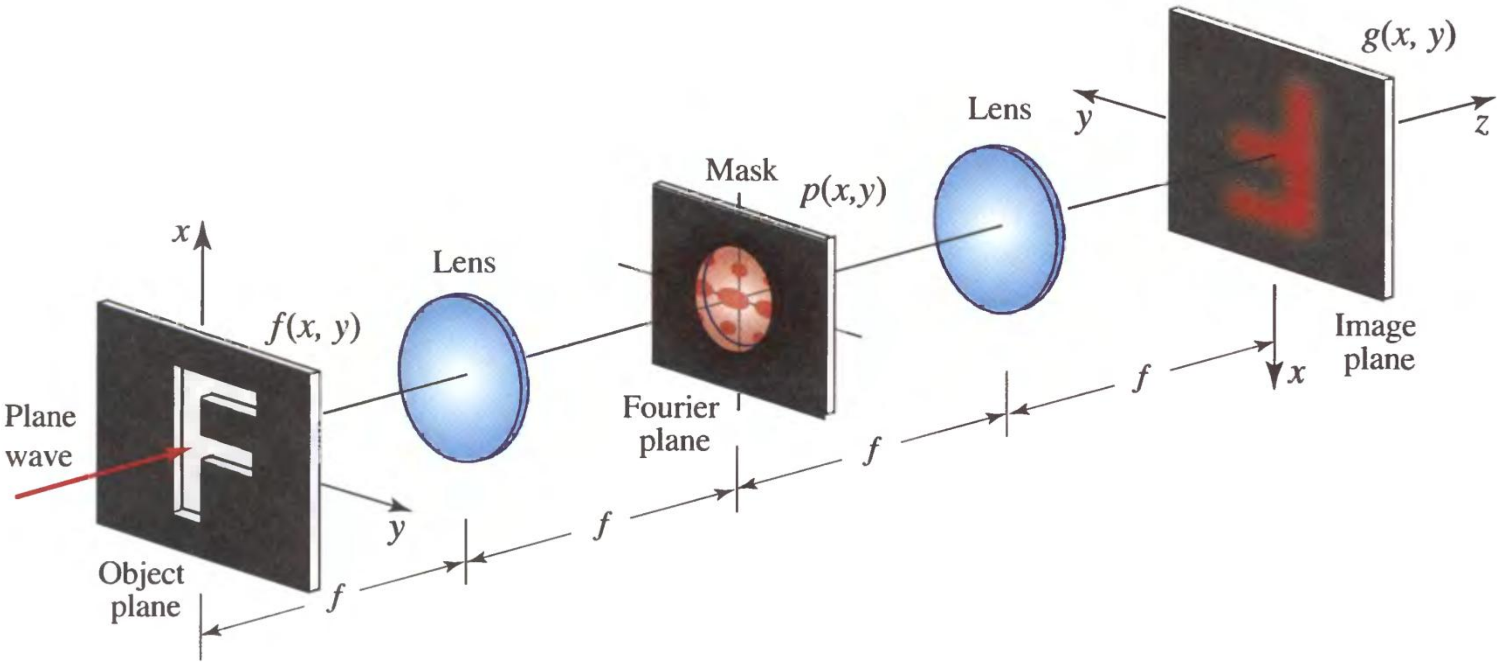
Furje optika

Furje transformacijos optikoje



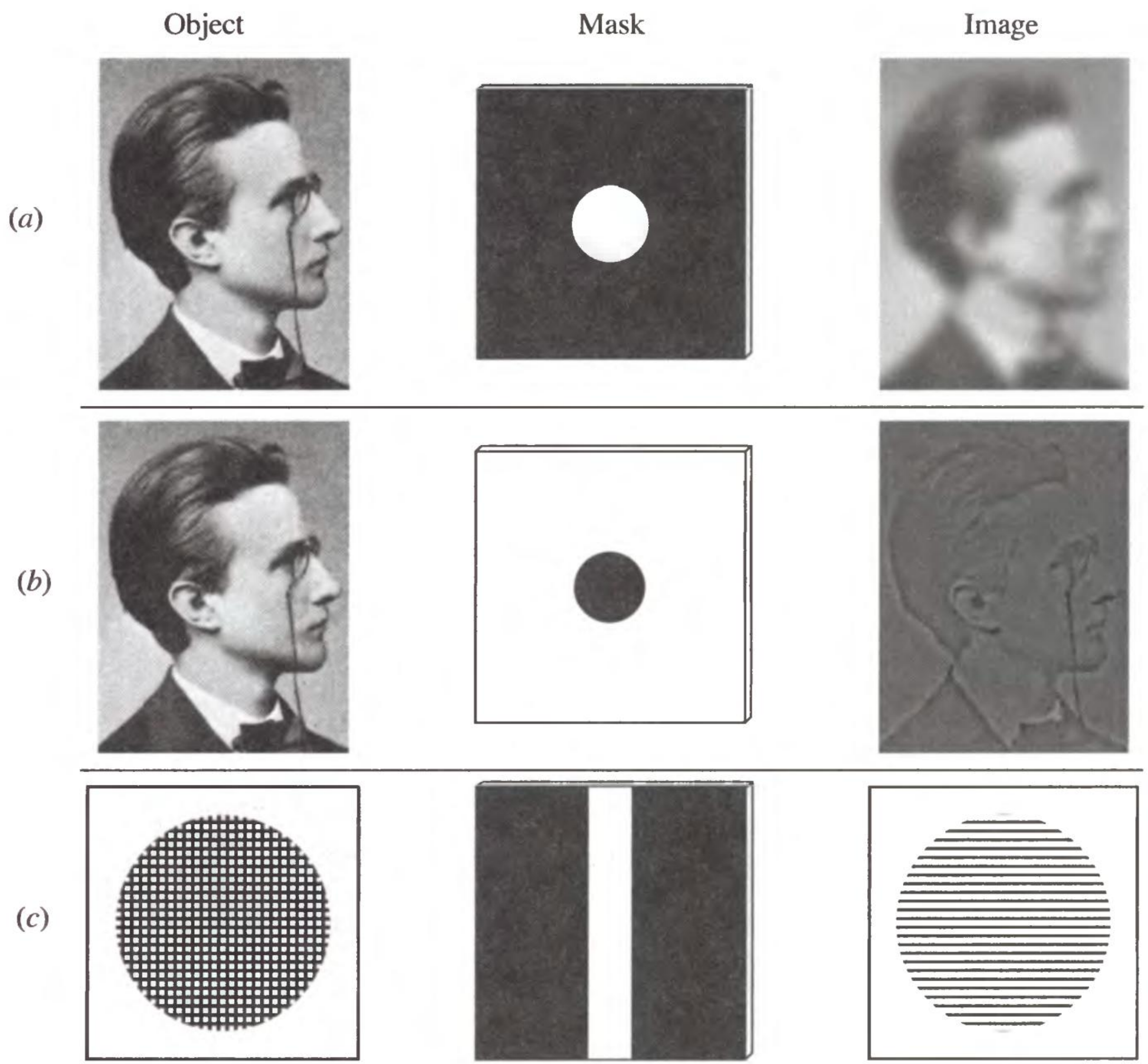
Furje optika

Furje transformacijos optikoje



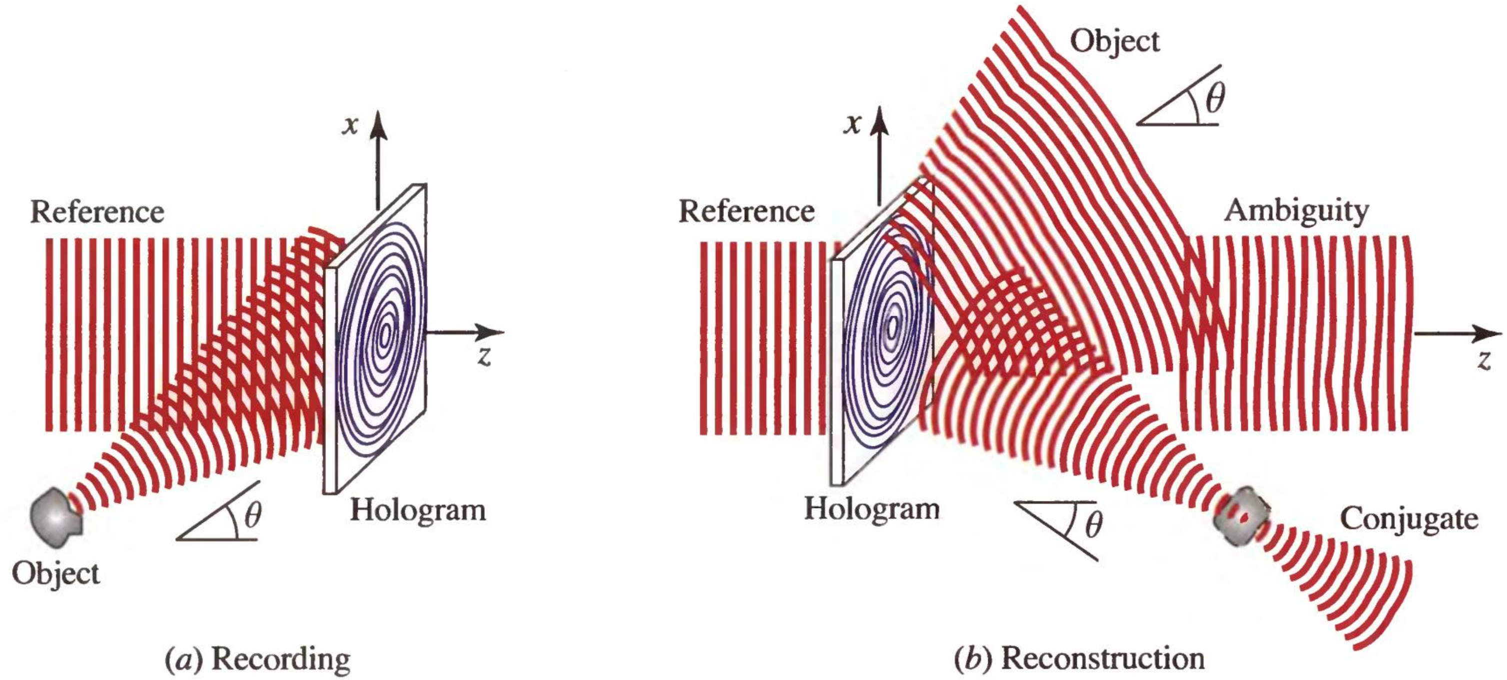
Furje optika

Furje transformacijos optikoje



Furje optika

Furje transformacijos optikoje. Holografija



Furje optika

Furje transformacijos optikoje. Holografija