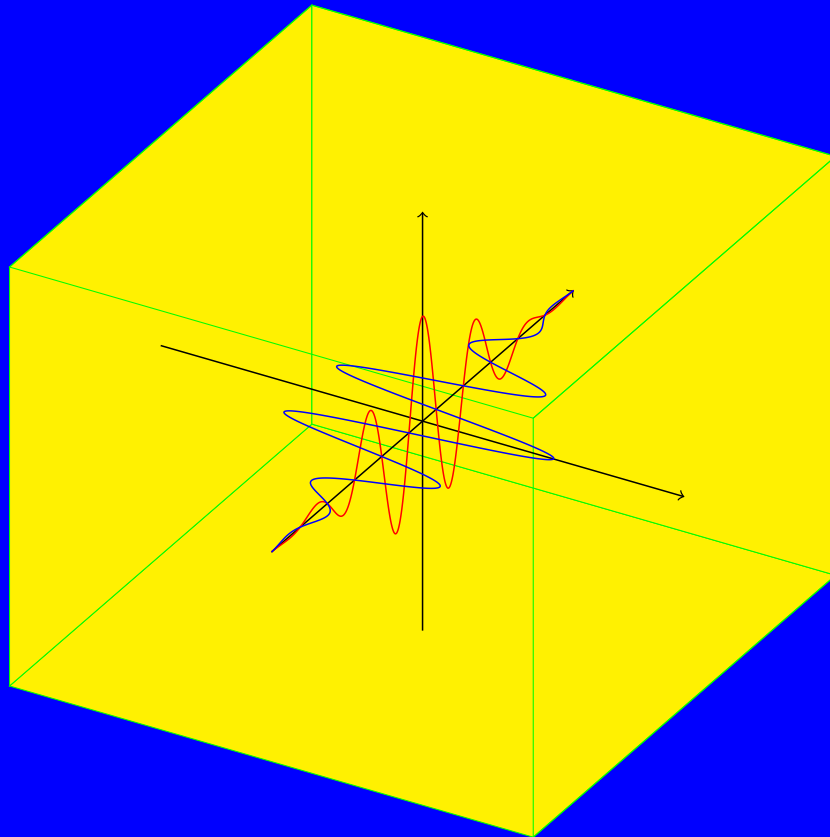


# Kompiuterinė lazerių fizika

*Viktorija Pyragaitė*



VILNIAUS UNIVERSITETAS  
FIZIKOS FAKULTETAS

Viktorija Pyragaitė

KOMPIUTERINĖ LAZERIŲ FIZIKA

Elektroninis leidinys

Mokomoji knyga

Vilnius 2013

Apsvarstė ir rekomendavo išleisti Vilniaus universiteto Fizikos fakulteto taryba  
(2013 m. sausio 23 d.; protokolas Nr. 1-13).

Recenzavo:

prof. habil. dr. Algirdas Stabinis (Vilniaus universitetas)

prof. habil. dr. Aleksandr Dementjev (Fizinių ir technologijos mokslų centras)

ISBN 978-609-459-212-6

© Viktorija Pyragaitė, 2013

Viktorija Pyragaitė

Kompiuterinė lazerių fizika: mokomoji knyga. – Vilnius: Vilniaus universitetas, 2013. - 300 p.

ISBN 978-609-459-212-6

Lazerių fizika nagrinėja ne tik procesus, vykstančius pačiame lazeryje, bet ir reiškinius, vykstančius sklindant lazerio spinduliuotei. Šioje knygoje nagrinėjami tiesinės ir netiesinės optikos klausimai, išdėstomi lazerio modeliai: balanso lygčių ir pusiau klasikinis. Pateikiami kompiuterinio modeliavimo būdai, reikalingi lazerių fizikos uždaviniams spręsti. Programos parašytos „Scilab“ kalba. Knyga skirta studentams, besidomintiems lazerių fizika ir jos uždavinių kompiuteriniu modeliavimu.

Viktorija Pyragaitė  
Kompiuterinė lazerių fizika  
Mokomoji knyga

Lietuvių kalbos redaktorė Gražina Indrišiūnienė  
Viršelį sukūrė ir maketavo Viktorija Pyragaitė

Tiražas 1 egz., 7,09 sp. l., 11,35 aut. l.

Išleido Vilniaus universitetas  
Universiteto g. 3, LT-01513 Vilnius

# Turiny

<b>Turiny</b>	<b>3</b>
<b>Pratarmė</b>	<b>11</b>
<b>I Įvadas</b>	<b>13</b>
<b>1 Apie lazerius trumpai</b>	<b>15</b>
1.1 Lazerio sandara ir veikimo principas . . . . .	15
1.2 Teoriniai lazerio modeliai . . . . .	18
<b>2 Balanso lygtys</b>	<b>21</b>
2.1 Balanso lygčių užrašymas . . . . .	21
2.2 Stacionarūs sprendiniai . . . . .	23
2.3 Fotonų skaičiaus lygtis . . . . .	24
2.4 Užduotis. Balanso lygties modeliavimas . . . . .	25
<b>II Matematiniai metodai</b>	<b>27</b>
<b>3 Rungės ir Kuto metodai</b>	<b>29</b>
3.1 Oilerio metodas . . . . .	29
3.2 Rungės ir Kuto antras metodas . . . . .	30
3.3 Rungės ir Kuto ketvirtas metodas . . . . .	31

<b>4</b>	<b>Banginės lygtys</b>	<b>33</b>
4.1	Bangų matematinis aprašymas . . . . .	33
4.2	Banginės lygtys . . . . .	35
4.3	Kompleksinis užrašymas . . . . .	37
4.4	Banginių lygčių modeliavimas. Užduotis . . . . .	37
4.5	Kranko ir Nikolsono metodas. Užduotis . . . . .	40
<b>5</b>	<b>Spartusis Furjė vaizdavimas</b>	<b>43</b>
5.1	Furjė vaizdavimas . . . . .	43
5.2	Diskrečioji ir sparčioji Furjė transformacijos . . . . .	44
5.3	Šviesos impulsų spektrai . . . . .	49
5.3.1	Gauso impulsas . . . . .	50
5.3.2	Stačiakampis impulsas . . . . .	51
5.3.3	Hiperbolinio sekanto impulsas . . . . .	52
5.3.4	Užduotis. Impulsų spektrų skaičiavimas . . . . .	53
5.4	Furjė eilutė . . . . .	53
5.4.1	Stačiakampė banga* . . . . .	53
5.4.2	Pjūklinė banga* . . . . .	54
5.4.3	Trikampė banga* . . . . .	55
5.5	Furjė eilutė ir Furjė integralas . . . . .	55
5.6	Naikvisto teorema . . . . .	57
<b>III</b>	<b>Banginės ir kvantinės šviesos savybės</b>	<b>59</b>
<b>6</b>	<b>Banginė šviesos prigimtis</b>	<b>63</b>
6.1	Banginės lygtys . . . . .	63
6.2	Elektromagnetinės bangos energija ir judesio kiekis . . . . .	66
6.3	Elektromagnetinių bangų superpozicija . . . . .	68
6.3.1	Mušimai . . . . .	68
6.3.2	Stovinčioji banga . . . . .	69

<i>TURINYS</i>	5
6.3.3 Elipsinė poliarizacija . . . . .	71
6.3.4 Užduotys. Elektromagnetinių bangų superpozicija . . . . .	71
<b>7 Kvantinė šviesos prigimtis</b>	<b>73</b>
7.1 Vektorinis ir skaliarinis potencialai* . . . . .	73
7.2 Elektromagnetinio lauko kvantavimas* . . . . .	76
7.2.1 Operatoriai $a, a^+, a+a$ . . . . .	80
7.3 Planko formulė . . . . .	81
7.4 Einšteino koeficientai ir Planko formulė . . . . .	83
<b>IV Lazerio rezonatorius</b>	<b>87</b>
<b>8 Geometrinė optika. ABCD matricos</b>	<b>89</b>
8.1 Eikonalo lygtis . . . . .	89
8.2 Ferma principas . . . . .	91
8.3 Snelijaus dėsnis . . . . .	91
8.4 ABCD matricos . . . . .	93
8.4.1 Laisvojo sklidimo matrica . . . . .	93
8.4.2 Spindulio lūžimo terpių sandūroje matrica . . . . .	94
8.4.3 Plonojo lęšio matrica . . . . .	94
8.4.4 Plonojo lęšio savybės . . . . .	96
8.4.5 Veidrodžio matrica . . . . .	98
8.4.6 Sklidimas per periodinę lęšių sistemą . . . . .	99
<b>9 Difrakcija Frenelio ir Fraunhoferio artiniuose</b>	<b>103</b>
9.1 Frenelio difrakcija . . . . .	103
9.2 Fraunhoferio difrakcija . . . . .	108
9.3 Užduotis. Fraunhoferio difrakcija už kvadratinės apertūros . . . . .	110
9.4 Užduotis. Frenelio difrakcija už kvadratinės apertūros . . . . .	111
9.5 Lęšis kaip Furjė prietaisas . . . . .	112

<b>10 Parabolinės difrakcijos lygties sprendimas</b>	<b>115</b>
10.1 Išvedimas iš Helmholco lygties . . . . .	115
10.2 Sprendimas naudojant Furjė transformaciją . . . . .	116
10.3 Gretaašis artinys . . . . .	118
10.4 Bangų paketas . . . . .	120
10.5 Parabolinės difrakcijos lygties modeliavimas . . . . .	121
10.6 Modeliavimas su „Scilab“. Užduotis . . . . .	122
<b>11 Gauso pluoštai</b>	<b>125</b>
11.1 Bendražidinio rezonatoriaus skersinės modos . . . . .	125
11.2 Ermito ir Gauso pluoštai . . . . .	126
11.3 Gauso pluoštas . . . . .	128
11.4 Lagero ir Gauso pluoštai . . . . .	130
11.5 Beselio bei Beselio ir Gauso pluoštai . . . . .	132
11.5.1 Nulinės eilės Beselio ir Gauso pluošto spektras . . . . .	133
11.6 Užduotis. Gauso pluoštų erdviniai spektrai . . . . .	135
11.7 Optiniai sūkuriai . . . . .	135
11.8 Ermito ir Gauso pluoštai. Išvedimas* . . . . .	136
11.9 Gauso pluošto sklidimo per kūginę prizmę modeliavimas . . . . .	139
<b>V Pusiau klasikinis lazerio modelis</b>	<b>145</b>
<b>12 Šviesos sąveika su dvių lygmenų atomu</b>	<b>147</b>
12.1 Šrėdingerio lygties sprendimas . . . . .	147
12.2 Einšteino koeficientai . . . . .	150
12.3 Lorencio sugerties juosta . . . . .	153
<b>13 Lazerio lygtys</b>	<b>157</b>
13.1 Lygtys mikroskopiniams dydžiams . . . . .	157
13.2 Lygtys makroskopiniams dydžiams. Bėgančiosios bangos . . . . .	160



13.3 Užduotis. Optinis sūkurys lazeryje . . . . .	162
13.4 Lygtys mikroskopiniams dydžiams. Stovinčiosios bangos . . . . .	166
13.5 Balanso lygčių išvedimas . . . . .	169
13.6 Įdubos apgražos tankio kontūre . . . . .	170
13.7 Lygtys makroskopiniams dydžiams. Stovinčiosios bangos . . . . .	172
13.7.1 Lygtys . . . . .	172
13.7.2 Normavimas . . . . .	175
13.7.3 Savaiminis triukšmas . . . . .	177

## **VI Triukšminė šviesa** **179**

### **14 Pagrindinės sąvokos** **181**

14.1 Koreliacinė funkcija . . . . .	181
14.2 Spektrinis tankis . . . . .	184
14.3 Vinerio ir Chinčino teorema . . . . .	185
14.4 Spektrų pavyzdžiai . . . . .	186
14.4.1 Baltasis triukšmas . . . . .	187
14.4.2 Lorenco formos spektras . . . . .	187
14.4.3 Gauso formos spektras . . . . .	187
14.5 Atsitiktinis procesas . . . . .	190
14.5.1 Tolydusis skirstinys . . . . .	190
14.5.2 Normalusis (Gauso) skirstinys . . . . .	191
14.6 Centrinė ribinė teorema . . . . .	191
14.7 Gauso–Gauso triukšminė šviesa. Užduotis . . . . .	193
14.8 Gauso ir Lorenco triukšminė šviesa . . . . .	196

### **15 Optinių bangų koherentiškumo tyrimas** **201**

15.1 Jungo eksperimentas . . . . .	201
15.2 Maikelsono interferometras . . . . .	204

<b>VII</b>	<b>Impulsinis lazeris</b>	<b>207</b>
<b>16</b>	<b>Kokybės moduliacija</b>	<b>209</b>
16.1	Kokybės moduliacijos pagrindimas . . . . .	209
16.2	Milžiniško impulso formavimasis. Užduotis . . . . .	211
<b>17</b>	<b>Modų sinchronizacija</b>	<b>215</b>
17.1	Modų sinchronizacijos pagrindimas . . . . .	215
17.2	Modų sinchronizacijos teorija . . . . .	217
17.3	Modų sinchronizacijos modeliavimas. Užduotis . . . . .	222
<b>VIII</b>	<b>Dispersijos teorija</b>	<b>225</b>
<b>18</b>	<b>Klasikinė dispersijos teorija</b>	<b>229</b>
18.1	Anharmoninio osciliatoriaus lygtis . . . . .	229
18.2	Tiesinė dispersijos teorija . . . . .	232
18.3	Netiesinė dispersijos teorija . . . . .	234
18.3.1	Kvadratinė terpė . . . . .	234
18.3.2	Kubinė terpė . . . . .	237
<b>19</b>	<b>Kvantinė dispersijos teorija*</b>	<b>239</b>
19.1	Tiesinė teorija . . . . .	239
<b>IX</b>	<b>Šviesos sklidimas tiesinėje ir netiesinėje terpėje</b>	<b>243</b>
<b>20</b>	<b>Tiesinės terpės</b>	<b>245</b>
20.1	Grupinis greitis . . . . .	245
20.2	Sklidimo tiesinėje dispersinėje terpėje lygtis . . . . .	246
20.3	Dispersijos teorijos artiniai . . . . .	250
20.3.1	Pirmasis artinys . . . . .	251
20.3.2	Antrasis artinys . . . . .	251

20.3.3 Trečiasis artinys . . . . .	252
20.4 Modeliavimas. Užduotis . . . . .	252
20.5 Faziškai moduluotų impulsų sklidimas . . . . .	255
<b>21 Anizotropinės terpės</b>	<b>259</b>
21.1 Dielektrinės skvarbos tenzorius . . . . .	259
21.2 Plokščiosios monochromatinės bangos anizotropinėje terpėje . . . . .	261
21.3 Frenelio lygtis faziniams greičiams . . . . .	263
21.4 Dvejopas lūžimas . . . . .	267
<b>22 Netiesinės terpės</b>	<b>271</b>
22.1 Kubinės terpės . . . . .	271
22.1.1 Netiesinis lūžio rodiklis . . . . .	271
22.1.2 Netiesinė Šrėdingerio lygtis . . . . .	274
22.1.3 Netiesinės Šrėdingerio lygties normavimas . . . . .	275
22.1.4 Savimoduliacijos modeliavimas. Užduotis . . . . .	275
22.1.5 Šrėdingerio lygtis esant normaliajai ir anomaliajai GGD . . . . .	277
22.1.6 <i>Split-step Fourier</i> metodas. Užduotis . . . . .	279
22.1.7 Smūginės bangos . . . . .	282
22.2 Kvadratinės terpės . . . . .	283
22.2.1 Tribangės sąveikos lygtys . . . . .	283
22.2.2 Fazinio sinchronizmo sąlyga . . . . .	285
22.2.3 Užduotis. Antrosios harmonikos generacija . . . . .	287
22.2.4 Kiti tribangės sąveikos atvejai . . . . .	288
22.2.5 Užduotis. Fazinio sinchronizmo kreivės . . . . .	289
22.3 Netiesinė šviesolaidžių optika* . . . . .	290
22.3.1 Netiesinė Šrėdingerio lygtis šviesolaidžiams . . . . .	291
22.3.2 Netiesiniai reiškiniai šviesolaidžiuose . . . . .	295
<b>Literatūra</b>	<b>297</b>

*TURINYS* 10

---

**Užsienietiškų pavardžių rodyklė** 300

# Pratarmė

Kompiuterinė lazerių fizika – tai kursas, aprėpiantis optiką, kvantinę fiziką ir kompiuterinį modeliavimą. Šioje knygoje dėstomas temas galima suskirstyti į tokias dalis: 1) optikos pagrindai; 2) pusiau klasikinis lazerio aprašymas (paprastai tariant, kas vyksta lazerio viduje); 3) lazerio spinduliuotės sklidimas ir sąveika medžiagoje (kas vyksta lazerio išorėje); 4) kompiuterinio modeliavimo metodai, taikomi sprendžiant įvairius lazerių fizikos uždavinius.

Elementarus lazerio veikimo paaiškinimas kyla iš fenomenologinės Einšteino koeficientų teorijos. Tačiau išsamiam paaiškinimui reikia pasitelkti kvantinės fizikos žinias. Šeštame praeito amžiaus dešimtmetyje buvo sukurta vadinamoji pusiau klasikinė lazerio teorija. Šioje knygoje aptariama tiek fenomenologinė balanso lygčių, tiek pusiau klasikinė teorijos ir jų sąsaja. Sudėtingesnė ir išsamesnė visiškai kvantinė teorija čia nenagrinėjama, tačiau yra analizuojami tokie kvantinės optikos klausimai kaip gimimo bei išnykimo operatoriai ir elektromagnetinio lauko kvantavimas. Būtent šis kvantavimas pagrindžia Planko juodojo kūno spinduliavimo formulę, kuri gali būti išvesta iš balanso lygčių modelio.

Atskiras dėmesys skiriamas lazerio rezonatoriui. Kad suprastume, kaip formuojasi Gauso pluoštas Fabri ir Pero rezonatoriuje, reikia išmanyti difrakcijos teoriją Fraunhoferio artinyje. Tam tikrais atvejais rezonatorius gali būti nagrinėjamas remiantis geometrine optika. Šioje knygoje kalbama tiek apie geometrinę optiką ir ABCD matricas, tiek apie difrakcijos teoriją Frenelio ir Fraunhoferio artiniuose. Šios teorijos gali būti susijusios, pavyzdžiui, ta pati stabilaus rezonatoriaus sąlyga gaunama vadovaujantis viena ir kita teorija. Parodoma, kad stabiliam rezonatoriuje formuojasi Gauso pluoštai. Jie aptariami atskirame skyriuje.

Kad suprastume, kuo lazeris „geresnis“ už paprastą šviesos šaltinį, reikia išmanyti šviesos koherentiškumo teoriją. Čia išdėstomi triukšminės šviesos teorijos pagrindai, supažindinama su tokiomis svarbiomis sąvokomis kaip koreliacinė funkcija ir savojo koherentiškumo funkcija, paaiškinama, kaip pastaroji gali būti nustatyta eksperimentu. Lazerio šviesa pasižymi dideliu koherentiškumu, tai yra dideliu koherentiškumo ilgiu. Tačiau pradinėje generacijos stadijoje šviesa yra nekoherentinė.

Čia supažindinama, kaip galima sumodeliuoti nekoherentinės šviesos laikinį profilį.

Šioje knygoje kalbama apie du būdus generuoti šviesos impulsus: kokybės moduliaciją ir modų sinchronizaciją. Pirmasis būdas aprašomas remiantis balanso lygčių teorija, o modų sinchronizacijai aprašyti reikia taikyti pusiau klasikinį modelį. Skyriuje apie modų sinchronizaciją pateikiamas uždavinys, rodantis, kaip iš triukšminės šviesos formuojasi reguliarius impulsas.

Du paskutiniai knygos skyriai skirti tiesiniam ir netiesiniam lazerinės šviesos sklidimui.

Knygos struktūra iš pirmo žvilgsnio gali atrodyti nenuosekli. Iš tikrųjų, pačioje pradžioje kalbama apie lazerio balanso lygčių modelį, paskui pereinama prie matematinių metodų, o lazerio modeliai atidedami iki VI dalies. Tačiau reikia prisiminti, kad tai yra kompiuterinė lazerių fizika, kurioje dėmesys skiriamas ir kompiuteriniam modeliavimui. Taigi, turinys suplanuotas taip, kad nuo paprastesnių modeliavimo metodų būtų pereinama prie sudėtingesnių. Balanso lygtys yra paprastos diferencialinės lygtys, modeliuojamos Rungės ir Kuto ketvirtu (RK4) metodu. O difrakcijos uždaviniuose susiduriama su paraboline difrakcijos lygtimi, kuri yra lygtis su dalinėmis išvestinėmis ir modeliuojama sudėtingesniais metodais. Prie lygčių su dalinėmis išvestinėmis priskiriamos banginės lygtys, kurios aptariamoms skyriuje apie matematinius metodus. Čia taip pat išdėstoma sparčiosios Furjė transformacijos teorija, kuri yra svarbi nagrinėjant pluoštų bei impulsų spektrus. Knygos „kulminacija“ – *Fourier split-step* metodo aprašymas. Šis metodas taikomas modeliuojant lygtis su dalinėmis išvestinėmis ir netiesiniais nariais. Tiesinei daliai skaičiuoti pasitelkiamas spartusis Furjė vaizdavimas, o netiesinei daliai apskaičiuoti – RK4.

Ši knyga parašyta skaitant to paties pavadinimo kursą Vilniaus universiteto Fizikos fakulteto bakalaurams. Autorė tikisi, kad knyga bus naudinga ir kitiems studentams bei specialistams, besidomintiems lazerių fizikos uždaviniais. Šioje knygoje pateikti uždaviniai sprendžiami per laboratorinius užsiėmimus. Pateikti programų ruošiniai parašyti „Scilab“ kalba. Programų paketas „Scilab“ yra nemokamas ir prieinamas interneto puslapyje <http://www.scilab.org/>. Šis paketas yra kito, mokamo paketo „Matlab“, analogas.

Papildomi skyriai šioje knygoje pažymėti žvaigždute (\*).

# I DALIS

## Įvadas





# 1 SKYRIUS

## Apie lazerius trumpai

### 1.1. Lazerio sandara ir veikimo principas

Lazerio pavadinimas yra kilęs iš angliško akronimo LASER (*light amplification by stimulated emission of radiation*). Pirmuose darbuose jis dar vadinamas optiniu mazeriu. Čia MASER yra angliškų žodžių *microwave amplification by stimulated emission of radiation* akronimas. Pirmąjį mazerį sukonstravo Basovas ir Prochorovas ir nepriklausomai Taunsas, o pirmąjį lazerį – Maimanas 1960 metais.

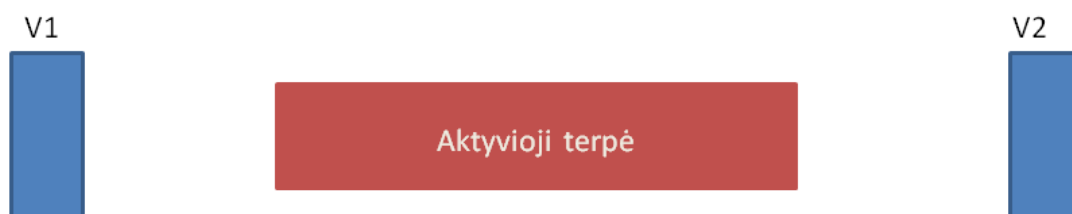
Skiriami trys lazerių elementai:

1. Optinis rezonatorius.
2. Aktyvioji terpė.
3. Kaupinimo šaltinis.

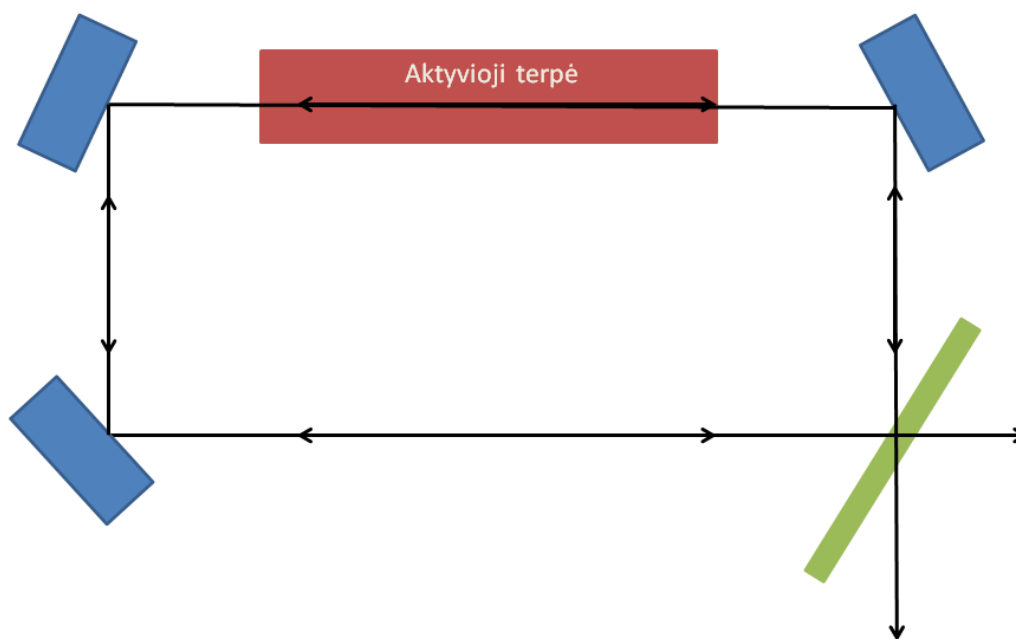
Optinis rezonatorius gali būti: 1) Fabri ir Pero (1.1 pav.), 2) žiedinis (1.2 pav.). Fabri ir Pero rezonatoriuje susidaro stovinčiosios bangos. Žiedinio rezonatoriaus modos yra bėgančiosios bangos. Viena banga sklinda pagal laikrodžio rodyklę, kita – prieš laikrodžio rodyklę. Lazeris su žiediniu rezonatoriumi aprašomas kiek paprastesnėmis lygtimis.

Aktyviosios lazerio terpės ir kaupinimo mechanizmai yra labai įvairūs. Lazeriai skirstomi į kietakūnius, dujinius, eksimerinius, cheminius, organinių dažų. Lazerio veikimas taip pat gali būti pagrįstas šuoliais tarp molekulių virpėjimo lygmenų (CO<sub>2</sub> lazeris skleidžia 10,6 μm spinduliuotę). Taip pat skiriami puslaidininkiniai lazeriai.

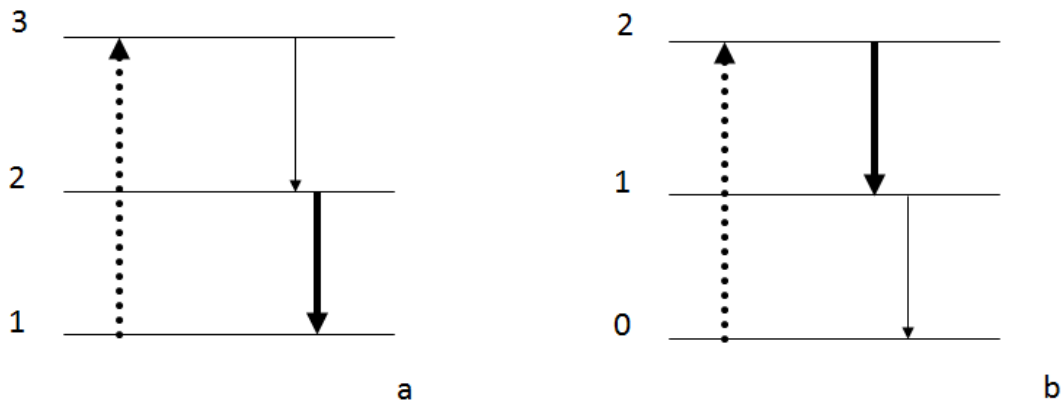
Kiekviename lazeryje yra nuostolių mechanizmų – išvadinis veidrodis ir kt.



1.1 pav. Fabri ir Pero rezonatoriaus lazeris. V1, V2 – rezonatoriaus veidrodžiai



1.2 pav. Žiedinio rezonatoriaus lazeris



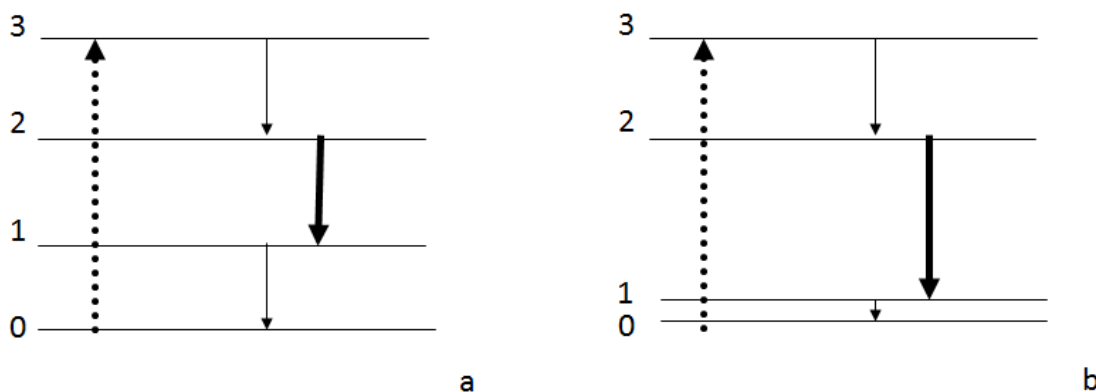
1.3 pav. Trijų lygmenų schemas. Taškinė linija – kaupinimas, plona ištisinė linija – greita spindulinė arba nespindulinė relaksacija. Stora linija – lazerinis šuolis

Pagal veikimo mechanizmą lazeriai skirstomi į: 1) trijų, 2) keturių ir 3) kvazitrijų lygmenų. Rubino lazeris, kuris buvo sukurtas pirmasis, yra trijų lygmenų. Tokio lazerio schema pavaizduota 1.3 pav., a. Kaupinimo šaltinis sužadina atomą iš pirmo lygmens į trečią lygmenį. Atomai greitai relaksuoja į antrą lygmenį. Relaksacija gali vykti tiek spinduliniu, tiek nespinduliniu būdu. Antras lygmuo yra susijęs leistinu šuoliu su pirmu lygmeniu, į kurį vyksta lazerinis šuolis. Būtina lazerio generacijos sąlyga yra pirmo ir antro lygmenų apgrąžos (inversijos) sukūrimas. Kadangi pirmas lygmuo šioje scheme yra žemiausias, tai apgrąžą joje yra sunkiau sukurti negu 1.3 pav., b pavaizduotoje scheme. Šioje scheme kaupinimo šuolis vyksta iš pagrindinio 0 iš karto į viršutinį lazerinio šuolio antrą lygmenį. Lazerinis šuolis vyksta iš antro į pirmą lygmenį, iš kurio relaksuoja į 0 lygmenį. Būtent dėl šios relaksacijos apgrąžą tarp pirmo ir antro lygmens sukurti lengviau. Abi aptartos schemas yra trijų lygmenų lazerio schemas [11].

Kita schema yra keturių lygmenų lazerio schema. Ji pavaizduota 1.4 pav., a. Kaupinimo šuolis vyksta iš 0 lygmens į trečią lygmenį, iš kurio greitai relaksuoja į antrą lygmenį. Šuolis  $2 \rightarrow 1$  atitinka lazerinį šuolį. Pirmas lygmuo greitai atlaisvinamas dėl relaksacijos į pagrindinį 0 lygmenį. Tokios schemas pavyzdys yra kietakūnis Nd:IAG lazeris. Jei pirmas lygmuo yra labai arti 0 lygmens, terminėje pusiausvyroje jo užpildą nėra nulinė. Tokia schema išskiriama į atskirą grupę – kvazitrijų lygmenų schemą (1.4 pav., b). Jos pavyzdys yra Yb:IAG.

Lazerio spinduliuotė yra išvedama iš lazerio rezonatoriaus, kuris yra vienas iš nuostolių mechanizmų. Kuo didesni būna nuostoliai, tuo didesnę apgrąžą reikia sukurti, kad vyktų generacija.

Pagrindinė savybė, skirianti lazerio spinduliuotę nuo paprasto šviesos šaltinio



1.4 pav. Keturių (a) ir kvazitrijų (b) lygmenų schemas. Taškinė linija – kaupinimas, plona ištisinė linija – greita spindulinė arba nespindulinė relaksacija. Stora linija – lazerinis šuolis

(pvz., lempos), yra didelis koherentiškumas. Stacionaraus proceso atveju koherentiškumas yra susijęs su monochromatiškumu. Koherentiškumo trukmė tuomet yra atvirkščiai proporcinga spektro pločiui. Monochromatiškumas reiškia, kad spektro plotis yra kur kas mažesnis už centrinį dažnį. Santykinis plotis gali siekti  $\delta\nu/\nu \sim 10^{-15}$ . Tai atitinka 300000 km koherentiškumo ilgį.

Kita lazerio spinduliuotės savybė yra kryptingumas (erdvinis koherentiškumas). Lazerio spinduliuotė difraguoja beveik taip pat kaip monochromatinė spinduliuotė, perėjusi per diafragmą.

Be nuolatinės veikos, lazeris gali veikti impulsiniu režimu. Impulsai pasižymi didelėmis galiomis, rekordiniai siekia petavatus ( $10^{15}$  W).

Dėl įvairių priežasčių lazerio lygmenys yra išplitę. Pavyzdžiui, su Doplerio efektu susijęs išplitimas yra Gauso formos. Šį išplitimą galima sumažinti atšaldžius atomus. Tačiau su savaiminiu spinduliavimu susijęs Lorencio formos išplitimas jokiais mechanizmais negali būti sumažintas, jis lemia ribą.

## 1.2. Teoriniai lazerio modeliai

Pats paprasčiausias būdas aprašyti lazerio veikimą yra užrašyti balanso lygtis. Tai yra susijusios paprastosios diferencialinės fotonų skaičiaus ir apgrąžos lygtys. Šis modelis netinka norint aprašyti daugiamodį režimą esant faziniams sąryšiams tarp skirtingų modų. Toks režimas yra svarbus aprašant modų sinchronizaciją. Tačiau balanso lygtys leidžia aprašyti kai kuriuos procesus, pavyzdžiui, lazerio generacijos

slenkstį ir moduluotos kokybės lazerio impulso evoliuciją. Iš balanso lygčių galima gauti Planko formulę juodojo kūno spinduliavimui.

Svarbų vaidmenį lazerių teorijoje vaidina pusiau klasikinis modelis. Šiame modelyje šviesa yra aprašoma kaip klasikinė banga, o atomas, su kuriuo sąveikauja šviesa, yra kvantmechaninis objektas. Iš klasikinių Maksvelo lygčių gaunama elektrinio lauko stiprio amplitudės lygtis. Iš Šrėdingerio lygties išvedamos atomų poliarizavimo bei apgražos lygtys. Dėl sąveikos šios trys lygtys yra susijusios. Toks modelis leidžia aprašyti impulsų susidarymą fazių sinchronizuotame lazeryje. Reikia pažymėti, kad iš pusiau klasikinių lygčių galima gauti balanso lygtis, tarus, kad fazių sąryšiai yra nereikšmingi ir kad apgraža bei lauko amplitudė kinta lėtai, palyginti su greitomis modų osciliacijomis. Tačiau pusiau klasikinė teorija turi rimtą trukumą – ji neaprašo savaiminio spinduliavimo. Anot šios teorijos, šviesos sužadintas atomas be galo ilgai išliktų sužadinto lygmens net išjungus elektrinį lauką. Tai prieštarauja eksperimentui, iš kurio žinome, kad atomai relaksuoja į pagrindinį lygmenį. Pusiau klasikinė teorija taip pat nepajėgi aprašyti šaltinio spinduliavimą, kai nėra lazerio generacijos. O tokį spinduliavimą gali skleisti paprasti nelazeriniai šaltiniai.

Savaiminį spinduliavimą teisingai aprašo visiškai kvantinė teorija. Pasak jos, tiek atomas, tiek šviesa yra kvantuojami. Vartojama šviesos kvanto, fotono, sąvoka. Nagrinėjant kvantiniu požiūriu išvedama Fokerio ir Planko lygtis Glauberio ir Sudaršano funkcijai. Pastaroji turi panašią prasmę kaip tikimybės pasiskirstymo funkcija, nes ją pasitelkus skaičiuojami kvantmechaniniai vidurkiai. Gauta Fokerio ir Planko lygtis yra susijusi su Lanževano lygtimis. Yra parodoma, kad šios lygtys sutampa su lazerio pusiau klasikinėmis lygtimis, pastarosiose įskaitant Lanževano triukšminius narius. Šis rezultatas atspindi sąsają su klasikiniu aprašymu. Teliaka išspręsti Fokerio ir Planko lygtį ir rasti nagrinėjamų dydžių vidurkius. Nustatoma, kad lazerio spinduliuotė žemiau generacijos slenksčio yra tokios pat statistikos (Gauso) kaip ir šiluminė. O aukščiau generacijos slenksčio, didėjant intensyvumo vidurkiui, santykinė intensyvumo dispersija mažėja.



## 2 SKYRIUS

### Balanso lygtys

#### 2.1. Balanso lygčių užrašymas

Pradėsime nuo paprasčiausio lazerio modelio – balanso lygčių (angl. *rate equations*). Nagrinėsime du atomo lygmenis – viršutinį (2) ir apatinį (1) lazerinius lygmenis (dviejų lygmenų schema). Balanso lygtis fotonų skaičiui  $n$  atrodo taip:

$$(2.1) \quad \frac{dn}{dt} = (N_2 - N_1)Wn - 2\kappa n.$$

Čia  $dn/dt$  yra fotonų skaičiaus kitimo sparta,  $N_1$  ir  $N_2$  – atitinkamai apatinio ir viršutinio lygmenų užpildos.  $W$  rodo spartą, kuria atomas išspinduliuoja arba sugeria fotoną.  $\kappa$  yra nuostolių rezonatoriuje sparta. Reikia pažymėti, kad  $n$  – tai fotonų skaičius esant lazerio generacijai. Žemiau generacijos slenksčio gausime  $n = 0$ . Dėl spontaninio spinduliavimo fotonų skaičius nelygus nuliui ir žemiau generacijos slenksčio, tačiau šiame modelyje spontaninio spinduliavimo neįskaitome. Kitos dvi balanso lygtys užrašomos užpildoms  $N_1$  ir  $N_2$ :

$$(2.2) \quad \frac{dN_2}{dt} = w_{21}N_1 - w_{12}N_2 - (N_2 - N_1)Wn,$$

$$(2.3) \quad \frac{dN_1}{dt} = w_{12}N_2 - w_{21}N_1 + (N_2 - N_1)Wn.$$

$w_{21}$  yra šuolio iš pirmo lygmens į antrąjį dėl kaupinimo sparta,  $w_{12}$  – šuolio iš antro lygmens į pirmąjį sparta. Paskutiniai šių lygčių nariai atitinka priverstinį spinduliavimą ( $N_2Wn$ ) ir priverstinę sugertį ( $N_1Wn$ ).  $w_{12}$  gali aprašyti sužadinto lygmens užpildos mažėjimą, pavyzdžiui, dėl dujų atomų susidūrimų. Sudėję (2.2) ir (2.3)

gauname

$$(2.4) \quad \frac{d(N_1 + N_2)}{dt} = 0.$$

Suintegravę gauname

$$(2.5) \quad N_1 + N_2 = N,$$

čia  $N$  yra konstanta, o (2.5) lygybė – tvermės dėsnis, reiškiantis, kad suminis atomų skaičius  $N$  yra pastovus dydis. (2.2) ir (2.3) lygtys figūruoja skirtumas  $N_2 - N_1$ , kuris yra užpildos apgraža ir bus žymimas  $D$ :

$$(2.6) \quad N_2 - N_1 = D.$$

Užpildas  $N_1$  ir  $N_2$  galime išreikšti kitais dviem dydžiais  $N$  ir  $D$ :

$$(2.7) \quad N_2 = \frac{1}{2}(N + D), \quad N_1 = \frac{1}{2}(N - D).$$

Tuomet atėmę (2.3) iš (2.2) ir pasinaudoję (2.7) gauname:

$$(2.8) \quad \frac{dD}{dt} = N(w_{21} - w_{12}) - D(w_{21} + w_{12}) - 2WDn.$$

Pažymėję

$$(2.9) \quad 1/T = w_{21} + w_{12},$$

$$(2.10) \quad D_0 = N \frac{w_{21} - w_{12}}{w_{21} + w_{12}},$$

pagaliau gauname

$$(2.11) \quad \frac{dD}{dt} = \frac{1}{T}(D_0 - D) - 2WDn.$$

Dydį  $D_0$  vadinsime neįsotinta apgraža, vėliau bus aišku kodėl. Iš (2.1) gauname:

$$(2.12) \quad \frac{dn}{dt} = DWn - 2\kappa n.$$

(2.12) ir (2.11) lygtys sudaro uždarą lygčių sistemą dydžiams  $n$  ir  $D$  – fotonų skaičiui ir apgragai. Bendru atveju šios lygtys analiziškai nesprenžiamos. Tačiau jų sprendinius galima gauti stacionariu atveju.



## 2.2. Stacionarūs sprendiniai

Stacionarūs sprendiniai gaunami iš sąlygų

$$(2.13) \quad \frac{dn}{dt} = 0, \quad \frac{dD}{dt} = 0.$$

Arba, prilyginę dešiniąsias (2.11) ir (2.12) puses nuliui, turėsime dvi lygtis:

$$(2.14) \quad \frac{1}{T}(D_0 - D) - 2WDn = 0,$$

$$(2.15) \quad DWn - 2\kappa n = 0.$$

Iš (2.14) iš karto gauname

$$(2.16) \quad D = \frac{D_0}{1 + 2TWn}.$$

Dabar aišku, kodėl  $D_0$  buvo pavadinta neįsotinta apgraža. Kai fotonų skaičius  $n$  mažas,  $D$  apytiksliai lygus  $D_0$ .

Galimi du lygties (2.15) sprendiniai:

$$(2.17) \quad n = 0$$

ir

$$(2.18) \quad n = (WD_0 - 2\kappa)/(4\kappa TW).$$

Pasinaudojome (2.16). Kurį sprendinį pasirinkti, priklauso nuo neįsotintos apgražos  $D_0$ . Kai

$$(2.19) \quad D_0 < \frac{2\kappa}{W},$$

antrojo sprendinio (2.18) vertė yra neigiama. Tai reiškia, kad įmanomas tik nulinis sprendinys (2.17). O, jei

$$(2.20) \quad D_0 > \frac{2\kappa}{W},$$

nulinis sprendinys tampa nestabilus, ir prasideda lazerio generacija, kurioje  $n > 0$ . Prisiminę (2.10), matome, kad neįsotinta apgraža priklauso nuo kaupinimo. Kaupinimo greičiui  $w_{21}$  didėjant,  $D_0$  taip pat didėja. Taigi, iš paprasto balanso lygčių modelio gavome lazerio generacijos sąlygą (2.20): kaupinimas turi būti pakankamai didelis, tuo didesnis, kuo didesni nuostoliai rezonatoriuje  $\kappa$ .

## 2.3. Fotonų skaičiaus lygtis

Tarsime, kad per laiką  $T$  apgraža  $D$  pakinta nedaug,

$$(2.21) \quad \frac{d(D - D_0)}{dt} \ll \frac{1}{T}(D_0 - D).$$

Tai reiškia, kad  $D$  spėja sekti  $n$  pokyčius, ir galime pasinaudoti stacionariuoju sprendiniu (2.16). Kai fotonų skaičius  $n$  nedidelis, (2.16) galima apytiksliai užrašyti

$$(2.22) \quad D \approx D_0 - 2D_0TWn.$$

Įrašę tai į (2.12), gauname

$$(2.23) \quad \frac{dn}{dt} = (D_0W - 2\kappa)n - 2D_0TW^2n^2.$$

Taigi, gavome vieną lygtį tik  $n$  atžvilgiu. Sakoma, kad  $D$  buvo adiabatiškai eliminuotas. Užrašykime ją paprastesniais žymėjimais

$$(2.24) \quad \frac{dn}{dt} = an - bn^2,$$

čia  $a = D_0W - 2\kappa$ ,  $b = 2D_0TW^2$ . Du stacionarieji sprendiniai yra  $n = 0$  ir  $n = a/b$ . Kai  $a > 0$ , sprendinys  $n = 0$  tampa nestabilus. Tačiau esant tokiai sąlygai, stabilus tampa antrasis sprendinys  $n = a/b$ .  $a > 0$  šiuo atveju yra generacijos sąlyga ir ji sutampa su (2.20).

Pora žodžių apie tai, kaip atliekama stabilumo analizė. Panagrinėkime sprendinį  $n = 0$ . Pažymime  $n = 0 + \delta n$ ; čia  $\delta n$  – nedidelis nuokrypis. Tuomet (2.24) atrodo taip:

$$(2.25) \quad \frac{d\delta n}{dt} = a\delta n.$$

Šios lygties sprendinys artėja prie 0, kai  $a < 0$ .

Nagrindėdami kitą stacionarųjį sprendinį  $n = a/b$ , pažymime  $n = \frac{a}{b} + \delta n$ . Tuomet iš (2.24) gauname

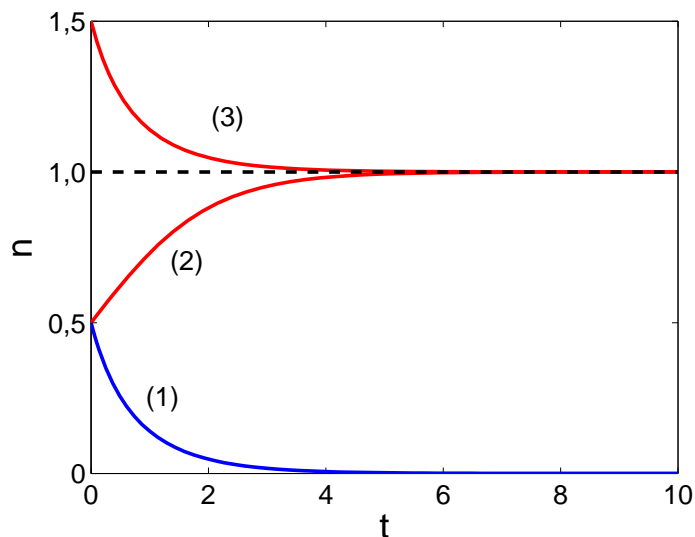
$$(2.26) \quad \frac{d\delta n}{dt} = -a\delta n.$$

Nuokrypis  $\delta n$  nyksta, kai  $a > 0$ .

(2.24) lygtis turi analizinį sprendinį:

$$(2.27) \quad n = \frac{e^{a(t-t_0)}}{\left(\frac{1}{n_0} - \frac{b}{a}\right) + \frac{b}{a}e^{a(t-t_0)}},$$

čia  $t_0$  – pradinis laiko momentas,  $n_0 = n(t_0)$ .



2.1 pav.  $n(t)$  priklausomybės grafikas. (2.24) lygties sprendiniai, kai (1)  $a = -1$ ,  $n(t = 0) = 0,5$ ; (2)  $a = 1$ ,  $n(t = 0) = 0,5$ ; (3)  $a = 1$ ,  $n(t = 0) = 1,5$ . Visais atvejais  $b = 1$

## 2.4. Užduotis. Balanso lygties modeliavimas

**Užduotis.** Sumodeliuoti (2.24) lygtį Rungės ir Kuto ketvirtu (RK4) metodu. Nusi-brėžti tris kreives, kai

1.  $a = -1$ ,  $b = 1$ ,  $n(t = 0) = 0,5$ .
2.  $a = 1$ ,  $b = 1$ ,  $n(t = 0) = 0,5$ .
3.  $a = 1$ ,  $b = 1$ ,  $n(t = 0) = 1,5$ .

Palyginti gautas kreives su analiziniu sprendiniu (2.27). Kreivės pavaizduotos 2.1 pav.

Apie Rungės ir Kuto metodus bus kalbama toliau. Tačiau jau galime taikyti RK4 metodą naudodami „Scilab“ paketą. Tereikia į programos kodą įrašyti keletą eilučių:

```
n0=0.5;
t0=0;
t=0:0.1:10;
n=ode('rk',n0,t0,t,f);
plot(t,n)
```

$t$  yra laiko vektorius, kurį atitiks sprendinys  $n$ . ode argumentas rk nurodo, kad sprendžiama RK4 metodu. plot nupiešia sprendinį. Telieta užduoti funkciją  $f$ , kuri yra dešinioji diferencialinės lygties pusė. Ši funkcija užduodama programos pradžioje, parašant kodą

```
function nn=f(t, n)
    nn = ...;
endfunction
```

Čia vietoj daugtaškio (...) reikia parašyti lygties dešiniąją pusę.

## II DALIS

### **Matematiniai metodai**



## 3 SKYRIUS

# Rungės ir Kuto metodai

Rungės ir Kuto (RK) metodais sprendžiamos paprastosios diferencialinės tokio pavaldalo lygtys:

$$(3.1) \quad \frac{dx}{dt} = f(x, t).$$

Nagrinsime vieną lygtį, tačiau reikia pasakyti, kad bendru atveju  $x$  ir  $f$  gali būti vektoriai. Pradėkime nuo paprasčiausio lygties sprendimo būdo – Oilerio metodo.

### 3.1. Oilerio metodas

Pasinaudokime skleidimu Teiloro eilute ir užrašykime  $x$  laiko momentu  $t + \Delta t$

$$(3.2) \quad x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t \frac{\partial x}{\partial t} + O((\Delta t)^2).$$

Čia  $\Delta t$  yra mažas laiko žingsnis, o į  $O((\Delta t)^2)$  įeina visi kiti skleidimo nariai. Taikant Oilerio metodą šie maži nariai atmetami. Atsižvelgiant į (3.1) galima vietoje  $\Delta t \frac{\partial x}{\partial t}$  parašyti  $\Delta t f(x, t)$ , ir tuomet diskretizavimo schema atrodo taip:

$$(3.3) \quad x_{n+1} = x_n + f(x_n, t_n) \Delta t.$$

Čia  $x_n$  yra  $x$  reikšmė laiko momentu  $t$ , o  $x_{n+1}$  – laiko momentu  $t + \Delta t$ . Vadinasi, iteruojant galima rasti  $x_1, x_2, x_3$  ir t. t. vertes. Šio metodo trūkumas yra tas, kad reikia parinkti mažą  $\Delta t$  reikšmę, taigi skaičiavimai gali būti lėti. Norint pagreitinti skaičiavimus, taikomi aukštesnės eilės RK metodai.

## 3.2. Rungės ir Kuto antras metodas

Čia aprašysime vadinamąjį modifikuotą Oilerio metodą, kuris yra antros eilės Rungės ir Kuto metodo atskiras atvejis. Užrašykime skleidimą Teiloro eilute iki trečios eilės išvestinės:

$$(3.4) \quad x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t x'(t) + \frac{\Delta t^2}{2} x''(t).$$

Čia  $x'(t)$  žymi išvestinę pagal laiką momentu  $t$ . Dabar užrašykime  $x'(t + \Delta t)$ , vėlgi pasinaudoję Teiloro eilute:

$$(3.5) \quad x'(t + \Delta t) = x'(t) + \Delta t x''(t).$$

Galime įsitikinti, kad

$$(3.6) \quad \frac{x'(t) + x'(t + \Delta t)}{2} = x'(t) + \frac{\Delta t}{2} x''(t).$$

Taigi, tuo artutiniumu

$$(3.7) \quad \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{x'(t) + x'(t + \Delta t)}{2}.$$

Akivaizdu, kad  $x'(t)$  galime pakeisti į  $f(x, t)$ , o  $x'(t + \Delta t)$  į  $f(x + \Delta x, t + \Delta t)$ . Kyla klausimas, kaip rasti  $x + \Delta x$ . Jis skaičiuojamas remiantis paprastu Oilerio metodu, kurį jau nagrinėjome:

$$(3.8) \quad x + \Delta x = \tilde{x} = x(t) + \Delta t f(x, t).$$

Galutinis rezultatas atrodo taip

$$(3.9) \quad \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{f(x, t) + f(\tilde{x}, t + \Delta t)}{2}$$

arba

$$(3.10) \quad x(t + \Delta t) = x(t) + \frac{\Delta t}{2} (f(x, t) + f(\tilde{x}, t + \Delta t)).$$

Galime parašyti diskretizavimo schemą:

$$(3.11) \quad \begin{aligned} k_1 &= f(x_n, t), \\ k_2 &= f(x + k_1 \Delta t, t + \Delta t), \\ x_{n+1} &= x_n + \frac{\Delta t}{2} (k_1 + k_2). \end{aligned}$$



### 3.3. Rungės ir Kuto ketvirtas metodas

Taikant vis aukštesnės eilės RK metodą, laimima tikslumo. Tačiau diskretizavimo schema darosi sudėtingesnė, o tai pailgina skaičiavimo trukmę. Tinkamiausias metodas yra ketvirtos eilės Rungės ir Kuto metodas RK4. Mes jį jau taikėme balanso lygčiai modeliuoti. Čia užrašysime jo diskretizavimo schemą:

$$\begin{aligned}k_1 &= f(x_n, t), \\k_2 &= f\left(x_n + k_1 \frac{\Delta t}{2}, t + \frac{\Delta t}{2}\right), \\(3.12) \quad k_3 &= f\left(x_n + k_2 \frac{\Delta t}{2}, t + \frac{\Delta t}{2}\right), \\k_4 &= f(x_n + k_3 \Delta t, t + \Delta t), \\x_{n+1} &= x_n + \frac{\Delta t}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).\end{aligned}$$



## 4 SKYRIUS

# Banginės lygtys

Aprašydami šviesą kaip elektromagnetinę bangą susidursime su terminais bangos ilgis, dažnis ir kt. Bus operuojama vadinamosiomis banginėmis lygtimis. Taigi, šiame skyriuje aptarsime, kaip bangos aprašomos matematiškai ir kaip galima modeliuoti bangines lygtis.

### 4.1. Bangų matematinis aprašymas

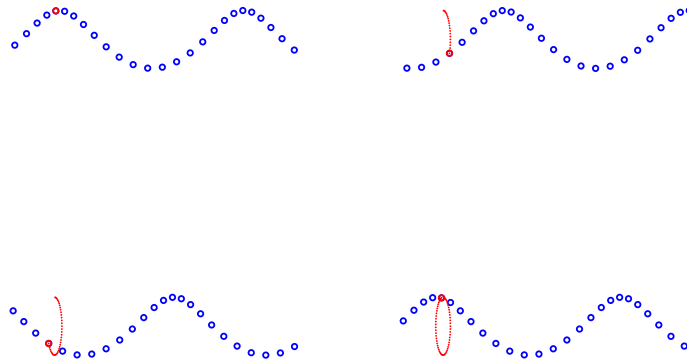
Paklausti, kas yra banga, turbūt pirmiausia įsivaizduojame paviršinę vandens bangą. Tačiau net šis pavyzdys nėra toks paprastas, nes ši banga yra dviejų tipų bangų – išilginės ir skersinės – superpozicija. Atskira vandens paviršiaus dalelė juda elipse, kaip pavaizduota 4.1 pav.

Skersinės bangos atveju vandens dalelės juda kryptimi, statmena bangos sklidimo kryptčiai. Išilginės bangos atveju susidaro praretėjimai ir sutankėjimai išilgai bangos sklidimo kryptties. Abu šie bangų tipai pailustruoti 4.2 pav.

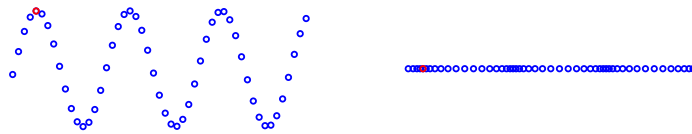
Taigi, matematiškai bangą galime apibrėžti šitaip. Pažymėkime nuokrypį nuo pusiausvyros padėties raide  $\xi$ . Tuomet bet kokia funkcija  $\xi(x, t) = f(t - x/v)$  arba  $\xi(x, t) = f(t + x/v)$  aprašys bangos sklidimą išilgai  $X$  ašies atitinkamai teigiama arba neigiama kryptimi.  $t$  yra laikas,  $v$  nusako sklidimo greitį, tai nėra iš karto akivaizdu, bet galima parodyti šitaip. Išdiferencijuokime lygtį

$$(4.1) \quad t - x/v = \text{const}$$

pagal laiką  $t$ . Gausime  $dx/dt = v$ . Išdiferencijuojant funkcijos  $f(t + x/v)$  argumentą gautume sąryšį  $dx/dt = -v$ . Paprasčiausias bangos pavyzdys yra harmoninės bangos, kurios aprašomos sinuso arba kosinuso funkcijomis. Harmoninėms bangoms



4.1 pav. Paviršinė vandens banga



4.2 pav. Skersinė (kairėje) ir išilginė (dešinėje) bangos

galime užrašyti:

$$(4.2) \quad \xi(x, t) = a \cos(\omega[t - x/v]).$$

Čia  $\omega = 2\pi\nu$  yra kampinis dažnis,  $\nu$  – virpesių dažnis,  $a$  – amplitudė. Iš periodiškumo sąlygų  $\omega T = 2\pi$  ir  $\omega\lambda/v = 2\pi$  galime surasti bangos periodą  $T$  ir bangos ilgį  $\lambda$ :

$$(4.3) \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu},$$

$$\lambda = \frac{2\pi v}{\omega} = vT.$$

Kosinuso argumentą galime perrašyti simetrine forma. Vietoje  $\omega t - \omega x/v$  parašysime  $\omega t - kx$ , čia  $k = \omega/v = 2\pi/\lambda$  yra bangos skaičius. Taigi, harmoninė banga gali būti užrašyta taip:

$$(4.4) \quad \xi(x, t) = a \cos(\omega t - kx).$$

Čia buvo nagrinėjamas vienmatis atvejis, kai nuokrypis  $\xi$  priklauso tik nuo vienos erdvinės koordinatės  $x$ . Trimatėje erdvėje funkcija  $f(t - x/v)$  aprašo plokščią bangą. Tai yra banga, kurios vienodos fazės paviršius – bangos frontas – yra plokštuma, šiuo atveju statmena  $X$  ašiai. Bangos faze vadinamas funkcijos  $f$  argumentas. Plokščią bangą, sklindančią vienetinio vektoriaus  $\mathbf{n}$  kryptimi, aprašo funkcija  $\xi(\mathbf{r}, t) = f(t - \mathbf{rn}/v)$ , o harmoninės plokščios bangos atveju

$$(4.5) \quad \xi(\mathbf{r}, t) = a \cos(\omega t - \mathbf{kr}).$$

Čia  $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$  yra banginis vektorius.

## 4.2. Banginės lygtys

Dabar išvesime diferencialines lygtis, kurios aprašo bangos sklidimą vienmačiu atveju. Suskaičiuokime funkcijos  $\xi(x, t) = f(t - x/v)$  išvestines pagal laiką  $t$  ir koordinatę  $x$ . Pažymėję argumentą  $\varphi = t - x/v$ , galime užrašyti

$$(4.6) \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \cdot 1,$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \cdot \left(-\frac{1}{v}\right).$$

Iš šios lygčių sistemos matyti, kad

$$(4.7) \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = -v \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

Tai yra paprasčiausia banginė lygtis. Ji aprašo bangos sklidimą teigiama  $X$  ašies kryptimi. Pakeitę (4.7) lygtyje greičio  $v$  ženklą, gausime lygtį

$$(4.8) \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = v \frac{\partial \xi}{\partial x},$$

kuri aprašo bangos sklidimą neigiama  $X$  ašies kryptimi. Dabar išvesime lygtį, kurios sprendiniai yra abiem kryptimis sklindančių bangų superpozicija. Tam rasime funkcijos  $\xi(x, t) = f(t \pm x/v)$  antrąsias išvestines pagal  $t$  ir  $x$ :

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \right) = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \right) = \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2}, \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} &= \mp \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \right) = \mp \frac{1}{v} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2}. \end{aligned}$$

Iš čia

$$(4.10) \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

Tai – banginė lygtis, kurios bendrasis sprendinys yra:

$$(4.11) \quad \xi(x, t) = f_1(t - x/v) + f_2(t + x/v).$$

Čia  $f_1$  bei  $f_2$  yra bet kokios funkcijos.

Apibendrinant banginę lygtį (4.10) trimačiu atveju, ji užrašoma taip:

$$(4.12) \quad \Delta \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

Čia  $\Delta$  yra Laplaso operatorius (laplasianas). Užrašę laplasianą sferinėje koordinatų sistemoje ir laikydami, kad funkcija  $\xi$  nepriklauso nuo erdvinių kampų, gauname lygtį

$$(4.13) \quad \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\xi) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\xi).$$

Šios lygties sprendinys yra

$$(4.14) \quad \xi = [f_1(t - r/v) + f_2(t + r/v)]/r,$$

kitaip tariant, išeinančios ir sueinančios sferinių bangų superpozicija.

### 4.3. Kompleksinis užrašymas

Kaip minėta, harmoninė banga yra aprašoma sinuso arba kosinuso funkcija. Dažnai vietoj šių funkcijų patogiau rašyti eksponentę su menamu rodikliu, nes pagal Oilerio formulę

$$(4.15) \quad \exp(i\varphi) = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi).$$

Tuomet

$$(4.16) \quad \cos(\varphi) = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) = \frac{1}{2}e^{i\varphi} + k. j.,$$

$$(4.17) \quad \sin(\varphi) = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) = \frac{1}{2}e^{i\varphi} - k. j.$$

Čia  $k. j.$  žymi kompleksiskai jungtinį dydį.

### 4.4. Banginių lygčių modeliavimas. Užduotis

Šiame skyrelyje aptarsime, kaip modeliuoti bangines lygtis (4.7) ir (4.10). Pradžioje panagrinėsime (4.7) lygtį. Visų pirma reikia nuo tolydžiųjų kintamųjų pereiti prie diskrečiųjų. Tai reiškia, kad vietoje tolydžiųjų kintamųjų  $x, t$  naudosime diskrečiuosius  $x_i, t_j$ , čia  $i = 1, 2, \dots, i_{\max}$ ,  $j = 1, 2, \dots, j_{\max}$  žymi numerį kintamųjų sekoje, o  $i_{\max}, j_{\max}$  yra diskrečių sekų ilgiai. Iš pirmo žvilgsnio atrodo, kad turėtume aprašyti dvimatę matricą  $\xi_{i,j} = \xi(x_i, t_j)$ , tačiau praktiškai patogiau palikti priklausomybę nuo  $x$  ir fiksuoti šią priklausomybę laiko momentais  $t_j$  ir  $t_{j+1}$ . Pagal pirmąjį Oilerio metodą,  $\xi(x_i, t_{j+1})$ , žinant  $\xi(x_i, t_j)$ , užrašomas taip:

$$(4.18) \quad \xi(x_i, t_{j+1}) = \xi(x_i, t_j) + \Delta t \frac{\partial \xi}{\partial t} \Big|_{i,j}.$$

Čia  $\Delta t$  yra laiko žingsnis. Iš (4.7) paaiškėja, kad išvestinė  $\partial \xi / \partial t$  taške  $x_i, t_j$  yra lygi išvestinei  $-v \partial \xi / \partial x$  tame taške. Taigi, rasime išvestinę  $\partial \xi / \partial x \Big|_{i,j}$ . Tam, naudodamiesi skleidiniu Teiloro eilute, užrašysime  $\xi(x_i + \Delta x, t_j)$  ir  $\xi(x_i - \Delta x, t_j)$ :

$$(4.19) \quad \xi(x_i + \Delta x, t_j) = \xi(x_i, t_j) + \Delta x \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{i,j} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \Big|_{i,j},$$

$$\xi(x_i - \Delta x, t_j) = \xi(x_i, t_j) - \Delta x \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{i,j} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \Big|_{i,j}.$$

Čia  $\Delta x$  yra erdvinis žingsnis. Iš pirmos lygties atėmę antrąją gausime

$$(4.20) \quad \frac{\partial \xi}{\partial x}|_{i,j} = [\xi(x_i + \Delta x, t_j) - \xi(x_i - \Delta x, t_j)] / (2\Delta x).$$

Taigi, vietoje (4.18) lygybės gauname

$$(4.21) \quad \xi(x_i, t_{j+1}) = \xi(x_i, t_j) - v \frac{\Delta t}{2\Delta x} [\xi(x_i + \Delta x, t_j) - \xi(x_i - \Delta x, t_j)].$$

Šitaip, žinodami funkcijos  $\xi$  priklausomybę nuo  $x$  laiko momentu  $t_j$ , galime apskaičiuoti priklausomybę nuo  $x$  kitu laiko momentu. Tačiau ši schema nėra stabili. Banginė lygtis modeliuojama pagal tokią schemą:

$$(4.22) \quad \frac{\xi(x_i, t_{j+1}) - \xi(x_i, t_{j-1})}{2\Delta t} = -v \frac{1}{2\Delta x} [\xi(x_i + \Delta x, t_j) - \xi(x_i - \Delta x, t_j)].$$

Čia, norint rasti  $\xi$  laiko momentu  $t_{j+1}$ , reikia žinoti jo vertes dviem laiko momentais:  $t_{j-1}$  ir  $t_j$ . Pirmame žingsnyje taikoma (4.21) schema.

Iš (4.22) lygties matome, kad skaičiavimo tikslumas priklauso nuo daugiklio  $v \frac{\Delta t}{2\Delta x}$ , todėl, mažinant erdvinį žingsnį  $\Delta x$ , reikia mažinti ir laikinį žingsnį  $\Delta t$ .

(4.7) lygtyje yra pirmosios eilės dalinės išvestinės. (4.10) banginė lygtis sudėtingesnė, nes joje yra antrosios eilės dalinių išvestinių. Tačiau ją galime supaprastinti, perrašę šitaip:

$$(4.23) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} &= u, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Tai yra dviejų diferencialinių lygčių sistema, kurioje paliko pirmosios eilės išvestinės pagal laiką  $t$ . Diskretizuojant šias lygtis galima vėlgi spręsti pirmuoju Oilerio metodu. Tik dabar vietoje pirmosios eilės išvestinės pagal koordinatę  $x$  turime antrosios eilės išvestinę. Ją rasime, sudėję pirmąją ir antrąją (4.19) lygtis:

$$(4.24) \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}|_{i,j} = [\xi(x_i + \Delta x, t_j) + \xi(x_i - \Delta x, t_j) - 2\xi(x_i, t_j)] / (\Delta x)^2.$$

Tuomet diskretizavimo schema bus tokia:

$$(4.25) \quad \begin{aligned} \xi(x_i, t_{j+1}) &= \xi(x_i, t_j) + \Delta t u, \\ u(x_i, t_{j+1}) &= u(x_i, t_j) + \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} [\xi(x_i + \Delta x, t_j) + \xi(x_i - \Delta x, t_j) - 2\xi(x_i, t_j)]. \end{aligned}$$



Šiuo atveju skaičiavimo tikslumas priklausys nuo daugiklio  $\Delta t/(\Delta x)^2$ , todėl mažinant erdvinį žingsnį  $\Delta x$   $n$  kartų, laikinį žingsnį reikia mažinti  $n^2$  kartų.

**Užduotis.** Sumodeliuoti (4.7) lygtį, kai pradinė sąlyga: 1) Gauso funkcija, 2) sinuso funkcija.

Čia pateiksime programos „Scilab“ ruošinį:

```

clear ; clc ; close ;

ax=10;
dx=0.05;
x=-ax:dx:ax;
nt=100;
dt=0.005;
xi0=exp(-x^2); // pradine bangos forma
xi=0*xi0;
xi1=0*xi0;

for ix=2:length(x)-1
    xi1(ix)=...;
end

for it=1:nt

    t=it*dt;
    for ix=2:length(x)-1
        xi(ix)=...;
    end
    xi0=xi1;
    xi1=xi;
    xit=...; //teorine formule

//piesimas
drawlater ();
delete(gce());
plot(x, xi, 'b-', x, xit, 'ro');
set(gca(), 'data_bounds', [-ax, 0; ax, 1])
drawnow ();
sleep(20)
//piesimas
end

```

## 4.5. Kranko ir Nikolsono metodas. Užduotis

Modeliuojant banginę lygtį pirmiau aprašytu metodu, reikia naudoti gana mažą žingsnelį  $\Delta t$ . Taikant kitą diskretizavimo schemą – Kranko ir Nikolsono metodą – žingsnis gali būti padidintas ir skaičiavimas paspartėja.

Dar kartą užrašykime banginę lygtį:

$$(4.26) \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = -v \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

Kranko ir Nikolsono diskretizavimo metodas šiai lygčiai atrodo taip:

$$(4.27) \quad \frac{\xi(x_i, t_j + \Delta t) - \xi(x_i, t_j)}{\Delta t} = -\frac{v}{4\Delta x} \times \\ \times (\xi(x_i + \Delta x, t_j) - \xi(x_i - \Delta x, t_j) + \xi(x_i + \Delta x, t_j + \Delta t) - \xi(x_i - \Delta x, t_j + \Delta t)).$$

Visų pirma parodysime, kad kairėje pusėje esanti išraiška yra lygi  $\xi$  išvestinei pagal laiką taške  $t_j + \Delta t/2$ . Pažymėsime paprasčiau –  $y(t_j) = \xi(x_i, t_j)$ . Tuomet

$$(4.28) \quad \frac{y(t_j + \Delta t) - y(t_j)}{\Delta t} \approx \frac{1}{\Delta t} \left( y(t_j) + \Delta t \frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{t_j} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Big|_{t_j} - y(t_j) \right) = \\ = \frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{t_j} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Big|_{t_j} \approx \frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{t_j + \frac{\Delta t}{2}}.$$

O iš banginės lygties galime užrašyti

$$(4.29) \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} \Big|_{x_i, t_j + \frac{\Delta t}{2}} = -v \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x_i, t_j + \frac{\Delta t}{2}}.$$

Dabar pažymėkime  $y(t_j + \frac{\Delta t}{2}) = \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x_i, t_j + \frac{\Delta t}{2}}$ . Iš vienos pusės turime

$$(4.30) \quad y(t_j + \frac{\Delta t}{2}) \approx y(t_j) + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{t_j}.$$

Iš kitos pusės

$$(4.31) \quad \frac{y(t_j + \Delta t) + y(t_j)}{2} \approx \frac{1}{2} \left( y(t_j) + \Delta t \frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{t_j} + y(t_j) \right) = y(t_j) + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{t_j}.$$

Dešinėsios pusės vienodos, taigi, sugrįžę prie pradinių žymėjimų, galime parašyti

$$(4.32) \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x_i, t_j + \frac{\Delta t}{2}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x_i, t_j + \Delta t} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x_i, t_j} \right).$$

Išvestinę pagal koordinatę  $x$  užrašome kaip ir anksčiau, (4.20) lygtis. Šitaip gaunama schema (4.27). Tokia schema angliškai vadinama *implicit*. Tiek kairėje, tiek dešinėje pusėje yra  $t_j$  ir  $t_j + \Delta t$  narių. Vadinasi, teks spręsti matricinę lygtį. Pažymėję  $\xi(x_i, t_j) = \xi_i^j$  galime parašyti

$$(4.33) \quad \xi_i^{j+1} - \xi_i^j = -\frac{v\Delta t}{4\Delta x} (\xi_{i+1}^j - \xi_{i-1}^j + \xi_{i+1}^{j+1} - \xi_{i-1}^{j+1})$$

arba matricos pavidalu

$$(4.34) \quad A\xi_1 = B\xi_0.$$

Čia  $\xi_1 = (\xi_1^{j+1}, \xi_2^{j+1}, \xi_3^{j+1}, \dots, \xi_{i_{\max}}^{j+1})^T$ ,  $\xi_0 = (\xi_1^j, \xi_2^j, \xi_3^j, \dots, \xi_{i_{\max}}^j)^T$ .  $A$  ir  $B$  yra matricos, kurių visi elementai nuliai, išskyrus

$$(4.35) \quad \begin{aligned} B_{i,i} &= -1, & B_{i,i-1} &= \frac{v\Delta t}{4\Delta x}, & B_{i,i+1} &= -\frac{v\Delta t}{4\Delta x}, \\ A_{i,i} &= -1, & A_{i,i-1} &= -\frac{v\Delta t}{4\Delta x}, & A_{i,i+1} &= \frac{v\Delta t}{4\Delta x}. \end{aligned}$$

**Užduotis.** Sumodeliuoti banginę lygtį (4.26), kai pradinė sąlyga yra Gauso funkcija.

„Scilab“ ruošinys:

```
clear ; clc ; close ;
```

```
ax=10;
dx=0.1;
x=-ax:dx:ax;
nt=100;
dt=0.05;
xi0=exp(-x^2);
xi=xi0;
v=1;
```

```
for ix=1:length(x)
  for iy=1:length(x)
    A(ix , iy)=0;
    B(ix , iy)=0;
    if ix==iy then
      A(ix , iy)=-1;
      B(ix , iy)=-1;
    end
  ... // parasyti kitas matricos reikšmes
```

```
    end
end

for it=1:nt

    t=it*dt;

    B0=B*xi0';
    xi=B0'/A';
    xi0=xi;

    xit=...; //teorine formule

//piesimas
drawlater();
delete(gca());
plot(x,xi0,'b-',x,xit,'ro');
set(gca(),'data_bounds',[-ax, 0; ax,1])
drawnow();
sleep(20)
//piesimas

end
```

Kaip matome, šioje programoje laikinis žingsnis dešimt kartų didesnis nei prieš tai buvusioje. Kaip galite įsitikinti, su šiuo žingsniu skaičiuojama pakankamai tiksliai.

## 5 SKYRIUS

# Spartusis Furjė vaizdavimas

Plokščia monochromatinė banga yra teorinė idealizacija. Realios bangos yra baigtinių matmenų, laikinių trukmių ir baigtinių energijų. Tačiau bet kokią bangą galima pavaizduoti kaip plokščiųjų monochromatinių bangų superpoziciją. Toks pavaizdavimas yra vadinamas Furjė transformacija. Furjė transformacija yra Furjė eilutės apibendrinimas, kai pavaizduojama funkcija nėra periodinė.

Baigtiniame intervale bet kokią funkciją galima paskleisti Furjė eilute. Bus parodyta, kaip gaunama diskrečiosios Furjė transformacijos formulė. Šios formulės skaičiavimo sparta mažėja pagal kvadratinį dėsnį nuo žingsnių skaičiaus. 1965 metais buvo pasiūlytas efektyvus diskrečiosios Furjė transformacijos skaičiavimo metodas, kuris vadinamas sparčiąja Furjė transformacija (angliškai *fast Fourier transform* – FFT). Jos sparta mažėja beveik tiesiškai.

### 5.1. Furjė vaizdavimas

Funkcijos  $f(t)$  Furjė vaizdas  $F(\omega)$  apibrėžiamas kaip integralas

$$(5.1) \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt.$$

Atvirkštinė Furjė transformacija, atkurianti pradinę funkciją  $f(t)$ , apibrėžiama taip:

$$(5.2) \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega.$$

Analogiškai apibrėžiama ir dvimatė Furjė transformacija

$$(5.3) \quad F(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)e^{ik_x x + ik_y y} dx dy$$

bei atvirkštinė dvimatė Furjė transformacija:

$$(5.4) \quad f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(k_x, k_y) e^{-ik_x x - ik_y y} dk_x dk_y.$$

(5.2) ir (5.4) lygybes galima įrodyti, žinant funkcijos  $\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega$  savybę

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t') f(t') dt' = f(t).$$

Pirmąją funkcija  $f$  ir jos Furjė atvaizdas  $F$  gali būti kompleksiniai. Matysime, kad šviesos energijos srauto tankis yra proporcingas kompleksinės amplitudės modulio kvadratui. Skaičiuojant šviesos impulso energiją, svarbus yra sąryšis:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \\ & = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_1) F^*(\omega_2) e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} dt d\omega_1 d\omega_2 = \\ (5.5) \quad & = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_1) F^*(\omega_2) \delta(\omega_1 - \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 = \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega. \end{aligned}$$

Dvimačiu atveju

$$(5.6) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)|^2 dx dy = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F(k_x, k_y)|^2 dk_x dk_y.$$

Ši formulė naudinga skaičiuojant pluoštų galias.

## 5.2. Diskrečioji ir sparčioji Furjė transformacijos

Intervale  $t \in [0, T]$  bet kokią funkciją  $f(t)$  galima skleisti Furjė eilute:

$$(5.7) \quad f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{2\pi i k t / T},$$

čia

$$(5.8) \quad F_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-\frac{2\pi i k t}{T}} dt.$$

Suskaidykime atkarpą  $[0 T]$  į  $N$  elementų taip, kad  $t_j = jT/N$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, N-1$ . Tuomet

$$(5.9) \quad f(t_j) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{2\pi i k t_j / T} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{2\pi i k j / N}.$$

Bet koki sveikąjį skaičių  $k$  galima užrašyti kaip  $k = l + mN$ . Čia  $l$  kinta nuo 0 iki  $N$ , o  $m$  – bet koks sveikasis skaičius. Tada

$$(5.10) \quad \begin{aligned} f(t_j) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{2\pi i k t_j / T} = \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} F_{l+mN} e^{2\pi i (l+mN) t_j / T} = \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} e^{2\pi i l t_j / T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_{l+mN} = \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} F'_l e^{2\pi i l t_j / T}. \end{aligned}$$

Čia

$$(5.11) \quad F'_l = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_{l+mN}, \quad l = 0, 1, \dots, N-1$$

ir pasinaudota tuo, kad  $e^{i2\pi m N t_j / T} = e^{i2\pi m N j / N} = 1$  visiems  $j$ . Taigi, gavome

$$(5.12) \quad f(t_j) = \sum_{l=0}^{N-1} F'_l e^{2\pi i l t_j / T}.$$

Ši formulė vadinama diskrečiąja Furjė eilute,  $F'_l$  yra diskretieji Furjė koeficientai. Galima parodyti, kad

$$(5.13) \quad F'_l = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j) e^{-2\pi i l j / N} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f\left(\frac{jT}{N}\right) e^{-2\pi i l j / N}.$$

Kad įrodytume šią lygybę, iš pradžių parodysime, jog funkcijos

$$(5.14) \quad \varphi_k(t) = e^{2\pi i k t / T}, \quad t = jT/N, \quad l, j = 0, 1, \dots, N-1$$

yra ortonormuotosios. Iš tikrųjų,

$$\begin{aligned}
 (5.15) \quad & \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \varphi_{k_1} \varphi_{k_2}^* = \\
 & = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{2\pi i k_1 t_j / T} e^{-2\pi i k_2 t_j / T} = \\
 & = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{2\pi i (k_1 - k_2) t_j / T}.
 \end{aligned}$$

Kai  $k_1 = k_2$ , ši išraiška lygi 1. Priešingu atveju

$$\begin{aligned}
 (5.16) \quad & \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \varphi_{k_1} \varphi_{k_2}^* = \\
 & = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} (e^{2\pi i (k_1 - k_2) / N})^j = \frac{e^{2\pi i (k_1 - k_2)} - 1}{N(e^{2\pi i (k_1 - k_2) / N} - 1)} = 0.
 \end{aligned}$$

Čia pasinaudota geometrinės progresijos sumos formule ir tuo, kad  $e^{2\pi i (k_1 - k_2)} = 1$ . Remdamiesi šia ortonormuotumo savybe, iš (5.12) gauname (5.13). Pastarąją lygybę galime užrašyti matricos pavidalu:

$$(5.17) \quad F' = \begin{pmatrix} F'_1 \\ F'_2 \\ \dots \\ F'_{N-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} e^{-2\pi i 0 t_0 / T} & e^{-2\pi i 0 t_1 / T} & \dots & e^{-2\pi i 0 t_{N-1} / T} \\ e^{-2\pi i 1 t_0 / T} & e^{-2\pi i 1 t_1 / T} & \dots & e^{-2\pi i 1 t_{N-1} / T} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{-2\pi i (N-1) t_0 / T} & e^{-2\pi i (N-1) t_1 / T} & \dots & e^{-2\pi i (N-1) t_{N-1} / T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(t_0) \\ f(t_1) \\ \dots \\ f(t_{N-1}) \end{pmatrix}$$

arba

$$(5.18) \quad F' = M f,$$

čia matrica

$$(5.19) \quad M = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & q & \dots & q^{N-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & q^{N-1} & \dots & q^{(N-1)^2} \end{pmatrix}$$

Čia  $q = e^{-2\pi i / N}$  ir matrica  $M$  vaidinama diskrečiosios tiesioginės Furjė transformacijos matrica, o transformacija (5.17) yra diskrečioji tiesioginė Furjė transformacija. Atvirkščioji diskrečioji Furjė transformacija yra skaičiuojama pagal

$$(5.20) \quad f = M^{-1} F',$$



čia atvirkščiosios diskrečiosios Furjė transformacijos matrica

$$(5.21) \quad M = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & q^{-1} & \dots & q^{-(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & q^{-(N-1)} & \dots & q^{-(N-1)^2} \end{pmatrix}$$

Atliekant diskrečiąją Furjė transformaciją reikia atlikti  $N \times N$  aritmetinių operacijų, t. y. daugybos operacijų, o paskui sudėties. Tačiau yra metodas, kuris leidžia paspartinti skaičiavimus. Šis metodas vadinamas sparčiąja Furjė transformacija (angliškai *Fast Fourier Transform* – FFT). Taikant jį atliekama  $2N \log_2 N$  arba  $2Nn$  aritmetinių operacijų. Čia  $N = 2^n$ .

Tiesioginę Furjė transformaciją galime užrašyti kaip sumą:

$$(5.22) \quad F'_l = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j) q^{lj}, \quad q = e^{-2\pi i/N}.$$

Panagrinėkime sandaugą  $lj$ , kurioje  $l, j = 0, 1, 2, \dots, N-1$ . Tokius  $l$  ir  $j$  galime užrašyti taip:

$$(5.23) \quad l = \sum_{k=0}^{n-1} l_k 2^k, \quad j = \sum_{r=0}^{n-1} j_r 2^r,$$

čia  $l_k$  ir  $j_r$  įgyja vieną iš dviejų reikšmių: 0 ar 1. Tuomet

$$(5.24) \quad \begin{aligned} lj &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{r=0}^{n-1} l_k j_r 2^{k+r} = \\ &= \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-r-1} l_k j_r 2^{k+r} + \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{k=n-r}^{n-1} l_k j_r 2^{k+r} = \\ &= \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-r-1} l_k j_r 2^{k+r} + 2^n \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{k=n-r}^{n-1} l_k j_r 2^{k-(n-r)} = \\ &= \sum_{r=0}^{n-1} j_r 2^r \sum_{k=0}^{n-r-1} l_k 2^k + 2^n s = \\ &= \sum_{r=0}^{n-1} j_r 2^r a_r + Ns, \end{aligned}$$

čia pažymėta

$$(5.25) \quad a_r = \sum_{k=0}^{n-r-1} l_k 2^k,$$

$$s = \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{k=n-r}^{n-1} l_k j_r 2^{k-(n-r)}.$$

Kadangi  $q^{Ns} = 1$ ,

$$(5.26) \quad q^{lj} = \prod_{r=0}^{n-1} q^{j_r 2^r a_r} q^{Ns} = \prod_{r=0}^{n-1} q^{j_r 2^r a_r}.$$

Įrašę tai į (5.22) ir prisiminę, kad  $j_r$  lygus 0 arba 1, gauname

$$(5.27) \quad F_l' = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j) q^{jl} = \frac{1}{2^n} \sum_{j_{n-1}=0}^1 \sum_{j_{n-2}=0}^1 \dots \sum_{j_0=0}^1 f(t_j) \prod_{r=0}^{n-1} q^{j_r 2^r a_r} =$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{j_0=0}^1 \sum_{j_0=0}^1 \dots \sum_{j_{n-1}=0}^1 f(t_j) \prod_{r=0}^{n-1} q^{j_r 2^r a_r} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_0^1 q^{j_0 a_0} \dots \frac{1}{2} \sum_{j_{n-1}}^1 q^{j_{n-1} 2^{n-1} a_{n-1}} f(j_0, \dots, j_{n-1}).$$

Pažymėję:

$$F^{(0)}(j_0, j_1, \dots, j_{n-1}) = f(j_0, j_1, \dots, j_{n-1}) = f(t_j),$$

$$F^{(1)}(l_0, j_0, j_1, \dots, j_{n-2}) = \frac{1}{2} \sum_{j_{n-1}=0}^1 q^{j_{n-1} 2^{n-1} a_{n-1}} F^{(0)}(j_0, j_1, \dots, j_{n-1}),$$

$$(5.28) \quad F^{(2)}(l_0, l_1, j_0, j_1, \dots, j_{n-3}) = \frac{1}{2} \sum_{j_{n-2}=0}^1 q^{j_{n-2} 2^{n-2} a_{n-2}} F^{(1)}(l_0, j_0, j_1, \dots, j_{n-2}),$$

.....

$$F^{(n)}(l_0, l_1, \dots, l_{n-1}) = \frac{1}{2} \sum_{j_0=0}^1 q^{j_0 a_0} F^{(n-1)}(l_0, l_1, \dots, l_{n-2}, j_0),$$

matome, kad turime skaičiuoti pagal rekurenciją formulę:

$$(5.29) \quad F^{(k)}(l_0, \dots, l_{k-1}, j_0, \dots, j_{n-k-1}) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j_{n-k}=0}^1 q^{j_{n-k} 2^{n-k} a_{n-k}} F^{(k-1)}(l_0, \dots, l_{k-2}, j_0, \dots, j_{n-k}),$$

čia

$$(5.30) \quad a_{n-k} = a(l_0, l_1, \dots, l_{k-1}) = \sum_{r=0}^{r=k-1} l_r 2^r,$$

$$q = e^{-2\pi i/N}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Iš čia paaiškėja, kad sparčiojo Furjė vaizdavimo atveju aritmetinių operacijų skaičius lygus  $2Nn = 2N \log_2 N$ . Iš tikrųjų, kiekviename rekurenčiame žingsnyje atliekamos dvi aritmetinės operacijos. Rekurenčių žingsnių yra  $n$ . Iš viso reikia suskaičiuoti  $N$  diskrečiojo Furjė vaizdavimo koeficientų  $F'_l$ .

Svarbu įsidėmėti, kad jei laikinis žingsnis yra  $h_t = T/N$ , tai dažninis žingsnis skaičiuojamas pagal  $h_\omega = 2\pi/T = 2\pi/(h_t N)$ . Tuomet (5.14)  $\varphi_k$  apibrėžimą galima užrašyti kaip  $\varphi_k = \exp(i\omega_k t_j)$ , čia  $\omega_k = k2\pi/T = kh_\omega$ . Dažnių ir laikinių žingsnių yra tiek pat –  $N$ .

Čia pateiksime programos ruošinį, pagal kurį skaičiuojama Furjė transformacija „Scilab“:

```
clear ; clc ; close ;

at=20;
nt=128;
dt=at/nt;
t=-at:dt:at-dt; // laikas

aw=...;
dw=...; // dažninis žingsnis
w=-aw:dw:aw-dw; // dažnio vektorius

f=exp(-t^2); // impulso pavidalas
s=fftshift(fft(f)); // skaiciuojama fft
s=s*dt/sqrt(%pi); // atsakymas sunormuojamas i vieneta

plot(w, abs(s))
```

### 5.3. Šviesos impulsų spektrai

Šviesos impulsai yra moduluotos laike baigtinės laikinės trukmės bangos. Bendru atveju moduluotos bangos elektrinio lauko stipris aprašomas kaip amplitudės  $a$  ir

kosinuso su greitai kintančiu argumentu sandauga:

$$(5.31) \quad E(x, y, z, t) = a(x, y, z, t) \cos(\omega_0 t - k_0 z + \varphi(x, y, z, t)).$$

Laikome, kad sklidimas vyksta  $z$  ašies kryptimi,  $\omega_0$  yra nešlio dažnis,  $k_0$  – nešlio bangos skaičius,  $x, y, z$  – Dekarto koordinatės,  $t$  – laikas,  $\varphi$  – fazė. Įtraukę kompleksinę amplitudę  $A(x, y, z, t) = a(x, y, z, t) \exp(i\varphi(x, y, z, t))$ , galime parašyti:

$$(5.32) \quad E(x, y, z, t) = \frac{1}{2}[A(x, y, z, t) \exp[i(\omega_0 t - k_0 z)] + k.j].$$

Tokia banga yra moduluota pagal erdvines koordinates ir laiką. Jei banga yra moduluota tik pagal laiką, t. y.

$$(5.33) \quad A = A(z, t),$$

tai ji yra šviesos impulsas. Norint aprašyti šviesos impulso spektrą, reikia rasti jo kompleksinės amplitudės laikinį Furjė vaizdą. Elektrinio lauko stiprio Furjė komponentas yra

$$(5.34) \quad F(z, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E(z, t) e^{-i\omega t} dt.$$

Įrašę (5.32), gauname

$$(5.35) \quad F(z, \omega) = \frac{1}{2}[S(z, \omega - \omega_0) \exp(-ik_0 z) + S^*(z, -\omega - \omega_0) \exp(ik_0 z)].$$

Čia

$$(5.36) \quad S(z, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A(z, t) e^{-i\Omega t} dt.$$

Impulso gaubtinė  $A(z, t)$  gali būti įvairių pavidalų. Rasime trijų tipų: Gauso, stačiakampio ir hiperbolinio sekanto, impulsų spektrus  $S(z, \Omega)$ .

### 5.3.1. Gauso impulsas

Gauso impulso gaubtinė aprašoma Gauso funkcija:

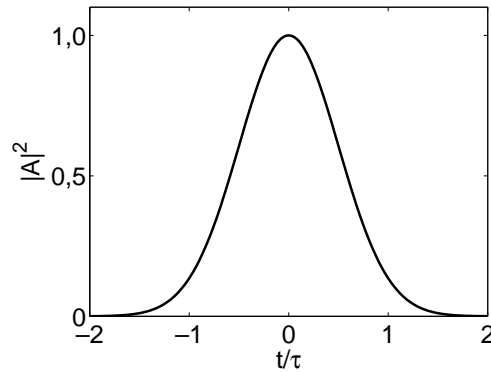
$$(5.37) \quad A(0, t) = a_v \exp(-t^2/\tau^2).$$

Čia  $a_v$  yra impulso viršūnės vertė,  $\tau$  – trukmė. Gauso impulso kompleksinės amplitudės modulio kvadratas pavaizduotas 5.1 pav.

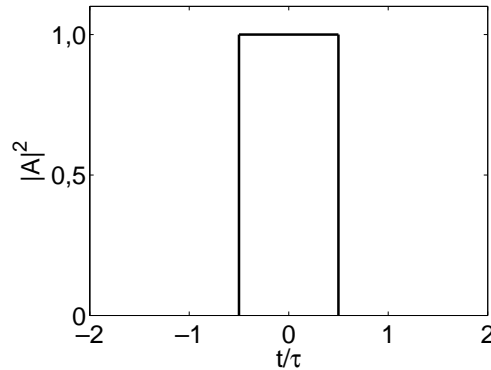
Įrašę (5.37) išraišką į (5.36) formulę gauname:

$$(5.38) \quad S(0, \Omega) = \sqrt{\pi} \tau a_v \exp\left(-\frac{\Omega^2 \tau^2}{4}\right).$$

Matome, kad Gauso impulso spektro gaubtinė taip pat aprašoma Gauso funkcija. Jos plotis atvirkščiai proporcingas impulso trukmei  $\tau$ :  $\Delta\Omega = \frac{2}{\tau}$ . Čia  $\Delta\Omega$  yra spektro plotis  $1/e$  lygiu. Begalinės trukmės atveju, kai  $\tau \rightarrow \infty$ , spektras yra  $\delta$  funkcija; tai atitinka monochromatinę (vieno dažnio) bangą.



5.1 pav. Normuota Gauso impulso gaubtinė



5.2 pav. Stačiakampio impulso gaubtinė

### 5.3.2. Stačiakampis impulsas

Stačiakampio impulso kompleksinė amplitudė yra

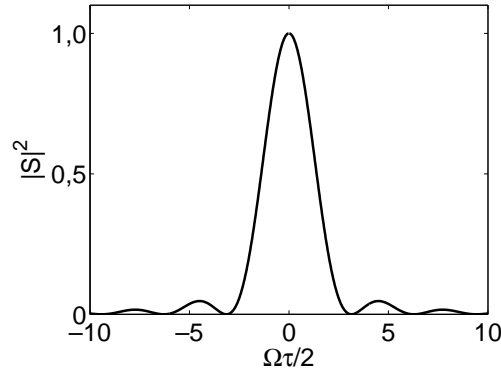
$$(5.39) \quad A(0, t) = a_v, \quad -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2}.$$

Jos modulio kvadratas pavaizduotas 5.2 pav. Įrašę (5.39) išraišką į (5.36) formulę, gauname spektrą:

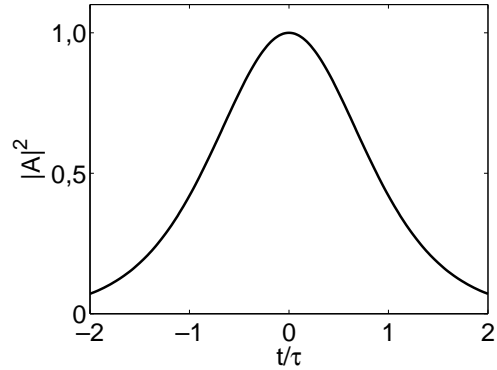
$$(5.40) \quad S(0, \Omega) = a_v \tau \frac{\sin \Omega \tau / 2}{\Omega \tau / 2}.$$

Spektro grafikas pavaizduotas 5.3 pav.

Kaip ir Gauso impulso atveju stačiakampio impulso spektro plotis yra atvirkščiai proporcingas impulso trukmei  $\tau$ .



5.3 pav. Stačiakampio impulso spektro gaubtinė



5.4 pav. Hiperbolinio sekanto impulso gaubtinė

### 5.3.3. Hiperbolinio sekanto impulsas

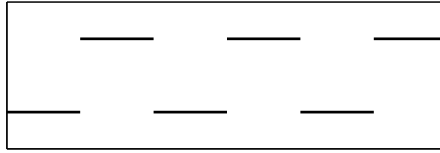
Hiperbolinio sekanto impulso gaubtinė aprašoma tokia formule:

$$(5.41) \quad A(0, t) = a_v \operatorname{sech}(t/\tau).$$

Gaubtinė pavaizduota 5.4 pav. Galima parodyti, kad tokio pavidalo gaubtinės impulso spektras taip pat aprašomas hiperboliniu sekantu:

$$(5.42) \quad S(0, \Omega) = a_v \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\Omega t) dt}{\cosh(t/\tau)} = \pi a_v \tau \operatorname{sech}\left(\frac{\pi\tau\Omega}{2}\right).$$

Vėlgi, kuo trumpesnis impulsas, tuo platesnis spektras; spektro plotis atvirkščiai proporcingas impulso trukmei.



5.5 pav. Stačiakampė banga

### 5.3.4. Užduotis. Impulsų spektrų skaičiavimas

Naudojantis  $\text{fft}()$  funkcija rasti Gauso, stačiakampio ir hiperbolinio sekanto impulsų spektrus. Gautas kreives palyginti su teorinėmis.

## 5.4. Furjė eilutė

Bet kokį periodinį signalą galima išskleisti Furjė eilute:

$$(5.43) \quad f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt,$$

čia  $f(t)$  yra periodo  $2\pi$  funkcija. Koeficientai  $a_n$  ir  $b_n$  randami pagal formules

$$(5.44) \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos ntdt,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin ntdt.$$

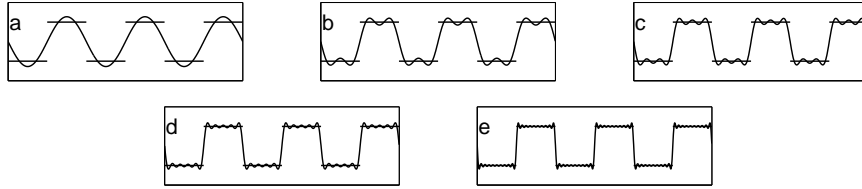
Furjė eilute skleisti galima, net jei funkcija  $f(t)$  turi trūkių. Panagrinėkime įvairių periodinių signalų skleidinius Furjė eilute.

### 5.4.1. Stačiakampė banga\*

Stačiakampė banga pavaizduota 5.5 pav.  $[-\pi, \pi]$  intervale ją aprašo funkcija

$$(5.45) \quad f(t) = 0, \quad -\pi \leq t < 0,$$

$$f(t) = h, \quad 0 \leq t < \pi.$$



5.6 pav. Stačiakampės bangos skleidimas Furjė eilute. Skleidimo narių skaičius: 1 (a), 2 (b), 3 (c), 5 (d), 10 (e)

Pasinaudoję (5.44) formulėmis randame (integruojama intervale  $[-\pi, \pi]$ )

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} h dt = h, \\
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} h \cos ntdt = 0, \\
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} h \sin ntdt = \frac{h}{n\pi} (1 - \cos n\pi).
 \end{aligned}
 \tag{5.46}$$

Matome, kad

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2h}{n\pi}, \quad n \text{ nelyginis} \\
 b_n &= 0, \quad n \text{ lyginis}.
 \end{aligned}
 \tag{5.47}$$

Taigi, stačiakampės bangos atveju Furjė eilutė atrodo taip:

$$f(t) = \frac{h}{2} + \frac{2h}{\pi} \left( \frac{\sin t}{1} + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \dots \right).
 \tag{5.48}$$

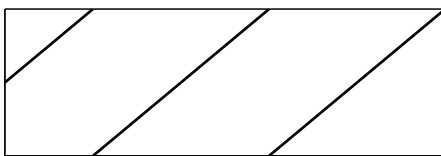
Matome, kad tai yra konverguojančiosios eilutės suma, eilutės nariai konverguoja proporcingai  $\frac{1}{n}$ . Kaip atrodo šis skleidinys esant tam tikram eilutės narių skaičiui, pavaizduota 5.6 pav.

## 5.4.2. Pjūklinė banga\*

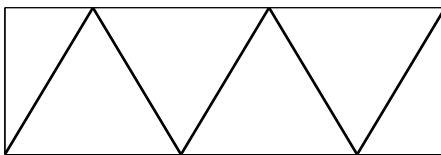
Pjūklinė banga pavaizduota 5.7 pav. Ją aprašo periodinė funkcija

$$\begin{aligned}
 f(t) &= t, \quad 0 \leq t < \pi, \\
 f(t) &= t - 2\pi, \quad \pi < t \leq 2\pi
 \end{aligned}
 \tag{5.49}$$





5.7 pav. Pūklinė banga



5.8 pav. Trikampė banga

intervale  $[0, 2\pi]$  arba  $f(t) = t$  intervale  $[-\pi, \pi]$ . Galima parodyti, kad

$$(5.50) \quad f(t) = 2 \left( \sin t - \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{\sin nt}{n} + \dots \right).$$

Vėlgi suma konverguoja kaip  $\frac{1}{n}$ .

### 5.4.3. Trikampė banga\*

Trikampė banga pavaizduota 5.8 pav. Ją aprašo funkcija

$$(5.51) \quad \begin{aligned} f(t) &= t, & 0 < t < \pi, \\ f(t) &= -t, & -\pi < t < 0. \end{aligned}$$

Galima parodyti, kad

$$(5.52) \quad f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ nelyg.}} \frac{\cos nt}{n^2}.$$

Ši eilutė konverguoja kaip  $\frac{1}{n^2}$ .

## 5.5. Furjė eilutė ir Furjė integralas

Parodysime, kad neperiodinei funkcijai Furjė eilutė virsta Furjė integralu. Jei funkcija  $f(t)$  yra periodinė intervale  $[-T, T]$ , tuomet

$$(5.53) \quad f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi t}{T},$$

ir skleidimo koeficientai randami pagal

$$(5.54) \quad \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t') \cos \frac{n\pi t'}{T} dt', \\ b_n &= \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t') \sin \frac{n\pi t'}{T} dt'. \end{aligned}$$

Įrašę (5.54) į (5.53), gauname

$$(5.55) \quad \begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t') dt' \\ &+ \frac{1}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi t}{T} \int_{-T}^T f(t') \cos \frac{n\pi t'}{T} dt', \\ &+ \frac{1}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi t}{T} \int_{-T}^T f(t') \sin \frac{n\pi t'}{T} dt' \end{aligned}$$

arba

$$(5.56) \quad \begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t') dt' \\ &+ \frac{1}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-T}^T f(t') \cos \left( \frac{n\pi}{T} (t' - t) \right) dt'. \end{aligned}$$

Jei funkcija neperiodinė, tuomet  $T \rightarrow \infty$ . Pažymėję

$$(5.57) \quad \frac{n\pi}{T} = \omega, \quad \frac{\pi}{T} = \Delta\omega,$$

(5.56) formulę galime perrašyti šitaip

$$(5.58) \quad f(t) \rightarrow \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \cos(\omega(t' - t)) dt'.$$

Sumą pakeitę integralu gauname

$$(5.59) \quad f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') \cos(\omega(t' - t)).$$

Pasinaudoję kosinuso funkcijos lyginiu praplečiame integravimo ribas, pakeičiame kosinuso argumento ženklą ir gauname

$$(5.60) \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') \cos(\omega(t - t')).$$

Kadangi sinusas yra nelyginė funkcija, tai

$$(5.61) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') \sin(\omega(t-t')) = 0.$$

Pasinaudoję Oilerio formule, (5.60) integralą galime perrašyti šitaip:

$$(5.62) \quad \begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') \exp(i\omega(t-t')) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-i\omega t'} dt' = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \end{aligned}$$

Čia  $F(\omega)$  apibrėžtas (5.1) formule. Matome, kad (5.62) išraiška sutampa su (5.2) lygybe.

## 5.6. Naikvisto teorema

Ši teorema dar vadinama Vitakerio, Naikvisto, Kotelnikovo ir Šanono teorema. Iš jos aišku, kokiam dažnių plotyje reikia apibrėžti Furjė vaizdą, kad būtų teisingai atkurta pati funkcija.

Tegu turime funkcijos  $f_s(t)$  spektrą  $F_s(\omega)$ , kurio plotis  $\Delta\Omega$ : kai  $|\omega| > \Delta\Omega/2$ ,  $F_s(\omega) = 0$ . Pasirinkime dažnį  $\Omega_s$ , tenkinantį sąlygą  $\Omega_s > \Delta\Omega$ . Dažnis  $\nu_s = \Omega_s/2$  dar vadinamas Naikvisto dažniu. Apibrėžkime dažnio  $\Omega_s$  periodinę funkciją  $F(\omega)$ :

$$(5.63) \quad F(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_s(\omega - k\Omega_s).$$

Kadangi ši funkcija periodinė, tai ją galime skleisti Furjė eilute. Tą eilutę užrašysime šiek tiek kitaip nei (5.53):

$$(5.64) \quad F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-i2\pi n\omega/\Omega_s}.$$

Skleidimo koeficientai randami pagal:

$$(5.65) \quad c_n = \frac{1}{\Omega_s} \int_{-\Omega_s/2}^{\Omega_s/2} F(\omega) e^{i2\pi n\omega/\Omega_s} d\omega.$$

Prisiminę, kad  $F_s(\omega) = F(\omega)$ , kai  $|\omega| < \Omega_s/2$  ir  $F_s(\omega) = 0$ , kai  $|\omega| > \Omega_s/2$ , galime parašyti:

$$(5.66) \quad c_n = \frac{1}{\Omega_s} \int_{-\infty}^{\infty} F_s(\omega) e^{i2\pi n\omega/\Omega_s} d\omega = \frac{1}{\Omega_s} f_s\left(\frac{2\pi n}{\Omega_s}\right).$$

Taigi periodinis spektras gali būti užrašytas kaip:

$$(5.67) \quad F(\omega) = \frac{1}{\Omega_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_s \left( \frac{2\pi n}{\Omega_s} \right) e^{-i2\pi n\omega/\Omega_s}.$$

Spektriškai apribotą spektrą galime užrašyti šitaip:

$$(5.68) \quad F_s(\omega) = F(\omega)H(\omega).$$

Čia  $H(\omega)$  yra stačiakampė funkcija:

$$(5.69) \quad H(\omega) = 1, \quad |\omega| < \Omega_s/2,$$

$$H(\omega) = 0, \quad |\omega| > \Omega_s/2.$$

Taigi

$$(5.70) \quad F_s(\omega) = H(\omega) \frac{1}{\Omega_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_s \left( \frac{2\pi n}{\Omega_s} \right) e^{-i2\pi n\omega/\Omega_s}.$$

Funkcija  $f_s(t)$  gali būti atkurta naudojant atvirkštinę Furjė transformaciją:

$$\begin{aligned} f_s(t) &= FT^{-1}[F_s(\omega)] = FT^{-1}\left[H(\omega) \frac{1}{\Omega_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_s \left( \frac{2\pi n}{\Omega_s} \right) e^{-i2\pi n\omega/\Omega_s}\right] \\ &= \frac{1}{\Omega_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_s \left( \frac{2\pi n}{\Omega_s} \right) FT^{-1}[H(\omega)e^{-i2\pi n\omega/\Omega_s}] \\ (5.71) \quad &= \frac{1}{\Omega_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_s \left( \frac{2\pi n}{\Omega_s} \right) \int_{-\Omega_s}^{\Omega_s} e^{i\omega t - i2\pi n\omega/\Omega_s} d\omega \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_s \left( \frac{2\pi n}{\Omega_s} \right) \operatorname{sinc} \left( \frac{\Omega_s}{2} \left( t - \frac{2\pi n}{\Omega_s} \right) \right). \end{aligned}$$

Arba

$$(5.72) \quad f_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_s \left( \frac{2\pi n}{\Omega_s} \right) \operatorname{sinc} \left( \frac{\Omega_s}{2} \left( t - \frac{2\pi n}{\Omega_s} \right) \right).$$

Tai yra Vitakerio ir Šanono interpoliacinė formulė (angl. *Whittaker-Shannon interpolation formula*). Funkcija  $f_s(t)$  gali būti atkurta iš diskretinių funkcijos reikšmių laiko  $t = 2\pi n/\Omega_s$  taškuose. Matome, kad laikinis žingsnis yra  $h_t = 2\pi/\Omega_s = 2\pi/(h_\omega N)$ . Šis žingsnis turi būti pakankamai mažas ir priklausyti nuo Naikvisto dažnio – yra jam atvirkščiai proporcingas. Spektrinis žingsnis atvirkščiai proporcingas laikiniam žingsniui.

### III DALIS

## Banginės ir kvantinės šviesos savybės



Remiantis Maksvelo lygtimis galima gauti bangines lygtis elektriniam ir magnetiniam laukams. XIX a. Maksvelas gavo šias lygtis ir nustatė, kad tokios elektromagnetinės bangos greitis sutampa su šviesos greičiu. Todėl jis iškėlė hipotezę, kad šviesa yra elektromagnetinė banga. Ši hipotezė netrukus buvo patvirtinta eksperimentais.

XX a. pradžioje Plankas, nagrinėdamas juodojo kūno spinduliavimą, išvedė formulę, kuri teisingai aprašė spinduliavimo spektrą visame dažnių intervale. Išvedant formulę teko daryti prielaidą, kad šviesa sklinda porcijomis – kvantais. Šviesos kvantai vėliau buvo pavadinti fotonais.

Šioje dalyje panagrinėsime banginį ir kvantinį šviesos aprašymus.





## 6 SKYRIUS

# Banginė šviesos prigimtis

### 6.1. Banginės lygtys

Pradėsime nuo Maksvelo lygčių:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \text{div } \mathbf{B} &= 0, \\ \text{div } \mathbf{D} &= 0. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Čia  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  yra elektrinio ir magnetinio lauko stipriai,  $\mathbf{B}$  – magnetinės indukcijos vektorius,  $\mathbf{D}$  – elektrinio lauko slinkties vektorius. Elektriniam ir magnetiniam laukams laisvoje erdvėje galioja sąryšiai

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon_0 \mathbf{E}, \\ \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{H}. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Čia  $\varepsilon_0$  ir  $\mu_0$  yra atitinkamai elektrinė ir magnetinė konstantos. Paveikę pirmąją (6.1) sistemos lygtį rotoriaus operatoriumi ir pasinaudoję (6.2) sąryšiais, gauname

$$\frac{1}{\mu_0} \text{rot rot } \mathbf{B} = -\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \mathbf{E}). \tag{6.3}$$

Pasinaudoję lygybe  $\text{rot rot } \mathbf{B} = \text{grad div } \mathbf{B} - \nabla^2 \mathbf{B}$ , iš (6.3) gauname

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{B} = 0. \tag{6.4}$$

Analogiškai iš (6.1) antrosios lygties gauname

$$(6.5) \quad \nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} = 0.$$

Banginės lygtys (6.4) ir (6.5) atitinka bangas, kurių sklidimo greitis lygus  $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ . 1865 metais Maksvelas išvedė šias lygtis ir pastebėjo, kad  $c$  sutampa su šviesos greičiu vakuume, todėl iškėlė prielaidą, kad šviesa – tai elektromagnetinė (EM) banga. Šią prielaidą 1890 metais eksperimentais patvirtino Vineris. Daugiau apie šį eksperimentą bus rašoma skyrelyje apie stovinčiąsias bangas. Reikia pažymėti, kad elektromagnetinėms bangoms sklisti nebūtina terpė – jos gali sklisti ir vakuume.

Banginės lygtys (6.4) ir (6.5) yra nesusijusios, todėl galimas jų sprendinys yra  $\mathbf{B} = 0$ , kai  $\mathbf{E} \neq 0$ , o tai atitinka elektrinės bangos sklidimą be magnetinės. Bet tai prieštarauja pradinėms Maksvelo lygtims (6.1). Elektrinė banga sklinda kartu su magnetine, tai yra elektromagnetinė banga.

Panagrinėkime paprasčiausią EM bangų atvejį – plokščiąsias monochromatines EM bangas. Iš pradžių perrašykime Maksvelo lygtis kitokia forma:

$$(6.6) \quad \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0. \end{aligned}$$

Šių lygčių sprendinio ieškosime plokščių monochromatinių bangų pavidalu

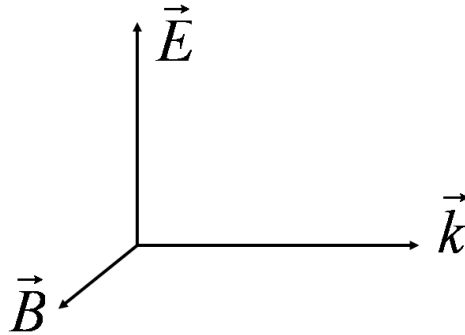
$$(6.7) \quad \begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 \exp[-i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})], \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 \exp[-i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})]. \end{aligned}$$

Čia  $\mathbf{E}_0$  ir  $\mathbf{B}_0$  yra pastovūs vektoriniai dydžiai,  $\omega$  ir  $\mathbf{k}$  – kampinis dažnis ir bangos vektorius,  $\mathbf{r}$  – spindulio vektorius,  $t$  – laikas. Kadangi

$$(6.8) \quad \begin{aligned} \nabla \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) &= i\mathbf{k} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}), \\ \frac{\partial}{\partial t} \exp(-i\omega t) &= -i\omega \exp(-i\omega t), \end{aligned}$$

tai, įrašę (6.7) į (6.6), vietoje diferencialinių gauname algebrines lygtis:

$$(6.9) \quad \begin{aligned} -\mathbf{k} \times \mathbf{B} &= \frac{\omega}{c^2} \mathbf{E}, \\ \mathbf{k} \times \mathbf{E} &= \omega \mathbf{B}, \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} &= 0. \end{aligned}$$

6.1 pav.  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  ir  $\mathbf{k}$  vektoriai

Iš šių lygčių paaiškėja, kad  $\mathbf{E}$  ir  $\mathbf{B}$  vektoriai statmeni tarpusavyje ir abu statmeni  $\mathbf{k}$  vektoriui (6.1 pav.).

Kadangi  $k = \omega/c$ , tai iš antrosios (6.9) lygties išeina, kad

$$(6.10) \quad E = cB.$$

Dydžiai  $\mathbf{k}$ ,  $\omega$  ir  $c$  yra realūs, taigi  $\mathbf{E}$  ir  $\mathbf{B}$  vektoriai bėgant laikui kinta sinfaziškai.  $\mathbf{E}$  ir  $\mathbf{B}$  vektorių kitimas erdvėje fiksuotu laiko momentu pavaizduotas 6.2 pav.

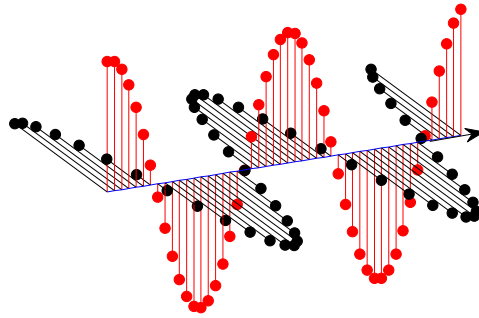
Toliau pateikta „Scilab“ programa, vaizduojanti bėgančiąją EM bangą.

```
clear ; clc ; close ;
```

```
ax=10;
dx=0.5;
x=-ax : dx : ax;
```

```
y=cos(x);
```

```
param3d(x,y,0*x)
set(gca(),'auto_clear','off')
param3d(x,0*x,y)
e=gce()
e.foreground=color('red'); // nuspalvina raudonai
```



6.2 pav.  $\mathbf{E}$  ir  $\mathbf{B}$  vektorių kitimas erdvėje bėgančiosios plokščiosios monochromatinės bangos atveju

```

param3d(x,0*x,0*x); // x-axis

for ix=1:length(x)
    param3d([x(ix) x(ix)], [0 y(ix)], [0 0]);
end

for ix=1:length(x)
    param3d([x(ix) x(ix)], [0 0], [0 y(ix)]);
    e=gce();
    e.foreground=color('red');
end

```

## 6.2. Elektromagnetinės bangos energija ir judesio kiekis

Pasinaudosime matematine lygybe

$$(6.11) \quad \nabla(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B}(\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E}(\nabla \times \mathbf{B}).$$

Iš dviejų pirmų Maksvelo lygčių (6.6) galime užrašyti

$$(6.12) \quad \begin{aligned} \mathbf{E}c^2(\nabla \times \mathbf{B}) &= \mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\ \mathbf{B}c^2(\nabla \times \mathbf{E}) &= -c^2\mathbf{B}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Iš pirmosios (6.12) lygties atėmę antrąją ir pasinaudoję (6.11), gauname lygtį

$$(6.13) \quad \frac{dw}{dt} = -\operatorname{div} \mathbf{S}.$$

Čia

$$(6.14) \quad w = \frac{\varepsilon_0}{2}(E^2 + c^2B^2)$$

yra elektromagnetinės bangos energijos tankis, o

$$(6.15) \quad \mathbf{S} = \varepsilon_0c^2\mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

yra Pointingo vektorius. (6.13) yra tolydumo lygtis, iš jos kyla energijos tvermės dėsnis: jeigu nėra Pointingo vektoriaus srauto per tam tikrą uždarą paviršiaus plotą, tai energijos tankis to paviršiaus gaubiamame tūryje nekinta.

Plokščiosios monochromatinės bangos atveju  $B = E/c$ , žr. (6.10). Tuomet iš (6.15) gauname

$$(6.16) \quad S = \varepsilon_0cE^2.$$

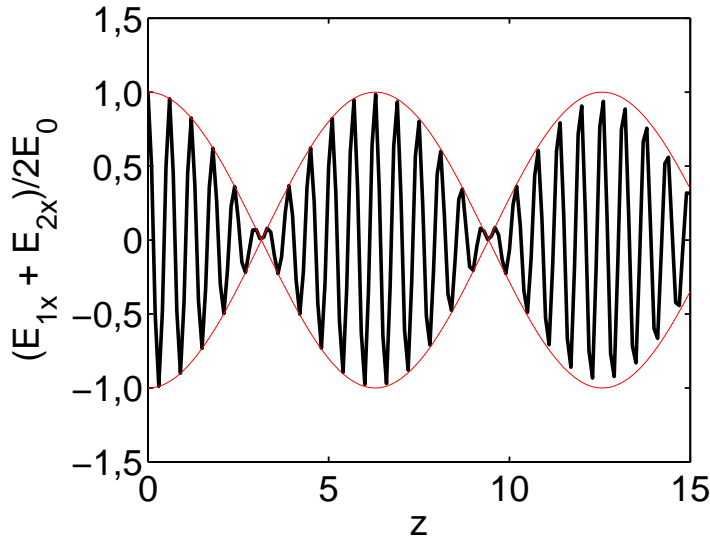
(6.7) formulėje elektrinio lauko stipris užrašytas kompleksine forma. Šitaip galėjome rašyti todėl, kad Maksvelo lygtys vakuume yra tiesinės. Tikrasis elektrinio lauko stipris gaunamas, pridėjus kompleksiskai jungtinę dalį:

$$(6.17) \quad E = E_0 \cos(\omega t - \mathbf{kr} + \varphi) = \frac{1}{2} (E_{0k}e^{i\omega t - i\mathbf{kr}} + E_{0k}^*e^{-i\omega t + i\mathbf{kr}}),$$

čia  $E_{0k} = E_0e^{i\varphi}$ . Šviesos banga bėgant laikui kinta apie  $10^{15}$  Hz dažniu, o jautikliai tokio greito kitimo neužregistruoja. Registruojami dydžiai yra suvidurkinti laike. Į (6.16) įrašę (6.17) išraišką ir atlikę vidurkinimą laike, gauname

$$(6.18) \quad \langle S \rangle = \varepsilon_0c\langle E^2 \rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_0c|E_{0k}^2|.$$

Tai reiškia, kad intensyvumas yra proporcingas kompleksinės amplitudės modulio kvadratui.

6.3 pav. Mušimai.  $\omega_1/\omega_2 = 10/11$ 

### 6.3. Elektromagnetinių bangų superpozicija

Maksvelo lygtys (6.1) yra tiesinės, todėl, jei  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{B}_1$  ir  $\mathbf{E}_2$ ,  $\mathbf{B}_2$  yra jų sprendiniai, tai  $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ ,  $\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$  taip pat bus šių lygčių sprendiniai. Šiame skyrelyje panagrinėsime įvairias galimas plokščių monochromatinių elektromagnetinių bangų superpozicijas.

#### 6.3.1. Mušimai

Tegu dviejų bangų  $\mathbf{k}$  vektoriai nukreipti išilgai  $z$  ašies, o jų elektrinio lauko stipriai  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{E}_2$  nukreipti išilgai  $x$  ašies. Jei jų dažniai skiriasi:  $\omega_1 \neq \omega_2$ , tai skiriasi ir jų bangos skaičiai:  $k_1 \neq k_2$ , nes  $k_1 = \omega_1/c$ ,  $k_2 = \omega_2/c$ . Šių dviejų bangų elektrinių stiprių superpozicija, esant vienodoms amplitudėms  $E_0$ , užrašoma taip:

$$\begin{aligned}
 E_{1x} + E_{2x} &= E_0 \cos(\omega_1 t - k_1 z) + E_0 \cos(\omega_2 t - k_2 z) \\
 (6.19) \quad &= 2E_0 \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t - \frac{k_1 - k_2}{2}z\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t - \frac{k_1 + k_2}{2}z\right).
 \end{aligned}$$

Pasinaudoję sąryšiais tarp  $k_j$  ir  $\omega_j$ , iš (6.19) formulės gauname

$$(6.20) \quad E_{1x} + E_{2x} = 2E_0 \cos[(\omega_1 - \omega_2)(t - z/c)/2] \cos[(\omega_1 + \omega_2)(t - z/c)/2].$$

Jeigu bangų dažniai skiriasi nedaug, t. y.

$$(6.21) \quad |\omega_1 - \omega_2| \ll (\omega_1 + \omega_2),$$

tuomet (6.20) formulė aprašo greitai kintančius harmoninius svyravimus, kurių amplitudė kinta lėtai. Toks reiškinyms vadinamas mušimais. Iš (6.20) matyti, kad mušimų dažnis

$$(6.22) \quad \Omega = |\omega_1 - \omega_2|.$$

Elektrinio lauko stiprio kitimas erdvėje esant mušimams pavaizduotas 6.3 pav.

### 6.3.2. Stovinčioji banga

Kitas svarbus bangų superpozicijos pavyzdys – stovinčioji banga. Ji susidaro, kai dvi vienodų dažnių ir amplitudžių bangos sklinda priešingomis kryptimis. Tegu abiejų plokščiųjų monochromatinių bangų  $\mathbf{E}$  vektoriai nukreipti išilgai  $x$  ašies. Pirmoji sklinda  $z$  ašies teigiama kryptimi, antroji – tos ašies neigiama kryptimi. Tuomet

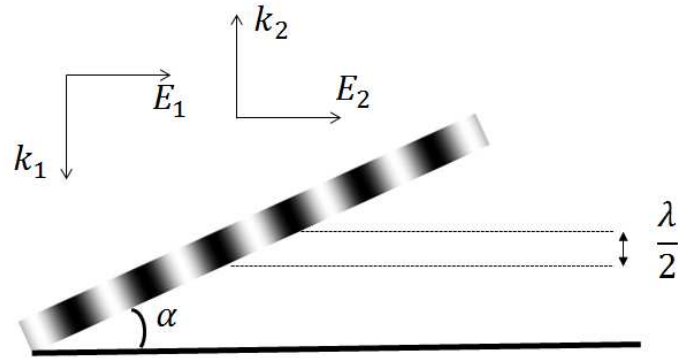
$$(6.23) \quad \begin{aligned} E_{1x} + E_{2x} &= E_0 \cos(\omega t - kz) + E_0 \cos(\omega t + kz - \delta) = \\ &2E_0 \cos(kz + \delta/2) \cos(\omega t + \delta/2). \end{aligned}$$

Čia  $\delta$  yra fazės postūmis tarp dviejų susidedančių bangų. Užrašysime stovinčiosios bangos magnetinę indukciją:

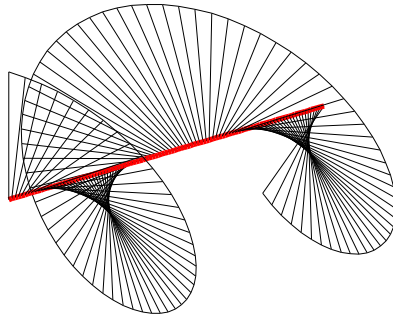
$$(6.24) \quad \begin{aligned} B_{1y} + B_{2y} &= E_0/c \cos(\omega t - kz) - E_0/c \cos(\omega t + kz - \delta) = \\ &2E_0/c \sin(kz + \delta/2) \sin(\omega t + \delta/2). \end{aligned}$$

Minuso ženklas prieš antrąjį dėmenį rašomas dėl to, kad plokščiosios bangos  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  ir  $\mathbf{k}$  vektoriai sudaro vektorių trejetą, kaip pavaizduota 6.1 pav. Jeigu  $\mathbf{k}$  vektorių apsuksime, o  $\mathbf{E}$  vektorių paliksime tos pačios krypties, tuomet  $\mathbf{B}$  vektorius keis kryptį. Iš (6.23) ir (6.24) formulių matome, kaip  $\mathbf{E}$  ir  $\mathbf{B}$  vektoriai kinta esant fazės postūmiui  $\pi/2$ : elektrinė energija virsta magnetine, o paskui vyksta atvirkštinis procesas.

Stovinčiosios bangos suvaidino svarbų vaidmenį šviesos kaip elektromagnetinės bangos teorijoje. 1890 metais Vineris atliko eksperimentą, patvirtinantį šią teoriją. Apšvitinus fotoemulsiją stovinčiąja banga, tose vietose, kur elektrinio lauko stipris mažiausias (mazguose), paliks ryškios vietos; o elektrinio lauko stiprio maksimumuose (pūpsniuose) atsiras tamsios dėmės. Reikia pasakyti, kad fotoemulsijos patamsėjimą sukelia tik elektrinis laukas. Atstumas tarp mazgų yra lygus  $\lambda/2$ , ir regimosios šviesos atveju tai yra mikronų eilės dydis. Vineris apšvitino fotoemulsiją kampu, kaip parodyta 6.4 pav. Kai fotoemulsijos polinkio kampas  $\alpha$  pakankamai mažas, atstumai tarp tamsių dėmių  $\lambda/(2 \sin \alpha)$  yra gana dideli.



6.4 pav. Vinerio eksperimentas



6.5 pav. Elipsiškai poliarizuotos bangos elektrinio lauko stiprio vektoriaus kryptis fiksuotu laiko momentu



### 6.3.3. Elipsinė poliarizacija

Iki šiol buvo nagrinėjamos tiesinės poliarizacijos bangos. Sudėjus dvi statmenai viena kitai poliarizuotas bangas, tarp kurių fazių postūmis  $\pi/2$ , gaunama banga, kurios  $\mathbf{E}$  vektorius sukasi pagal elipsės lygtį [19]. Iš tikrųjų, jei pirmos ir antros bangos elektrinio lauko stipriai

$$(6.25) \quad \begin{aligned} E_{1x} &= E_{10} \sin(\omega t - kz), \\ E_{2y} &= E_{20} \cos(\omega t - kz), \end{aligned}$$

tai galima parodyti, kad

$$(6.26) \quad \frac{E_{1x}^2}{E_{10}^2} + \frac{E_{2y}^2}{E_{20}^2} = 1.$$

Tai yra elipsės lygtis. Sumodeliuotas elektrinio lauko stiprio kitimas erdvėje pavaizduotas 6.5 pav.

### 6.3.4. Užduotys. Elektromagnetinių bangų superpozicija

Sumodeliuoti stovinčiosios elektromagnetinės bangos elektrinio lauko stiprį ir magnetinę indukciją.

Sumodeliuoti mušimus.

Sumodeliuoti elipsiškai poliarizuotos bangos elektrinio lauko stiprio vektorių.



## 7 SKYRIUS

# Kvantinė šviesos prigimtis

### 7.1. Vektorinis ir skaliarinis potencialai\*

Panagrinėkime Maksvelo lygtis bendru atveju, kai erdvėje yra krūvių ir srovių. Lygtis

$$(7.1) \quad \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= 0 \end{aligned}$$

užrašysime kitokiu pavidalu. Visų pirma tarsime, kad terpė nemagnetinė,

$$(7.2) \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}.$$

Slinkties vektorius  $\mathbf{D}$  susijęs su elektriniu lauku  $\mathbf{E}$  sąryšiu:

$$(7.3) \quad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}.$$

Čia  $\mathbf{P}$  yra poliarizuotumo vektorius. Srovės tankis  $\mathbf{J}$  ir krūvio tankis  $\rho$  su  $\mathbf{P}$  susiję sąryšiais:

$$(7.4) \quad \mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t},$$

$$(7.5) \quad \rho = -\nabla \cdot \mathbf{P}.$$

Taigi, dabar galime parašyti lygtis  $\mathbf{E}$  ir  $\mathbf{B}$  vektoriams:

$$(7.6) \quad \begin{aligned} c^2 \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mathbf{J}}{\varepsilon_0}, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \end{aligned}$$

Iš matematinės tapatybės

$$(7.7) \quad \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$$

matome, kad trečioji lygtis yra patenkinama, jei

$$(7.8) \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Taigi, magnetinės indukcijos vektorių susiejome su vektoriniu potencialu  $\mathbf{A}$ . Antroji lygtis bus tapačiai patenkinta, jei

$$(7.9) \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

nes galioja matematinė lygybė:

$$(7.10) \quad \nabla \times \nabla\varphi = 0.$$

$\varphi$  yra skaliarinis potencialas. Įrašę (7.8) ir (7.9) į pirmąją ir ketvirtąją Maksvelo lygtis, gauname

$$(7.11) \quad c^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} + \frac{\partial \nabla\varphi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \frac{\mathbf{J}}{\varepsilon_0}$$

ir

$$(7.12) \quad -\nabla \cdot \nabla\varphi - \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Šias lygtis galima supaprastinti įtraukus vadinamąją Kulono kalibravimo sąlygą. Pasakytina, kad  $\mathbf{A}$  ir  $\varphi$  nėra griežtai apibrėžti, nes  $\mathbf{B}$  ir  $\mathbf{E}$  ((7.8) ir (7.9)) išraiškos nepasikeičia, pakeitus pradinius  $\varphi_0$  ir  $\mathbf{A}_0$  į

$$(7.13) \quad \varphi = \varphi_0 + \frac{\partial \theta}{\partial t},$$

$$(7.14) \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}_0 - \nabla \cdot \theta.$$

Čia  $\theta$  laisvai pasirenkamas skaliarinis potencialas. Taigi, galime užrašyti papildomą sąryšį, Kulono kalibravimo sąlygą:

$$(7.15) \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0.$$

Tuomet supaprastintos lygtys bus:

$$(7.16) \quad -c^2 \nabla^2 \mathbf{A} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \frac{\partial \nabla \varphi}{\partial t} = \frac{\mathbf{J}}{\varepsilon_0}$$

ir

$$(7.17) \quad -\nabla^2 \varphi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Čia pasinaudota sąryšiu  $\nabla \times \nabla \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ . (7.16) galima dar labiau supaprastinti, pasinaudojus tolydumo lygtimi, kuri gaunama iš pirmosios Maksvelo lygties, paveikus ją divergencijos operatoriumi ir pritaikius tapatybę  $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{B} = 0$ :

$$(7.18) \quad \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\nabla \cdot \mathbf{J}}{\varepsilon_0} = 0.$$

Irašę  $\nabla \cdot \mathbf{E}$  iš ketvirtosios lygties, gauname

$$(7.19) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0.$$

Tai yra tolydumo lygtis, atitinkanti krūvio tvermės dėsnį. Arba, atskyrę skersinę ir išilginę  $\mathbf{J}$  dalis taip, kad

$$(7.20) \quad \mathbf{J} = \mathbf{J}_T + \mathbf{J}_L, \quad \nabla \cdot \mathbf{J}_T = 0, \quad \nabla \times \mathbf{J}_L = 0,$$

gausime

$$(7.21) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_L.$$

Išdiferencijavę (7.17) pagal laiką gauname

$$(7.22) \quad -\nabla \cdot \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{J}_L}{\varepsilon_0}.$$

Pagaliau gauname vektorinio potencialo banguę lygtį [17]

$$(7.23) \quad -c^2 \nabla^2 \mathbf{A} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \frac{\mathbf{J}_T}{\varepsilon_0}.$$

## 7.2. Elektromagnetinio lauko kvantavimas\*

Toliau remsimės prielaida, kad terpėje nėra skersinių srovių:

$$(7.24) \quad \mathbf{J}_T = 0.$$

Tokia terpė vadinama laisva. Potencialo banginė lygtis tuomet atrodo taip:

$$(7.25) \quad \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0.$$

Panagrinėkime šios lygties sprendinius. Elektromagnetinio lauko energiją užrašysime per šiuos sprendinius.

Visų pirma paskleisime sprendinį Furjė eilute trimatėje erdvėje, kurios matmenys visomis trimis kryptimis yra  $L$ :

$$(7.26) \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 L^3}} \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}.$$

Čia sumuojama pagal Furjė dažnius  $k_x, k_y, k_z$ :

$$(7.27) \quad k_x = \frac{2\pi n_x}{L}, \quad k_y = \frac{2\pi n_y}{L}, \quad k_z = \frac{2\pi n_z}{L},$$

$n_{x,y,z}$  – sveikasis skaičius. Iš kalibravimo sąlygos (7.15) turime

$$(7.28) \quad \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = 0.$$

Ši lygybė galioja visiems  $\mathbf{r}$ , vadinasi:

$$(7.29) \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t) = 0,$$

t. y.  $\mathbf{k}$  ir  $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}$  vektoriai statmeni. Kadangi  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  yra realusis dydis,  $\mathbf{A}^*(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ , tai

$$(7.30) \quad \mathbf{A}_{-\mathbf{k}}(t) = \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^*(t).$$

Irašę skleidinį (7.26) į banginę lygtį (7.25), gauname

$$(7.31) \quad \sum_{\mathbf{k}} \left( -k^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = 0$$

visiems  $\mathbf{r}$ , vadinasi:

$$(7.32) \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_k^2 \right) \mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t) = 0.$$

Čia  $\omega_k = kc$  yra modos kampinis dažnis. Šios lygties sprendinys, tenkinantis sąlygą (7.30), yra

$$(7.33) \quad \mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t) = \mathbf{A}_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_k t} + \mathbf{A}_{-\mathbf{k}}^* e^{i\omega_k t}.$$

Kadangi  $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}$  vektorius yra statmenas  $\mathbf{k}$  vektoriui, tai galime pasitelkti du vienetinius poliarizacijos vektorius  $\mathbf{e}_{\mathbf{k}1}$  ir  $\mathbf{e}_{\mathbf{k}2}$ , gulinčius statmenoje  $\mathbf{k}$  vektoriui plokštumoje, ir užrašyti skleidinį:

$$(7.34) \quad \mathbf{A}_{\mathbf{k}} = \sum_{s=1}^2 A_{\mathbf{k}s} \mathbf{e}_{\mathbf{k}s}.$$

Akivaizdu, kad galios sąryšiai

$$(7.35) \quad \begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}1} &= 0, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}2} = 0, \\ \mathbf{e}_{\mathbf{k}1} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}2} &= 0, \\ \mathbf{e}_{\mathbf{k}1} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}1} &= 1, \quad \mathbf{e}_{\mathbf{k}2} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}2} = 1, \\ \mathbf{e}_{\mathbf{k}1} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}2} &= \frac{\mathbf{k}}{k} = \mathbf{k}_0. \end{aligned}$$

Užrašykime vektorinį potencialą, kurio išraišką panaudosime  $\mathbf{E}$  ir  $\mathbf{B}$  rasti.

$$(7.36) \quad \begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 L^3}} \sum_{\mathbf{k}s} (A_{\mathbf{k}s} \mathbf{e}_{\mathbf{k}s} e^{-i\omega_k t} + A_{-\mathbf{k}s}^* \mathbf{e}_{-\mathbf{k}s}^* e^{i\omega_k t}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 L^3}} \sum_{\mathbf{k}s} (A_{\mathbf{k}s} \mathbf{e}_{\mathbf{k}s} e^{-i\omega_k t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} + A_{\mathbf{k}s}^* \mathbf{e}_{\mathbf{k}s}^* e^{i\omega_k t - \mathbf{k}\mathbf{r}}). \end{aligned}$$

Irašę šią išraišką į (7.8) ir (7.9), gauname

$$(7.37) \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{\sqrt{\varepsilon_0 L^3}} \sum_{\mathbf{k}s} \omega_k (A_{\mathbf{k}s}(t) \mathbf{e}_{\mathbf{k}s} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} - (*)),$$

$$(7.38) \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{\sqrt{\varepsilon_0 L^3}} \sum_{\mathbf{k}s} (A_{\mathbf{k}s}(t) (\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}s}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} - (*)),$$

čia (\*) žymi kompleksiskai jungtinį dydį, ir

$$(7.39) \quad A_{\mathbf{k}s}(t) = A_{\mathbf{k}s} e^{-i\omega_k t}.$$

Dabar prisiminkime (6.14) energijos tankio išraišką. Suminė energija  $H$  yra jos integralas pagal erdvę:

$$(7.40) \quad H = \int_V d^3\mathbf{r} w = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V (E^2 + c^2 B^2) d^3\mathbf{r}.$$

Čia  $V = L^3$ . Integruodami pagal erdvę gausime tokius integralus:

$$(7.41) \quad \int_{L^3} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{r} = L^3 \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^3.$$

Randame

$$(7.42) \quad H = 2 \sum_{\mathbf{k}s} \omega_k^2 |A_{\mathbf{k}s}(t)|^2.$$

Užrašysime energijos išraišką kitokiu pavidalu. Tam įtrauksime naujus kintamuosius  $q_{\mathbf{k}s}(t)$  ir  $p_{\mathbf{k}s}(t)$  tokius, kad

$$(7.43) \quad A_{\mathbf{k}s} e^{-i\omega_k t} = \frac{1}{2} \left( q_{\mathbf{k}s}(t) + \frac{i}{\omega_k} p_{\mathbf{k}s}(t) \right),$$

$$(7.44) \quad A_{\mathbf{k}s}^* e^{i\omega_k t} = \frac{1}{2} \left( q_{\mathbf{k}s}(t) - \frac{i}{\omega_k} p_{\mathbf{k}s}(t) \right).$$

Tuomet

$$(7.45) \quad H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}s} (p_{\mathbf{k}s}^2(t) + \omega_k^2 q_{\mathbf{k}s}^2(t)).$$

Tokia energijos išraiška sutampa su harmoninio osciliatoriaus išraiška, kurioje  $q_{\mathbf{k}s}(t)$  ir  $p_{\mathbf{k}s}(t)$  yra atitinkamai koordinatė ir impulsas. Iš (7.43) ir (7.44) parašome

$$(7.46) \quad q_{\mathbf{k}s}(t) = A_{\mathbf{k}s} e^{-i\omega_k t} + A_{\mathbf{k}s}^*(t) e^{i\omega_k t},$$

$$(7.47) \quad p_{\mathbf{k}s}(t) = -i\omega_k (A_{\mathbf{k}s} e^{-i\omega_k t} - A_{\mathbf{k}s}^*(t) e^{i\omega_k t}).$$

Iš čia galime gauti diferencialines lygtis

$$(7.48) \quad \frac{\partial q_{\mathbf{k}s}}{\partial t} = p_{\mathbf{k}s}(t),$$

$$(7.49) \quad \frac{\partial p_{\mathbf{k}s}}{\partial t} = -\omega_k^2 q_{\mathbf{k}s}(t).$$

Tai yra Hamiltono lygtys, kurios bendru atveju užrašomos taip:

$$(7.50) \quad \frac{\partial q_{\mathbf{k}s}}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p_{\mathbf{k}s}},$$



$$(7.51) \quad \frac{\partial p_{\mathbf{k}s}}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial q_{\mathbf{k}s}}.$$

Tai yra įrodymas, kad  $q$  ir  $p$  iš tikrųjų yra apibendrinti koordinatė ir impulsas. Pagaliau priartėjome prie elektromagnetinio lauko kvantavimo. Kvantuojant  $q$  ir  $p$  tampa operatoriais, o jų komutatorius randamas, sulyginant Puasono skliaustus su komutatoriumi:

$$(7.52) \quad [q_{\mathbf{k}s}(t), p_{\mathbf{k}s}(t)] = i\hbar\{q_{\mathbf{k}s}(t), p_{\mathbf{k}s}(t)\}.$$

Čia  $\hbar$  yra Planko konstanta. Dviejų operatorių komutatorius yra skirtumas

$$(7.53) \quad [q_{\mathbf{k}s}(t), p_{\mathbf{k}s}(t)] = q_{\mathbf{k}s}(t)p_{\mathbf{k}s}(t) - p_{\mathbf{k}s}(t)q_{\mathbf{k}s}(t),$$

o dviejų kintamųjų  $f$  ir  $g$  Puasono skliaustai apibrėžiami kaip

$$(7.54) \quad \{f, g\} = \sum_j \left( \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right).$$

Nesunku matyti, kad

$$(7.55) \quad \begin{aligned} \{q_{\mathbf{k}s}(t), p_{\mathbf{k}'s'}(t)\} &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^3 \delta_{ss'}, \\ \{q_{\mathbf{k}s}(t), q_{\mathbf{k}'s'}(t)\} &= 0, \\ \{p_{\mathbf{k}s}(t), p_{\mathbf{k}'s'}(t)\} &= 0. \end{aligned}$$

Iš kvantavimo sąlygos (7.52) gauname komutatorius

$$(7.56) \quad [q_{\mathbf{k}s}(t), p_{\mathbf{k}'s'}(t)] = i\hbar\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^3 \delta_{ss'}, \quad [q_{\mathbf{k}s}(t), q_{\mathbf{k}'s'}(t)] = 0, \quad [p_{\mathbf{k}s}(t), p_{\mathbf{k}'s'}(t)] = 0.$$

Matysime, kad šitokių komutatorių postulavimas yra pakankamas energijos lygmenims kvantuoti. Įrašykime naujus operatorius  $a$  ir  $a^+$ , kurie bus fotonų išnykimo ir gimimo operatoriai:

$$(7.57) \quad a_{\mathbf{k}s}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_k}}(\omega_k q_{\mathbf{k}s}(t) + ip_{\mathbf{k}s}(t)),$$

$$(7.58) \quad a_{\mathbf{k}s}^+(t) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_k}}(\omega_k q_{\mathbf{k}s}(t) - ip_{\mathbf{k}s}(t)).$$

Operatoriai  $q$  ir  $p$  išreiškiami per  $a$  ir  $a^+$ :

$$(7.59) \quad q_{\mathbf{k}s}(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}}(a_{\mathbf{k}s}(t) + a_{\mathbf{k}s}^+(t)),$$

$$(7.60) \quad p_{\mathbf{k}s}(t) = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{\sqrt{2}}}(a_{\mathbf{k}s}^+(t) - a_{\mathbf{k}s}(t)).$$

Iš komutacinių sąryšių (7.56) gauname

$$(7.61) \quad [a_{\mathbf{k}s}(t), a_{\mathbf{k}'s'}^+(t)] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^3 \delta_{ss'}, \quad [a_{\mathbf{k}s}(t), a_{\mathbf{k}'s'}(t)] = 0, \quad [a_{\mathbf{k}s}^+(t), a_{\mathbf{k}'s'}^+(t)] = 0.$$

Hamiltonianas (energija) naudojant šiuos operatorius užsirašomas taip:

$$(7.62) \quad H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}s} \hbar\omega_k (a_{\mathbf{k}s}(t)a_{\mathbf{k}s}^+(t) + a_{\mathbf{k}s}^+(t)a_{\mathbf{k}s}(t)),$$

žr. (7.45). Arba, pasinaudojus komutaciniu sąryšiu,

$$(7.63) \quad H = \sum_{\mathbf{k}s} \hbar\omega_k \left( a_{\mathbf{k}s}^+(t)a_{\mathbf{k}s}(t) + \frac{1}{2} \right).$$

Beliko parodyti, kad operatorius  $a_{\mathbf{k}s}^+(t)a_{\mathbf{k}s}(t)$  turi fotonų skaičiaus operatoriaus prasmę. Tuomet hamiltonianas yra atskirų modų fotonų skaičių, padaugintų iš vienos modos energijos  $\hbar\omega_k$ , suma.

### 7.2.1. Operatoriai $a$ , $a^+$ , $a^+a$

Šiame skyrelyje paprastumo dėlei numesime modų ir poliarizacijos indeksus  $\mathbf{k}s$ . Remdamiesi komutaciniais sąryšiais (7.61) parodysime, kad operatoriai  $a^+$ ,  $a$  yra fotono atsiradimo ir išnykimo operatoriai, o operatorius  $N = a^+a$  turi fotonų skaičiaus operatoriaus prasmę [22]. Pažymėkime šio operatoriaus tikrinę funkciją  $|n\rangle$ , o tikrinę vertę  $n$ :

$$(7.64) \quad a^+a|n\rangle = n|n\rangle.$$

Paveikime šią lygybę operatoriumi  $a$ :

$$(7.65) \quad aa^+a|n\rangle = na|n\rangle.$$

Pasinaudoję komutaciniu sąryšiu  $aa^+ - a^+a = 1$ , galime parašyti

$$(7.66) \quad (a^+a + 1)a|n\rangle = na|n\rangle$$

arba

$$(7.67) \quad (a^+a)a|n\rangle = (n - 1)a|n\rangle.$$

Taigi parodėme, kad, jeigu funkcija  $|n\rangle$  yra tikrinė operatoriaus  $N$  funkcija, tai funkcija  $a|n\rangle$  taip pat yra tikrinė  $N$  funkcija, atitinkanti vienetu mažesnę tikrinę vertę. Analogiškai galime parodyti, kad

$$(7.68) \quad (a^+a)a^+|n\rangle = (n+1)a^+|n\rangle,$$

t. y. operatorius  $a^+$  didina tikrinę operatoriaus  $a^+a$  vertę vienetu.

Tikrinis skaičiaus operatoriaus  $a^+a$  vektorius yra taip pat tikrinis Hamiltono operatoriaus vektorius. Iš Hamiltono (7.63) išraiškos matome, kad net nulinis fotonų skaičius  $n = 0$  atitinka nenulinę energiją. Nulinio lygmens energija lygi begalybei, nes modų skaičius – begalinis. Tai yra vadinamoji silpna kvantinio aprašymo vieta. Nulinio lygmens energijos negalima užfiksuoti, nes nėra lygmens, žemesnio už nulinį, į kurį galėtų pereiti sistema [5].

### 7.3. Planko formulė

XX amžiaus pradžioje Plankas iškėlė hipotezę, kad šviesa sklinda kvantais, kurių energija priklauso nuo spinduliuotės dažnio:

$$(7.69) \quad E = \hbar\omega.$$

Kai sužadinta  $n$  modų (kvantų), energija

$$(7.70) \quad E_n = n\hbar\omega.$$

Šito postulato pakako gauti vadinamąją Planko formulę, kuri gerai aprašė juodojo kūno spinduliavimo spektrą. Tas darbas pasirodė 1901 metais. Šiame skyrelyje išvesime šią formulę remdamiesi standartiniais argumentais. Kitame skyrelyje parodysim, kaip šią formulę galima gauti iš balanso lygčių.

Tikimybė, kad termiškai sužadinta  $n$ -toji būseną yra užduodama Bolcmano faktoriumi,

$$(7.71) \quad P(n) = \frac{\exp(-E_n/k_B T)}{\sum_n \exp(-E_n/k_B T)}.$$

Juodasis kūnas yra terminėje pusiausvyroje temperatūros  $T$ .  $k_B$  – Bolcmano konstanta. Pažymėkime

$$(7.72) \quad U = \exp(-\hbar\omega/k_B T).$$

Tuomet (7.71) galime užrašyti šitaip

$$(7.73) \quad P(n) = U^n / \sum_{n=0}^{\infty} U^n.$$

Geometrinės progresijos sumos formulė

$$(7.74) \quad \sum_{n=0}^{\infty} U^n = \frac{1}{1-U},$$

todėl

$$(7.75) \quad P(n) = (1-U)U^n.$$

Dabar galime apskaičiuoti fotonų, sužadintų temperatūroje  $T$ , skaičiaus vidurkį,

$$(7.76) \quad \langle n \rangle = \sum_n nP(n) = (1-U) \sum_n nU^n = (1-U)U \frac{\partial}{\partial U} \sum_n U^n = \frac{U}{1-U}$$

arba

$$(7.77) \quad \langle n \rangle = \frac{1}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1}.$$

Rasime vidutinį spinduliuotės energijos tankį dažnio  $\omega$  modai:

$$(7.78) \quad \langle W_T(\omega) \rangle d\omega = \langle n \rangle \hbar\omega N(\omega) d\omega.$$

Čia vidutinį fotonų skaičių toje modoje dauginame iš jos energijos  $\hbar\omega$  ir modų skaičiaus  $N(\omega)d\omega$ , kuris tenka intervalui  $d\omega$ . Rasime šį skaičių. Nagrinėjame kubinę terpę, kurios matmuo  $L$ . Prisiminkime (7.27) formulę, pagal kurią vienos modos užimamas tūris yra

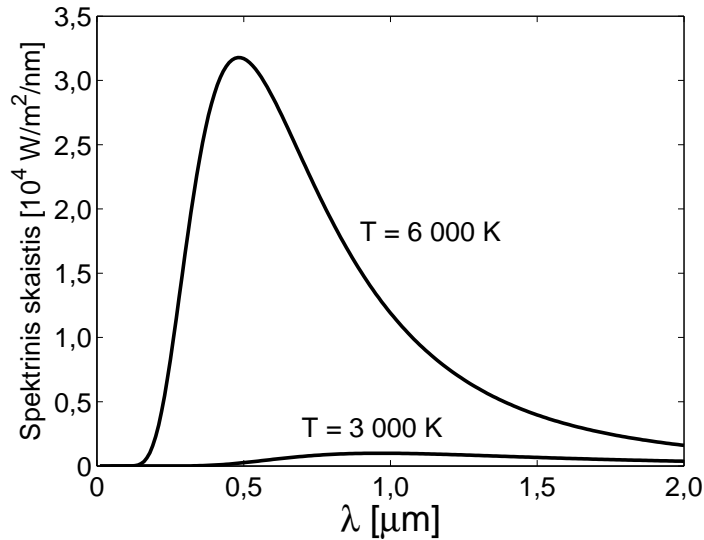
$$(7.79) \quad V_k = (\pi/L)^3.$$

Sferos, atitinkančios  $k$  bangos skaičių, plotas yra  $4\pi k^2$ . Padauginame jį iš  $dk$  ir apsiribojame teigiamų verčių oktantu (daugiklis  $\times \frac{1}{8}$ ). Taigi

$$(7.80) \quad N(k)dk = \frac{1}{8} 4\pi k^2 dk \frac{1}{V_k} \frac{1}{L^3} \times 2.$$

Daugiklis  $\times 2$  atsiranda dėl to, kad galimos dvi nepriklausomos poliarizacijos. Gauname

$$(7.81) \quad N(k)dk = k^2 dk / \pi^2.$$



7.1 pav. Spektrinio skaisčio priklausomybė nuo bangos ilgio

Pereiname prie dažnių  $\omega = ck$ , tuomet

$$(7.82) \quad N(\omega)d\omega = \omega^2 d\omega / \pi^2 c^3.$$

Gautą rezultatą įrašome į (7.78):

$$(7.83) \quad \langle W_T(\omega) \rangle d\omega = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{d\omega}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1}.$$

Gauta formulė gerai paaiškina spinduliuotės spektrą terminėje pusiausvyroje. 7.1 pav. pavaizduoti spektrai esant dviem skirtingoms temperatūroms. Temperatūros vertė  $T = 6000$  K atitinka Saulės paviršiaus temperatūrą. Jos spektro maksimumas yra regimajame diapazone.  $T = 3000$  K yra kaitrinės lempos pavyzdys.

## 7.4. Einšteino koeficientai ir Planko formulė

Prisiminkime balanso lygtis (2.2) ir (2.3). Dabar tarsime, kad kaupinimo nėra ir naudosis kitokius pažymėjimus – Einšteino koeficientus  $A$  ir  $B$ . Dydis  $w_{12}$  sutaps su savaiminio spinduliavimo Einšteino koeficientu  $A_{21}$ , o dydį  $W$  susiesime su priverstinių perėjimų Einšteino koeficientais  $B_{12}$  (sugertis) ir  $B_{21}$  (spinduliuavimas). Priverstinio šuolio tikimybė yra lygi koeficiento  $B$  ir energijos tankio  $\langle W(\omega) \rangle$  sandaugai. Dviejų lygmenų schema ir šuoliai joje pavaizduoti 7.2 pav. Tariame, kad fotono energija yra lygi atomo lygmenų energijų skirtumui:

$$(7.84) \quad \hbar\omega = E_2 - E_1.$$

Kaip ir anksčiau bendras atomų skaičius  $N = N_1 + N_2$  yra konstanta. Tuomet balanso lygtys atomo užpildoms atrodo taip:

$$(7.85) \quad \frac{dN_1}{dt} = -\frac{dN_2}{dt} = N_2 A_{21} - N_1 B_{12} \langle W(\omega) \rangle + N_2 B_{21} \langle W(\omega) \rangle.$$

Nagrinėjame pusiausvyros atvejį, kai laikinės išvestinės lygios nuliui. Tuomet

$$(7.86) \quad N_2 A_{21} - N_1 B_{12} \langle W(\omega) \rangle + N_2 B_{21} \langle W(\omega) \rangle = 0.$$

Iš šios lygties išreiškiame energijos tankį  $\langle W(\omega) \rangle$ :

$$(7.87) \quad \langle W(\omega) \rangle = \frac{A_{21}}{(N_1/N_2)B_{12} - B_{21}}.$$

Užpildų santykis gali būti išreikštas per Bolcmano faktorių:

$$(7.88) \quad \frac{N_1}{N_2} = \frac{g_1 \exp(-E_1/k_B T)}{g_2 \exp(-E_2/k_B T)} = \frac{g_1}{g_2} \exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right),$$

čia pasinaudota (7.84).  $g_1$  ir  $g_2$  yra lygmenų išsigimimai. Gauname

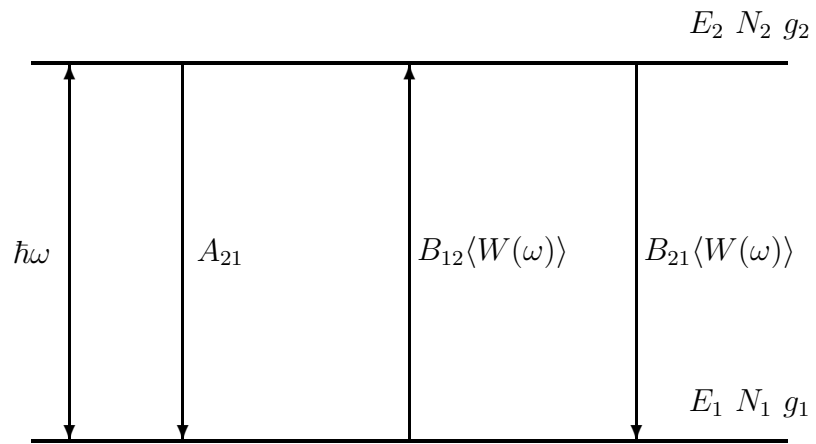
$$(7.89) \quad \langle W(\omega) \rangle = \frac{A_{21}}{(g_1/g_2) \exp(\hbar\omega/k_B T) B_{12} - B_{21}}.$$

Šią formulę galima palyginti su Planko formule (7.83). Einšteino koeficientams gauname

$$(7.90) \quad g_1 B_{12} = g_2 B_{21},$$

$$(7.91) \quad (\hbar\omega^3/\pi^2 c^3) B_{21} = A_{21}.$$

Matome, kad savaiminio spinduliavimo Einšteino koeficientas didėja, didėjant dažniui.



7.2 pav. Dviejų lygmenų schema





## IV DALIS

### Lazerio rezonatorius



## 8 SKYRIUS

# Geometrinė optika. ABCD matricos

Geometrinėje optikoje vartojama šviesos spindulio sąvoka. Tai daryti leidžia eikonalo lygtis, kuri išvedama iš banginės lygties monochromatinei bangai – Helmholtz lygties. Remdamiesi eikonalo lygtimi ir Ferma principu išvesime Snelijaus šviesos lūžimo dėsnį. Jį pritaikysime užrašydami plonojo lęšio matricą, su kuria nustatysime gerai žinomus plonojo lęšio dėsnius. Taip pat išvesime sferinio veidrodžio matricą; matysime, kad ji analogiška lęšio matricai, todėl spindulio sklaidimo rezonatoriuje uždavinį galima spręsti kaip sklaidimo per lęšių sistemą uždavinį. Gausime stabilaus rezonatoriaus sąlygą.

### 8.1. Eikonalo lygtis

Eikonalo lygtį išvesime remdamiesi bangine lygtimi. Kaip matėme, banginė lygtis išvedama iš Maksvelo lygčių ir gali būti užrašyta tiek elektriniam ( $\mathbf{E}$ ), tiek magnetiniam ( $\mathbf{B}$ ) laukui. Toliau laikysime, kad poliarizacija yra tiesinė ir rašysime lygtis skaliariniam dydžiui  $\Phi$ , kai terpė yra laisva.

Banginė lygtis:

$$(8.1) \quad \nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi = 0.$$

Terpėje šviesos greitis sumažėja  $n$  kartų palyginti su greičiu vakuume  $c$ . Čia  $n$  – lūžimo rodiklis. Taigi terpėje banginė lygtis užrašoma taip:

$$(8.2) \quad \nabla^2 \Phi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi = 0.$$

Čia  $v = c/n$  – bangos sklidimo greitis. Banginė lygtis supaprastėja tarus, kad banga yra monochromatinė. Monochromatinės bangos dažnio  $\omega$  atveju

$$(8.3) \quad \Phi = \Psi(\mathbf{r})e^{-i\omega t},$$

čia  $\Psi(\mathbf{r})$  yra spindulio vektoriaus  $\mathbf{r}$  funkcija. Įrašę (8.3) į (8.2), gauname

$$(8.4) \quad \nabla^2 \Psi + n^2 k_0^2 \Psi = 0,$$

čia  $k_0 = \omega/c$ . (8.4) lygtis yra vadinama Helmholco lygtimi. Išvesime eikonalo lygtį.

Remdamiesi matematiniu sąryšiu

$$(8.5) \quad \frac{1}{\Psi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\ln \Psi) + \left( \frac{\partial}{\partial x} \ln \Psi \right)^2,$$

perrašome (8.4) lygtį

$$(8.6) \quad \frac{1}{\Psi} \nabla^2 \Psi + n^2 k_0^2 = \nabla^2 (\ln \Psi) + [\text{grad} (\ln \Psi)]^2 + n^2 k_0^2 = 0.$$

Ieškosime šios lygties sprendinio pavidalu

$$(8.7) \quad \Psi(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r})e^{iS(\mathbf{r})}.$$

Čia  $A$  yra ieškoma  $\mathbf{r}$  funkcija,  $S(\mathbf{r})$  vadinamas eikonalu. Įrašę (8.7) į (8.6), gauname lygtį

$$(8.8) \quad \begin{aligned} \nabla^2 (\ln A) + [\text{grad} (\ln A)]^2 - (\text{grad} S)^2 + n^2 k_0^2 \\ + i [\nabla^2 S + 2 \text{grad} (\ln A) \cdot \text{grad} S] = 0. \end{aligned}$$

Atskyrę realią ir menamąją šios lygties dalis, gauname

$$(8.9) \quad \nabla^2 (\ln A) + [\text{grad} (\ln A)]^2 - (\text{grad} S)^2 + n^2 k_0^2 = 0$$

bei

$$(8.10) \quad \nabla^2 S + 2 \text{grad} (\ln A) \cdot \text{grad} S = 0.$$

Tai yra dvi lygtys dviejų kintamųjų –  $A$  ir  $S$  – atžvilgiu. Tegu dydis  $A$  kinta daug lėčiau negu  $S$ , t. y. jo kitimas vyksta atstumu  $l \gg \lambda$ . Tuomet, remdamiesi (8.5), gauname

$$(8.11) \quad \nabla^2 (\ln A) + [\text{grad} (\ln A)]^2 = \frac{1}{A} \nabla^2 A \propto \frac{1}{l^2} \ll \frac{1}{\lambda^2}.$$

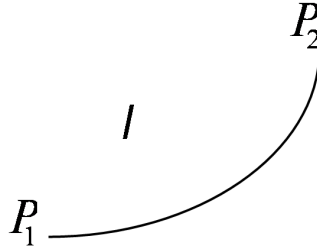
Iš (8.9) turime

$$(8.12) \quad (\text{grad} S)^2 = n^2 k_0^2.$$

Tai yra eikonalo lygtis. Prisiminkime, kad Helmholco lygties (8.4) sprendinys yra (8.7) išraiška. Lygtis

$$(8.13) \quad S(\mathbf{r}) = \text{const}$$

yra paviršiaus, vadinamo bangos frontu, lygtis. Vektorius  $\text{grad} S(\mathbf{r})$  yra statmenas tam paviršiui vektorius. Jis nurodo šviesos spindulio kryptį taške  $\mathbf{r}$ .



8.1 pav. Šviesos spindulio trajektorija netolydžioje terpėje

## 8.2. Ferma principas

Panagrinėkime, kokia bus šviesos spindulio trajektorija, sujungianti taškus  $P_1$  ir  $P_2$  netolydžioje terpėje, kurioje lūžimo rodiklis  $n(\mathbf{r})$  nepastovus (8.1 pav.). Funkcijos  $\Psi$  fazės pokytis išilgai trajektorijos  $l$  yra

$$(8.14) \quad dS = \text{grad } S \cdot d\mathbf{r} = |\text{grad } S| |d\mathbf{r}| = k_0 n(\mathbf{r}) dl.$$

Suintegravę pagal  $dS$  nuo taško  $P_1$  iki taško  $P_2$ , gauname

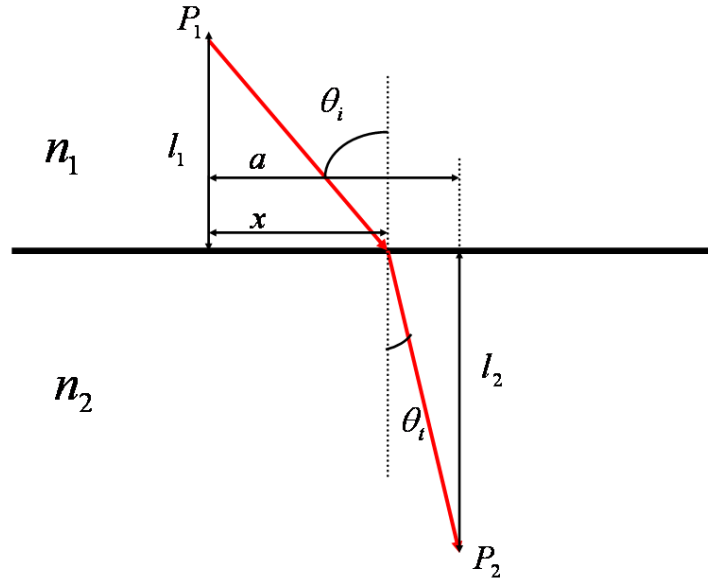
$$(8.15) \quad \int_{P_1}^{P_2} dS = k_0 \int_{P_1}^{P_2} n(\mathbf{r}) dl = k_0 c \int_{P_1}^{P_2} \frac{dl}{v} = \omega \int_{P_1}^{P_2} \frac{dl}{v}.$$

Integralas  $\int_{P_1}^{P_2} \frac{dl}{v}$  yra laikas, per kurį šviesa nusklinda nuo pirmojo taško iki antrojo. Ferma principas teigia, jog šviesa renkasi tokį kelią, kad ši trukmė būtų minimali.

## 8.3. Snelijaus dėsnis

Panagrinėkime šviesos spindulio, sklindančio iš vieno optinio tankio terpės į kito optinio tankio terpę, lūžimą. Snelijaus dėsniai įrodyti pasinaudokime Ferma principu.

Tegu pirmosios terpės lūžimo rodiklis  $n_1$ , antrosios –  $n_2$ , šviesa sklinda iš taško  $P_1$  į tašką  $P_2$  (8.2 pav.). Keičiant atstumą  $x$ , keičiasi sklidimo trukmė. Išdiferencijavę trukmę pagal  $x$  ir prilyginę išvestinę nuliui, gausime lygtį  $x$  vertei, kuri atitinka minimalią trukmę.



8.2 pav. Schema Snelijaus dėsnio išvedimui

Taigi, sklidimo iš taško  $P_1$  į tašką  $P_2$  trukmė  $t$  yra lygi

$$(8.16) \quad t = \frac{n_1}{c} \sqrt{l_1^2 + x^2} + \frac{n_2}{c} \sqrt{l_2^2 + (a-x)^2}.$$

Čia  $l_1, l_2$  yra statmenys į terpes ribojantį paviršių. Iš sąlygos

$$(8.17) \quad \frac{\partial t}{\partial x} = 0$$

gauname

$$(8.18) \quad \frac{n_1 x}{c \sqrt{l_1^2 + x^2}} - \frac{n_2 (a-x)}{c \sqrt{l_2^2 + (a-x)^2}} = 0.$$

Iš 8.2 brėžinio matome, kad

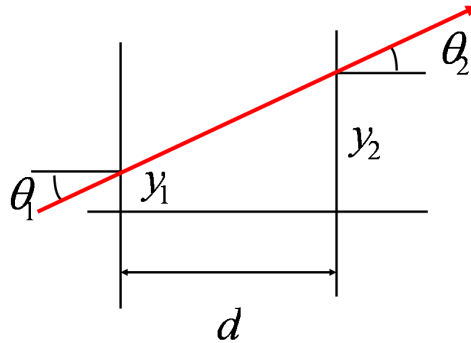
$$(8.19) \quad \frac{x}{\sqrt{l_1^2 + x^2}} = \sin \theta_i,$$

$$\frac{a-x}{\sqrt{l_2^2 + (a-x)^2}} = \sin \theta_t.$$

Čia  $\theta_i, \theta_t$  yra atitinkamai kritimo ir lūžimo kampai. Iš (8.19) ir (8.18) gauname

$$(8.20) \quad \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Ši formulė yra Snelijaus dėsnis.



8.3 pav. Laisvasis sklidimas

## 8.4. ABCD matricos

### 8.4.1. Laisvojo sklidimo matrica

Perėjus kokią nors optinę sistemą, spindulys pakeičia koordinatę  $y$  ir sklidimo kampą  $\theta$ . Optinė sistema apibūdinama ABCD matrica, kuri susieja naujus koordinatę ir kampą su senaisiais. Šis sąryšis užrašomas taip:

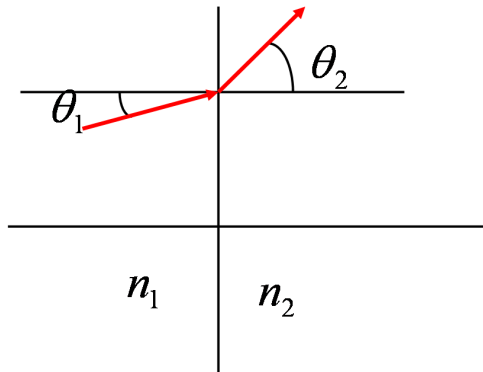
$$(8.21) \quad \begin{pmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}.$$

Paprasčiausias pavyzdys – laisvojo sklidimo ABCD matrica. Iš 8.3 schemos matome, kad

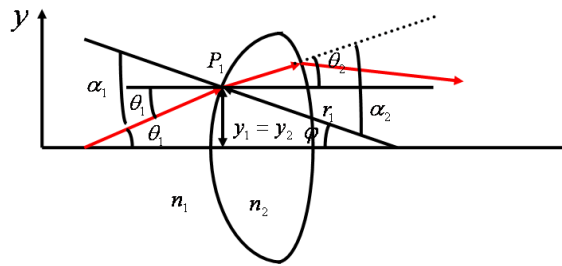
$$(8.22) \quad \begin{aligned} y_2 &= y_1 + \theta_1 d, \\ \theta_2 &= \theta_1. \end{aligned}$$

Čia  $d$  yra laisvojo sklidimo atstumas. Pirmoji lygybė galioja esant pakankamai mažiems sklidimo kampams. Taigi, laisvojo sklidimo ABCD matrica yra

$$(8.23) \quad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



8.4 pav. Lūžimas terpių sandūroje



8.5 pav. Schema lęšio matricos išvedimui

### 8.4.2. Spindulio lūžimo terpių sandūroje matrica

Spindulio lūžimas terpių sandūroje pavaizduotas 8.4 pav. Mažų kampų atveju iš Snelijaus dėsnio (8.20)

$$(8.24) \quad n_2 \theta_2 \approx n_1 \theta_1.$$

Pasinaudoję (8.24) formule ir sąryšiu  $y_1 = y_2$ , galime užrašyti lūžimo matricą:

$$(8.25) \quad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}.$$

### 8.4.3. Plonojo lęšio matrica

Pasinaudoję Snelijaus dėsniu užrašysime plonojo lęšio matricą.

Šviesos spindulio sklaidimas lęšiu pavaizduotas 8.5 pav. Lęšio paviršius yra sudarytas iš dviejų sferų, spindulių  $r_1$  bei  $r_2$ , paviršių. Rasime kampo  $\theta_2$  sąryšį su kampu  $\theta_1$ .



Mažų kampų atveju pagal Snelijaus dėsnį turime

$$(8.26) \quad n_1 \alpha_1 = n_2 \alpha_2.$$

Iš brėžinio matome, kad

$$(8.27) \quad \alpha_1 = \theta_1 + \varphi, \quad \alpha_2 = \theta_2 + \varphi.$$

Įrašę (8.27) į (8.26), gauname

$$(8.28) \quad n_1(\theta_1 + \varphi) = n_2(\theta_2 + \varphi).$$

Tačiau

$$(8.29) \quad \varphi = \frac{y_1}{r_1},$$

todėl

$$(8.30) \quad n_1 \left( \theta_1 + \frac{y_1}{r_1} \right) = n_2 \left( \theta_2 + \frac{y_1}{r_1} \right).$$

Iš šios lygties gauname kampų sąryšį:

$$(8.31) \quad \theta_2 = \frac{n_1 - n_2}{n_2 r_1} y_1 + \frac{n_1}{n_2} \theta_1.$$

Taigi, lūžimo pirmajame paviršiuje matrica užrašoma taip:

$$(8.32) \quad \begin{pmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{n_2 r_1} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}.$$

Lūžęs spindulys sklinda lęšiu atstumą  $\Delta$ . Sklidimą bendru atveju aprašo (8.23) matrica, kurioje  $d = \Delta$ . Tačiau jei lęšis plonas ir galime tarti, kad  $\Delta \approx 0$ , tuomet sklidimą aprašo vienetinė matrica. (8.32) formulėje sukeitę  $n_1$  su  $n_2$  ir vietoje  $r_1$  įrašę  $r_2$ , gauname lūžimo antrajame paviršiuje matricą:

$$(8.33) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n_1 - n_2}{n_1 r_2} & \frac{n_2}{n_1} \end{pmatrix}.$$

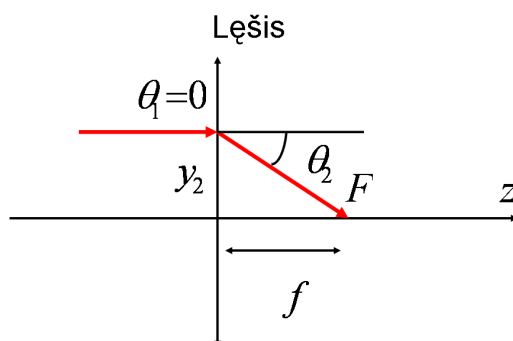
Beliko sudauginti (8.32) ir (8.33) matricas, kad gautume plonojo lęšio matricą  $M_L$ :

$$(8.34) \quad M_L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n_1 - n_2}{n_1 r_2} & \frac{n_2}{n_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{n_2 r_1} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix}.$$

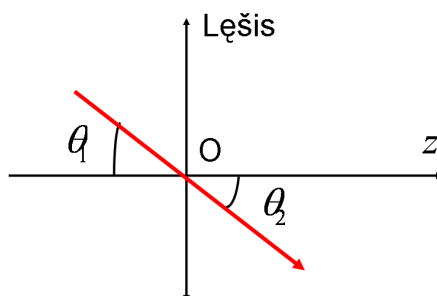
Čia

$$(8.35) \quad \frac{1}{f} = \left( 1 - \frac{n_2}{n_1} \right) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Matysime, kad  $f$  turi lęšio židinio nuotolio prasmę. Kadangi antrojo lęšio paviršiaus kreivumo centras yra neigiamoje sklidimo ašies pusėje, tai  $r_2 = -|r_2|$  [19].



8.6 pav. Lygiagretaus optinei ašiai spindulio lūžimas



8.7 pav. Spindulio sklidimas per optinį centrą

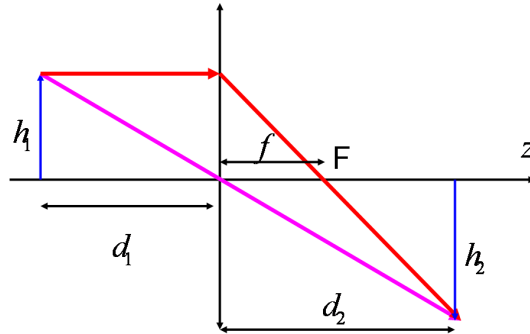
#### 8.4.4. Plonojo lęšio savybės

Panagrinėkime atvejį, kai spindulio sklidimo kampas prieš lęšį  $\theta_1 = 0$ , 8.6 pav. Pasinaudoję lęšio matricos išraiška (8.34) ir (8.21) formule, gauname

$$(8.36) \quad \begin{aligned} y_2 &= y_1, \\ \theta_2 &= -\frac{y_1}{f}. \end{aligned}$$

Kai kampai maži,  $\theta_2 \approx \tan \theta_2$ , todėl  $f$  yra atstumas nuo lęšio iki taško optinėje ašyje, kurioje kertasi lygiagretūs spinduliai. Šis taškas vadinamas lęšio židiniu.

Kitas galimas atvejis – sklidimas per optinį centrą, 8.7 pav. Vien iš sąlygos



8.8 pav. Schema plonojo lęšio formulės išvedimui

$y_1 = 0$  ir lygties

$$(8.37) \quad \begin{pmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \theta_1 \end{pmatrix}$$

gauname

$$(8.38) \quad \begin{aligned} y_2 &= 0, \\ \theta_2 &= \theta_1. \end{aligned}$$

Vadinasi, per optinį centrą spindulys sklinda nekeisdamas krypties.

Žinodami pastarąsias dvi lęšio savybes, galime išvesti plonojo lęšio formulę.

Iš 8.8 pav. matome, kad yra dvi poros panašių trikampių. Jiems galioja sąryšiai:

$$(8.39) \quad \begin{aligned} \frac{h_1}{d_1} &= \frac{h_2}{d_2}, \\ \frac{h_1}{f} &= \frac{h_2}{d_2 - f}. \end{aligned}$$

Išreiškę iš abiejų lygybių santykį  $h_1/h_2$ , gauname

$$(8.40) \quad \frac{d_1}{d_2} = \frac{f}{d_2 - f}.$$

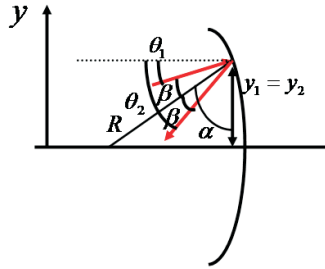
Apvertę šią lygybę užrašome

$$(8.41) \quad \frac{d_2}{f} - 1 = \frac{d_2}{d_1}$$

arba

$$(8.42) \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}.$$

Pastaroji lygybė yra plonojo lęšio formulė.



8.9 pav. Schema veidrodžio matricos išvedimui

### 8.4.5. Veidrodžio matrica

Nagrinėjant šviesos pluošto sklaidimą rezonatoriuje, svarbi yra veidrodžio matrica. Iš 8.9 pav. matome, kad

$$(8.43) \quad y_2 = y_1.$$

Po atspindžio sklaidimo kampas  $\theta_2$  8.9 pav. yra

$$(8.44) \quad \theta_2 = \theta_1 + 2\beta.$$

Be to, iš brėžinio matome, kad

$$(8.45) \quad \theta_2 + \alpha - \beta = \frac{\pi}{2},$$

čia  $\alpha$  randamas iš

$$(8.46) \quad \frac{y_2}{R} = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

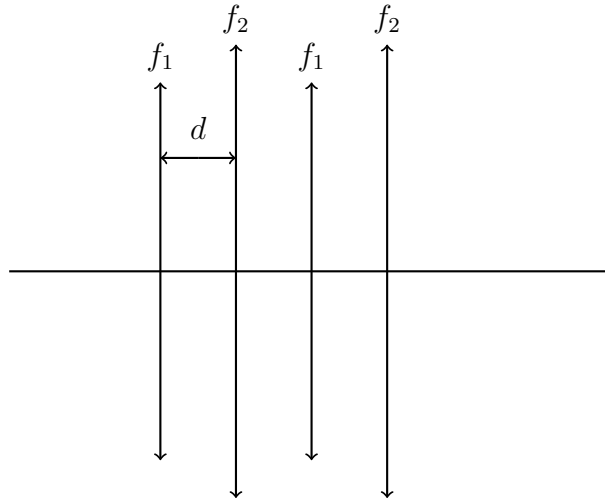
Čia  $R$  yra sferinio veidrodžio spindulys. Radę  $\beta$  iš (8.44), iš (8.43) gauname

$$(8.47) \quad \theta_2 = -\theta_1 + 2\frac{y_2}{R}.$$

Į matricą įrašome  $-\theta_2$  reikšmę. Veidrodžio matrica

$$(8.48) \quad M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix}.$$

Tokia matrica ekvivalenti lęšio matricai (8.34), kurioje  $\frac{1}{f}$  atitinka  $\frac{2}{R}$ .



8.10 pav. Biperiodinė lęšių sistema

### 8.4.6. Sklidimas per periodinę lęšių sistemą

Kadangi lęšio matrica lygiavertė sferinio veidrodžio matricai [26], tai daugkartinį atspindį rezonatoriuje galime nagrinėti kaip pluošto sklidimą per biperiodinę lęšių sistemą (8.10 pav.). Sklidimo laisva erdve atstumu  $d$  ir per lęšį židinio nuotolio  $f$  matrica yra atitinkamų matricų sandauga:

$$(8.49) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{d}{f} \end{pmatrix}.$$

Sklidimas per du lęšius, kurių židinio nuotoliai  $f_1$  ir  $f_2$ , atitiks matricą

$$(8.50) \quad \begin{pmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f_1} & 1 - \frac{d}{f_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f_2} & 1 - \frac{d}{f_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

čia

$$(8.51) \quad \begin{aligned} A &= 1 - \frac{d}{f_2}, \quad B = d \left( 2 - \frac{d}{f_2} \right), \\ C &= -\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} \left( 1 - \frac{d}{f_1} \right), \quad D = -\frac{d}{f_1} + \left( 1 - \frac{d}{f_1} \right) \left( 1 - \frac{d}{f_2} \right). \end{aligned}$$

Taigi, tokiai biperiodinei sistemai galioja sąryšiai

$$(8.52) \quad \begin{aligned} y_{s+1} &= Ay_s + B\theta_s, \\ \theta_{s+1} &= Cy_s + D\theta_s. \end{aligned}$$

Čia  $s$  žymi dviejų lęšių elemento numerį. Galime parašyti

$$(8.53) \quad \theta_s = \frac{1}{B} (y_{s+1} - Ay_s)$$

ir analogiškai

$$(8.54) \quad \theta_{s+1} = \frac{1}{B} (y_{s+2} - Ay_{s+1}).$$

Iš lygybės

$$(8.55) \quad Cy_s = \theta_{s+1} - D\theta_s$$

gauname:

$$(8.56) \quad y_{s+2} - (A + D)y_{s+1} + (AD - BC)y_s = 0.$$

Galima parodyti, kad  $AD - BC = 1$ . Todėl

$$(8.57) \quad y_{s+2} - 2by_{s+1} + y_s = 0,$$

čia

$$(8.58) \quad b = 1 - \frac{d}{f_1} - \frac{d}{f_2} + \frac{d^2}{2f_1f_2}.$$

(8.57) sprendinio ieškosime pavidalu

$$(8.59) \quad y_s = y_0 e^{isq}.$$

Įrašę jį į lygtį gauname:

$$(8.60) \quad e^{i2q} - 2be^{iq} + 1 = 0.$$

Šios lygties sprendinys

$$(8.61) \quad e^{iq} = b \pm i\sqrt{1 - b^2}.$$

Iš čia matome, kad

$$(8.62) \quad \cos(\pm q) = b.$$

Kadangi kosinusas ne didesnis už 1,  $|\cos(\pm q)| \leq 1$  arba  $|b| \leq 1$ , tai gauname tokią sistemos stabilumo sąlygą

$$(8.63) \quad 0 \leq \left(1 - \frac{d}{2f_1}\right) \left(1 - \frac{d}{2f_2}\right) \leq 1.$$

Rezonatoriaus stabilumo sąlygą gauname vietoje  $2f_1$  ir  $2f_2$  parašę atitinkamai  $R_1$  ir  $R_2$ :

$$(8.64) \quad 0 \leq \left(1 - \frac{d}{R_1}\right) \left(1 - \frac{d}{R_2}\right) \leq 1.$$

Šią stabilumo sąlygą dar gausime vėliau nagrinėdami Gauso pluoštus.

Taip pat panagrinėkime paprastesnį uždavinį, kai veidrodžių kreivumo spinduliai vienodi. Tuomet galime nagrinėti periodinę lęšių sistemą, kurioje visi lęšiai vienodi, židinio nuotolio  $f$ . Galime naudoti vieną matricą (8.49) ir užrašyti lygčių sistemą:

$$(8.65) \quad \begin{aligned} y_{s+1} &= y_s + d\theta_s, \\ \theta_{s+1} &= -\frac{1}{f}y_s + \left(1 - \frac{d}{f}\right)\theta_s. \end{aligned}$$

Iš pirmosios lygties

$$(8.66) \quad y_{s+2} = y_{s+1} + d\theta_{s+1}.$$

$\theta_{s+1}$  turime iš (8.65) antrosios lygties, į kurią  $\theta_s$  įrašome iš pirmosios lygties. Gauname

$$(8.67) \quad y_{s+2} + \left(\frac{d}{f} - 2\right)y_{s+1} + y_s = 0.$$

Kaip ir anksčiau, ieškome sprendinio (8.59) pavidalu, gauname lygtį (8.60), kurioje  $b = 1 - \frac{d}{2f}$ . Kadangi galioja stabilumo sąlyga  $|b| \leq 1$ , tai

$$(8.68) \quad 0 \leq d \leq 4f.$$

Pažymėję  $s = 2\nu$  spinduliui, atkartojančiam trajektoriją po  $\nu$  apėjimų ten ir atgal rezonatoriaus viduje, gauname

$$(8.69) \quad e^{i2\nu q} = e^{i2\pi l},$$

čia  $l$  – sveikasis skaičius. Kai  $l = 1$ , o  $\nu = 2$ , gauname  $q = \frac{\pi}{2}$ . Tuomet  $b = 0$  ir  $d = 2f$  arba

$$(8.70) \quad d = R.$$

Pastaroji sąlyga yra tenkinama konfokaliniame rezonatoriuje. Jame po dviejų apėjimų ten ir atgal spindulys grįžta į pradinę padėtį.





## 9 SKYRIUS

# Difrakcija Frenelio ir Fraunhoferio artiniuose

Kaip matėme praeitame skyriuje, remdamiesi geometrine optika galime padaryti svarbių išvadų apie šviesos sklidimą lazerio rezonatoriuje, gavome rezonatoriaus stabilumo sąlygą. Tačiau tokia teorija nieko nesako apie patį šviesos pluoštą, jo erdvinį skirstinį. Norint rasti, kokie pluoštai gali susidaryti rezonatoriuje, reikia remtis bangine optika. Šiame skyriuje pateikiama Frenelio ir Fraunhoferio difrakcijos teorija, pradėdant nuo Helmholco lygties. Remiantis šia teorija gaunamos svarbios išvados: lęšis veikia kaip prietaisas, atliekantis dvimatę Furjė pluošto amplitudės transformaciją; Fraunhoferio difrakcija, vykstanti tolimesniame lauke, taip pat iš esmės yra dvimatė Furjė transformacija. Pagaliau, pluoštas, besiformuojantis rezonatoriuje, turi būti skersinė Gauso moda.

### 9.1. Frenelio difrakcija

Nagrinėti pradėsime nuo Gauso ir Ostrogradskio teoremos:

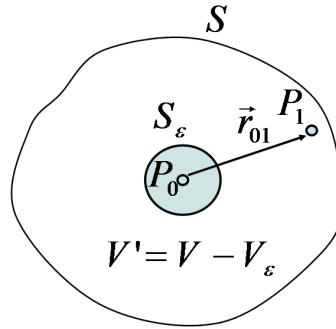
$$(9.1) \quad \int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV = \oint_S \mathbf{A} d\mathbf{S},$$

čia  $V$  yra tūris,  $S$  – šį tūrį gaubiantis paviršius. Vektorių  $\mathbf{A}$  pasirenkame tokį, kuris tenkina sąryšį

$$(9.2) \quad \mathbf{A} = \Phi \nabla G - G \nabla \Phi.$$

Įrašę (9.2) į (9.1), gauname

$$(9.3) \quad \int_V (\Phi \nabla^2 G - G \nabla^2 \Phi) dV = \oint_S (\Phi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \Phi}{\partial n}) dS.$$



9.1 pav. Schema Helmholco ir Kirkhofo teoremos išvedimui

Čia  $\mathbf{n}$  yra vienetinis vektorius vektoriaus  $d\mathbf{S}$  kryptimi, o išvestinė  $\partial/\partial n$  reiškia gradiento projekciją ta kryptimi. (9.3) yra vadinama antrąja Gryno formule.

Tegu funkcija  $\Phi$  tenkina Helmholco lygtį visame tūryje  $V$ :

$$(9.4) \quad \nabla^2 \Phi + k^2 \Phi = 0,$$

čia  $k$  – bangos skaičius. Tegu funkcijos  $G$  reikšmė bet kokiame taške, išskyrus koordinatinių pradžių  $P_0$ , yra lygi

$$(9.5) \quad G(P_1) = \exp(ikr_{01})/r_{01}.$$

Čia  $r_{01}$  yra atstumas tarp taškų  $P_0$  ir  $P_1$ , 9.1 pav. Funkcija (9.5) tenkina Helmholco lygtį (9.4) visame tūryje  $V$ , išskyrus tašką  $P_0$ , kuriame ji virsta begalybe. Tašką  $P_0$  gaubia sfera, be galo mažo spindulio  $\varepsilon$ , tūrio  $V_\varepsilon$  ir paviršiaus ploto  $S_\varepsilon$ . Už šio tūrio ribų galioja:

$$(9.6) \quad \int_{V-V_\varepsilon} (\Phi \nabla^2 G - G \nabla^2 \Phi) dV = \int_{V-V_\varepsilon} (-k^2 \Phi G + k^2 \Phi G) dV = 0.$$

Tuomet pagal antrąją Gryno formulę

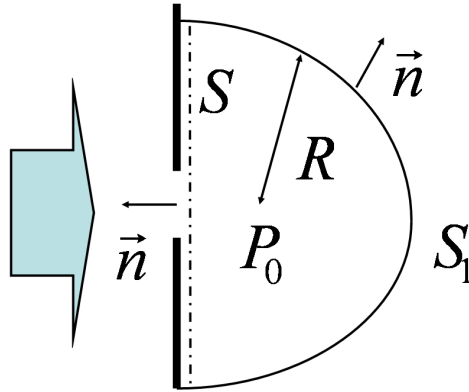
$$(9.7) \quad \int_{S+S_\varepsilon} \left( \Phi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) dS = 0.$$

Šią lygtį galime perrašyti taip:

$$(9.8) \quad - \int_{S_\varepsilon} \left( \Phi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) dS = \int_S \left( \Phi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) dS.$$

Suskaičiuosime išvestinę  $\frac{\partial G}{\partial n}$  taškui  $P_1$ , kuris gali būti ant paviršiaus  $S$  arba  $S_\varepsilon$ . Pirmuoju atveju turime

$$(9.9) \quad \frac{\partial r_{01}}{\partial n} = \text{grad}_1 r_{01} \cdot \mathbf{n} = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_{01}),$$



9.2 pav. Difrakcija per plyšį

todėl

$$(9.10) \quad \frac{\partial G}{\partial n} = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_{01}) \left( ik - \frac{1}{r_{01}} \right) G.$$

Taške ant plotelio  $S_\varepsilon$  funkcijos  $G$  reikšmė

$$(9.11) \quad G(P_1)|_{S_\varepsilon} = \frac{\exp(ik\varepsilon)}{\varepsilon}$$

ir išvestinė

$$(9.12) \quad \frac{\partial G}{\partial n}|_{S_\varepsilon} = -\frac{\partial G}{\partial \varepsilon} = \left( \frac{1}{\varepsilon} - ik \right) G.$$

Įrašę (9.12) į kairiąją (9.8) lygties pusę, gauname tokią integralo pagal nykstantai mažą plotelį  $S_\varepsilon$  reikšmę:

$$(9.13) \quad \int_{S_\varepsilon \rightarrow 0} \left( G \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS = \left( \left[ \frac{\exp(ik\varepsilon)}{\varepsilon} \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\exp(ik\varepsilon)}{\varepsilon} \left( \frac{1}{\varepsilon} - ik \right) \right] 4\pi\varepsilon^2 \right) |_{\varepsilon \rightarrow 0} \\ = -4\pi\Phi(P_0).$$

Pasinaudoję pastarąja lygybe ir (9.5) iš (9.8) gauname:

$$(9.14) \quad \Phi(P_0) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[ \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial}{\partial n} \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} \right] dS.$$

Ši lygybė vadinama Helmholco ir Kirchofo teorema. Ji leidžia nustatyti funkcijos  $\Phi$  reikšmę tam tikrame taške, jei žinoma šios funkcijos reikšmė ir jos išvestinė ant tą tašką supančio paviršiaus.

Įvertinkime  $\Phi(P_0)$  esant tipiškai difrakcijos situacijai – difrakcija per plyšį: 9.2 pav. Integralą (9.14) suskaidome į du integralus: pagal plotą  $S_1$  ir plotą  $S$ . Įvertinkime integralą pagal plotą  $S_1$ , kai spindulys  $R \rightarrow \infty$ . Tam randame išvestinę

$$(9.15) \quad \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} \right) = \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{\exp(ikR)}{R} \right) = \left( ik - \frac{1}{R} \right) \frac{\exp(ikR)}{R}.$$

Pasinaudoję (9.15) gauname

$$(9.16) \quad Q \equiv \int_{S_1} \left[ \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} \right) \right] dS =$$

$$\frac{\exp(ikR)}{R} \int_{S_1} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \left( ik - \frac{1}{R} \right) \right] dS.$$

Plotelis  $dS$  su erdviniu kampu  $d\Omega$  susijęs kaip  $dS = R^2 d\Omega$ . Tuomet

$$(9.17) \quad Q = \exp(ikR) \int_{S_1} R \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \left( ik - \frac{1}{R} \right) \right] d\Omega.$$

Kai  $R \rightarrow \infty$ , šis integralas virsta nuliu, jei tenkinama sąlyga

$$(9.18) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} R \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \left( ik - \frac{1}{R} \right) \right] = 0,$$

kuri vadinama Zomerfeldo spinduliavimo sąlyga. Ji iš tikrųjų tenkinama, kai taškas  $P_0$  yra baigtiniu atstumu nuo plyšio, o funkcija  $\Phi(R)$  aprašo sferinę bangą:  $\Phi(R) \propto \exp(ikR)/R$ .

Taigi, skaičiuojant integralą (9.14), jis palieka tik palei plyšį bei ekraną. Skaičiavimai dar labiau supaprastėja naudojant Kirkhofo artinį, kuris teigia, kad funkcijos  $\Phi$  ir  $\partial\Phi/\partial n$  tenkina tokias sąlygas:

1. Jų vertės plyšyje esant ekranui sutampa su vertėmis kai jo nėra.
2. Jų vertės ant neskaidraus ekrano lygios nuliui.

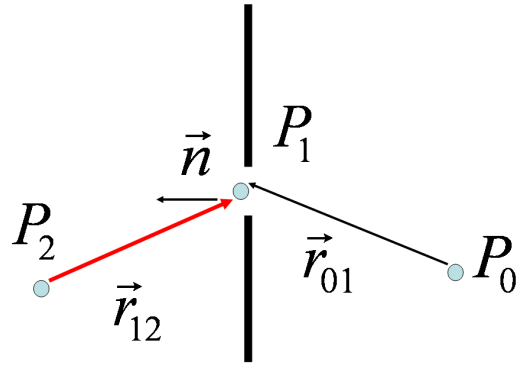
Šis artinys tinka, kai ekrano matmenys daug didesni už plyšio matmenis. Tuomet belieka integruoti palei plyšį. Taip pat pritaikysime optinį artinį, kuris teigia

$$(9.19) \quad \frac{1}{r_{01}} \ll k, \text{ arba } r_{01} \gg \lambda,$$

čia  $\lambda$  – šviesos bangos ilgis. Pritaikę šį artinį gauname

$$(9.20) \quad \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} \right) = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_{01}) \left( ik - \frac{1}{r_{01}} \right) \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}}$$

$$\approx ik \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_{01}) \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}}.$$



9.3 pav. Dar kartą difrakcija per plyšį

Pritaikę spinduliavimo sąlygą, Kirkhofo ir optinį artinius Helmholco ir Kirkhofo teoremai (9.14), gauname:

$$(9.21) \quad \Phi(P_0) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial n} - ik\Phi \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_{01}) \right] dS.$$

Čia integruojama tik pagal plyšio plotelį.

Panagrinėkime atvejį, kai į plyšį krinta sferinė banga, kurios šaltinis yra taške  $P_2$  (9.3 pav.). Tuomet

$$(9.22) \quad \Phi(P_1) = A \frac{\exp(ikr_{12})}{r_{12}},$$

čia  $A$  – amplitudė. Tuomet išvestinės

$$(9.23) \quad \frac{\partial r_{12}}{\partial n} = -\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_{12})$$

ir

$$(9.24) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = -Aik \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_{12}) \frac{\exp(ikr_{12})}{r_{12}}.$$

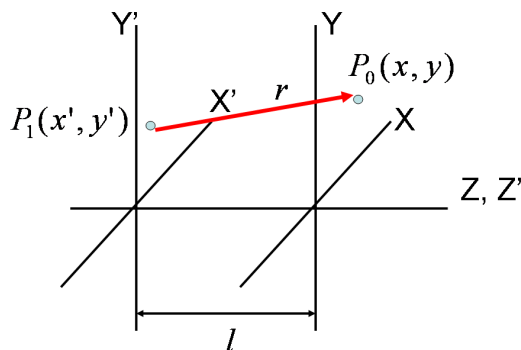
Įrašę (9.22) ir (9.24) į (9.21), gauname

$$(9.25) \quad \Phi(P_0) = -A \frac{ik}{4\pi} \int_{S_0} \frac{\exp(ik[r_{01}+r_{12}])}{r_{01}r_{12}} [\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_{12}) + \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_{01})] dS.$$

Čia integruojama pagal plyšelio paviršių  $S_0$ . Ši formulė yra vadinama Frenelio ir Kirkhofo difrakcijos formule.

Panagrinėkime, koks difrakcinis vaizdas susidaro plokštumoje  $XY$ , kai plyšio paviršių atitinka plokštuma  $X'Y'$ , 9.4 pav. Pastaroji plokštuma vadinama šaltinių plokštuma. Funkciją (9.22) pažymime kaip  $x', y'$  koordinačių funkciją:

$$(9.26) \quad \Psi(x', y') = A \frac{\exp(ikr_{12})}{r_{12}}.$$



9.4 pav. Difrakcija tarp dviejų plokštumų

Tuomet (9.25) perrašome taip

$$(9.27) \quad \Phi(x, y) = -\frac{ik}{4\pi} \int_{S'} \Psi(x', y') \frac{\exp(ikr)}{r} [\cos(\mathbf{nr}_{12}) + \cos(\mathbf{nr}_{01})] dS.$$

Čia  $r$  yra atstumas tarp taškų  $P_1$  ir  $P_0$ . Kai kampai maži, kosinusai yra lėtai kintančios funkcijos, todėl išraiška laužtiniuose skliaustuose apytiksliai lygi 2. Tuomet

$$(9.28) \quad \Phi(x, y) = \frac{k}{2\pi i} \int_{S'} \Psi(x', y') \frac{\exp(ikr)}{r} dx' dy'.$$

Čia buvo vietoje  $dS$  įrašyta  $dx' dy'$ . Be to, esant mažiems sklidimo kampams

$$(9.29) \quad r = \sqrt{l^2 + (x - x')^2 + (y - y')^2} \approx l + \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{2l},$$

čia  $l$  – atstumas tarp nagrinėjamų plokštumų. Įrašę (9.29) į (9.28), gauname

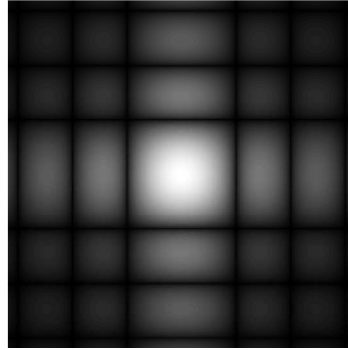
$$(9.30) \quad \Phi(x, y) = \frac{k}{2\pi i} \frac{\exp(ikl)}{l} \int_{S'} \Psi(x', y') \exp\left(\frac{ik[(x - x')^2 + (y - y')^2]}{2l}\right) dx' dy'.$$

Difrakcija, nagrinėjama (9.30) formulės artinyje, vadinama Frenelio difrakcija. Tinkinant tam tikras sąlygas, šią formulę galima supaprastinti. Gausime formulę, aprašančią Fraunhoferio difrakciją.

## 9.2. Fraunhoferio difrakcija

Kadangi

$$(9.31) \quad \frac{ik[(x - x')^2 + (y - y')^2]}{2l} = \frac{ik(x^2 + y^2)}{2l} + \frac{ik(x'^2 + y'^2)}{2l} - \frac{ik(xx' + yy')}{l},$$



9.5 pav. Fraunhoferio difrakcija už kvadrato formos apertūros

tai iš (9.30) gauname:

(9.32)

$$\Phi(x, y) = \frac{k}{2\pi i} \frac{\exp(ikl)}{l} \exp\left[\frac{ik(x^2+y^2)}{2l}\right] \int \Psi(x', y') \exp\left[\frac{ik(x'^2+y'^2)}{2l}\right] \exp\left[-\frac{ik(xx'+yy')}{l}\right] dx' dy'.$$

Kai atstumas  $l$  yra gana didelis, daugiklį  $\exp\left[\frac{ik(x'^2+y'^2)}{2l}\right]$  galima atmesti. Tiksliau kalbant, turi galioti sąlyga:

$$(9.33) \quad \frac{k(x'^2+y'^2)}{2l} < \frac{\pi}{4}$$

arba

$$(9.34) \quad l > l_{\min} = \frac{2k\rho'^2}{\pi} = \frac{4\rho'^2}{\lambda}.$$

Čia pažymėta  $\rho'^2 = x'^2 + y'^2$ . Kai  $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$ , plyšelio matmenys atitinka  $\rho' = 0,1 \text{ mm}$ , tuomet  $l_{\min} = 8 \text{ cm}$ . Vėliau, nagrinėdami parabolinę difrakcijos lygtį, matysime, kad  $l_{\min}$  yra susijęs su vadinamuoju difrakciniu, arba Relėjaus, ilgiu.

Kai tenkinama (9.34), atmetus daugiklius prieš integralą, (9.32) gali būti užrašyta taip:

$$(9.35) \quad \Phi(x, y) = \int \Psi(x', y') \exp\left[-\frac{ik(xx'+yy')}{l}\right] dx' dy'.$$

Pastaroji formulė aprašo Fraunhoferio difrakciją. Matome, kad ji atitinka dvimatę Furjė transformaciją, kurios rezultatas yra erdvinių dažnių  $k_x = kx/l$ ,  $k_y = ky/l$  funkcija.

9.5 pav. pavaizduotas difragavusios už kvadratinės apertūros bangos intensyvumo skirstinys. Jis atitinka dvimatės laiptelinės funkcijos Furjė vaizdą:

$$(9.36) \quad \Phi(x, y) = \int_{-a}^a \int_{-a}^a \exp\left[-\frac{ik(xx'+yy')}{l}\right] dx' dy'.$$

Čia  $2a$  yra kvadrato kraštinė. Šis integralas yra lygus  $4a^2 \text{sinc}(kax/l) \text{sinc}(kay/l)$ , t. y. dviejų sinc funkcijų sandaugai.

### 9.3. Užduotis. Fraunhoferio difrakcija už kvadratinės apertūros

Apskaičiuoti (9.36) integralą su „Scilab“. Gauti 9.5 pav. pateiktą vaizdą.

„Scilab“ programos ruošinys:

```

clear ; clc ; close ;

ax=10.0;
nx=64;
dx=ax/nx;
x1=-ax:dx:ax-dx; // koordinata

ak=...;
dk=ak/nx;
k=-ak:dk:ak-dk; // erdviniai dažniai

for ix=1:length(x1)
    for iy=1:length(x1)

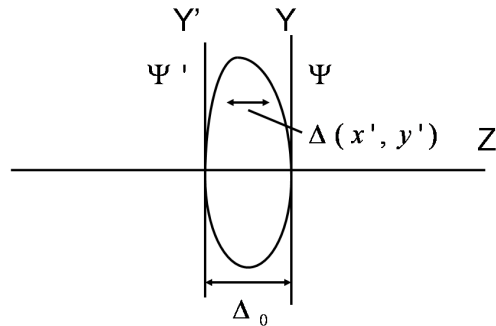
        ... // apsibrežiam matrica A(ix, iy)
    end
end

//=== dvimate Furje transformacija ==
incr=1;
xx=A;
dim=[2*nx 2*nx];
for kk=1:2
    xx=fft(xx, -1, dim(kk), incr)
    incr=incr*dim(kk)
end
//=====

s=fftshift(xx);

```





9.6 pav. Sferinis lęšis

```
//== piesimas=====
xset("colormap",graycolormap(64))
Sgrayplot(k,k,abs(s))
```

## 9.4. Užduotis. Frenelio difrakcija už kvadratinės apertūros

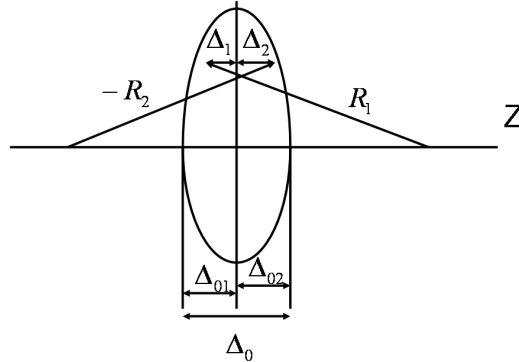
Apskaičiuoti Frenelio integralą (9.30), kai plyšys kvadratinis esant įvairiems atstumams  $l$ : nuo  $5 \mu\text{m}$  iki  $2 \text{ mm}$ . Palyginti gautą profilį atstumu  $z = 2 \text{ mm}$  su teorine formule Fraunhoferio artinyje (sinc funkcijų sandauga). Plyšio skersmuo yra  $10 \mu\text{m}$ , bangos ilgis  $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$ .

Čia pateikiamas pavyzdys, kaip su „Scilab“ skaičiuojamas vienmatis integralas:

```
clear ; clc ; close ;
```

```
x = -4:0.01:4;
y = exp(-x.^2);
```

```
s = inttrap(x,y)
```



9.7 pav. Sferinio lęšio pločio funkcija

## 9.5. Lęšis kaip Furjė prietaisas

Šiame skyrelyje parodysime, kad lęšis yra prietaisas, kuris atlieka kompleksinės amplitudės Furjė transformaciją. Funkcijos  $\Psi$  Furjė vaizdas susidaro vykstant difrakcijai, kai tenkinamas Fraunhoferio artinys, t. y. atstumas nuo plyšio yra pakankamai didelis. O lęšis transformuoja lauko amplitudę Frenelio artinyje.

Pažymėkime kompleksinės amplitudės plokštumoje prieš lęšį  $x', y'$  reikšmę  $\Psi'(x', y')$ , o plokštumoje už lęšio  $x, y - \Psi$ , 9.6 pav.  $Z$  ašis yra lęšio optinė ašis. Lęšio plotis  $\Delta$  yra koordinačių  $x', y'$  funkcija. Sklisdama per lęšį, kompleksinės amplitudės fazė pakinta dydžiu  $\delta(x', y')$ , kuris vadinamas lęšio pločio funkcija. Ji yra lygi

$$(9.37) \quad \delta(x', y') = kn\Delta(x', y') + k(\Delta_0 - \Delta(x', y')) = k\Delta_0 + k(n - 1)\Delta(x', y').$$

Čia  $n$  yra lęšio lūžio rodiklis,  $k$  bangos vektorius ore, kuris supa lęšį. Laikome, kad oro lūžio rodiklis lygus vienetui.  $\Delta_0$  yra lęšio storis (9.6 pav.). Lęšio pralaidumo koeficientas yra lygus

$$(9.38) \quad \tau(x', y') = \exp(i\delta(x', y')) = \exp(ik\Delta_0) \exp(ik(n - 1)\Delta(x', y')).$$

Norint rasti  $\Psi$  reikšmę už lęšio, kuri yra lygi

$$(9.39) \quad \Psi(x', y') = \tau(x', y')\Psi'(x', y'),$$

reikia rasti lęšio pločio funkciją.

Iš 9.7 pav. matome, kad

$$(9.40) \quad \begin{aligned} \Delta &= \Delta_1 + \Delta_2, \\ \Delta_0 &= \Delta_{01} + \Delta_{02}. \end{aligned}$$

Pažymėkime  $\rho^2 = x'^2 + y'^2$ . Galime užrašyti

$$\Delta_1 = \Delta_{01} - \left( R_1 - \sqrt{R_1^2 - \rho^2} \right), \quad (9.41)$$

$$\Delta_2 = \Delta_{02} - \left( R_2 - \sqrt{R_2^2 - \rho^2} \right).$$

Surašę (9.41) išraiškas į (9.40) pirmąją lygtį ir pasinaudoję antrąja (9.40) lygtimi, gauname

$$\Delta = \Delta_0 - R_1 \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_1^2}} \right) + R_2 \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_2^2}} \right). \quad (9.42)$$

Čia atsižvelgta į tai, kad  $\sqrt{R_1^2} = R_1$ ,  $\sqrt{R_2^2} = -R_2$ . Plonam lęšiui čia užrašytas šaknis galime skleisti eilute. Tuomet

$$\Delta = \Delta_0 - \frac{x'^2 + y'^2}{2} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (9.43)$$

Kai išvedėme plonojo lęšio ABCD matricą, buvome gavę židinio nuotolio  $f$  išraišką. Kai lęšio lūžio rodiklis  $n$ , o aplinkos lūžio rodiklis 1, tuomet

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (9.44)$$

Pasinaudoję pastarąja formule, gauname

$$\Delta = \Delta_0 - \frac{x'^2 + y'^2}{2f(n-1)}. \quad (9.45)$$

Taigi lęšio pralaidumo koeficientas (9.38) yra lygus

$$\tau(x', y') = \exp(ikn\Delta_0) \exp(-ik \frac{x'^2 + y'^2}{2f}). \quad (9.46)$$

Įrašykime lęšio apertūros funkciją  $P$ , kuri

$$P(x', y') = 1 \text{ lęšio ribose,} \quad (9.47)$$

$$P(x', y') = 0 \text{ už lęšio ribų.}$$

Tuomet

$$\Psi(x', y') = \exp(ikn\Delta_0) \Psi'(x', y') P(x', y') \exp(-ik \frac{x'^2 + y'^2}{2f}). \quad (9.48)$$

Įrašę (9.48) išraišką į (9.30) formulę, aprašančią difrakciją Frenelio artinyje, ir  $l$  prilyginę  $f$ ,  $l = f$ , gauname

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \frac{k}{2\pi i} \frac{\exp(ikf + ikn\Delta_0)}{f} \exp\left( ik \frac{(x^2 + y^2)}{2f} \right) \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi'(x', y') P(x', y') \exp\left( -\frac{ik(xx' + yy')}{f} \right) dx' dy'. \end{aligned} \quad (9.49)$$

Iš pastarosios formulės matyti, kad lęšio židinio plokštumoje ( $l = f$ ) susidaro funkcijos  $\Psi'$ , padaugintos iš apertūros funkcijos, dvimatis Furjė vaizdas. Erdviniai dažniai yra  $k_x = kx/f$ ,  $k_y = ky/f$ .



## 10 SKYRIUS

# Parabolinės difrakcijos lygties sprendimas

Frenelio ir Fraunhoferio difrakcijos formulės buvo išvestos remiantis Helmholco lygtimi. Buvo gauti šios lygties sprendiniai. Tačiau iš Helmholco lygties galime gauti parabolinę difrakcijos lygtį ir ieškoti jos sprendinių. Parabolinė difrakcijos lygtis atitinka gretaąsį (paraksialų) artinį; būtent šiame artinyje nagrinėjamas Frenelio difrakcijos uždavinys. Kitame skyriuje užrašysime analizinius parabolinės lygties sprendinius. Čia sutelksime dėmesį į skaitmeninį lygties modeliavimą.

### 10.1. Išvedimas iš Helmholco lygties

Dar kartą perrašysime Helmholco lygtį:

$$(10.1) \quad \Delta E + k_0^2 E = 0,$$

čia  $k_0 = \omega n/c$  – bangos skaičius,  $\omega$  – monochromatinės bangos ciklinis dažnis,  $n$  – lūžio rodiklis,  $c$  – šviesos greitis vakuume,  $E$  – elektrinio lauko stipris. Ieškosime šios lygties sprendinio tokiu pavidalu:

$$(10.2) \quad E(x, y, z, t) = A(x, y, z) \exp(-ik_0 z + i\omega t).$$

Čia  $x$ ,  $y$ ,  $z$  – Dekarto koordinatės,  $t$  – laikas,  $A$  – kompleksinė amplitudė. Įrašę (10.2) į (10.1), gauname:

$$(10.3) \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) A + \frac{\partial^2}{\partial z^2} A + 2ik_0 \frac{\partial A}{\partial z} = 0.$$

Laikysime, kad kompleksinė amplitudė  $A$  aprašo bangų paketą ir galioja lėtai kintančių amplitudžių artinys:

$$(10.4) \quad \frac{\partial A}{\partial z} \ll k_0 A.$$

Tuomet iš (10.3) lygties galime pašalinti antrąją išvestinę pagal  $z$  ir gauname

$$(10.5) \quad \frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{i}{2k_0} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) A.$$

Ši lygtis vadinama paraboline difrakcijos lygtimi.

Prisiminkime Helmholco lygties sprendinio išraišką Frenelio difrakcijos atveju (9.30). Šioje formulėje pakeiskime  $l \rightarrow -z$ ,  $k \rightarrow k_0$  ir pažymėkime  $\Phi = A(x, y, z) \exp(-ik_0 z)$ . Iš šios išraiškos gauname amplitudę  $A$ , kuri tenkina (10.5) parabolinės difrakcijos lygtį. Tai galime patikrinti tiesiog įrašę  $A$  į (10.5). Vadinasi, lauko amplitudė Frenelio artinyje yra parabolinės difrakcijos lygties sprendinys. Iš tikrųjų Frenelio artinyje yra taikomas gretaašis artinys, kitaip tariant, laikoma, kad sklidimo kampai yra maži. O išvedant parabolinę difrakcijos lygtį atsižvelgiama į (10.4) sąlygą, kuri atitinka bangų paketo artinį. Kad gretaašis artinys ir (10.4) sąlyga atitinka vienas kitą, įsitikinsime aptardami bangų paketo sąvoką.

## 10.2. Sprendimas naudojant Furjė transformaciją

Parabolinę difrakcijos lygtį (10.5) galima spręsti pasitelkus Furjė transformaciją. Pluošto kompleksinės amplitudės  $A$  dvimatis Furjė vaizdas  $S$ :

$$(10.6) \quad S(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(x, y) \exp(ik_x x + ik_y y) dx dy.$$

Išvestinės  $\frac{\partial A}{\partial x}$  Furjė vaizdas:

$$(10.7) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial A}{\partial x} \exp(ik_x x + ik_y y) dx dy = -ik_x S(k_x, k_y).$$

Analogiškai randamas (10.5) lygties dešinėje pusėje užrašytų antrosios eilės išvestinių Furjė vaizdas:

$$(10.8) \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) A \Rightarrow -(k_x^2 + k_y^2) S.$$

Atlikę (10.5) lygties dvimatę Furjė transformaciją, gauname

$$(10.9) \quad \frac{\partial S}{\partial z} = \frac{i}{2k_0} (k_x^2 + k_y^2) S.$$

Šios lygties sprendinys

$$(10.10) \quad S = S_0 \exp \left[ \frac{i}{2k_0} (k_x^2 + k_y^2) z \right],$$

čia

$$(10.11) \quad S_0(k_x, k_y) = S(k_x, k_y, z = 0).$$

Taigi, parabolinė difrakcijos lygtis sprendžiama tokia tvarka: žinant kompleksinę amplitudę  $z = 0$  plokštumoje, randamas jos Furjė vaizdas (erdvinis spektras)  $S_0$ . Jį įrašius į (10.10), gaunamas bet kokio  $z$  spektras. Atlikus spektrinės amplitudės  $S(k_x, k_y, z)$  atvirkštinę Furjė transformaciją, gaunama ieškoma kompleksinė amplitudė  $A(x, y, z)$ . Parodysime tokį parabolinės difrakcijos lygties sprendimo būdą tarę, kad pradinis pluošto skirstinys  $A(x, y, z = 0) = A_0(x, y)$  yra Gauso funkcijos pavidalo:

$$(10.12) \quad A_0(x, y) = a_v \exp \left( -\frac{x^2 + y^2}{\rho_0^2} \right).$$

Rasime šios išraiškos dvimatį Furjė vaizdą. Kadangi

$$(10.13) \quad \begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left( -\frac{x^2}{\rho_0^2} + ik_x x \right) dx = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left( -\left[ \frac{x}{\rho_0} - \frac{ik_x \rho_0}{2} \right]^2 \right) \exp \left( -\frac{k_x^2 \rho_0^2}{4} \right) dx = \\ & = \sqrt{\pi} \rho_0 \exp \left( -\frac{k_x^2 \rho_0^2}{4} \right), \end{aligned}$$

tai

$$(10.14) \quad S_0(k_x, k_y) = a_v \rho_0^2 \pi \exp \left( -\frac{(k_x^2 + k_y^2) \rho_0^2}{4} \right).$$

Įrašę (10.14) į (10.10), gauname

$$(10.15) \quad S(k_x, k_y, z) = a_v \rho_0^2 \pi \exp \left( (k_x^2 + k_y^2) \left( \frac{iz}{2k_0} - \frac{\rho_0^2}{4} \right) \right).$$

Beliko rasti pastarosios išraiškos atvirkštinį Furjė vaizdą. Tai yra dvilypis integralas pagal  $k_x$  ir  $k_y$ . Suskaičiuosime integralą pagal  $k_x$ :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(k_x^2 \left[-\frac{\rho_0^2}{4} + i\frac{z}{2k_0}\right]\right) \exp(-ik_x x) dk_x = \\
 & = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\left[k_x \sqrt{\frac{\rho_0^2}{4} - i\frac{z}{2k_0}} + \frac{ix}{2\sqrt{\frac{\rho_0^2}{4} - i\frac{z}{2k_0}}}\right]^2\right) \times \\
 (10.16) \quad & \times \exp\left(-\frac{x^2}{4\left(\frac{\rho_0^2}{4} - i\frac{z}{2k_0}\right)}\right) dk_x = \\
 & = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{\rho_0^2\left(1 - i\frac{2z}{k_0\rho_0^2}\right)}\right) \frac{1}{\frac{\rho_0}{2}\sqrt{1 - i\frac{2z}{k_0\rho_0^2}}}.
 \end{aligned}$$

Integralas pagal  $k_y$  skaičiuojamas analogiškai. Rezultatas:

$$(10.17) \quad A(x, y, z) = a \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\rho_k^2}\right),$$

čia

$$(10.18) \quad a = \frac{a_v}{1 - i\frac{z}{l_d}}, \quad \rho_k = \rho_0 \sqrt{1 - i\frac{z}{l_d}},$$

o  $l_d$  yra difrakcinis ilgis:

$$(10.19) \quad l_d = \frac{k_0 \rho_0^2}{2}.$$

Prisiminkime Fraunhoferio difrakciją. Buvo parodyta, kad nuo Frenelio difrakcijos prie Fraunhoferio galima pereiti, nagrinėjant difrakciją atstumais, didesniais už  $l_{\min} = 2k\rho_0^2/\pi$  ((9.34) formulė). Matome, kad atstumas  $l_{\min}$  yra palyginamas su difrakciniu ilgiu, (10.19) išraiška. Taigi, difrakcinis ilgis parodo, nuo kur prasideda tolimas laukas, kuriame vyksta Fraunhoferio difrakcija.

### 10.3. Gretaašis artinys

Parabolinė difrakcijos lygtis (10.5) buvo gauta iš Helmholco lygties, remiantis lėtai kintančių amplitudžių artiniu (10.4). Šiame skyrelyje išvesime šią lygtį, remdamiesi kitu artiniu – gretaašiu. Kitame skyrelyje parodysime, kad abu šie artiniai atitinka bangų paketo sąlygą.



Taigi, dar kartą užrašykime Helmholtco lygtį elektrinio lauko amplitudei  $E$ :

$$(10.20) \quad \Delta E + k_0^2 E = 0.$$

$E(x, y, z)$  su dvimačiu Furjė atvaizdu  $F(k_x, k_y, z)$  susijęs sąryšiu

$$(10.21) \quad E(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(k_x, k_y, z) \exp(-ik_x x - ik_y y) dk_x dk_y.$$

Laplasianą  $\Delta$  užrašome pagal Dekarto koordinates:

$$(10.22) \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Tuomet, įrašę (10.21) į (10.20), gauname

$$(10.23) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + (k_0^2 - k_x^2 - k_y^2) F \right) \exp(-ik_x x - ik_y y) dk_x dk_y = 0.$$

Kadangi ši lygybė turi galioti visiems  $x, y$ , tai galime užrašyti:

$$(10.24) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + (k_0^2 - k_x^2 - k_y^2) F = 0.$$

Šios diferencialinės lygties sprendinys yra

$$(10.25) \quad F(k_x, k_y, z) = F_0(k_x, k_y) \exp(\pm i \sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2} z),$$

čia  $F_0(k_x, k_y)$  – dydžio  $E_0(x, y) = E(x, y, 0)$  Furjė vaizdas:

$$(10.26) \quad F_0(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(x, y) \exp(ik_x x + ik_y y) dx dy.$$

Remiantis gretaašiu artiniu daroma prielaida, kad pluošto bangos vektoriaus skersiniai komponentai  $k_x, k_y$  yra daug mažesni negu bangų skaičius  $k_0$ :

$$(10.27) \quad |k_x|, |k_y| \ll k_0.$$

Tuomet pošaknį (10.26) išraiškoje galime paskleisti Teiloro eilute:

$$(10.28) \quad \sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2} \approx k_0 - \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k_0}.$$

Pažymėję

$$(10.29) \quad F(k_x, k_y, z) = S(k_x, k_y, z) e^{-ik_0 z},$$

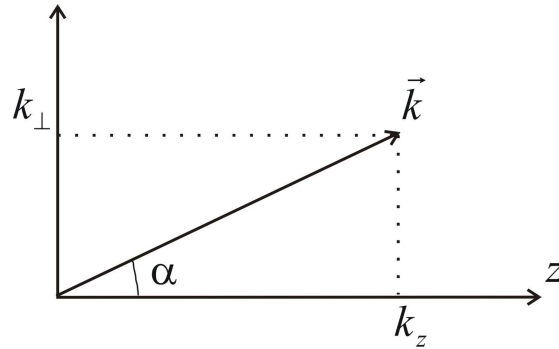
iš (10.25) gauname

$$(10.30) \quad S(k_x, k_y, z) = S_0(k_x, k_y) \exp\left(i \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k_0} z\right),$$

čia  $S_0(k_x, k_y) = F_0(k_x, k_y)$ , ir (10.25) lygtyje eksponentės rodiklyje pasirinktas ženklas  $-$ . Aiškiai matyti, kad (10.30) yra lygties

$$(10.31) \quad \frac{\partial S}{\partial z} = i \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k_0} S$$

sprendinys. Gavome lygtį, sutampančią su (10.9). Kaip matėme, ji išvedama iš parabolines difrakcijos lygties (10.5) ir  $S$  yra kompleksinės amplitudės  $A$  Furjė vaizdas.



10.1 pav. Bangos vektorius

## 10.4. Bangų paketas

(10.14) išraiška atitinka Gauso pluošto erdvinį spektrą sąsmaukoje:

$$(10.32) \quad S_0(k_x, k_y) = a_v \rho_0^2 \pi \exp\left(-\frac{(k_x^2 + k_y^2) \rho_0^2}{4}\right).$$

Dydžiai  $k_x$ ,  $k_y$  yra vektoriaus  $\mathbf{k}$  skersiniai komponentai. Kaip matome iš 10.1 pav.,  $\mathbf{k}$  sudaro tam tikrą kampą  $\alpha$  su pluošto sklidimo kryptimi  $z$ . Skersinis vektoriaus komponentas

$$(10.33) \quad k_{\perp} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$$

gali būti skaičiuojamas pagal

$$(10.34) \quad k_{\perp} = k \sin \alpha$$

ir kompleksinės amplitudės Furjė vaizdą  $S_0$  galime užrašyti kaip kampo  $\alpha$  funkcija:

$$(10.35) \quad S_0(\alpha) = a_v \rho_0^2 \pi \exp\left(-\frac{k^2 \rho_0^2 \sin^2 \alpha}{4}\right).$$

Jei galioja gretaasis artinys, galime rašyti  $\sin \alpha \approx \alpha$ , ir

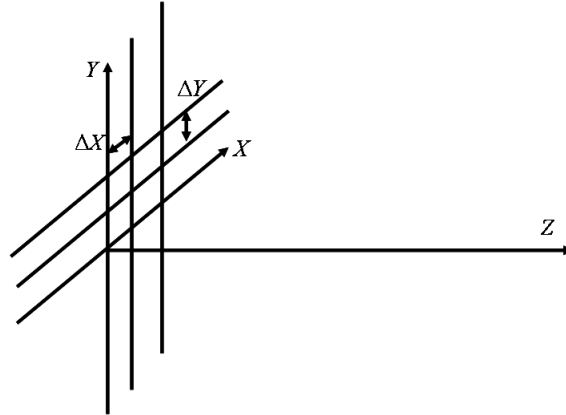
$$(10.36) \quad S_0(\alpha) = a_v \rho_0^2 \pi \exp\left(-\frac{k^2 \rho_0^2 \alpha^2}{4}\right).$$

Rasime funkcijos  $|S_0|^2$  plotį  $\Delta\alpha$  pusės aukštyje iš sąlygos

$$(10.37) \quad \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right)^2 k^2 \rho_0^2\right) = \frac{1}{2}.$$

Iš (10.37) užrašome

$$(10.38) \quad \Delta\alpha = \frac{2\sqrt{(2 \ln 2)}}{k \rho_0}.$$



10.2 pav. Diskretizavimo gardelė

Iš gretašio artinio sąlygos

$$(10.39) \quad \Delta\alpha \ll 1$$

ir (10.38) lygties gauname, kad

$$(10.40) \quad \rho_0 \gg \lambda.$$

Ši sąlyga yra analogiška impulso, kuriam gali būti taikomas lėtai kintančių amplitudžių artinys, sąlygai:

$$(10.41) \quad \tau \gg T,$$

čia  $T$  – virpesių periodas,  $\tau$  – impulso trukmė. Impulsai, tenkinantys šią sąlygą, yra vadinami laikiniais bangų paketais. O (10.40) sąlygą atitinkantys pluoštai yra erdviniai bangų paketai.

## 10.5. Parabolinės difrakcijos lygties modeliavimas

Prieš modeliuojant (10.5) lygtį patartina sunormuoti. Įrašę bedimensius kintamuosius

$$(10.42) \quad X = \frac{x}{\rho_0}, \quad Y = \frac{y}{\rho_0}, \quad Z = \frac{z}{l_d},$$

čia

$$(10.43) \quad l_d = \frac{k_0 \rho_0^2}{2},$$

gauname lygtį

$$(10.44) \quad \frac{\partial A}{\partial Z} = -\frac{i}{4} \left( \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \right) A.$$

Ši lygtis modeliuojama pirmuoju Oilerio metodu, kaip buvo modeliuojama paprasčiausia banginė lygtis. Antrosios eilės dalinės išvestinės diskretizuojamos pasinaudojus skleidiniu Teiloro eilute. Turime

$$(10.45) \quad \begin{aligned} A(X + \Delta X, Y, Z) &= A(X, Y, Z) + \Delta X \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{(\Delta X)^2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}, \\ A(X - \Delta X, Y, Z) &= A(X, Y, Z) - \Delta X \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{(\Delta X)^2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}, \end{aligned}$$

čia  $\Delta X$  – žingsnis pagal  $X$  ašį, 10.2 pav. Sudėję šias dvi lygybes, gauname antrosios eilės išvestinę pagal  $X$ :

$$(10.46) \quad \frac{\partial^2 A}{\partial X^2} = \frac{1}{(\Delta X)^2} (A(X + \Delta X, Y, Z) + A(X - \Delta X, Y, Z) - 2A(X, Y, Z)).$$

Analogiškai galime išreikšti antrąją išvestinę pagal  $Y$ :

$$(10.47) \quad \frac{\partial^2 A}{\partial Y^2} = \frac{1}{(\Delta Y)^2} (A(X, Y + \Delta Y, Z) + A(X, Y - \Delta Y, Z) - 2A(X, Y, Z)),$$

čia  $\Delta Y$  – žingsnis pagal  $Y$  ašį. Pradžioje turi būti žinomas skirstinys  $A_0(X, Y) = A(X, Y, Z = 0)$ . Bendra diskretizavimo schema atrodo taip:

$$(10.48) \quad \begin{aligned} A(X, Y, Z + \Delta Z) &= A(X, Y, Z) - \\ &- \frac{i}{4} \frac{\Delta Z}{(\Delta X)^2} (A(X + \Delta X, Y, Z) + A(X - \Delta X, Y, Z) - 2A(X, Y, Z)) - \\ &- \frac{i}{4} \frac{\Delta Z}{(\Delta Y)^2} (A(X, Y + \Delta Y, Z) + A(X, Y - \Delta Y, Z) - 2A(X, Y, Z)). \end{aligned}$$

Skaičiavimų tikslumas yra susijęs su dydžiu  $\Delta Z/(\Delta X)^2$ , kai  $\Delta X = \Delta Y$ . Taikant mažesnį žingsnį pagal skersines koordinates, žingsnis  $\Delta Z$  turi mažėti sparčiau – pagal kvadratinį dėsnį.

## 10.6. Parabolinės difrakcijos lygties modeliavimas su "Scilab". Užduotis

Modeliuojant parabolinę difrakcijos lygtį, reikia rašyti dvigubą ciklą pagal  $x$  ir  $y$ , imant antros eilės dalines išvestines. Tačiau skaičiavimai „Scilab“ programa labai

pagreitės, jei vietoje ciklo naudosome sąsūkos operaciją „convol“. Paprastumo dėlei panagrinėkime lygtį su viena daline išvestine, atmetę  $y$  koordinatę:

$$(10.49) \quad \frac{\partial A}{\partial Z} = -\frac{i}{4} \frac{\partial^2 A}{\partial X^2}.$$

Mums reikia sudaryti vektorių  $D$ , atitinkantį antrosios eilės išvestinę pagal  $x$ :

$$(10.50) \quad D(n) = A(n+1) + A(n-1) - 2A(n).$$

Tokį vektorių galima gauti atlikus sąsūkos operaciją „convol(A, F)“ su vektoriumi  $F=[1 \ -2 \ 1]$ . Dviejų vektorių sąsūka yra suma

$$(10.51) \quad D_c(n) = \sum_k A(k)F(n-k+1).$$

Galima parodyti, kad

$$(10.52) \quad D(n) = D_c(n+1).$$

Pilnosios parabolinės difrakcijos lygties atveju reikėtų atlikti dvimatę sąsūką su matrica  $F=[0 \ 1 \ 0; 1 \ -4 \ 1; 0 \ 1 \ 0]$ .

Toliau pateikiame programos, kuri modeliuoja (10.49) lygtį, kodą.

```
clear ; clc ; close ;
```

```
ax=10.0;
nx=64;
dx=ax/nx;
x1=-ax:dx:ax-dx; // koordinate
```

```
A0=exp(-x1.^2); // pradine salyga
```

```
F=[1 -2 1];
A=A0;
dz=0.01;
```

```
for iz=1:100
    z=iz*dz;
    Dx=convol(A0,F); // antros eiles isvestine
    A=A0-%i/4*dz/dx.^2*Dx(2:length(x1)+1);
    A0=A;
```

```
Ateor=1/sqrt(1+%i*z)*exp(-x1.^2/(1+%i*z)) // teorine formule
```

```
//piesimas  
drawlater ();  
delete (gce ());  
plot (x1, abs(A).^2, 'b-', x1, abs(Ateor).^2, 'ro');  
set (gca(), 'data_bounds', [-ax, 0; ax, 1])  
drawnow ();  
sleep (20)  
//piesimas  
end
```

**Užduotis.** Sumodeliuoti parabolinę difrakcijos lygtį (10.5) dviem būdais, aprašytais 10.5 ir 10.6 skyreliuose.

# 11 SKYRIUS

## Gauso pluoštai

Pagaliau, susipažinę su Frenelio ir Fraunhoferio difrakcija bei paraboline difrakcijos lygtimi, galime pereiti prie pluoštų, kurie susidaro lazerio rezonatoriuje, nagrinėjimo. Smulkiau panagrinėsime Ermito ir Gauso bei Lagero ir Gauso pluoštus. Taip pat aptarsime Beselio ir Gauso pluoštus bei optinius sūkurius.

### 11.1. Bendražidinio rezonatoriaus skersinės modos

Skyriuje apie geometrinę optiką buvome gavę stabiliaus rezonatoriaus sąlygą (8.70). Tai yra bendražidinis (konfokalus) rezonatorius, kuriame atstumas tarp veidrodžių yra lygus  $R$ . Laikydami, kad atstumas tarp veidrodžių daug didesnis už veidrodžio matmenis, galime taikyti (9.35) Fraunhoferio difrakcijos formulę. Joje  $l = R$ , o  $\Phi$  ir  $\Psi$  yra skirstiniai ant pirmo bei antro veidrodžių. Stabiliame rezonatoriuje šie skirstiniai sutampa, tuomet

$$(11.1) \quad \Phi(x, y) = \int \Phi(x', y') \exp \left[ -\frac{ik(xx' + yy')}{R} \right] dx' dy'.$$

Čia integruojama pagal veidrodžio paviršių. Tare, kad  $\Phi$  veidrodžio kraštuose slops-ta, integralo ribas galime praplėsti į begalybę:

$$(11.2) \quad \Phi(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x', y') \exp \left[ -\frac{ik(xx' + yy')}{R} \right] dx' dy'.$$

Tarkime, kad  $\Phi(x, y) = f(x)g(y)$  faktorizuojami. Tuomet reikia spręsti lygtį

$$(11.3) \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \exp \left[ -\frac{ik(xx')}{R} \right] dx'.$$

Nesunku įsitikinti, kad šios lygties sprendinys yra Gauso funkcija

$$(11.4) \quad f(x) \propto \exp \left( -\frac{kx^2}{2R} \right).$$

Bendru atveju lazerio rezonatoriuje gali susidaryti ir aukštesnės eilės erdvinės modos, kurios tenkina (11.2) lygtį. Tai yra, jų dvimatis Furjė vaizdas yra toks pat skirstinys kaip ir transformuojama funkcija. Tokią sąlygą tenkina Gauso pluoštai: Ermito ir Gauso bei Lagero ir Gauso. Panagrinėsime juos nuodugniau.

## 11.2. Ermito ir Gauso pluoštai

Norint gauti Ermito ir Gauso pluošto keitimąsi nuo sklaidimo koordinatės  $z$ , reikia spręsti parabolinę difrakcijos lygtį. Sprendimą pateiksime toliau (11.8 skyrelyje), o dabar užrašysime atsakymą:

$$(11.5) \quad A_{lm}(x, y, z) = a_v^{lm} \frac{\rho_0}{\rho(z)} H_l \left[ \frac{\sqrt{2}x}{\rho(z)} \right] H_m \left[ \frac{\sqrt{2}y}{\rho(z)} \right] \times \\ \times \exp \left[ -\frac{x^2+y^2}{\rho^2(z)} - ik_0 \frac{x^2+y^2}{2R(z)} + i(l+m+1) \arctan \left( \frac{z}{l_d} \right) \right],$$

čia  $a_v^{lm}$  – amplitudė,  $l, m$  – modos numeriai,  $\rho(z) = \rho_0 \sqrt{1 + \left( \frac{z}{l_d} \right)^2}$ ,  $\rho_0$  apibūdina pluošto matmenis sąsmaukoje ( $z = 0$ ),  $l_d = \frac{k_0 \rho_0^2}{2}$  – difrakcinis nuotolis,

$$(11.6) \quad R(z) = z \left( 1 + \frac{l_d^2}{z^2} \right)$$

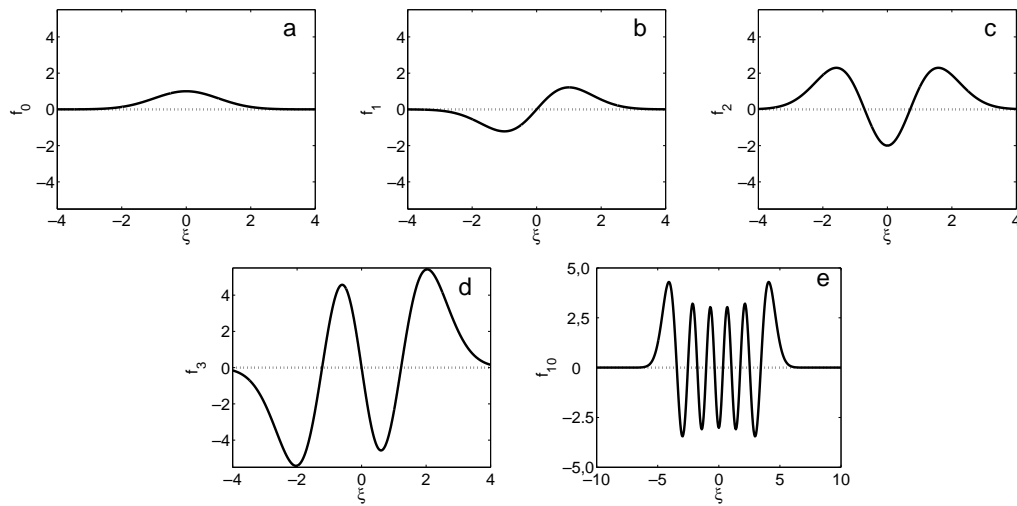
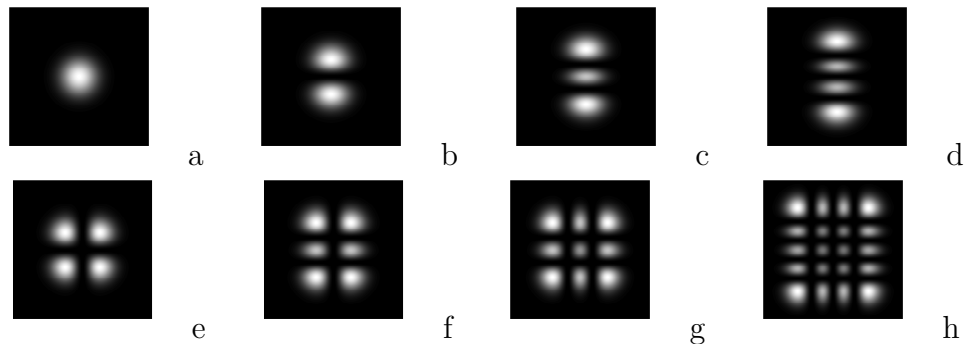
yra kreivumo spindulys. Dydis  $(l+m+1) \arctan \left( \frac{z}{l_d} \right)$  (11.5) išraiškos eksponentės rodiklyje yra Guji fazė.  $H_l$  žymi Ermito daugianarį (polinomą), apibrėžiamą kaip

$$(11.7) \quad H_l(\xi) = (-1)^l \exp(\xi^2) \frac{d^l}{d\xi^l} \exp(-\xi^2).$$

Iš šios formulės randame, kad

$$(11.8) \quad H_0(\xi) = 1, \quad H_1(\xi) = 2\xi, \quad H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2, \quad H_3(\xi) = 8\xi^2 - 12\xi$$



11.1 pav. Funkcija  $f_l(\xi)$ , kai  $l$ : 0 (a), 1 (b), 2 (c), 3 (d), 10 (e)11.2 pav. Ermito ir Gauso pluoštų intensyvumo skirstiniai.  $(l, m)$ : (0,0) (a); (0,1) (b); (0,2) (c); (0,3) (d); (1,1) (e); (1,2) (f); (2,2) (g); (3,4) (h)

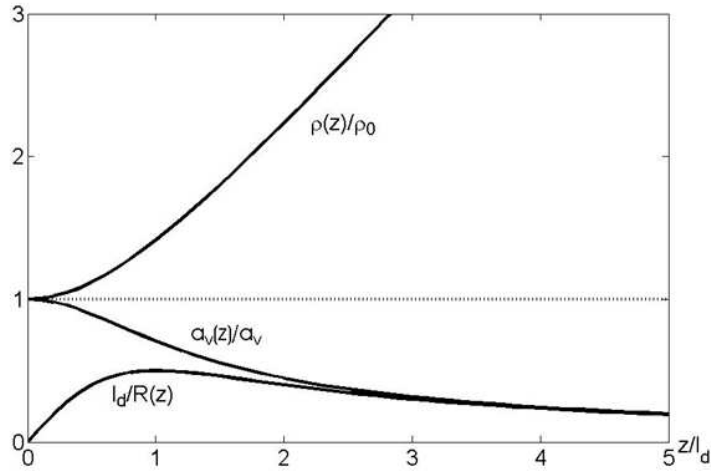
ir t. t. Galioja rekurenčioji formulė

$$(11.9) \quad H_{l+1}(\xi) = 2\xi H_l(\xi) - 2l H_{l-1}(\xi).$$

11.1 pav. pavaizduoti funkcijos  $f_l(\xi) = H_l(\xi) \exp(-\xi^2)$ , čia  $\xi = \sqrt{2}x/\rho$ , grafiškai. Gauso pluošto intensyvumą ( $\propto |A|^2$ ) atitinka funkcija

$$(11.10) \quad I_{lm}(\xi, \eta) = f_l^2(\xi) f_m^2(\eta) = H_l^2(\xi) H_m^2(\eta) \exp(-\xi^2 - \eta^2).$$

Šis skirstinys, esant įvairiems  $l$  ir  $m$ , pavaizduotas 11.2 pav. Atkreipsime dėmesį, kad sklaidimo metu Ermito ir Gauso pluošto gaubtinė nekinta, keičiasi tik jo parametrai.

11.3 pav. Gauso pluošto parametų priklausomybė nuo sklidimo nuotolio  $z$ 

### 11.3. Gauso pluoštas

Kai  $l = m = 0$ , (11.5) amplitudė aprašo Gauso pluoštą:

$$(11.11) \quad A_{00}(x, y, z) = a_v \frac{\rho_0}{\rho(z)} \exp \left[ -\frac{x^2 + y^2}{\rho^2(z)} - ik_0 \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} + i \arctan \left( \frac{z}{l_d} \right) \right].$$

Tolstant nuo pluošto sąsmaukos ( $z = 0$ ), kurioje pluošto spindulys mažiausias ( $\rho(0) = \rho_0$ ), vyksta pluošto difrakcija. Jos metu pluošto spindulys  $\rho(z)$  didėja, o amplitudė  $a_v(z) = a_v \rho_0 / \rho(z) = a_v / \sqrt{1 + z^2/l_d^2}$  mažėja, žr. 11.3 pav. Kitas parametras  $R(z)$  gretaišiam (mažų kampų, paraksialiam) artinyje aprašo kreivumo spindulį. Panagrinėkime fazinį daugiklį

$$(11.12) \quad \exp \left( -ik_0 z - i \frac{k_0(x^2 + y^2)}{2R(z)} \right).$$

Lygtis

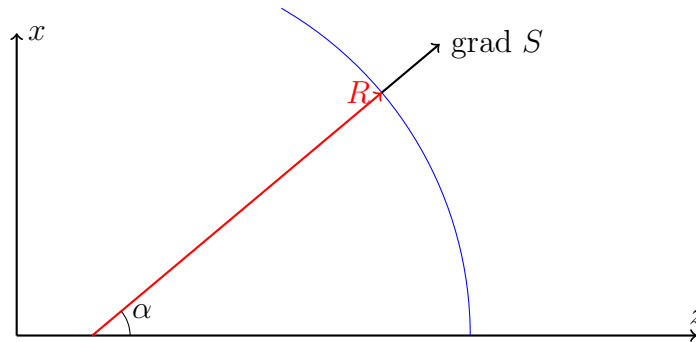
$$(11.13) \quad k_0 z + \frac{k_0(x^2 + y^2)}{2R} = S(x, y, z) = \text{const}$$

yra paviršiaus lygtis, o

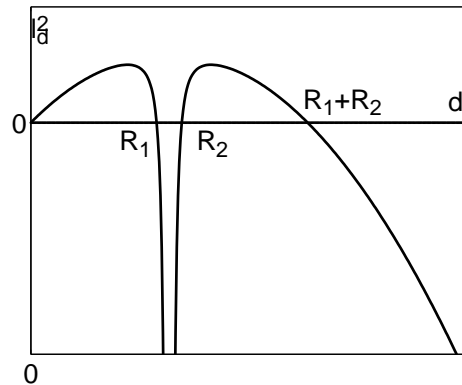
$$(11.14) \quad \text{grad } S = \left( \mathbf{x}_0 \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{y}_0 \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{z}_0 \frac{\partial}{\partial z} \right) S$$

yra statmenas tam paviršiui vektorius. Kai  $y = 0$ ,

$$(11.15) \quad \text{grad } S = k_0 \left( \frac{x}{R} \mathbf{x}_0 + \mathbf{z}_0 \right).$$



11.4 pav. Kreivumo spindulys



11.5 pav. Difrakcinio ilgio kvadrato priklausomybė nuo atstumo tarp rezonatoriaus veidrodžių

Kaip matome iš 11.4 pav., dydis  $R$  yra kreivumo spindulys. Išvesdami (11.15) neat-sižvelgėme į  $R(z)$  išvestinę pagal  $z$ . Galima parodyti, kad gretaašiamame artinyje ji iš tikrųjų nereikšminga.

Kai  $z = 0$ , kreivumo spindulys yra lygus begalybei, tai reiškia, kad sąsmaukoje bangos frontas yra plokščias. Pluoštui sklindant kreivumo spindulys mažėja, kreivumas didėja.  $l_d/R(z)$  kreivės maksimumas pasiekiamas, kai  $z = l_d$  (11.3 pav.), paskui  $l_d/R$  vėl mažėja iki nulio.

Gauso pluošto Guji fazė  $\arctan(z/l_d)$  kinta nuo 0 iki  $\pi/2$ .

Kaip minėta, Gauso pluoštas susidaro lazerio rezonatoriuje. Raskime stabilaus rezonatoriaus sąlygą bendru atveju, kai veidrodžių kreivumo spinduliai nelygūs. Tegu rezonatoriaus veidrodžiai išdėstyti palei  $z$  ašį, pirmojo veidrodžio koordinatė  $z_1$ , antrojo  $z_2$ . Jų kreivumo spinduliai atitinkamai yra  $R_1$  ir  $R_2$ . Pareikalavę, kad Gauso pluošto kreivumo spindulys, kai sklidimo nuotolis  $z_1$  ir  $z_2$ , atitinkamai būtų lygus

$R_1$  ir  $R_2$ , gauname

$$(11.16) \quad \begin{aligned} R_1 &= \frac{l_d^2}{z_1} + z_1, \\ -R_2 &= \frac{l_d^2}{z_2} + z_2. \end{aligned}$$

Kitas sąryšis:

$$(11.17) \quad z_1 - z_2 = d > 0,$$

čia  $d$  – atstumas tarp veidrodžių. Eliminavę dydį  $l_d^2$  (11.16) išraiškose ir pasinaudoję (11.17), gauname

$$(11.18) \quad \begin{aligned} z_1 &= \frac{d(R_2 - d)}{R_1 + R_2 - 2d}, \\ z_2 &= \frac{d(d - R_2)}{R_1 + R_2 - 2d} \end{aligned}$$

ir

$$(11.19) \quad l_d^2 = \frac{d(R_1 - d)(R_2 - d)(R_1 + R_2 - d)}{(R_1 + R_2 - 2d)^2}.$$

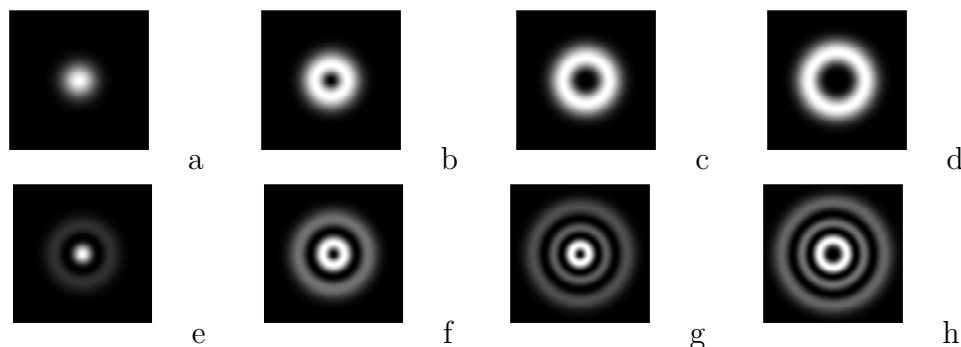
Funkcijos  $l_d^2(d)$  grafikas pavaizduotas 11.5 pav. Matome, kad stabilaus rezonatoriaus sąlyga  $l_d^2 \geq 0$  tenkinama tik esant kai kuriems atstumams  $d$ . Skyriuje apie geometrinę optiką jau buvome gavę stabilumo sąlygą (8.64). Tai yra dvi nelygybės: 1)  $(R_1 - d)(R_2 - d) \geq 0$  ir 2)  $R_1 + R_2 - d \geq 0$ . Kai tenkinamos pirma ir antra nelygybės,  $l_d^2 \geq 0$ .

Sąlyga  $R_1 = R_2 = \infty$  atitinka plokščią rezonatorių; bendražidinis rezonatorius atitinka sąlygą  $R_1 = R_2 = d$  ir jame  $l_d = d/2$ .

## 11.4. Lagero ir Gauso pluoštai

Lagero ir Gauso pluoštai yra parabolinės difrakcijos lygties, užrašytos cilindrinėje koordinatinių sistemoje  $(r, \psi, z)$ , sprendiniai. Lygties pavidalas yra toks:

$$(11.20) \quad \frac{\partial A(r, \psi, z)}{\partial z} = -\frac{i}{2k_0} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \psi^2} \right),$$



11.6 pav. Hermito ir Gauso pluoštų intensyvumo skirstiniai.  $(l, p)$ : (0,0) (a); (1,0) (b); (2,0) (c); (3,0) (d); (0,1) (e); (1,1) (f); (1,2) (g); (2,2) (h)

čia  $\psi$  – azimutinis kampas,  $r$  – spindulio koordinatė. Šios lygties sprendiniai užrašomi taip:

$$(11.21) \quad A_{lp}(r, \psi, z) = a_v^{lp} \frac{\rho_0}{\rho(z)} \left[ \frac{r}{\rho(z)} \right]^l L_p^l \left[ \frac{2r^2}{\rho^2(z)} \right] \times \\ \times \exp \left[ -\frac{r^2}{\rho^2(z)} - \frac{ik_0 r^2}{2R(z)} + il\psi + i(2p + l + 1) \arctan \left( \frac{z}{l_d} \right) \right].$$

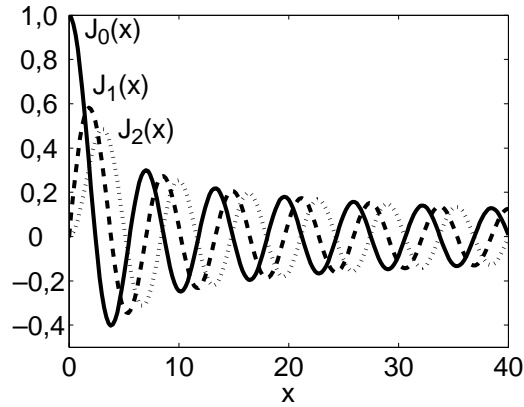
Čia naudojami parametrai: pluošto spindulys  $\rho(z)$ , difrakcinis nuotolis  $l_d$  ir kreivumo spindulys  $R(z)$ , yra tokie patys kaip Hermito ir Gauso pluoštų atveju. Indeksas  $p$  vadinamas spinduliniu (radialiniu), o  $l$  – azimutiniu. Funkcijos

$$(11.22) \quad L_p^l(x) = \frac{1}{p!} e^x x^{-l} \frac{d^p}{dx^p} [e^{-x} x^{p+l}]$$

yra Lagero daugianariai. Gauname  $L_0^l(x) = 1$ ,  $L_1^l(x) = l + 1 - x$ ,  $L_2^l(x) = 1 - x$ ,  $L_2^0(x) = 1 - 2x + x^2/2$  ir t. t. Kai  $l = p = 0$ , Lagero ir Gauso pluoštas sutampa su žemiausios eilės Hermito ir Gauso pluoštu – Gauso pluoštu. Jei spindulinis indeksas  $p = 0$ , tuomet

$$(11.23) \quad A_{l0}(r, \psi, z) = a_v^{l0} \frac{\rho_0}{\rho(z)} \left[ \frac{r}{\rho(z)} \right]^l \times \\ \times \exp \left[ -\frac{r^2}{\rho^2(z)} - \frac{ik_0 r^2}{2R(z)} + il\psi + i(l + 1) \arctan \left( \frac{z}{l_d} \right) \right].$$

Sklandančių Lagero ir Gauso pluoštų gaubtinės pavidalas, kaip ir Hermito ir Gauso pluoštų, nekinta. Lagero ir Gauso pluoštų normuoti intensyvumo skirstiniai sąsmaukoje ( $z = 0$ )  $I_{lp}(\xi) = (\xi)^{2l} [L_p^l(2\xi^2)]^2 \exp(-2\xi^2)$ , čia  $\xi = r/\rho_0$ , pavaizduoti 11.6 pav. Kai azimutinis indeksas  $l \neq 0$ , Lagero ir Gauso pluoštai yra optiniai sūkuriai, apie kuriuos kalbėsime toliau.



11.7 pav. Beselio funkcijos

## 11.5. Beselio bei Beselio ir Gauso pluoštai

Beselio pluoštas yra Helmholco lygties (10.1) sprendinys. Jis randamas ieškant šios lygties sprendinio ne (10.2), o tokio pavidalo:

$$(11.24) \quad E(x, y, z) = A(x, y) \exp(-ik_z z).$$

$k_z$  yra bangos vektoriaus dedamoji išilgai sklidimo krypties. Amplitudė  $A$  nepriklauso nuo sklidimo nuotolio  $z$ , taigi pluoštas nedifraguoja. Įrašę (11.24) į (10.1) gauname tokią lygtį:

$$(11.25) \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) A(x, y) + (k_0^2 - k_z^2) A(x, y) = 0.$$

Ši lygtis cilindrinėje koordinačių sistemoje virsta Beselio funkcijų lygtimi. Beselio funkcija tenkina lygtį:

$$(11.26) \quad r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + (r^2 \beta_0^2 - l^2) u = 0.$$

Sprendinys yra  $u = J_l(\beta_0 r)$ , čia  $J_l$  – pirmos rūšies  $l$ -tosios eilės Beselio funkcija. (11.25) skersinę laplasiano dalį užrašome cilindrinėje koordinačių sistemoje:

$$(11.27) \quad \Delta_{r,\psi} A = \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \psi^2}.$$

Čia  $x = r \cos \psi$ ,  $y = r \sin \psi$ . Vietoje  $A$  parašome  $u \exp(il\psi)$  ir tuomet (11.25) tampa (11.26). Taigi, Helmholco lygties sprendinys

$$(11.28) \quad A_l(r, \psi) = a_v J_l(\beta_0 r) \exp(il\psi),$$

čia  $\beta_0 = \sqrt{k_0^2 - k_z^2}$ . Beselio funkcijos grafikas esant įvairioms  $l$  vertėms pavaizduotas 11.7 pav. Kai  $l \neq 0$ , Beselio pluoštas yra optinis sukuryš.

Idealaus Beselio pluošto galia yra begalinė. Suintegravę amplitudės (11.28), kai  $l = 0$ , modulio kvadratą pagal  $r, \psi$ , gausime begalybę:

$$(11.29) \quad P = \int_0^{\infty} r J_0^2(\beta_0 r) dr = \infty.$$

Integralo (11.29) reikšmė begalinė dėl to, kad funkcija  $J_0$  nepakankamai greitai slopsta:

$$(11.30) \quad J_0(\beta_0 r) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \beta_0 r}} \cos\left(\beta_0 r - \frac{\pi}{4}\right), \text{ kai } \beta_0 r \gg 1.$$

Taigi eksperimentais Beselio pluoštas negali būti gautas. Praktiniu požiūriu realesnis yra Beselio ir Gauso pluoštas. Jo kompleksinė amplitudė sąsmaukoje ( $z = 0$ ) atrodo taip:

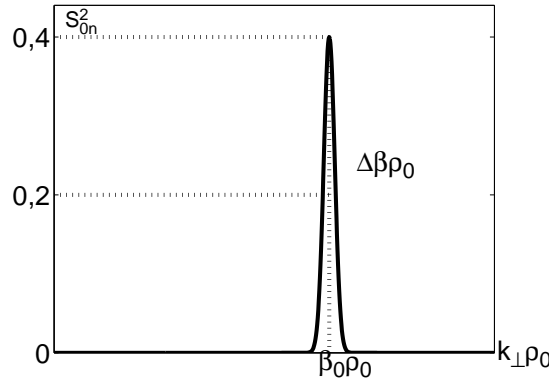
$$(11.31) \quad A_l(r, \psi) = a_v J_l(\beta_0 r) \exp\left(-\frac{r^2}{\rho_0^2} + il\psi\right).$$

Kai tenkinama sąlyga  $\beta_0 \rho_0 \gg 1$ , gana daug Beselio žiedų telpa į Gauso gaubtinę ir pluoštas būna panašus į Beselio pluoštą. Beselio ir Gauso pluošto galia, kitaip nei Beselio pluošto, yra baigtinė.

### 11.5.1. Nulinės eilės Beselio ir Gauso pluošto spektras

Pluošto spektras yra jo gaubtinės dvimatis Furjė vaizdas. Skaičiuojant dvimatį Furjė vaizdą funkcijos, kuri priklauso tik nuo spindulinės koordinatės ir nepriklauso nuo azimutinio kampo, patogiu pereiti nuo Dekarto koordinatėjų prie cilindrinėjų koordinatėjų. Visų pirma perrašysime dvimatę Furjė transformaciją:

$$(11.32) \quad \begin{aligned} & \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} A(x, y) \exp(ik_x x + ik_y y) dx dy = \\ & = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} A(r, \psi) \exp(ik_{\perp} r \cos(\theta - \psi)) d\psi r dr. \end{aligned}$$



11.8 pav. Nulinės eilės Beselio ir Gauso pluošto normuotas spektras

Čia  $\theta, k_{\perp}$  – azimutinis kampas ir spindulinė koordinatė  $k_x, k_y$  plokštumoje. Pasinaudota lygybėmis

$$(11.33) \quad \begin{aligned} x &= r \cos \psi, \quad y = r \sin \psi, \\ k_x &= k_{\perp} \cos \theta, \quad k_y = k_{\perp} \sin \theta. \end{aligned}$$

Beselio funkcija gali būti pavaizduota kaip tokio pavidalo integralas [4]

$$(11.34) \quad J_0(k_{\perp} r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(ik_{\perp} r \cos \theta) d\theta,$$

todėl nulinės eilės Beselio modos spektras gali būti užrašytas taip:

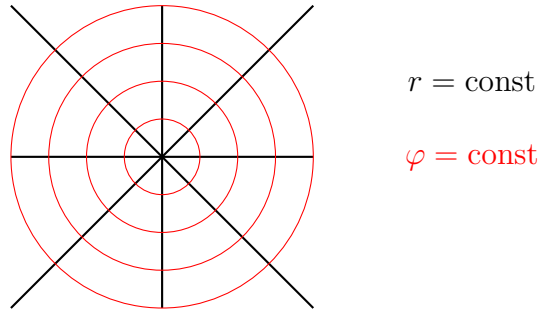
$$(11.35) \quad \begin{aligned} S_0 &= 2\pi a_v \int_0^{\infty} r J_0(\beta_0 r) J_0(k_{\perp} r) \exp\left(-\frac{r^2}{\rho_0^2}\right) dr = \\ &= \pi a_v \rho_0^2 \exp\left[-\frac{(\beta_0^2 + k_{\perp}^2) \rho_0^2}{4}\right] I_0\left(\frac{\beta_0 k_{\perp}}{2} \rho_0^2\right). \end{aligned}$$

Kai  $\beta_0 \rho_0 \gg 1$ ,

$$(11.36) \quad S_0(k_{\perp}) \approx \frac{\sqrt{\pi a_v \rho_0}}{\beta_0} \exp\left(-\frac{(\beta_0 - k_{\perp})^2 \rho_0^2}{4}\right).$$

11.8 pav. pavaizduotas normuoto dydžio  $S_{0n}^2 = S_0^2 / (\sqrt{\pi a_v \rho_0} / \beta_0)^2$  grafikas. Matome, kad Beselio ir Gauso pluošto spektras yra baigtinio pločio žiedas.





11.9 pav. Optinio sūkurio vienodų amplitudžių (raudona spalva) ir vienodų fazių (juoda spalva) linijos. Sklidimo nuotolis  $z$  ir laiko momentas  $t$  fiksuoti

## 11.6. Užduotis. Gauso pluoštų erdviniai spektrai

Nusibraižyti pasirinktus Ermito ir Gauso, Lagero ir Gauso bei Beselio ir Gauso pluoštus. Apskaičiuoti jų spektrus – dvimates Furjė transformacijas.

Galima pasinaudoti 9.3 užduoties programos ruošiniu.

## 11.7. Optiniai sūkuriai

Kai (11.21) ir (11.31) formulėse azimutinį kitimą aprašantis indeksas  $l$  nelygus nuliui, Lagero ir Gauso bei Beselio ir Gauso pluoštai yra optiniai sūkuriai (OS). Tai yra eksperimentiškai realizuojami Helmholco lygties sprendiniai. Pirmą kartą OS pavidalo sprendinys buvo rastas Nye ir Berry [20] darbe. Jų Helmholco lygties sprendinys buvo toks:

$$(11.37) \quad E(r, \psi, z, t) \propto r^{|l|} \exp(il\psi - ikz + i\omega t).$$

Šis sprendinys yra „blogas“, nes aprašo begalinės energijos pluoštą. Tačiau jam būdingos svarbiausios OS savybės: koordinacių pradžioje  $r = 0$  amplitudė  $E$  virsta nuliu, o fazė tampa neapibrėžta. Šiame taške susikerta vienodų fazių linijos (11.9 pav.). Tai būdinga ne tik optiniams sūkuriams, bet ir gerai įsivaizduojamiems vandens sūkuriams. Vandens sūkuriose priešingos fazės atitinka potvynius ir atoslūgius. Taškas, kuriame susikerta fazių linijos, dar vadinamas singuliariniu tašku.

Optinio sūkurio bangos fronto lygtis

$$(11.38) \quad il\psi - ikz + i\omega t = \text{const} + 2\pi n$$

aprašo spiralinių paviršių.

Pati sąvoka „optiniai sūkuriai“ atsirado po to, kai 1989 metais [7] darbe buvo teoriškai parodyta, kad lazerio lygtims parinkus pradinę sąlygą su singuliariaisiais taškais, elektrinio lauko stiprio skirstinys yra spiralinė banga. Darbas [7] vadinosi „Optiniai sūkuriai“ („Optical vortices“). OS svarbūs praktiniu požiūriu, nes turi orbitinį judesio kiekio momentą [3]. [3] darbe buvo parodyta, kad tiesiškai poliarizuoto Lagero ir Gauso pluošto judesio kiekio momento srauto santykis su energijos srautu lygus  $l/\omega$ . Gretaaiū artiniu apskritimiškai poliarizuoto Lagero ir Gauso pluošto šis santykis lygus  $(l + \sigma)/\omega$ , čia  $\sigma = +1$  atitinka dešininę, o  $\sigma = -1$  – kairinę poliarizaciją. Judesio kiekio momentas (JKM), susijęs su azimutiniu amplitudės kitimu, yra orbitinis judesio kiekio momentas, o JKM, susijęs su apskritimine poliarizacija, yra sukininis JKM. Buvo žinoma, kad 1936 metais R. A. Beth eksperimentu pademonstravo, kad apskritimiškai poliarizuota šviesa gali pasukti plokštelę. [3] darbe buvo pasiūlytas eksperimentas, kuriame tiesiškai poliarizuotas Lagero ir Gauso pluoštas turėtų pasukti dalelę. Toks eksperimentas buvo netrukus atliktas. Be to, eksperimentais yra patvirtinta šviesos JKM sudėties taisyklė.

## 11.8. Ermito ir Gauso pluoštai. Išvedimas\*

Kvantinėje mechanikoje Ermito polinomiali aprašo elektrono banginę funkciją, kai elektronas veikiamas parabolinio potencialo. Šiame uždavinyje yra lygtis:

$$(11.39) \quad u'' - 2\xi u' = -2\lambda u.$$

Čia  $u = u(\xi)$ . Šios lygties sprendiniai yra  $\lambda$  eilės Ermito daugianariai. Parodysime, kaip tokio tipo lygtis gaunama iš parabolinės difrakcijos lygties:

$$(11.40) \quad \frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{i}{2k_0} \nabla_{x,y}^2 A(x, y, z).$$

Šios lygties sprendinių ieškosime atskirdami kintamuosius  $x$  ir  $y$ :

$$(11.41) \quad A(x, y, z) = A_1(x, z)A_2(y, z).$$

Įrašę (11.41) į (11.40) ir padaliję iš  $A$  gauname:

$$(11.42) \quad \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial z} = -\frac{i}{2k_0} \frac{1}{A_1} \frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} - \frac{i}{2k_0} \frac{1}{A_2} \frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2}.$$

Du šios lygties nariai nepriklauso nuo  $y$ , kiti du – nuo  $x$ . Taigi, ją galime išskaidyti į dvi lygtis:

$$(11.43) \quad \begin{aligned} \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial z} &= -\frac{i}{2k_0} \frac{1}{A_1} \frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} + C(z), \\ \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial z} &= -\frac{i}{2k_0} \frac{1}{A_2} \frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2} - C(z). \end{aligned}$$

Čia  $C(z)$  yra konstanta, priklausanti tik nuo  $z$ . Pereisime prie bedimensių kintamųjų. Naudosime normuotas koordinates:

$$(11.44) \quad Z = z/l_d, \quad X = x/\rho_0, \quad Y = y/\rho_0.$$

Tuomet lygtys  $A_1$  ir  $A_2$  atžvilgiu atrodo taip:

$$(11.45) \quad \frac{\partial A_1}{\partial Z} = -\frac{i}{4} \frac{\partial^2 A_1}{\partial X^2} + C A_1,$$

$$(11.46) \quad \frac{\partial A_2}{\partial Z} = -\frac{i}{4} \frac{\partial^2 A_2}{\partial Y^2} - C A_2.$$

Surasime (11.45) lygties sprendinį. Ieškosime tokio pavidalo:

$$(11.47) \quad A_1 = g(Z) e^{-X^2 f(Z)} u(\xi),$$

čia  $\xi = \frac{\sqrt{2}X}{\sqrt{1+Z^2}}$ . Išvestinė  $\frac{\partial A_1}{\partial Z}$ :

$$(11.48) \quad \frac{\partial A_1}{\partial Z} = \frac{\partial g}{\partial Z} e^{-X^2 f} u - g X^2 \frac{\partial f}{\partial Z} e^{-X^2 f} u + g e^{-X^2 f} \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial Z}.$$

Kadangi

$$(11.49) \quad \frac{\partial \xi}{\partial Z} = -\frac{1}{2} \sqrt{2} X \frac{1}{1+Z^2} \frac{2Z}{\sqrt{1+Z^2}} = -\frac{Z\xi}{1+Z^2},$$

tai

$$(11.50) \quad \frac{\partial A_1}{\partial Z} = e^{-X^2 f} \left( u \frac{\partial g}{\partial Z} - g X^2 \frac{\partial f}{\partial Z} u - g \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\xi Z}{1+Z^2} \right).$$

Toliau rasime išvestines  $\frac{\partial A_1}{\partial X}$  bei  $\frac{\partial^2 A_1}{\partial X^2}$ . Turime

$$(11.51) \quad \frac{\partial A_1}{\partial X} = g(-2Xf) e^{-X^2 f} u + g e^{-X^2 f} \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial X}$$

ir

$$(11.52) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 A_1}{\partial X^2} = & -2g f e^{-X^2 f} u - 2X f g (-2X f g) e^{-X^2 f} u + (-2X f g) e^{-X^2 f} \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial X} \\ & + g (-2X f) e^{-X^2 f} \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial X} + g e^{-X^2 f} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial X} \right)^2. \end{aligned}$$

Kadangi išvestinė

$$(11.53) \quad \frac{\partial \xi}{\partial X} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+Z^2}},$$

tai

$$(11.54) \quad \frac{\partial^2 A_1}{\partial X^2} = e^{-X^2 f} \left( -2gfu + 4X^2 f^2 gu - 4\xi g f \frac{\partial u}{\partial \xi} + g \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{2}{1+Z^2} \right).$$

Įrašome (11.50) ir (11.54) į (11.45) lygtį:

$$(11.55) \quad \begin{aligned} & e^{-X^2 f} \left( u \frac{\partial g}{\partial Z} - g X^2 u \frac{\partial f}{\partial Z} - \frac{Z}{1+Z^2} \xi g \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \\ & = e^{-X^2 f} \frac{i}{4} \left( -2gfu + 4X^2 f^2 gu - 4\xi g f \frac{\partial u}{\partial \xi} + g \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{2}{1+Z^2} - 4iCgu \right). \end{aligned}$$

Surenkame  $u$ ,  $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$  narius, gauname:

$$(11.56) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{ig}{2} \frac{1}{1+Z^2} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \left( -i\xi g f + \xi g \frac{z}{1+Z^2} \right) = u \left( -gX^2 \frac{\partial f}{\partial Z} + \frac{i}{2} g f - iX^2 f^2 g + \frac{\partial g}{\partial Z} + 4iCg \right).$$

Lygtis (11.56) sutaps su (11.39) Ermito daugianarių lygtimi, jei tenkinamos šios dvi sąlygos:

$$(11.57) \quad \left( -gX^2 \frac{\partial f}{\partial Z} + \frac{i}{2} g f - iX^2 f^2 g + \frac{\partial g}{\partial z} + 4iCg \right) \frac{1}{\frac{ig}{2} \frac{1}{1+Z^2}} = -2\lambda,$$

$$(11.58) \quad \left( -igf + \frac{Z}{1+Z^2} g \right) \frac{1}{\frac{ig}{2} \frac{1}{1+Z^2}} = -2.$$

Iš (11.58) randame:

$$(11.59) \quad f = \frac{1}{1+iZ}.$$

Matyti, kad  $\frac{\partial f}{\partial Z} = -if^2$ , todėl nariai prie  $X^2$  (11.57) formulėje išnyksta. Įrašę  $f$  išraišką į šią formulę, gauname diferencialinę lygtį  $g$  atžvilgiu:

$$(11.60) \quad \frac{dg}{dZ} = -\frac{ig}{2} \left( \frac{1}{1+iZ} + \frac{2\lambda}{1+Z^2} - 8iC \right).$$

Lygties sprendinys:

$$(11.61) \quad g = \sqrt{\frac{(1-iZ)^\lambda}{(1+iZ)^{\lambda+1}}} e^{-4 \int_0^Z C(z') dz'}.$$

Įrašę gautas (11.59) ir (11.61)  $f$ ,  $g$  išraiškas į (11.47), gauname

$$(11.62) \quad A_1(x, z) = \sqrt{\frac{(1-iZ)^m}{(1+iZ)^{m+1}}} e^{-\frac{X^2}{1+iZ}} u_m \left( \frac{\sqrt{2}X}{\sqrt{1+Z^2}} \right) e^{-4 \int_0^Z C(z') dz'}.$$

Čia indeksas  $\lambda$  buvo pakeistas į  $m$ . Analogiškai gaunamas (11.46) lygties sprendinys:

$$(11.63) \quad A_2(y, z) = \sqrt{\frac{(1-iZ)^n}{(1+iZ)^{n+1}}} e^{-\frac{Y^2}{1+iZ}} u_n \left( \frac{\sqrt{2}Y}{\sqrt{1+Z^2}} \right) e^{+4 \int_0^Z C(z') dz'}.$$

Ši formulė gauta (11.62) formulėje indeksą  $m$  pakeitus į  $n$ , pavertus  $C$  ženklą priešingu ir atlikus pakeitimą  $x \rightarrow y$ . Įrašę (11.62), (11.63) sprendinius į (11.41) formulę, gauname

$$(11.64) \quad A(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1+Z^2}} e^{-i(1+m+n) \arctan Z} e^{-\frac{X^2+Y^2}{1+iZ}} u_m \left( \frac{\sqrt{2}X}{\sqrt{1+Z^2}} \right) u_n \left( \frac{\sqrt{2}Y}{\sqrt{1+Z^2}} \right).$$

Čia bedimensiai kintamieji  $X, Y, Z$  buvo apibrėžti (11.44). Parabolinės difrakcijos lygties sprendinys (11.64) aprašo Ermito ir Gauso pluoštą.

## 11.9. Gauso pluošto sklidimo per kūginę prizmę modeliavimas

Beselio ir Gauso pluoštas gali būti sudarytas praleidus nulinės eilės Gauso pluoštą per kūginę prizmę. Sumodeliuokime tokį sklidimą aprašančią lygtį

$$(11.65) \quad \frac{\partial A}{\partial z} = -ik_0(n(x, y, z) - 1)A - \frac{i}{2k_0} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) A$$

tarę, kad pradinė sąlyga  $A_0 = \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{\rho^2}\right)$ . Čia  $n(x, y, z)$  yra lūžio rodiklis, lygus  $n_1$  kūginės prizmės ribose ir 1 už jos ribų.  $n_1$  yra medžiagos, iš kurios pagaminta prizmė, lūžio rodiklis. Kaip parodoma [23], už kūgio ribų susidaro kūginis pluoštas, kurio amplitudės maksimumas yra nuotoliu

$$(11.66) \quad z_u = \frac{3}{2} \frac{L_d}{\beta_0 \rho}.$$

Čia  $\beta_0 = k_0(n_1 - 1)\alpha$ , o  $\alpha$  yra kūgio pagrindo kampas. Toliau pateikiama „Scilab“ programa, modeliuojanti (11.65) lygtį. Joje  $(x, y)$  yra sunormuoti į  $\rho$ ,  $z$  į  $L_d$ .

```
clear ; clc ; close ;
```

```
n=1.5; //kugio luzio rodiklis
rho=1000; // mum
lamda0=0.5; // mum
k0=2*%pi/lamda0;
```

```

alpha=0.1/180*%pi; // kugio kampas
beta0=k0*(n-1)*alpha
Ld=k0*rho^2/2
zu=3/2*Ld/(beta0*rho)/Ld // nuotolis uz kugio
                        // maksimalios virsunes
z0=2*rho*tan(alpha)/Ld // kugio ilgis

ax=2;
hx=ax/32;

x=-ax:hx:ax-hx;
y=x;

hk=2*%pi/length(x)/hx;
ak=%pi/hx;
kx=-ak:hk:ak-hk;

[x1,y1]=meshgrid(x,y);
A0=exp(-(x1.^2+y1.^2));
r=sqrt(x1.^2+y1.^2);

nz=1000;
hz1=1*z0/nz; //z zingsnis kugyje
hz2=zu/nz; //z zingsnis uz kugio

hz=hz1;
z=0;

for iz=1:2*nz/10
    for iz1=1:10
z=z+hz;
if z>z0
    hz=hz2;
    nr=1+0*x1;
else

        //kugyje uzduodamas luzio rodiklis n
        //kitur luzio rogaklis 1
    for ix=1:length(x)
        for iy=1:length(y)
            if (z0-z)*Ld/(r(iy,ix)+0.00001)/rho>tan(alpha)

```

```

        nr(iy , ix)=n;
    else
        nr(iy , ix)=1;
    end;
end;
end;

// antros eiles isvestine
for ix=1:length(x)
    for iy=1:length(y)
        if ((ix)>1 & (ix)<length(x)) & ((iy)>1 & (iy)<length(y)) then
diffA0(iy , ix)
=(A0(iy +1,ix)+A0(iy -1,ix)+A0(iy , ix+1)+A0(iy , ix -1)-4*A0(iy , ix))/hx^2;
        else
diffA0(iy , ix)=0;
        end
    end;
end;

// modeliujama lygtis
A1=A0-%i*Ld*k0*hz*(nr -1).*A0-hz*%i/4.*diffA0;

A0=A1;
end;

//piesimas
//piesiama pjuvis pagal x
drawlater();
delete(gce());
plot(x,abs(A1(:,length(x)/2+1)).^2,'b-');
drawnow();
sleep(20)
//piesimas

end

figure

//=== dvimate Furje transformacija ==

```

```

incrk=1;
xx=A1;
dim=[length(x) length(x)];
for kk=1:2
    xx=fft(xx,-1,dim(kk),incrk)
    incrk=incrk*dim(kk)
end
//=====

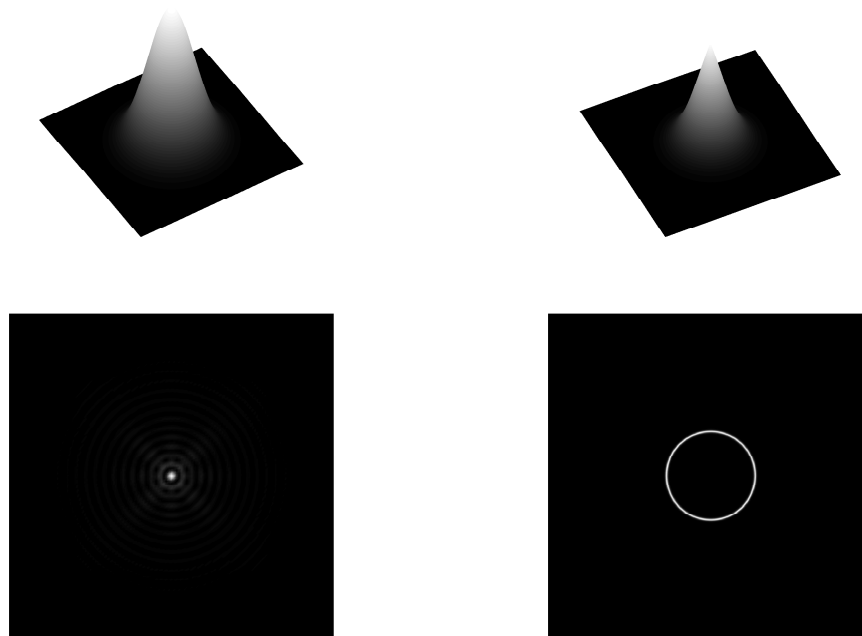
s=fftshift(xx);

//== piesimas=====
//piesiama spektras skirstinio ties z=zu
xset("colormap",graycolormap(64))
Sgrayplot(kx,kx,abs(s))
//=====

```

11.10 pav. pateikti modeliavimo rezultatai – intensyvumo skirstiniai įvairiais sklidimo nuotoliais ir erdvinis spektras nuotoliu  $z_u$ . Matome, kad Gauso pluoštas virsta kūginiu pluoštu.





11.10 pav. Pluošto intensyvumo skirstinys: sklidimo pradžioje (kairėje viršuje), kūginės prizmės išėjime (dešinėje viršuje), nuotoliu  $z = z_u$  (kairėje apačioje). Erdvinis spektras nuotoliu  $z = z_u$  (dešinėje apačioje).  $\alpha = 1^\circ$ ,  $n_1 = 1,5$



## V DALIS

### **Pusiau klasikinis lazerio modelis**



## 12 SKYRIUS

# Šviesos sąveika su dviejų lygmenų atomu

7.4 dalyje buvo parodyta, kad įtraukus į balanso lygtis  $A$  ir  $B$  Einšteino koeficientus, galima gauti Planko formulę. Taip pat buvo nustatytas šių koeficientų sąryšis. Tačiau balanso lygtys nesuteikia galimybės rasti Einšteino koeficientų išraiškas. Reikia nagrinėti pusiau klasikinį modelį, kuriame atomas aprašomas kvantmechaniškai, t. y. Šrėdingerio lygtimi. Šviesa šiame aprašyme yra klasikinė elektromagnetinė banga.

Ši teorija taip pat turi trūkumų – ji neaprašo savaiminio spinduliavimo. Anot šios teorijos, atomas, sužadintas į viršutinį lygmenį ir neveikiamas spinduliuotės, išliktų to lygmens be galo ilgai. Tačiau yra žinoma, kad atomas relaksuoja į pagrindinį lygmenį. Tai vyksta dėl savaiminio spinduliavimo, kuriam aprašyti reikia visiškai kvantinės teorijos. Joje šviesa irgi aprašoma kvantmechaniškai. Tačiau pusiau klasikinėje teorijoje taip pat galima įskaityti savaiminį spinduliavimą, dirbtinai įtraukus į lygtis papildomus narius.

Šiame skyriuje panagrinėsime, kaip pusiau klasikiniam aprašyme dviejų lygmenų atomas sąveikauja su šviesa.

### 12.1. Šrėdingerio lygties sprendimas

Pusiau klasikiniam aprašyme atomui sprendžiama Šrėdingerio lygtis. Ji atrodo taip:

$$(12.1) \quad \hat{H}\Psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}.$$

Čia  $\hat{H}$  yra sistemos Hamiltono operatorius,  $\Psi$  – banguotė funkcija. Nagrinėjamame uždavinyje hamiltonianas susideda iš dviejų dalių: laisvojo atomo hamiltoniano  $\hat{H}_A$

ir atomo sąveikos su elektromagnetine spinduliuote hamiltonianu  $\widehat{H}_I$ . Taigi, galime parašyti:

$$(12.2) \quad \widehat{H} = \widehat{H}_A + \widehat{H}_I.$$

Reikia rasti banginę funkciją, tenkinančią Šrėdingerio lygtį (12.1). Šis uždavinys sprendžiamas taip: iš pradžių randamos laisvojo atomo banginės funkcijos, paskui sąveikaujančio atomo banginės funkcijos ieškoma kaip surastų banginių funkcijų superpozicijos. Taigi, pirmiausia turime spręsti (12.1) lygtį su hamiltonianu  $\widehat{H} = \widehat{H}_A$ . Kadangi  $\widehat{H}_A$  nepriklauso nuo laiko, tai banginę funkciją galima faktorizuoti į erdvinę ir laikinę dalis:

$$(12.3) \quad \Psi_i(\mathbf{r}, t) = \psi_i(\mathbf{r}) \exp(-iE_i t/\hbar).$$

Erdvinė banginės funkcijos dalis randama iš tikrinių verčių lygties:

$$(12.4) \quad \widehat{H}_A \psi_i(\mathbf{r}) = E_i \psi_i(\mathbf{r}).$$

Čia  $E_i$  yra operatoriaus  $\widehat{H}_A$  tikrinė vertė, atitinkanti  $i$ -tojo lygmens energiją.  $\psi_i(\mathbf{r})$  – tikrinė funkcija. Nagrinėjame dviejų lygmenų atomą, taigi turime dvi lygtis:

$$(12.5) \quad \widehat{H}_A \psi_1(\mathbf{r}) = E_1 \psi_1(\mathbf{r}), \quad \widehat{H}_A \psi_2(\mathbf{r}) = E_2 \psi_2(\mathbf{r}).$$

Išsprendę šias lygtis, gauname laisvojo atomo bangines funkcijas:

$$(12.6) \quad \Psi_1(\mathbf{r}, t) = \psi_1(\mathbf{r}) \exp(-iE_1 t/\hbar), \quad \Psi_2(\mathbf{r}, t) = \psi_2(\mathbf{r}) \exp(-iE_2 t/\hbar).$$

Šrėdingerio lygtį su hamiltonianu (12.2) spręsimė, banginę funkciją išreiškė kaip žinomų banginių funkcijų superpoziciją:

$$(12.7) \quad \Psi(\mathbf{r}, t) = C_1(t) \Psi_1(\mathbf{r}, t) + C_2(t) \Psi_2(\mathbf{r}, t).$$

Skleidimo koeficientai  $C$  priklauso nuo laiko, nes sąveikos hamiltonianas  $\widehat{H}_I$  yra bėgant laikui kintantis dydis. Mes jį apibrėšime kiek vėliau. Banginės funkcijos  $\Psi_i(\mathbf{r}, t)$  yra ortonormuotos, t. y.

$$(12.8) \quad \int dV |\Psi_i(\mathbf{r}, t)|^2 = 1, \quad \int dV \Psi_i^*(\mathbf{r}, t) \Psi_j(\mathbf{r}, t) = 0.$$

Čia  $i, j = 1, 2, i \neq j$ . Kadangi  $\Psi(\mathbf{r}, t)$  taip pat normuota į vienetą, tai

$$(12.9) \quad \int dV |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 = |C_1(t)|^2 + |C_2(t)|^2 = 1.$$

Skleidimo koeficientų  $C_1$  ir  $C_2$  modulio kvadratai yra tikimybės, kad atomas bus pirmame arba antrame lygmenyje. Tikimybių suma lygi vienetui. Įrašę (12.7) į (12.1) su hamiltonianu (12.2) gauname

$$(12.10) \quad \widehat{H}_I(C_1\Psi_1 + C_2\Psi_2) = i\hbar \left( \Psi_1 \frac{dC_1}{dt} + \Psi_2 \frac{dC_2}{dt} \right).$$

Čia nariai su  $\widehat{H}_A$  dingsta, nes

$$(12.11) \quad \widehat{H}_A\Psi_j(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial\Psi_j(\mathbf{r}, t)}{\partial t},$$

$j = 1, 2$ . Toliau pasinaudosime ortonormavimo sąlygomis (12.8). Pažymime matricos elementą

$$(12.12) \quad \langle i|\widehat{H}_I|j\rangle = \int \Psi_i^* \widehat{H}_I \Psi_j d\mathbf{r}.$$

Vieną kartą padauginame (12.10) iš kairės pusės iš  $\Psi_1^*$ , kitą kartą iš  $\Psi_2^*$  ir suintegruojame pagal tūrį  $V$ . Gauname dviejų lygčių sistemą:

$$(12.13) \quad \langle 1|\widehat{H}_I|1\rangle C_1 + \exp(-i\omega_0 t) \langle 1|\widehat{H}_I|2\rangle C_2 = i\hbar \frac{dC_1}{dt},$$

$$(12.14) \quad \exp(i\omega_0 t) \langle 2|\widehat{H}_I|1\rangle C_1 + \langle 2|\widehat{H}_I|2\rangle C_2 = i\hbar \frac{dC_2}{dt}.$$

Čia  $\omega_0 = (E_2 - E_1)/\hbar$  yra šuolio dažnis. Tolesniam nagrinėjimui apibrėšime sąveikos hamiltonianą  $\widehat{H}_I$ . Sąveikaujanti spinduliuotė yra elektromagnetinė banga:

$$(12.15) \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(kz - \omega t),$$

$$(12.16) \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \cos(kz - \omega t).$$

Kosinuso argumente galime palikti tik laikinę dalį, nes atomo matmenys yra angstromo  $a \approx 10^{-10}$  m eilės, o šviesos bangos ilgis  $\lambda \approx 0,5 \times 10^{-6}$  m – mikrometrų eilės. Todėl sandauga  $ka = 2\pi a/\lambda \ll 1$  nereikšminga. Krintančios spinduliuotės dažnis  $\omega$  nebūtinai turi sutapti su šuolio dažniu  $\omega_0$ . Elektrodipoliniame artinyje sąveikos hamiltonianas yra toks:

$$(12.17) \quad \widehat{H}_I = \vec{\theta} \mathbf{E}_0 \cos(\omega t),$$

čia

$$(12.18) \quad \vec{\theta} = e \sum_{\alpha=1}^Z \vec{r}'_{\alpha}$$

yra atomo elektronų spindulio vektorių suma, padauginta iš elektrono krūvio. Matome, kad  $\vec{\theta}$  yra nelyginė funkcija. Atlikę pakeitimą  $\mathbf{r}_\alpha \rightarrow -\mathbf{r}_\alpha$ , gauname  $\vec{\theta} \rightarrow -\vec{\theta}$  ir  $\hat{H}_I \rightarrow -\hat{H}_I$ . Dėl šios savybės turime

$$(12.19) \quad \langle 1|\hat{H}_I|1\rangle = \langle 2|\hat{H}_I|2\rangle = 0.$$

Be to, dėl ermitiškumo

$$(12.20) \quad \langle 2|\hat{H}_I|1\rangle = \langle 1|\hat{H}_I|2\rangle^*.$$

Tegu krintanti spinduliuotė yra poliarizuota  $x$  ašies kryptimi. Tuomet matricinis elementas

$$(12.21) \quad \langle 1|\hat{H}_I|2\rangle = E_0 X_{12} \cos(\omega t),$$

čia

$$(12.22) \quad X_{12} = \int dV \psi_1^* X \psi_2,$$

$X$  yra vektoriaus  $\vec{\theta}$  projekcija į  $x$  ašį. Pažymėkime

$$(12.23) \quad \hbar\nu = E_0 X_{12}.$$

Tuomet galutinai gauname lygtis  $C_1$  ir  $C_2$  atžvilgiu:

$$(12.24) \quad \nu \cos(\omega t) e^{-i\omega_0 t} C_2 = i \frac{dC_1}{dt},$$

$$(12.25) \quad \nu \cos(\omega t) e^{i\omega_0 t} C_1 = i \frac{dC_2}{dt}.$$

Išsprendę šias lygtis galime rasti Einšteino koeficientą  $B$ .

## 12.2. Einšteino koeficientai

Rasime priverstinio šuolio iš pirmojo lygmens į antrąjį Einšteino koeficientą  $B_{12}$ , kuris siejamas su antrojo lygmens užpildos tikimybe:

$$(12.26) \quad B_{12} \langle W(\omega_0) \rangle = |C_2|^2 / t.$$

Čia  $W$  yra krintančios spinduliuotės energijos tankis. Pradžioje atomas yra nesužadintas, apatiniame lygmenyje:

$$(12.27) \quad C_1(0) = 1, \quad C_2(0) = 0.$$



Rasime apytikslį (12.25) sprendinį, tarę, kad

$$(12.28) \quad C_1(t) = 1.$$

Sprendinys atrodo taip:

$$(12.29) \quad C_2(t) = \frac{\nu}{2} \left[ \frac{1 - \exp[i(\omega_0 + \omega)t]}{\omega_0 + \omega} + \frac{1 - \exp[i(\omega_0 - \omega)t]}{\omega_0 - \omega} \right].$$

Galime parodyti, kad antrasis narys skliaustuose turi daug didesnę įtaką nei pirmasis. Iš tikrųjų, kai  $\omega = \omega_0$ , gauname

$$(12.30) \quad C_2(t) = -\frac{i\nu}{2\omega_0} (\sin(\omega_0 t) \exp(i\omega_0 t) + \omega_0 t).$$

Šuolio dažnis  $\omega_0$  yra eilės  $10^{15} \text{ s}^{-1}$ . O šuolio trukmė eilės  $10^{-7} \text{ s}$  (bus parodyta vėliau). Dėl to antrasis dėmuo ( $\omega_0 t \gg 1$ ) yra daug didesnis už pirmąjį. Atmetę pirmąjį narį (12.29) išraiškoje gauname

$$(12.31) \quad |C_2(t)|^2 = \nu^2 \frac{\sin^2 \left[ \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)t \right]}{(\omega_0 - \omega)^2}.$$

Pirmojo nario neįskaitymas dar vadinamas besisukančios bangos artiniu. Šuolio į sužadintą lygmenį maksimumas yra tuomet, kai šuolio dažnis sutampa su krintančios spinduliuotės dažniu. Ši formulė dar netinka Einšteino koeficientui skaičiuoti. Iki šiol laikėme, kad krintanti spinduliuotė monochromatinė. Atsižvelgsime į tai, kad krintanti spinduliuotė yra plačiajuostė. Prisiminkime (12.23). Tuomet

$$(12.32) \quad \nu^2 = \frac{X_{12}^2}{\hbar^2} E_0^2,$$

o vietoje  $E_0^2$  parašome energijos tankį:

$$(12.33) \quad \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 = \int d\omega \langle W(\omega) \rangle.$$

Tuomet vietoje (12.31) užrašome integralą:

$$(12.34) \quad |C_2(t)|^2 = \frac{2X_{12}^2}{\varepsilon_0 \hbar^2} \int_{\omega_0 - \frac{1}{2}\Delta\omega}^{\omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega} d\omega \langle W(\omega) \rangle \frac{\sin^2 \left[ \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)t \right]}{(\omega_0 - \omega)^2}.$$

Čia  $\Delta\omega$  yra juostos plotis, apie kurį bus kalbama vėliau. Laikome, kad juosta siaura, palyginti su krintančios spinduliuotės juosta, todėl  $\langle W(\omega_0) \rangle$  galime iškelti už integralo ribų. Gauname

$$(12.35) \quad |C_2(t)|^2 = \frac{2X_{12}^2 \langle W(\omega_0) \rangle}{\varepsilon_0 \hbar^2} \text{Int}(t),$$

čia

$$(12.36) \quad \text{Int}(t) = \int_{\omega_0 - 1/2\Delta\omega}^{\omega_0 + 1/2\Delta\omega} d\omega \frac{\sin^2 \left[ \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)t \right]}{(\omega_0 - \omega)^2}.$$

Kai  $t\Delta\omega \gg 1$ , gauname

$$(12.37) \quad \text{Int}(t) = \frac{1}{2}\pi t.$$

Taigi,

$$(12.38) \quad |C_2(t)|^2 = \pi X_{12}^2 \langle W(\omega_0) \rangle t / \varepsilon_0 \hbar^2.$$

Tai dar nėra galutinė išraiška, nes reikia nepamiršti atsitiktinės atomų orientacijos elektrinio lauko atžvilgiu. Išskyrę vienetinį elektrinio lauko poliarizacijos vektorių  $\mathbf{e}_0$ , galime parašyti

$$(12.39) \quad X_{12} = \int dV \psi_1^* \mathbf{e}_0 \vec{\theta} \psi_2 = \mathbf{e}_0 \vec{\theta}_{12}.$$

Tuomet, suvidurkinę pagal kampus, gauname

$$(12.40) \quad X_{12}^2 \rightarrow \overline{X_{12}^2} = \overline{\cos^2(\theta)} \theta_{12}^2 = \frac{1}{3} \theta_{12}^2.$$

Atlikę šį pakeitimą, gauname Einšteino koeficientą  $B_{12}$ :

$$(12.41) \quad B_{12} = \pi \theta_{12}^2 / 3\varepsilon_0 \hbar^2.$$

Savaiminio spinduliavimo Einšteino koeficiento  $A_{21}$  iš pateiktų lygčių rasti negalime. Iš tikrųjų, kai lauko nėra, (12.24) ir (12.25) lygtysse  $\nu = 0$ . Tai reiškia, kad  $C_1$  ir  $C_2$  nebekinta, o kartu nekinta lygmenų užpildos

$$(12.42) \quad N_1 = N|C_1(t)|^2, \quad N_2 = N|C_2(t)|^2.$$

Tačiau  $A$  ir  $B$  koeficientų sąryšį buvome gavę iš Planko formulės. Naudodamiesi juo gauname

$$(12.43) \quad A_{21} = \frac{\hbar \omega_0^2 g_1}{\pi^2 c^3 g_2} B_{12} = \frac{\omega_0^3 g_1 \theta_{12}^2}{3\pi \varepsilon_0 \hbar c^3 g_2}.$$

Trukmė  $\tau$ , kuri yra atvirkščias dydis  $A_{21}$ ,  $\tau = 1/A_{21}$ , yra savaiminės sužadinto lygmens relaksacijos trukmė. Ji gaunama eilės  $10^{-7}$  s [17].

### 12.3. Lorencio sugerties juosta

Savaiminis spinduliavimas lemia sugerties juostos išplitimą. Rasime medžiagos poliarizuotumą, o kartu ir tiesinį jautrį. Pastarasis susijęs su sugerties koeficientu. Matysime, kad jis priklauso nuo krintančios bangos ir šuolio dažnių skirtumo.

Krintančios bangos elektrinio lauko stipris

$$(12.44) \quad E(t) = E_0 \cos(\omega t) = \frac{1}{2} E_0 [\exp(-i\omega t) + \exp(i\omega t)],$$

čia rašomas skaliarinis dydis, turint omenyje, kad banga tiesiškai poliarizuota išilgai  $x$  ašies. Poliarizuotumo projekcija į  $x$  ašį

$$(12.45) \quad P(t) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0 [\chi(\omega) \exp(-i\omega t) + \chi(-\omega) \exp(i\omega t)].$$

Čia  $\chi(\omega)$  – tiesinis jautris. Taigi, laikome, kad atsakas yra tiesinis. Be to, rašome skaliarinius dydžius, tai tinka, kai elektrinio lauko stipris ir poliarizuotumas tiesiškai poliarizuoti.  $P$  randame iš formulės

$$(12.46) \quad P(t) = Np(t)/V,$$

čia  $N$  – atomų skaičius, o

$$(12.47) \quad p(t) = - \int dV \Psi^*(t) eX \Psi(t)$$

matricinis elementas – elektrodipolinis momentas. Jis randamas taikant kvantinę teoriją, kai žinoma banginė funkcija  $\Psi(t)$ . Pasinaudoję jos išraiška (12.7), gauname

$$(12.48) \quad p(t) = - [C_1^* C_2 X_{12} \exp(-i\omega_0 t) + C_2^* C_1 X_{21} \exp(i\omega_0 t)].$$

Koeficientus  $C_1(t)$  ir  $C_2(t)$  nagrinėjome praeitame skyrelyje. Tačiau ten juos radome iš (12.24) ir (12.25) lygčių, kuriose neįskaitomas savaiminis spinduliavimas. Savaiminis spinduliavimas į (12.25) lygtį įtraukiamas dirbtinai, prirašant papildomą narį:

$$(12.49) \quad \nu \cos(\omega t) \exp(i\omega_0 t) C_1 - i\gamma_{\text{sp}} C_2 = i \frac{dC_2}{dt}.$$

Čia  $\gamma_{\text{sp}}$  yra savaiminio spinduliavimo sparta

$$(12.50) \quad \gamma_{\text{sp}} = A_{21} = \frac{\omega_0^3 \theta_{12}^2}{3\pi \varepsilon_0 \hbar c^3}.$$

Pasinaudojome tuo, kad lygmenų išsigimimų santykis  $g_1/g_2 = 1$ . Jei lauko nėra,  $\nu = 0$  (12.32), tuomet  $C_2$  gesta pagal eksponentinį dėsnį:

$$(12.51) \quad C_2(t) = C_2(0) \exp(-\gamma_{\text{sp}} t),$$

o kartu gesta ir antrojo lygmens užpilda:

$$(12.52) \quad N_2(t) = N_2(0) \exp(-2\gamma_{\text{sp}} t).$$

Panašiai kaip praeitame skyrelyje spęsimė (12.49) darydami prielaidą, kad

$$(12.53) \quad C_1(t) = 1.$$

Sprendinys, kai  $\gamma_{\text{sp}} t \gg 1$ , užrašomas taip:

$$(12.54) \quad C_2(t) = -\frac{1}{2}\nu \left( \frac{\exp(i[\omega_0 + \omega]t)}{\omega_0 + \omega - i\gamma_{\text{sp}}} + \frac{\exp(i[\omega_0 - \omega]t)}{\omega_0 - \omega - i\gamma_{\text{sp}}} \right).$$

Įrašę (12.53) bei (12.54) į (12.48), gauname

$$(12.55) \quad p(t) = \frac{X_{12}^2 E_0}{2\hbar} \left[ \frac{\exp(i\omega t)}{\omega_0 + \omega - i\gamma_{\text{sp}}} + \frac{\exp(-i\omega t)}{\omega_0 - \omega - i\gamma_{\text{sp}}} + \frac{\exp(-i\omega t)}{\omega_0 + \omega + i\gamma_{\text{sp}}} + \frac{\exp(i\omega t)}{\omega_0 - \omega + i\gamma_{\text{sp}}} \right].$$

Čia pasinaudojome (12.23)  $\nu$  išraiška. Palyginę (12.55) su (12.45) ir pasinaudoję  $P$  ir  $p$  sąryšiu (12.46), gauname tiesinį jautrį:

$$(12.56) \quad \chi(\omega) = \frac{N\theta_{12}^2}{3\varepsilon_0\hbar V} \left[ \frac{1}{\omega_0 - \omega - i\gamma_{\text{sp}}} + \frac{1}{\omega_0 + \omega + i\gamma_{\text{sp}}} \right].$$

Čia  $X_{12}$  pakeistas į  $\theta_{12}$ , (12.40) formulė. Prisiminę  $\gamma_{\text{sp}}$  (12.50) išraišką, perrašome

$$(12.57) \quad \chi(\omega) = \frac{2\pi N c^3}{\omega_0^3 V} \left[ \frac{\gamma_{\text{sp}}}{\omega_0 - \omega - i\gamma_{\text{sp}}} + \frac{\gamma_{\text{sp}}}{\omega_0 + \omega + i\gamma_{\text{sp}}} \right].$$

Gauta  $\chi(\omega)$  išraiška leidžia nustatyti sugerties koeficiento priklausomybę nuo dažnio  $\omega$ . Dielektrinė skvarba  $\varepsilon$  su tiesiniu jautriu susijusi sąryšiu

$$(12.58) \quad \varepsilon(\omega) = 1 + \chi(\omega).$$

Lūžio rodiklis randamas, ištraukus šaknį iš dielektrinės skvarbos:

$$(12.59) \quad n'(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)}.$$

Dydis  $n'(\omega)$  yra kompleksinis. Atskirkime realiąją ir menamąją dalis:

$$(12.60) \quad n'(\omega) = n(\omega) + i\kappa(\omega).$$

Bangos skaičius  $k = n'(\omega)\omega/c$ . Galime įsitikinti, kad menamoji bangos skaičiaus dalis yra susijusi su sugerties koeficientu. Iš tikrųjų:

$$(12.61) \quad \exp(in'(\omega)z\omega/c) = \exp(-\kappa(\omega)z\omega/c) \exp(in(\omega)z\omega/c),$$

taigi  $\kappa(\omega)$  lemia eksponentinį bangos gesimą sklidimo metu. Sugerties koeficientas:

$$(12.62) \quad K(\omega) = 2\omega\kappa(\omega)/c.$$

Daugiklis 2 atsiranda dėl to, kad intensyvumas gesta dukart greičiau nei amplitudė. Pakėlę kvadratu (12.60) ir prilyginę (12.58), menamajai daliai gauname:

$$(12.63) \quad 2n(\omega)\kappa(\omega) = \text{Im}(\chi(\omega)).$$

Tuomet

$$(12.64) \quad K(\omega) = \omega \text{Im}(\chi(\omega))/cn(\omega).$$

Tarę, kad  $n(\omega) \approx 1$ , gauname

$$(12.65) \quad K(\omega) = \frac{2\pi^2 c^2 \gamma_{\text{sp}} N}{\omega_0^2 V} \frac{\gamma_{\text{sp}}/\pi}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma_{\text{sp}}^2}.$$

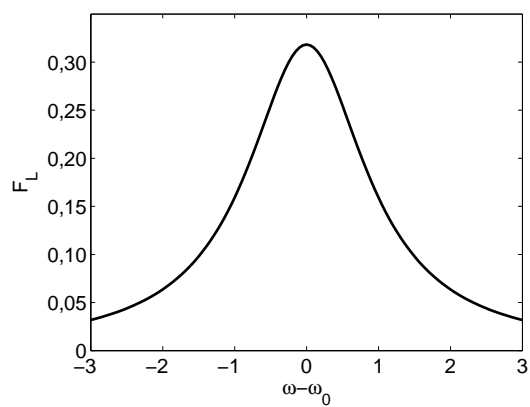
Matome, kad sugerties juosta yra Lorencio. Lorencio kontūras, normuotas į vienetą, yra

$$(12.66) \quad F_L(\omega) = \frac{\gamma_{\text{sp}}/\pi}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma_{\text{sp}}^2}.$$

Normavimas į vienetą reiškia, kad plotas po šiuo kontūru yra lygus vienam:

$$(12.67) \quad \int F_L(\omega) d\omega = 1.$$

12.1 pav. pavaizduota Lorencio juosta (Lorencio linija).



12.1 pav. Lorencio sugerties juosta. Plotas normuotas į vienetą. Dažnis normuotas į juostos plotį  $\gamma_{sp}$

# 13 SKYRIUS

## Lazerio lygtys

Iš Šrėdingerio lygties gaunamos atomo poliarizuotumo ir užpildos apgražos lygtys. Tai yra dvi lygtys, kurios siejasi su elektrinio lauko stipriu. Iš Maksvelo lygčių parašę jam lygtį, gauname uždara lygčių sistemą. Tai yra pusiau klasikinio modelio lazerio lygtys. Jos yra taikomos daugelyje lazerių fizikos uždavinių. Vėlesnėje dalyje matysime, kaip jos aprašo modų sinchronizaciją. Čia parodysime, kaip iš šių lygčių gaunamos balanso lygtys; matysime, kokie artiniai turi galioti, kad tiktų aprašymas balanso lygtimis. Dėl šių artinių balanso lygtys netinka modų sinchronizacijai aprašyti. Panagrinėsime juostos išplitimą ir apgražos tankio kontūre atsirandančias idubas.

Išskirsime du atvejus: bėgančiųjų ir stovinčiųjų bangų. Bėgančiosios bangos sklinda žiediniame rezonatoriuje ir jas nagrinėti yra paprasčiau. Svarbesnis yra stovinčiųjų bangų, kurios susidaro Fabri ir Pero rezonatoriuje, atvejis. Taigi, užrašysime lygtis tokiam rezonatoriui. Jas pritaikysime modeliuodami impulsinį lazerį su kokybės moduliacija.

### 13.1. Lygtys mikroskopiniams dydžiams

6.1 skyriuje iš Maksvelo lygčių laisvoje erdvėje buvome gavę banginę elektrinio lauko stiprio lygtį. Dabar gausime banginę lygtį tuo atveju, kai erdvė nėra laisva, t. y.  $J_T \neq 0$ . Prisiminkime Maksvelo lygtis (7.6). Panašiai kaip buvome išskyrę skersinę ir išilginę sroves, išskirsime elektrinio lauko stiprį:

$$(13.1) \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_T + \mathbf{E}_L,$$

čia

$$(13.2) \quad \nabla \cdot \mathbf{E}_T = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E}_L = 0.$$

Iš ketvirtosios Maksvelo lygties turime

$$(13.3) \quad \nabla \cdot \mathbf{E}_L = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Skersiniam laukui parašome

$$(13.4) \quad \begin{aligned} c^2 \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\partial \mathbf{E}_T}{\partial t} + \frac{\mathbf{J}_T}{\varepsilon_0}, \\ \nabla \times \mathbf{E}_T &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{E}_T &= 0. \end{aligned}$$

Būtent šios lygtys aprašo skersines elektromagnetines bangas. Paveikę antrąją lygtį rotoriaus operatoriumi, prisiminę, kad  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$  bei pasinaudoję pirmąja ir ketvirtąja lygtimis, gauname:

$$(13.5) \quad \Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{E}} = \mu_0 \ddot{\mathbf{P}}.$$

Čia poliarizuotumas  $\frac{\partial \mathbf{P}_T}{\partial t} = \mathbf{J}_T$ , šviesos greitis  $c^2 = 1/(\varepsilon_0 \mu_0)$ . Indeksas  $T$  (13.5) formulėje neberašomas. Norint įskaityti nuostolius rezonatoriuje, prie srovės  $\mathbf{J}_T$  pridamas narys  $\sigma \mathbf{E}_T$ . Čia  $\sigma$  – laidumas. Tuomet gauname banginę lygtį

$$(13.6) \quad \Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{E}} - \mu_0 \sigma \dot{\mathbf{E}} = \mu_0 \ddot{\mathbf{P}}.$$

Du pirmi nariai atitinka bangos lygtį laisvoje terpėje. Trečias dėmuo susijęs su nuostoliais. Narys dešinėje pusėje yra bangos šaltiniai. Poliarizuotumo  $\mathbf{P}$  lygtis gaunama iš kvantinės teorijos.

Remsimės (12.24) ir (12.25) lygtimis. Pertvarkysime jas. Į lygtis įeina sandauga  $E_0 \cos(\omega t) X_{12}$ . Pakeisime ją skaliarine vektorinių dydžių sandauga  $\mathbf{E}(t) \vec{\theta}_{12}$ . Čia  $\mathbf{E}(t)$  rašome vietoje  $E_0 \cos(\omega t)$ . Matricinis elementas  $\vec{\theta}_{12}$  apibrėžtas (12.39). Taigi, nagrinėsime lygtis

$$(13.7) \quad \frac{dC_1}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \mathbf{E}(t) \vec{\theta}_{12} \exp(-i\omega_0 t) C_2,$$

$$(13.8) \quad \frac{dC_2}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \mathbf{E}(t) \vec{\theta}_{21} \exp(i\omega_0 t) C_1.$$

Prisiminkime dipolinio momento išraišką (12.48). Vektoriniam dydžiui turėsime

$$(13.9) \quad -\mathbf{p} = C_1^* C_2 \exp(-i\omega_0 t) \vec{\theta}_{12} + C_1 C_2^* \exp(i\omega_0 t) \vec{\theta}_{21}.$$



Išskirsime dėmenį

$$(13.10) \quad \alpha(t) = C_1^* C_2 \exp(-i\omega_0 t)$$

ir gausime jo diferencialinę lygtį. Dipolinis momentas trumpiau užrašomas

$$(13.11) \quad -\mathbf{p} = \alpha(t) \vec{\theta}_{12} + \alpha(t)^* \vec{\theta}_{21}.$$

Taigi, išdiferencijuokime pagal laiką  $\alpha(t)$ :

$$(13.12) \quad \dot{\alpha} = -i\omega_0 \alpha + C_1^* \dot{C}_2 \exp(-i\omega_0 t) + \dot{C}_1^* C_2 \exp(-i\omega_0 t).$$

$\dot{C}_2$  bei  $\dot{C}_1^*$  išvestines įrašome iš (13.7) ir (13.8). Gauname lygtį

$$(13.13) \quad \dot{\alpha} = -i\omega_0 \alpha - \frac{1}{i\hbar} \mathbf{E}(t) \vec{\theta}_{21} d.$$

Čia atsirado naujas dydis

$$(13.14) \quad d = |C_2|^2 - |C_1|^2,$$

kuris yra atomo užpildų apgraža. Ir jai parašysime diferencialinę lygtį. Išdiferencijavę  $d$  pagal laiką, gauname

$$(13.15) \quad \dot{d} = C_2^* \dot{C}_2 + \dot{C}_2^* C_2 - C_1^* \dot{C}_1 - \dot{C}_1^* C_1.$$

Surašę išvestines, gauname

$$(13.16) \quad \dot{d} = \frac{2}{i\hbar} \mathbf{E}(t) (\vec{\theta}_{21} \alpha^* - \alpha \vec{\theta}_{12}).$$

(13.13) ir (13.16) turi trūkumą. Jose nėra relaksacijos, kuri turėtų vykti išjungus lauką  $\mathbf{E}$ . Pusiau klasikiniame modelyje relaksaciniai nariai prirašomi dirbtinai. Tuomet turėsime

$$(13.17) \quad \dot{\alpha} = -i\omega_0 \alpha - \gamma \alpha - \frac{1}{i\hbar} \mathbf{E}(t) \vec{\theta}_{21} d,$$

$$(13.18) \quad \dot{d} = \frac{2}{i\hbar} \mathbf{E}(t) (\vec{\theta}_{21} \alpha^* - \alpha \vec{\theta}_{12}) + \frac{d_0 - d}{T}.$$

Čia  $\gamma$  yra poliarizuotumo relaksacijos sparta,  $T$  – apgražos relaksacijos trukmė, o  $d_0$  – vertė, į kurią relaksuoja apgraža. Ji nelygi nuliui, jei vyksta kaupinimas.

Lazerinėje medžiagoje yra ne vienas atomas, o atomų grupė. Kiekvieno atomo koordinatė  $\mathbf{x}_\mu$ , todėl mikroskopiniai dyžiai priklausys nuo koordinatė. Tai įskaitysime, prirašydami indeksą  $\mu$ :

$$(13.19) \quad \dot{\alpha}_\mu = -(i\omega_{0\mu} + \gamma) \alpha_\mu - \frac{1}{i\hbar} \mathbf{E}(\mathbf{x}_\mu, t) \vec{\theta}_{21} d_\mu,$$

$$(13.20) \quad \dot{d}_\mu = \frac{d_0 - d_\mu}{T} + \frac{2}{i\hbar} \mathbf{E}(\mathbf{x}_\mu, t) (\vec{\theta}_{21} \alpha_\mu^* - \alpha_\mu \vec{\theta}_{12}).$$

Abi lygtys susijusios su elektrinio lauko stiprio lygtimi:

$$(13.21) \quad \Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{E}} - \mu_0 \sigma \dot{\mathbf{E}} = \mu_0 \ddot{\mathbf{P}},$$

kurioje

$$(13.22) \quad P(\mathbf{x}, t) = \sum_\mu \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\mu) \mathbf{p}_\mu$$

ir

$$(13.23) \quad \mathbf{p}_\mu = - \left[ \alpha_\mu(t) \vec{\theta}_{12} + \alpha_\mu^*(t) \vec{\theta}_{21} \right].$$

Taigi, gavome uždara lygčių sistemą: tris diferencialines lygtis ir lygtis pasiskaičiuoti poliarizuotumą. Iš šių lygčių gausime makroskopinių dydžių – poliarizuotumo ir apgražos tankio – lygtis.

## 13.2. Lygtys makroskopiniams dydžiams. Bėgančiosios bangos

Makroskopinis dydis poliarizuotumas užrašomas taip:

$$(13.24) \quad \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{P}^{(+)}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{P}^{(-)}(\mathbf{x}, t).$$

Šioje išraiškoje atskiri dėmenys yra susiję su mikroskopiniais dydžiais:

$$(13.25) \quad \mathbf{P}^{(+)}(\mathbf{x}, t) = - \sum_\mu \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\mu) \vec{\theta}_{12} \alpha_\mu(t)$$

ir

$$(13.26) \quad \mathbf{P}^{(+)*} = \mathbf{P}^{(-)}.$$

Apgražos tankis yra atomų apgražų suma:

$$(13.27) \quad D(\mathbf{x}, t) = \sum_\mu \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\mu) d_\mu.$$

Lygtis (13.19) ir (13.20) dauginame iš  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\mu) \vec{\theta}_{12}$  ir  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\mu)$  ir sumuojame pagal  $\mu$ . Be to, atsižvelgiame į tai, kad  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\mu) \mathbf{E}(\mathbf{x}_\mu, t) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\mu) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ . Gauname mikroskopinių dydžių lygtis

$$(13.28) \quad \frac{d}{dt} \mathbf{P}^{(+)}(\mathbf{x}, t) = (-i\omega_0 - \gamma) \mathbf{P}^{(+)}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{i\hbar} \left( \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \vec{\theta}_{21} \right) \vec{\theta}_{12} D(\mathbf{x}, t),$$

$$(13.29) \quad \frac{d}{dt}D(\mathbf{x}, t) = \frac{D_0 - D(\mathbf{x}, t)}{T} - \frac{2}{i\hbar}\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)(\mathbf{P}^{(-)} - \mathbf{P}^{(+)}).$$

Čia pažymėta suma  $\sum_{\mu} d_0 = Nd_0 = D_0$ . Kartu su lygtimi

$$(13.30) \quad \Delta\mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\ddot{\mathbf{E}} - \mu_0\sigma\dot{\mathbf{E}} = \mu_0(\ddot{\mathbf{P}}^{(+)} + \ddot{\mathbf{P}}^{(-)})$$

šios lygtys sudaro uždara lygčių sistemą. Tai yra lazerio lygtys makroskopiniams dydžiams. Tačiau jas galime supaprastinti, pritaikę lėtai kintančių amplitudžių ir besisukančios bangos artinius.

Tarsime, kad rezonatorius yra bendražidinis. Jame sklinda bėgančiosios bangos. Elektrinio lauko stiprį išskaidykime į dvi dalis:

$$(13.31) \quad \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{E}^{(-)*}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{x}, t).$$

Bėgančiosios bangos atveju galime išskirti greitai kintantį fazinį daugiklį:

$$(13.32) \quad \mathbf{E}^{(\pm)}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_0^{(\pm)}(\mathbf{x}, t) \exp[\pm i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)].$$

Čia  $\mathbf{E}_0^{(\pm)}(\mathbf{x}, t)$  yra lėtai laike ir erdvėje kintanti amplitudė. Panagrinėkime dėmenį

$$(13.33) \quad \Delta\mathbf{E}^{(+)} - \frac{1}{c^2}\ddot{\mathbf{E}}^{(+)}.$$

Įrašę (13.32) gauname

$$(13.34)$$

$$\exp[i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)]$$

$$\times \left[ -k^2\mathbf{E}_0^{(+)} + 2i(\mathbf{k}\nabla)\mathbf{E}_0^{(+)} + \Delta\mathbf{E}_0^{(+)} + (\omega^2/c^2)\mathbf{E}_0^{(+)} + (2i\omega/c^2)\dot{\mathbf{E}}_0^{(+)} + (1/c^2)\ddot{\mathbf{E}}_0^{(+)} \right].$$

Kadangi  $k = \omega/c$ , tai pirmas ir ketvirtas dėmenys skliaustuose pasinaikina. Trečias ir šeštas dėmenys atmetami dėl lėtai kintančių amplitudžių artinio. Pagal jį

$$(13.35) \quad \frac{dE_0}{dt} \ll |\omega E_0|, \quad \frac{dE_0}{dx} \ll |kE_0|,$$

todėl trečias dėmuo daug mažesnis už antrąjį, o šeštas už penktąjį. Taigi, lieka tik du dėmenys

$$(13.36) \quad \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)] \left[ 2i(\mathbf{k}\nabla)\mathbf{E}_0^{(+)} + (2i\omega/c^2)\dot{\mathbf{E}}_0^{(+)} \right].$$

Trečias dėmuo (12.30) lygtyje taip pat supaprastėja dėl lėtai kintančių amplitudžių artinio. Skaičiuojant išvestinę pagal laiką, įskaitoma tiksliai greitai kintančio fazinio daugiklio išvestinė:

$$(13.37) \quad \mu_0\sigma\dot{\mathbf{E}}^{(+)} \approx \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)]\mu_0\sigma i\omega\mathbf{E}_0^{(+)}.$$

Liko suskaičiuoti dešinės lygties pusės nari. Išskirkime fazinį daugiklį ir lėtai kintančią poliarizuotumo amplitudę:

$$(13.38) \quad \mathbf{P}^{(\pm)}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{P}_0^{(\pm)}(\mathbf{x}, t) \exp[\pm i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)].$$

Tuomet

$$(13.39) \quad \mu_0 \ddot{\mathbf{P}}^{(\pm)}(\mathbf{x}, t) \approx -\omega^2 \mu_0 \mathbf{P}_0^{(\pm)}(\mathbf{x}, t) \exp[\pm i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)].$$

Taigi, surašę visus narius, gauname supaprastintą lygtį

$$(13.40) \quad 2i(k\nabla)\mathbf{E}_0^{(+)} + (2i\omega/c^2)\dot{\mathbf{E}}_0^{(+)} + \mu_0\sigma i\omega\mathbf{E}_0^{(+)} = -\omega^2\mu_0\mathbf{P}_0^{(+)}.$$

Atsižvelgiame į tai, kad  $\mathbf{k}/k = \mathbf{e}_k$ ,  $c^2\mu_0 = 1/\varepsilon_0$ , ir pažymime  $\sigma/2\varepsilon_0 = \kappa$ . Perrašome lygtį elektrinio lauko stipriui

$$(13.41) \quad c(\mathbf{e}_k\nabla)\mathbf{E}_0^{(+)}(\mathbf{x}, t) + \dot{\mathbf{E}}_0^{(+)}(\mathbf{x}, t) + \kappa\mathbf{E}_0^{(+)}(\mathbf{x}, t) = i\omega_0/(2\varepsilon_0)\mathbf{P}_0^{(+)}(\mathbf{x}, t).$$

Čia dešinėje pusėje  $\omega$  pakeistas į  $\omega_0$ . Panašiai gauname poliarizuotumo lygtį

$$(13.42) \quad \dot{\mathbf{P}}_0^{(+)}(\mathbf{x}, t) = (i\omega - i\omega_0 - \gamma)\mathbf{P}_0^{(+)}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{i\hbar}(\mathbf{E}_0^{(+)}(\mathbf{x}, t)\vec{\theta}_{21})\vec{\theta}_{12}D(\mathbf{x}, t).$$

Apražos lygtyje turėtų atsirasti keturi nariai:

$$(13.43) \quad \mathbf{E}^{(+)}\mathbf{P}^{(-)} - \mathbf{E}^{(-)}\mathbf{P}^{(+)} - \mathbf{E}^{(+)}\mathbf{P}^{(+)} + \mathbf{E}^{(-)}\mathbf{P}^{(-)},$$

tačiau du paskutinius atmetame dėl besisukančios bangos artinio, kuris leidžia neįskaityti narių su greitai kintančiais faziniais daugikliais. Taigi, gauname

$$(13.44) \quad \frac{d}{dt}D(\mathbf{x}, t) = \frac{D_0 - D(\mathbf{x}, t)}{T} - \frac{2}{i\hbar} \left[ \mathbf{E}_0^{(+)}(\mathbf{x}, t)\mathbf{P}_0^{(-)}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{E}_0^{(-)}(\mathbf{x}, t)\mathbf{P}_0^{(+)}(\mathbf{x}, t) \right].$$

Lygtys (13.41), (13.42) bei (13.44) yra galutinės lazerio lygtys bėgančiųjų bangų atveju [11]. Kitoje užduotyje šiek tiek modifikuosime šias lygtis – sunormuosime ir modeliuosime esant tam tikrai pradinei sąlygai.

### 13.3. Užduotis. Optinis sūkurys lazeryje

Supaprastinsime gautas lygtis tarę, kad nėra išderinimo  $\omega - \omega_0$  ir kad laukas yra homogeninis bangos sklidimo krypties atžvilgiu. Žymėsime trumpiau

$$(13.45) \quad E_0^{(+)} \rightarrow E, \quad E_0^{(-)} \rightarrow E^*,$$

$$(13.46) \quad P_0^{(+)} \rightarrow P, \quad P_0^{(-)} \rightarrow P^*.$$

Tuomet lygtys atrodo taip

$$(13.47) \quad \partial_t E = -\kappa E + \frac{i\omega_0}{2\varepsilon_0} P,$$

$$(13.48) \quad \partial_t P = -\gamma P + \frac{1}{i\hbar} E \vec{\theta}_{21} \vec{\theta}_{12} D,$$

$$(13.49) \quad \partial_t D = \frac{D_0 - D}{T} - \frac{2}{i\hbar} [EP^* - E^*P].$$

Prieš modeliuojant patartina lygtis sunormuoti, tai yra užrašyti jas su bedimensiais kintamaisiais. Normuosime į stacionarias vertes:

$$(13.50) \quad E/E_{st} = E', \quad P/P_{st} = P', \quad D/D_{st} = D'.$$

Stacionarios vertės randamos prilyginus laikines išvestines nuliui

$$(13.51) \quad \partial_t E = 0, \quad \partial_t P = 0, \quad \partial_t D = 0.$$

Perrašome elektrinio lauko stiprio lygtį su naujais kintamaisiais:

$$(13.52) \quad E_{st} \partial_t E' = -\kappa E_{st} E' + \frac{i\omega_0}{2\varepsilon_0} P' P_{st}.$$

Dauginame šią lygtį iš  $\frac{1}{E_{st}}$  ir pasinaudojame stacionarumo sąlyga:

$$(13.53) \quad -\kappa E_{st} + \frac{i\omega_0}{2\varepsilon_0} P_{st} = 0.$$

Gauname

$$(13.54) \quad \partial_t E' = -\kappa E' + \kappa P'.$$

Taip pat perrašome poliarizuotumo lygtį. Gauname

$$(13.55) \quad \partial_t P' = -\gamma P' + \gamma E' D'.$$

Apgražos lygtis atrodo taip:

$$(13.56) \quad \partial_t D' = -\frac{1}{T} D' + \frac{D_0}{D_{st} T} - \frac{1}{2T} \frac{D_0 - D_{st}}{D_{st}} [E'^* P' + E' P'^*].$$

Naudojame naujus pažymėjimus

$$(13.57) \quad \frac{1}{T} = \gamma_{\parallel}, \quad \Lambda = (D_0 = D_{st})/D_{st}, \quad D_0/D_{st} = D'_0,$$

gauname

$$(13.58) \quad \partial_t D' = -\gamma_{\parallel} \left[ (D' - D'_0) + \frac{1}{2} \Lambda (E'^* P' + E' P'^*) \right].$$

Šiose lygtyse liko nenormuoti dydžiai: laikas  $t$  ir  $\kappa$ ,  $\gamma$ ,  $\gamma_{\parallel}$ . Pažymėkime bedimensį laiką:

$$(13.59) \quad t \rightarrow \tau = t(\kappa + \gamma)$$

ir galutinai turėsime [7]

$$(13.60) \quad \partial_{\tau} E = \frac{1}{1 + \gamma/\kappa} [-E + P + i\alpha \nabla^2 E],$$

$$(13.61) \quad \partial_{\tau} P = -\frac{1}{1 + \kappa/\gamma} P - i \frac{\omega - \omega_0}{\kappa + \gamma} P + \frac{1}{1 + \kappa/\gamma} ED,$$

$$(13.62) \quad \partial_{\tau} D = -\frac{1}{\kappa/\gamma_{\parallel} + \gamma/\gamma_{\parallel}} \left[ (D - D_0) + \frac{1}{2} \Lambda (E^* P + P^* E) \right].$$

Čia neberašomi apostrofai. (13.60) lygtyje parašytas papildomas dėmuo, atsirandantis dėl difrakcijos, o į (13.61) lygtį gražintas išderinimas.

**Užduotis.** Sumodeliuoti šias lygtis, kai pradinės sąlygos yra:

$$(13.63) \quad E = (x + iy) \exp(-x^2 - y^2),$$

$$(13.64) \quad P = (x + iy) \exp(-x^2 - y^2),$$

$$(13.65) \quad D = \exp(-x^2 - y^2).$$

Parametrus parinkti tokius:  $\frac{\omega - \omega_0}{\kappa + \gamma} = 0,6$ ,  $\kappa/\gamma = 0,04$ ,  $\gamma/\gamma_{\parallel} = 1$ ,  $\alpha = 4 \times 10^{-4}$ ,  $D_0 = 2,992$ ,  $\Lambda = 1$ . Šie parametrai paimti iš [7] straipsnio.

„Scilab“ programos ruošinys:

```

clear ; clc ; close ;

ax=4;
dx=0.5;
x1=-ax:dx:ax-dx; // koordinate
y1=x1;

//====pradines salygos=====
for ix=1:length(x1)
    for iy=1:length(y1)

E0(ix ,iy)=exp(-x1(ix)^2-y1(iy)^2)*(x1(ix)+%i*y1(iy));
P0(ix ,iy)=exp(-x1(ix)^2-y1(iy)^2)*(x1(ix)+%i*y1(iy));
D0(ix ,iy)=exp(-x1(ix)^2-y1(iy)^2);
    end
end

//=====

//====parametrai=====
C1=1/(1+1/0.04);
C2=1/(1+0.04);
alpha=0.0004;
Dc=2.992;
om=0.6;
//=====
DEx=0*E0;

ht=0.5;

for it=1:20

    for it1=1:100 // piesia kas 100 kadra

        for ix=2:length(x1)-1
            for iy=2:length(y1)-1
                DEx(ix ,iy)=...; // difrakcinis narys
            end
        end
    end
end

```

```

E=E0+ht*C1*(-E0+P0+%i*alpha*DEx);
P=...; // lygtys
D=...;

E0=E; P0=P; D0=D;
end

//== piesimas=====
xset("colormap",graycolormap(64))
Sgrayplot(x1,y1,real(E))
//=====
end

```

13.1 pav. pavaizduotas modeliavimo rezultatas.

## 13.4. Lygtys mikroskopiniams dydžiams. Stovinčiosios bangos

Fabri ir Pero rezonatoriuje gali generuotis daug išilginių modų, kurios atitinka stovinčiąsias bangas. Todėl elektrinio lauko stiprį parašysime kaip erdvinių modų, kurių amplitudės kinta bėgant laikui, superpoziciją:

$$(13.66) \quad \mathbf{E} = \sum_{\lambda} b_{\lambda}(t) \mathbf{u}_{\lambda}(\mathbf{x}) N_{\lambda} + (*).$$

Indeksas  $\lambda$  žymi modos numerį. Atskira moda tenkina Helmholco lygtį

$$(13.67) \quad \Delta \mathbf{u}_{\lambda}(\mathbf{x}) = -k_{\lambda}^2 \mathbf{u}_{\lambda}(\mathbf{x}) = -\frac{\omega_{\lambda}^2}{c^2} \mathbf{u}_{\lambda}(\mathbf{x})$$

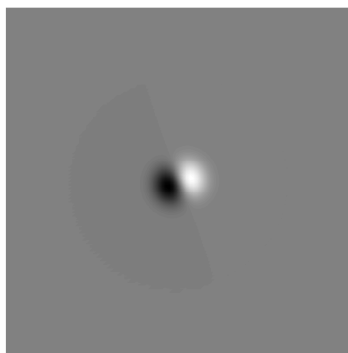
ir ortonormavimo sąlygą

$$(13.68) \quad \int \mathbf{u}_{\lambda}(\mathbf{x}) \mathbf{u}_{\lambda'}(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} = \delta_{\lambda \lambda'}.$$

$N_{\lambda}$  pasitelktas normavimui:

$$(13.69) \quad N_{\lambda} = i \sqrt{\frac{\hbar \omega_{\lambda}}{2 \varepsilon_0}}.$$





13.1 pav. Optinis sūkurys lazeryje

$b_\lambda$  ir  $\mathbf{u}_\lambda$  yra bedimensiniai dydžiai. Iš (13.21) gausime lygtį atskiros modos amplitudei  $b_\lambda$ . Perrašysime (13.21):

$$(13.70) \quad \Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{E}} - \mu_0 \sigma \dot{\mathbf{E}} = \mu_0 \ddot{\mathbf{P}},$$

čia

$$(13.71) \quad \mathbf{P} = - \sum_{\mu} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\mu) \vec{\theta}_{12} \alpha_\mu(t) + (*).$$

(\*) žymi kompleksiška jungtinę dalį. Įrašę (13.66) ir (13.71) į (13.70), gauname (13.72)

$$\sum_{\lambda} \mathbf{u}_\lambda(\mathbf{x}) N_\lambda \left( b_\lambda(t) k_\lambda^2 + \frac{\ddot{b}_\lambda(t)}{c^2} + \mu_0 \sigma \dot{b}_\lambda(t) \right) + (*) = \mu_0 \sum_{\mu} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\mu) \vec{\theta}_{12} \ddot{\alpha}_\mu(t) + (*).$$

Dauginame šią lygtį iš  $\frac{c^2}{N_{\lambda'}} \mathbf{u}_{\lambda'}(\mathbf{x})$  ir integruojame pagal  $\int d^3 \mathbf{x}$ . Gauname

$$(13.73) \quad \omega_\lambda^2 b_\lambda(t) + \ddot{b}_\lambda(t) + \mu_0 \sigma c^2 \dot{b}_\lambda(t) + (*) = \frac{\mu_0 c^2}{N_\lambda} \sum_{\mu} \vec{\theta}_{12} \mathbf{u}_\lambda(\mathbf{x}_\mu) \ddot{\alpha}_\mu(t) + (*).$$

Dešinėje pusėje yra skaliarinė sandauga  $\vec{\theta}_{12} \mathbf{u}_\lambda(\mathbf{x}_\mu)$ . Toliau įrašome

$$(13.74) \quad b_\lambda = B_\lambda e^{-i\omega_\lambda t}, \quad \alpha_\mu = A_\mu e^{-i\omega_\mu t}$$

ir pritaikome lėtai kintančių amplitudžių artinį:

$$(13.75) \quad \omega_\lambda^2 b_\lambda + \ddot{b}_\lambda = B_\lambda \omega_\lambda^2 e^{-i\omega_\lambda t} + (-\omega_\lambda^2 B_\lambda - 2i\omega_\lambda \dot{B}_\lambda + \ddot{B}_\lambda) e^{-i\omega_\lambda t} \approx -2i\omega_\lambda \dot{B}_\lambda e^{-i\omega_\lambda t},$$

$$(13.76) \quad \ddot{\alpha}_\mu(t) \approx -\omega_{0\mu}^2 \alpha_\mu \approx -\omega_\lambda^2 \alpha_\mu,$$

$$(13.77) \quad \dot{b}_\lambda(t) \approx -i\omega_\lambda b_\lambda(t).$$

Pasinaudojame tuo, kad

$$(13.78) \quad \dot{B}_\lambda = (\dot{b}_\lambda + i\omega_\lambda b_\lambda) e^{-i\omega_\lambda t}.$$

Gauname lygtį amplitudei  $b_\lambda$

$$(13.79) \quad \dot{b}_\lambda = (-i\omega_\lambda - \kappa_\lambda) b_\lambda - i \sum_{\mu} \alpha_\mu g_{\mu\lambda}^*,$$

čia

$$(13.80) \quad g_{\mu\lambda}^* = -i\sqrt{\frac{\omega_\lambda}{2\hbar\varepsilon_0}} \vec{\theta}_{12} \mathbf{u}_\lambda(\mathbf{x}_\mu),$$

o  $\kappa_\lambda = \frac{\mu_0\sigma c^2}{2}$ . Iš (13.19) ir (13.20), pasinaudoję (13.66), gauname

$$(13.81) \quad \dot{\alpha}_\mu = -i\omega_{0\mu}\alpha_\mu - \gamma\alpha_\mu + i \sum_\lambda g_{\mu\lambda} b_\lambda d_\mu,$$

$$(13.82) \quad \dot{d}_\mu = 2i \sum_\lambda (g_{\mu\lambda}^* \alpha_\mu b_\lambda^* - g_{\mu\lambda} \alpha_\mu^* b_\lambda) + \frac{d_0 - d_\mu}{T}.$$

Reikia pasakyti, kad dydis  $g_{\mu\lambda}$  priklauso nuo koordinatės  $\mathbf{x}_\mu$ . Aprašymas stovinčiomis modomis tinka tik apytiksliai, nes realioje situacijoje vienas rezonatoriaus veidrodžių būna iš dalies atspindintis ir iš dalies praleidžiantis. Vėliau aprašysime išilginių modų susidarymą Fabri ir Pero rezonatoriuje remdamiesi lygtimis makroskopiniams dydžiams. Elektriniam laukui bus užrašytos dvi lygtys – į priešingas puses bėgančių bangų. Dabar pasinaudosime gautomis lygtimis ir, remdamiesi tam tikromis prielaidomis, išvesime balanso lygtis fotonų skaičiui bei apgražai.

## 13.5. Balanso lygčių išvedimas

Praeitame skyrelyje, (13.74) formulėje buvo tarta, kad  $b_\lambda$  osciliuoja dažniu, sutampančiu su šaltojo rezonatoriaus dažniu  $\omega_\lambda$ . Dabar užrašysime bendresniu pavidalu, būtent

$$(13.83) \quad b_\lambda = B_\lambda e^{-i\Omega_\lambda t},$$

čia  $\Omega_\lambda$  gali nesutapti su  $\omega_\lambda$ ,  $B_\lambda$  yra lėta laiko funkcija. Tarsime, kad  $d_\mu$  nepriklauso nuo laiko arba kinta lėtai ir  $\alpha_\mu$  užrašysime kaip superpoziciją:

$$(13.84) \quad \alpha_\mu = \sum_\lambda A_{\mu\lambda} e^{-i\Omega_\lambda t}.$$

Įrašę tai į poliarizuotumo lygtį (13.81), gauname

$$(13.85) \quad 0 = \sum_\lambda (-i(\omega_{0\mu} - \Omega_\lambda) - \gamma) A_{\mu\lambda} e^{-i\Omega_\lambda t} + i \sum_\lambda g_{\mu\lambda} B_\lambda d_\mu e^{-i\Omega_\lambda t}.$$

$A_{\mu\lambda}$  nepriklauso nuo laiko, nes tarėme, kad  $d_\mu$  nekinta. Prilyginame eksponentinių funkcijų  $e^{-i\Omega_\lambda t}$  koeficientus ir gauname

$$(13.86) \quad A_{\mu\lambda} = \frac{ig_{\mu\lambda} B_\lambda d_\mu}{i(\omega_{0\mu} - \Omega_\lambda) + \gamma},$$

arba

$$(13.87) \quad \alpha_\mu = \sum_\lambda \frac{ig_{\mu\lambda}b_\lambda d_\mu}{i(\omega_{0\mu} - \Omega_\lambda) + \gamma}.$$

Šią išraišką įrašysime į kitas dvi lygtis – (13.79) ir (13.82). Fotonų skaičius modos  $\lambda$

$$(13.88) \quad n_\lambda = b_\lambda b_\lambda^*$$

ir išvestinė pagal laiką

$$(13.89) \quad \dot{n}_\lambda = \dot{b}_\lambda b_\lambda^* + b_\lambda \dot{b}_\lambda^* = -2\kappa_\lambda |b_\lambda|^2 + \sum_{\mu\lambda'} \left( \frac{g_{\mu\lambda}^* g_{\mu\lambda'} b_{\lambda'} b_\lambda^* d_\mu}{i(\omega_{0\mu} - \Omega_\lambda) + \gamma} + (*) \right).$$

Čia sumą suskaičiuosime tarę, kad nenulinius indėlius duoda tik  $\lambda = \lambda'$  nariai. Tai reiškia, kad neatsižvelgiame į fazinius atskirų modų sąryšius; tariame, kad jų nėra. Ši prielaida gali būti neteisinga, pavyzdžiui, sinchronizuotų modų atveju. O dabar gauname

$$(13.90) \quad \dot{n}_\lambda = -2\kappa_\lambda n_\lambda + \sum_\mu W_{\lambda\mu} n_\lambda d_\mu,$$

čia

$$(13.91) \quad W_{\lambda\mu} = \frac{|g_{\mu\lambda}|^2 2\gamma}{(\omega_{0\mu} - \Omega_\lambda)^2 + \gamma^2}.$$

Įrašę (13.87) į (13.82) ir palikę sumoje tik  $\lambda = \lambda'$  narius, gausime

$$(13.92) \quad \dot{d}_\mu = \frac{d_0 - d_\mu}{T} - 2 \sum_\lambda W_{\lambda\mu} n_\lambda d_\mu.$$

Lygtys (13.90) ir (13.92) yra balanso lygtys. Matome jų panašumus į anksčiau užrašytas (2.12) ir (2.11) lygtis. Apibendrinant, šios lygtys yra teisingos, kai fotonų skaičius bei poliarizacija yra lėtos laiko funkcijos (kinta daug lėčiau nei eksponentė  $e^{-i\Omega_\lambda t}$ ), ir galime neatsižvelgti į fazinius sąryšius tarp modų. Be to, dabar paaiškėjo, kokia yra  $W$  išraiška – ji priklauso nuo dažnio. Matysime, kad tai sąlygoja įdubų atsiradimą apgražoje  $d_\mu$ .

## 13.6. Įdubos apgražos tankio kontūre

Bendru atveju  $W_{\lambda\mu}$  priklauso nuo dažnio dėl dviejų dėmenų: Lorencio linijos  $\frac{2\gamma}{(\omega_{0\mu} - \Omega_\lambda)^2 + \gamma^2}$  ir stovinčiųjų bangų dėl  $|g_{\mu\lambda}|^2$ . Kad atskirtume šių dviejų dėmenų įtaką, panagrinėsime du atvejus:

1. žiedinis rezonatorius, nevienalytis išplitimas;
2. Fabri ir Pero rezonatorius, vienalytis išplitimas.

Pirmuoju atveju (13.80) išraiškoje  $u_\lambda(\mathbf{x}_\mu) \sim e^{i\mathbf{k}_\lambda \mathbf{x}_\mu}$  ir  $|g_{\lambda\mu}|^2$  nepriklauso nuo koordinatinių  $\mathbf{x}_\mu$ . Nevienalytis išplitimas reiškia, kad aktyvioje medžiagoje yra atomų, kurių šuolių dažniai skirtingi. Tuomet priklausomybė nuo indekso  $\mu$  faktiškai virsta priklausomybe nuo šuolio dažnio.

Stacionariu atveju  $\dot{d}_\mu = 0$  randame

$$(13.93) \quad d_\mu = \frac{d_0}{1 + 2T \sum_\lambda n_\lambda W_{\lambda\mu}}.$$

Kai fotonų skaičius  $n_\lambda$  nėra didelis, apytiksliai parašome

$$(13.94) \quad d_\mu \approx d_0 \left( 1 - 2T \sum_\lambda n_\lambda W_{\lambda\mu} \right).$$

Dėl antrojo nario skliaustuose apgražos tankio kontūre atsiras įdubų, Lorencio formų. Įduba tuo gilesnė, kuo didesnis fotonų skaičius  $n_\lambda$ . Įdubų yra tiek, kiek generuojasi modų. (13.90) fotonų skaičiaus lygtyje figūruoja suma

$$(13.95) \quad \sum_\mu W_{\lambda\mu} d_\mu.$$

Ją galime pakeisti integralu

$$(13.96) \quad \int W_\lambda(\omega') d(\omega') N(\omega') d\omega',$$

čia  $N(\omega') d\omega'$  yra atomų skaičius, atitinkantis šuolių dažnius intervale  $[\omega' \omega' + d\omega']$ . Bendru atveju  $N(\omega')$  yra mažėjanti funkcija tolstant nuo centrinio šuolio dažnio  $\omega_0$ . Funkcija  $W_\lambda(\omega')$  gali būti užrašyta kaip

$$(13.97) \quad W_\lambda(\omega') = C_W \frac{2\gamma}{(\omega' - \Omega_\lambda)^2 + \gamma^2},$$

čia  $C_W$  – konstanta. Daugelyje uždavinių  $N(\omega')$  yra Gauso funkcija, pavyzdžiui, kietakūniuose lazeriuose:

$$(13.98) \quad N(\omega') = C_N \exp\left(-\frac{(\omega' - \omega_0)^2}{\Delta^2}\right),$$

čia  $C_N$  – konstanta,  $\Delta$  – linijos plotis. Iš (13.96) matome, kad reikia skaičiuoti sąsūką (kai  $d \approx d_0$ ):

$$(13.99) \quad \int \frac{2\gamma}{\gamma^2 + (\omega' - \Omega_\lambda)^2} \exp\left(-\frac{(\omega' - \omega_0)^2}{\Delta^2}\right) d\omega'.$$

Bendru atveju integralas analiziškai neskaiciuojamas, tačiau, tarę, kad  $\gamma \ll \Delta$ , randame, kad ši sąsūka proporcinga

$$(13.100) \quad \exp\left(-\frac{(\Omega_\lambda - \omega_0)^2}{\Delta^2}\right).$$

Vienalyčio išplitimo lazeryje (t. y. visi atomai spinduliuoja vienu dažniu) taip pat galimas daugelio įdubų susidarymas. Fabri ir Pero rezonatoriuje  $|g_{\lambda\mu}|^2 \sim \sin^2(k_\lambda z_\mu)$ , todėl įdubos bus periodiškai išsidėsčiusios išilgai  $z$  ašies.

## 13.7. Lygtys makroskopiniams dydžiams. Stovinčiosios bangos

### 13.7.1. Lygtys

Nagrinėjome lygtis makroskopiniams dydžiams, tačiau jos tiko tik žiediniame rezonatoriuje, kuriame sklinda bėgančioji banga ir lauko amplitudė gali būti laikoma homogenine bangos sklidimo kryptimi. Taip nėra Fabri ir Pero rezonatoriuje, kuriame susidaro stovinčiosios bangos. Į stovinčiąją bangą galime žiūrėti kaip į dviejų priešingomis kryptimis bėgančių bangų superpoziciją. Taigi, turėsime rašyti dvi lygtis – po vieną kiekvienai bėgančiųjų bangų. Paprastumo dėlei rašysime lygtis skaliariniais dydžiais, laikydami, kad elektrinio lauko stipris tiesiškai poliarizuotas. Bangos sklinda išilgai  $z$  ašies. Tuomet elektrinio lauko stipris

$$(13.101) \quad E(\mathbf{x}, t) = E^+(z, t)e^{i(kz - \omega t)} + E^-(z, t)e^{-i(kz + \omega t)} + (*).$$

$E^+$  ir  $E^-$  yra amplitudės bangų, sklindančių atitinkamai pagal ir prieš  $z$  ašies kryptį. Prisiminkime (13.6). Perrašysime šią lygtį:

$$(13.102) \quad \Delta \mathbf{E} - \frac{\eta^2}{c^2} \ddot{\mathbf{E}} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \ddot{\mathbf{P}}.$$

Čia neįskaityti nuostoliai  $\sigma$ ; juos įskaitysime kraštinėse sąlygose, kuriose veidrodžio atspindžio koeficientas nebus lygus vienam. Be to, čia atsižvelgta į terpės lūžio rodiklį

$\eta$ . Pritaikę lėtai kintančių amplitudžių artinį ir pasinaudoję tuo, kad  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ , galime parašyti

$$(13.103) \quad \Delta \mathbf{E} - \frac{\eta^2}{c^2} \ddot{\mathbf{E}} \approx \\ \approx e^{-i\omega t} \left( 2ik \frac{\partial E^+}{\partial z} e^{ikz} + \frac{\eta^2}{c^2} 2i\omega \frac{\partial E^+}{\partial t} e^{ikz} - 2ik \frac{\partial E^-}{\partial z} e^{-ikz} + \frac{\eta^2}{c^2} 2i\omega \frac{\partial E^-}{\partial t} e^{-ikz} \right).$$

Polarizuotumo išraiškoje atskiriame greitai kintantį bėgant laikui daugiklį:

$$(13.104) \quad P(\mathbf{x}, t) = P_0(z, t) e^{-i\omega t},$$

ir, kaip ir anksčiau,

$$(13.105) \quad \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \approx -\omega^2 P_0 e^{-i\omega t}.$$

(13.102) atrodo taip

$$(13.106) \quad e^{ikz} \left( 2ik \frac{\partial E^+}{\partial z} + \frac{\eta^2}{c^2} 2i\omega \frac{\partial E^+}{\partial t} \right) + e^{-ikz} \left( -2ik \frac{\partial E^-}{\partial z} + \frac{\eta^2}{c^2} 2i\omega \frac{\partial E^-}{\partial t} \right) = -\frac{\omega^2}{\varepsilon c^2} P_0.$$

Čia  $k = \omega\eta/c$ . Vieną kartą dauginame iš  $e^{-ikz}$ , kitą kartą iš  $e^{ikz}$  ir vidurkiname pagal bangos ilgį. Gauname dvi lygtis

$$(13.107) \quad \frac{\eta}{c} \frac{\partial E^+}{\partial t} + \frac{\partial E^+}{\partial z} = \frac{i\omega}{2\varepsilon_0 c \eta} \langle P_0 e^{-ikz} \rangle,$$

$$(13.108) \quad \frac{\eta}{c} \frac{\partial E^-}{\partial t} - \frac{\partial E^-}{\partial z} = \frac{i\omega}{2\varepsilon_0 c \eta} \langle P_0 e^{ikz} \rangle.$$

Lygtys sprendžiamos tarus, kad yra tokios kraštinės sąlygos:

$$(13.109) \quad E^+(z=0, t) = -r_1 E^-(z=0, t),$$

$$(13.110) \quad E^-(z=L, t) = -r_2 E^+(z=L, t).$$

Čia  $L$  yra rezonatoriaus ilgis,  $r_1, r_2$  – veidrodžių atspindžio koeficientai.

Irašę (13.101) ir (13.104) į (13.28), gauname polarizuotumo lygtį

$$(13.111) \quad \frac{\partial P_0}{\partial t} = -(\gamma_{\perp} + i[\omega_0 - \omega]) P_0 + \frac{\vec{\theta}_{12} \vec{\theta}_{21}}{i\hbar} N (E^+ e^{ikz} + E^- e^{-ikz}).$$

Čia pakeisti žymėjimai:  $\gamma_{\perp} = \gamma$ ,  $N = D$ . (13.29) lygtyje  $P^{(-)} + P^{(+)} = P^* + P$ . Įrašę (13.101) ir pažymėję  $\gamma_{\parallel} = 1/T$ , gauname

$$(13.112) \quad \frac{\partial N}{\partial t} = -\gamma_{\parallel}(N - N_0) - \frac{2i}{\hbar} ([E^+ P_0^* - E^{-*} P_0] e^{ikz} + [E^- P^* - E^{+*} P] e^{-ikz}).$$

Lygtyse paliko faziniai daugikliai  $e^{\pm ikz}$ .  $P_0$  ir  $N$  skleidžiami Furjė eilutėmis:

$$(13.113) \quad P_0(z, t) = e^{ikz} \sum_{p=0}^{\infty} P_{(p)}^+ e^{2ipkz} + e^{-ikz} \sum_{p=0}^{\infty} P_{(p)}^- e^{-2ipkz},$$

$$(13.114) \quad N(z, t) = N_{(0)} + \sum_{p=1}^{\infty} (N_{(p)} e^{2ipkz} + N_{(p)}^* e^{-2ipkz}).$$

Įrašę šiuos skleidinius į (13.107), (13.108), (13.111) ir (13.112), gauname lygčių sistemą:

$$(13.115) \quad \frac{\eta}{c} \frac{\partial E^+}{\partial t} + \frac{\partial E^+}{\partial z} = \frac{i\omega}{2\varepsilon_0 c \eta} P_{(0)}^+,$$

$$(13.116) \quad \frac{\eta}{c} \frac{\partial E^-}{\partial t} - \frac{\partial E^-}{\partial z} = \frac{i\omega}{2\varepsilon_0 c \eta} P_{(0)}^-.$$

$$(13.117) \quad \frac{\partial P_{(0)}^+}{\partial t} = -\gamma_{\perp} P_{(0)}^+ + \frac{\vec{\theta}_{12} \vec{\theta}_{21}}{i\hbar} (N_{(0)} E^+ + N_{(1)} E^-),$$

$$(13.118) \quad \frac{\partial P_{(1)}^+}{\partial t} = -\gamma_{\perp} P_{(1)}^+ + \frac{\vec{\theta}_{12} \vec{\theta}_{21}}{i\hbar} (N_{(1)} E^+ + N_{(2)} E^-),$$

$$(13.119) \quad \frac{\partial P_{(0)}^-}{\partial t} = -\gamma_{\perp} P_{(0)}^- + \frac{\vec{\theta}_{12} \vec{\theta}_{21}}{i\hbar} (N_{(1)}^* E^+ + N_{(0)} E^-),$$

$$(13.120) \quad \frac{\partial P_{(1)}^-}{\partial t} = -\gamma_{\perp} P_{(1)}^- + \frac{\vec{\theta}_{12} \vec{\theta}_{21}}{i\hbar} (N_{(2)}^* E^+ + N_{(1)}^* E^-),$$

$$(13.121) \quad \frac{\partial N_{(0)}}{\partial t} = -\gamma_{\parallel}(N_{(0)} - N_0) - \frac{2i}{\hbar} (E^+ P_{(0)}^{+*} + E^- P_{(0)}^{-*} - (*)).$$

$$(13.122) \quad \frac{\partial N_{(1)}}{\partial t} = -\gamma_{\parallel} N_{(1)} - \frac{2i}{\hbar} (E^+ P_{(0)}^{-*} - E^{-*} P_{(0)}^{-*} + E^- P_{(1)}^{-*} - E^{+*} P_{(1)}^+).$$

Šią sistemą galima pratęsti – rašyti lygtis aukštesniems  $p > 1$  nariams.  $p = 1$  nariai neatmetami, nes jie atspindi apgražos tankio nehomogeniškumą lazerinėje terpėje.



### 13.7.2. Normavimas

Lygtis (13.115)–(13.122) užrašysime bedimensiais kintamaisiais. Įtraukiame naujus kintamuosius:

$$(13.123) \quad P_{(p)}^{\pm} = P'_{(p)} \mu \sqrt{\vec{\theta}_{12} \vec{\theta}_{21}} \sqrt{\frac{\gamma_{\parallel}}{\gamma_{\perp}} \frac{i}{2}}, \quad E^{\pm} = E'^{\pm} \frac{\sqrt{\gamma_{\perp} \gamma_{\parallel}}}{\sqrt{\vec{\theta}_{12} \vec{\theta}_{21}}} \frac{\hbar}{2}, \quad N_{(p)} = N'_{(p)}.$$

Čia  $\mu$  – atomų tankis. Dydžiams su apostrofais gaunamos tokios lygtys (apostrofai nebežymimi):

$$(13.124) \quad \frac{\partial E^+}{\partial t} + \frac{c}{\eta} \frac{\partial E^+}{\partial z} = -gP_{(0)}^+,$$

$$(13.125) \quad \frac{\partial E^-}{\partial t} - \frac{c}{\eta} \frac{\partial E^-}{\partial z} = -gP_{(0)}^-.$$

$$(13.126) \quad \frac{\partial P_{(0)}^+}{\partial t} = -\gamma_{\perp} P_{(0)}^+ - \frac{\gamma_{\perp}}{\mu} (N_{(0)} E^+ + N_{(1)} E^-),$$

$$(13.127) \quad \frac{\partial P_{(1)}^+}{\partial t} = -\gamma_{\perp} P_{(1)}^+ - \frac{\gamma_{\perp}}{\mu} (N_{(1)} E^+ + N_{(2)} E^-),$$

$$(13.128) \quad \frac{\partial P_{(0)}^-}{\partial t} = -\gamma_{\perp} P_{(0)}^- - \frac{\gamma_{\perp}}{\mu} (N_{(1)}^* E^+ + N_{(0)}^* E^-),$$

$$(13.129) \quad \frac{\partial P_{(1)}^-}{\partial t} = -\gamma_{\perp} P_{(1)}^- - \frac{\gamma_{\perp}}{\mu} (N_{(2)}^* E^+ + N_{(1)}^* E^-),$$

$$(13.130) \quad \frac{\partial N_{(0)}}{\partial t} = -\gamma_{\parallel} (N_{(0)} - N_0) + \frac{\mu \gamma_{\parallel}}{2} (E^+ P_{(0)}^{+*} + E^- P_{(0)}^{-*} + (*)).$$

$$(13.131) \quad \frac{\partial N_{(1)}}{\partial t} = -\gamma_{\parallel} N_{(1)} + \frac{\mu \gamma_{\parallel}}{2} (E^+ P_{(0)}^{-*} + E^{-*} P_{(0)}^{-*} + E^- P_{(1)}^{-*} + E^{+*} P_{(1)}^+).$$

Čia pažymėtas dydis

$$(13.132) \quad g = \frac{\omega \mu \vec{\theta}_{12} \vec{\theta}_{21}}{2 \varepsilon_0 \eta^2 \hbar} \frac{1}{\gamma_{\perp}},$$

kuris susijęs su priverstinio spinduliavimo skerspjūviu  $\sigma$ :

$$(13.133) \quad g = \frac{c\mu\sigma}{2\eta}.$$

Irašome bedimensius koordinatę ir laiką:

$$(13.134) \quad z = z'L, \quad t = \frac{t'\eta L}{c},$$

pažymime

$$(13.135) \quad \alpha_L = \frac{\eta L g}{c}$$

ir dar kartą normuojame kintamuosius:

$$(13.136) \quad P_{(p)}^{\pm} = P'_{(p)} \frac{1}{\alpha_L}, \quad N_{(p)} = N'_{(p)} \frac{\mu}{\alpha_L}, \quad N_0 = N'_0 \frac{\mu}{\alpha_L}.$$

Galutinai gauname (numetę apostrofus) [8], [9]:

$$(13.137) \quad \frac{\partial E^+}{\partial t} + \frac{\partial E^+}{\partial z} = -P_{(0)}^+,$$

$$(13.138) \quad \frac{\partial E^-}{\partial t} - \frac{\partial E^-}{\partial z} = -P_{(0)}^-.$$

$$(13.139) \quad \frac{\partial P_{(0)}^+}{\partial t} = -\Gamma_{\perp} \left( P_{(0)}^+ + N_{(0)} E^+ + N_{(1)} E^- \right),$$

$$(13.140) \quad \frac{\partial P_{(1)}^+}{\partial t} = -\Gamma_{\perp} \left( P_{(1)}^+ + N_{(1)} E^+ + N_{(2)} E^- \right),$$

$$(13.141) \quad \frac{\partial P_{(0)}^-}{\partial t} = -\Gamma_{\perp} \left( P_{(0)}^- + N_{(1)}^* E^+ + N_{(0)}^* E^- \right),$$

$$(13.142) \quad \frac{\partial P_{(1)}^-}{\partial t} = -\Gamma_{\perp} \left( P_{(1)}^- + N_{(2)}^* E^+ + N_{(1)}^* E^- \right),$$

$$(13.143) \quad \frac{\partial N_{(0)}}{\partial t} = -\Gamma_{\parallel} \left( (N_{(0)} - N_0) - \frac{1}{2} \left( E^+ P_{(0)}^{+*} + E^- P_{(0)}^{-*} + (*) \right) \right),$$

$$(13.144) \quad \frac{\partial N_{(1)}}{\partial t} = -\Gamma_{\parallel} \left( N_{(1)} - \frac{1}{2} \left( E^+ P_{(0)}^{-*} + E^{-*} P_{(0)}^{-*} + E^+ P_{(1)}^{-*} - E^{+*} P_{(1)}^+ \right) \right).$$

Čia

$$(13.145) \quad \Gamma_{\perp} = \gamma_{\perp} \frac{\eta L}{c}, \quad \Gamma_{\parallel} = \gamma_{\parallel} \frac{\eta L}{c}.$$

### 13.7.3. Savaiminis triukšmas

Iš (13.137)–(13.144) lygčių matome, kad kai  $E$  ir  $P$  pradiniu laiko momentu lygūs nuliui, jų vertės nekinta net jei pradinė apgraža  $N$  nelygi nuliui. Bet aišku, kad spinduliavimas turi vykti dėl savaiminės lygmenų relaksacijos. Todėl į poliarizacijos lygtis įrašysime papildomų triukšminių narių. Čia tai darome dirbtinai, tačiau visiškai kvantinėje teorijoje šis papildomų narių įtraukimas yra pagrindžiamas griežtai. Triukšminius narius pridėsime tik lygtyse  $P_{(0)}^{\pm}$ :

$$(13.146) \quad \frac{\partial P_{(0)}^+}{\partial t} = -\Gamma_{\perp} \left( P_{(0)}^+ + N_{(0)}E^+ + N_{(1)}E^- \right) + \xi^+(z, t),$$

$$(13.147) \quad \frac{\partial P_{(0)}^-}{\partial t} = -\Gamma_{\perp} \left( P_{(0)}^- + N_{(1)}^*E^+ + N_{(0)}E^- \right) + \xi^-(z, t).$$

Čia  $\xi$  yra Gauso statistikos baltasis triukšmas, delta – koreliuotas:

$$(13.148) \quad \langle \xi(z, t) \xi^*(z', t') \rangle = \beta \delta(z - z') \delta(t - t').$$

$\beta$  yra triukšmo stipris.

Čia pavartojome kol kas nežinomas sąvokas, kurios bus paaiškintos skyriuje apie triukšminę šviesą. Dabar tik užrašysime, kaip diskretizuojamos tokio tipo lygtys:

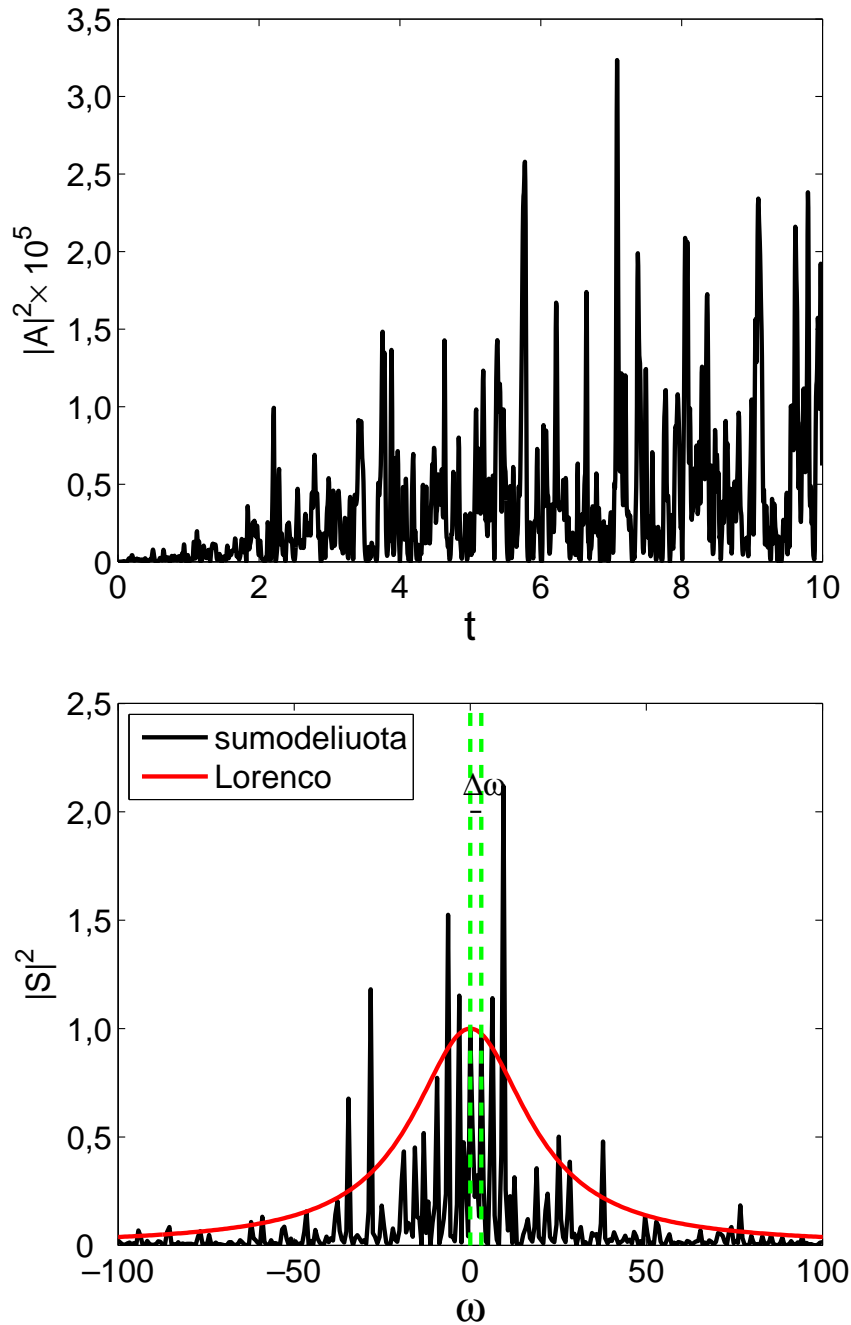
$$(13.149) \quad \dot{x} = f(x, t) + \xi(t).$$

Diskretizacijos schema:

$$(13.150) \quad x_{j+1} = x_j + \Delta t f(x_j, t_j) + \sqrt{\Delta t} R_j,$$

čia  $\Delta t$  – laikinis žingsnis,  $x_j = x(t_j)$ .  $R_j$  yra atsitiktinis skaičius, normaliojo skirstinio. „Scilab“ tokius skaičius generuoja komanda „rand('normal')“. Svarbu atkreipti dėmesį, kad  $R_j$  dauginamas iš  $\sqrt{\Delta t}$ , o ne  $\Delta t$  [21].

13.2 pav. pavaizduoti gautos lygčių sistemos modeliavimo rezultatai. Čia  $A(t) = E^{(+)}(z = L, t)$ ,  $S$  – amplitudės  $A(t)$  Furjė transformacija. Rezonatoriaus ilgis buvo diskretizuotas į 200 dalių, laikinis žingsnis buvo  $\Delta t = 5 \times 10^{-6}$ . Modeliuotas rezonatorius, kuriame patalpinta aktyvi medžiaga ir nėra kaupinimo. Raudona kreivė apatiniame paveikslėlyje vaizduoja teorinį Lorencio kontūrą  $\frac{1}{\Gamma_{\perp}^2 + \omega^2}$ . Matome, kad jis atitinka sumodeliuotąjį. Be to, sumodeliuotame spektre aiškiai matomos išilginės modos, išsidėsčiusios kas  $\Delta\omega = \pi$  (normuotais vienetais).



13.2 pav. Lazero lygčių modeliavimas. Laikinis profilis (viršuje) ir jo spektras (apačioje). Parametrai:  $\Gamma_{\perp} = 10^{-4}$ ,  $\Gamma_{\parallel} = 20$ ,  $r_1 = 1$ ,  $r_2 = 0,9$ ,  $N_0 = 0$ . Pradinės sąlygos:  $E^{\pm}(z, t = 0) = P_{(p)}^{\pm}(z, t = 0) = N_{(p)}(z, t = 0) = 0$

VI DALIS

**Triukšminė šviesa**



# 14 SKYRIUS

## Pagrindinės sąvokos

Praeitame skyriuje, kalbėdami apie savaiminį spinduliavimą, jau susidūrėme su sąvokomis baltoji šviesa, koreliacinė funkcija ir kt. Čia susipažinsime su triukšmų teorijos aparatu bei sąvokomis. Mums jų prireiks modeliuojant triukšminę šviesą kaip pradinę sąlygą modų sinchronizacijos uždavinyje. Triukšminės šviesos teorija nagrinėjama [18], [17] ir [10].

### 14.1. Koreliacinė funkcija

Čia apibrėšime, kas yra pirmos ir antros eilės koreliacinės funkcijos. Pirmos eilės laikinė koreliacinė funkcija yra toks integralas:

$$(14.1) \quad R^{(1)}(t_1, t_2) = \langle E^*(t_1)E(t_2) \rangle = \frac{1}{T} \int_T dt_1 E^*(t_1)E(t_2).$$

Čia laiko trukmė  $T$  turi būti daug didesnė už koreliacinę trukmę  $\tau_c$ , kuri apibūdina triukšminį signalą. Jei procesas yra stacionarus, koreliacinė funkcija priklauso tik nuo laikų skirtumo  $\tau = t_2 - t_1$ . Daugelis triukšminių šviesos šaltinių yra stacionarūs, ir triukšmo charakteristikos nepriklauso nuo to, koku laiko momentu jos pradedamos matuoti. Tuomet pirmos eilės koreliacinė funkcija

$$(14.2) \quad R^{(1)}(\tau) = \langle E^*(t)E(t + \tau) \rangle = \frac{1}{T} \int_T dt E^*(t)E(t + \tau).$$

Pirmos eilės koreliacinė funkcija gali būti pamatuota Macho ir Cenderio interferometru, kurio schema pavaizduota 14.1 pav. Jis susideda iš dviejų vienodų šviesos

daliklių, kurių pralaidumo bei atspindžio koeficientai  $T'$  ir  $R'$ . Išėjimo spinduliuotės amplitudė  $E_4$  susideda iš dviejų dalių:

$$(14.3) \quad E_4(t) = R'T'E(t_1) + T'R'E(t_2),$$

čia

$$(14.4) \quad t_1 = t - z_1/c, \quad t_2 = t - z_2/c,$$

$c$  – šviesos greitis,  $z_1$  ir  $z_2$  – atstumai, pažymėti 14.1 pav. Suvidurkintas pagal periodą išėjimo spinduliuotės intensyvumas

$$(14.5) \quad I_4(t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c |R'|^2 |T'|^2 [ |E(t_1)|^2 + |E(t_2)|^2 + 2\text{Re}(E^*(t_1)E(t_2)) ].$$

Detektavimo sistemos skiriamoji geba paprastai daug didesnė nei koreliacinė trukmė  $\tau_c$ . Todėl intensyvumą reikia suvidurkinti pagal stebėjimo periodą  $T$ , daug didesni už  $\tau_c$ . Suvidurkinę gauname

$$(14.6) \quad \langle I_4(t) \rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c |R'|^2 |T'|^2 [ \langle |E(t_1)|^2 \rangle + \langle |E(t_2)|^2 \rangle + 2\text{Re}\langle E^*(t_1)E(t_2) \rangle ].$$

Paskutinis narys skliaustuose yra susijęs su koreliacine funkcija (14.1).

Antros eilės laikinė koreliacinė funkcija:

$$(14.7) \quad R^{(2)}(t_1, t_2) = \langle E^*(t_1)E^*(t_2)E(t_2)E(t_1) \rangle.$$

Arba, stacionariems procesams:

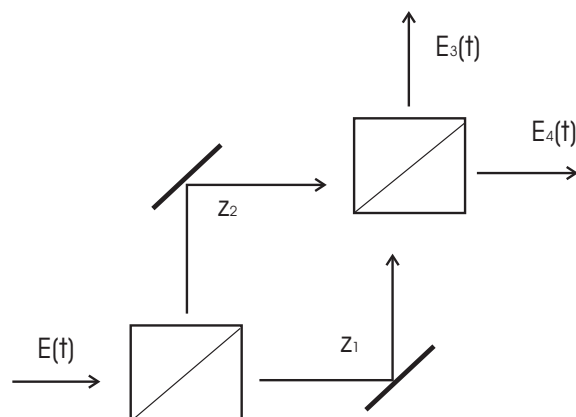
$$(14.8) \quad R^{(2)}(\tau) = \langle E^*(t)E^*(t+\tau)E(t+\tau)E(t) \rangle.$$

Ši funkcija matuojama Brauno ir Tviso interferometru, kuris susideda iš vieno šviesos daliklio, 14.2 pav. Jis dalija įėjimo šviesos intensyvumą  $I_1$  pusiau. Dvi išėjimo spinduliuotės pakliūva į atskirus detektorius, fiksuojančius jų intensyvumus. Detektorių signalai nukreipiami į koreliatorių, skaičiuojantį koreliaciją tarp intensyvumų  $I_3$  ir  $I_4$ :

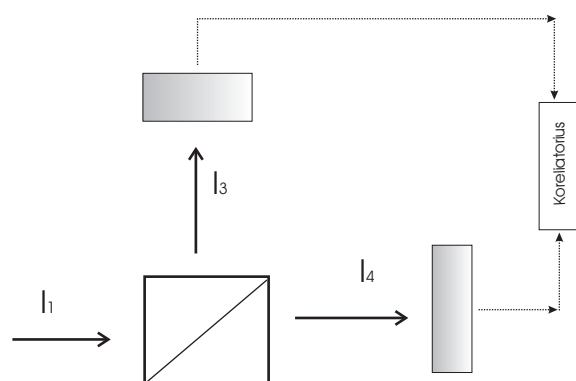
$$(14.9) \quad \langle I_3(t)I_4(t+\tau) \rangle = \frac{1}{4}\langle I_1(t)I_1(t+\tau) \rangle.$$

Kadangi  $I \propto |E|^2$ , tai Brauno ir Tviso interferometras matuoja antros eilės koreliacinę funkciją.





14.1 pav. Macho ir Cenderio interferometro schema



14.2 pav. Brauno ir Tvisio interferometro schema

## 14.2. Spektrinis tankis

Kita svarbi triukšminės šviesos charakteristika yra spektrinis tankis. Matėme (5.3 skyrius), kad šviesos impulsą apibūdina jo spektras, kuris yra laikinės amplitudės Furjė transformacija. Kai triukšminis procesas stacionarus, signalo Furjė transformacija neskaiciuojama, nes tai yra begalinis integralas, o stacionarus procesas yra begalinis laike. Tačiau triukšminio šaltinio, pavyzdžiui, Saulės, spektrinės charakteristikos vis tiek matuojamos. Kaip tai padaroma?

Sakykime, turime stacionarų triukšminį šaltinį, kurio spinduliuojamos šviesos amplitudė  $E(t)$ . Tegu matavimai yra atliekami pakankamai ilgame laiko intervale  $T$ . Šiame intervale amplitudę  $E(t)$  galime paskleisti Furjė eilute:

$$(14.10) \quad E(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i\omega_n t},$$

čia  $\omega_n = 2\pi/Tn$ . Spektrinė amplitudė  $a_n$  randama pagal

$$(14.11) \quad a_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E(t) e^{-i\omega_n t} dt.$$

Kadangi registruojamas elektrinio lauko stipris  $E(t)$  yra realusis dydis, tai

$$(14.12) \quad a_n = a_{-n}^*.$$

Vidutinė spinduliuotės galia intervale  $-T/2 < t < T/2$  yra

$$(14.13) \quad \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-i\omega_n t} e^{-i\omega_k t}.$$

Pasinaudoję 14.12 gauname

$$(14.14) \quad \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* e^{-i(\omega_n - \omega_k)t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* \delta_{n,k} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2.$$

Taigi, vidutinė galia

$$(14.15) \quad \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2.$$

Ekperimentuose naudojami filtrai, kurie praleidžia dažninius komponentus, pakliūvančius į mažą intervalą  $\Delta\omega$ . Galime parašyti:

$$(14.16) \quad \sum_{\omega}^{\omega+\Delta\omega} \langle |a_n|^2 \rangle = S(\omega)\Delta\omega.$$

Dydis  $S(\omega)$  vadinamas spektriniu tankiu – galia, tenkanti dažnio intervalui. Skliaustai  $\langle \dots \rangle$  žymi vidurkį pagal ansamblį, t. y. vidurkį pagal daug realizacijų. Toliau nagrinėsime tik ergodines sistemas, kurių vidurkis pagal ansamblį ir vidurkis pagal periodinį  $T$  sutampa.

Nesunku apskaičiuoti, koks harmonikų kiekis tenka  $N_h$ -tajam intervalui. Atstumas tarp harmonikų lygus  $2\pi/T$ , taigi

$$(14.17) \quad N_h = \Delta\omega T / (2\pi).$$

Mažame intervale  $\Delta\omega$  amplitudę  $|a_n|$  galime laikyti nekintančia, todėl

$$(14.18) \quad \sum_{\omega}^{\omega+\Delta\omega} \langle |a_n|^2 \rangle \approx \frac{\Delta\omega T}{2\pi} \langle |a_n|^2 \rangle$$

ir

$$(14.19) \quad S(\omega) = \frac{T}{2\pi} \langle |a_n|^2 \rangle = \frac{T}{2\pi} \langle \left| \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E(t) e^{-i\omega_n t} dt \right|^2 \rangle.$$

Taigi, spektrinis tankis randamas pagal

$$(14.20) \quad S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} \langle \left| \int_{-T/2}^{T/2} E(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2 \rangle.$$

### 14.3. Vinerio ir Chinčino teorema

Vinerio ir Chinčino teorema nustato labai svarbų koreliacinės funkcijos ir spektrinio tankio sąryšį. Ji galioja stacionariems procesams. Pagal šią teoremą spektrinis tankis skaičiuojamas kaip koreliacinės funkcijos Furjė vaizdas:

$$(14.21) \quad S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

Čia  $R(\tau)$  yra pirmos eilės koreliacinė funkcija (14.2). Atlikę atvirkštinę Furjė transformaciją, gauname

$$(14.22) \quad R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega.$$

Įrodysime Vinerio ir Chinčino sąryšį. Pagal apibrėžimą (14.20)

$$(14.23) \quad S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} \left\langle \int_{-T/2}^{T/2} dt_1 E(t_1) \int_{-T/2}^{T/2} dt_2 E^*(t_2) e^{-i\omega(t_1-t_2)} \right\rangle.$$

Pakeiskime integravimo kintamuosius  $t_1, t_2$  į  $t = t_1, \tau = t_1 - t_2$ . Tuomet  $\tau$  kintant nuo  $-T$  iki  $0$ ,  $t$  kis nuo  $-T/2$  iki  $\tau + T/2$ ;  $\tau$  kintant nuo  $0$  iki  $T$ ,  $t$  kis nuo  $\tau - T/2$  iki  $T/2$ . Lygtį (14.23) galime perrašyti:

$$(14.24) \quad \begin{aligned} S(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} \left( \int_{-T}^0 d\tau e^{-i\omega\tau} R(\tau) \int_{-T/2}^{\tau+T/2} dt + \int_0^T d\tau e^{-i\omega\tau} R(\tau) \int_{\tau-T/2}^{T/2} dt \right) = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} \left( \int_{-T}^0 d\tau e^{-i\omega\tau} R(\tau) (T + \tau) + \int_0^T d\tau e^{-i\omega\tau} R(\tau) (T - \tau) \right) = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} \int_{-T}^T d\tau e^{-i\omega\tau} R(\tau) (T - |\tau|) = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T d\tau e^{-i\omega\tau} R(\tau) \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} R(\tau). \end{aligned}$$

Taigi, įrodėme Vinerio ir Chinčino sąryšį.

## 14.4. Spektrų pavyzdžiai

Spektrinis tankis gali būti įvairių pavidalų. Čia pateiksime keletą dažnai naudojamų spektrinių tankių gaubtinių pavyzdžių: baltojo triukšmo spektras; Lorencio formos spektras; Gauso formos spektras.

### 14.4.1. Baltasis triukšmas

Baltojo triukšmo spektrinis tankis yra tolydus ir nepriklauso nuo dažnio  $\omega$ :

$$(14.25) \quad S(\omega) = S_0.$$

Pagal (14.22) tokio spektro koreliacinė funkcija:

$$(14.26) \quad R(\tau) = 2\pi S_0 \delta(\tau).$$

Matome, kad baltasis triukšmas yra delta – koreliuotas, koreliacijos trukmė be galo maža. Akivaizdu, kad toks modelis yra matematinė idealizacija. Jis nebus realizuotas praktikoje, nes baltojo triukšmo galia yra begalinė. Realioje situacijoje spektrą riboja baigtinė gaubtinė, ir koreliacinė trukmė taip pat baigtinė.

### 14.4.2. Lorencio formos spektras

Lorencio formos spektras aprašomas Lorencio funkcija:

$$(14.27) \quad S(\omega) = S_0 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Delta\omega^2}{\Delta\omega^2 + \omega^2}.$$

Atlikę Furjė transformaciją (14.22), gauname

$$(14.28) \quad R(\tau) = S_0 \Delta\omega \exp(-\Delta\omega|\tau|).$$

Lorencio formos spektrinis tankis ir koreliacinė funkcija pavaizduoti 14.3 pav. Lorencio funkcijos plotį apibrėžia dydis  $\Delta\omega$ , o koreliacijos trukmė proporcinga  $1/\Delta\omega$ . Kuo platesnis spektras, tuo mažesnė koreliacijos trukmė.

### 14.4.3. Gauso formos spektras

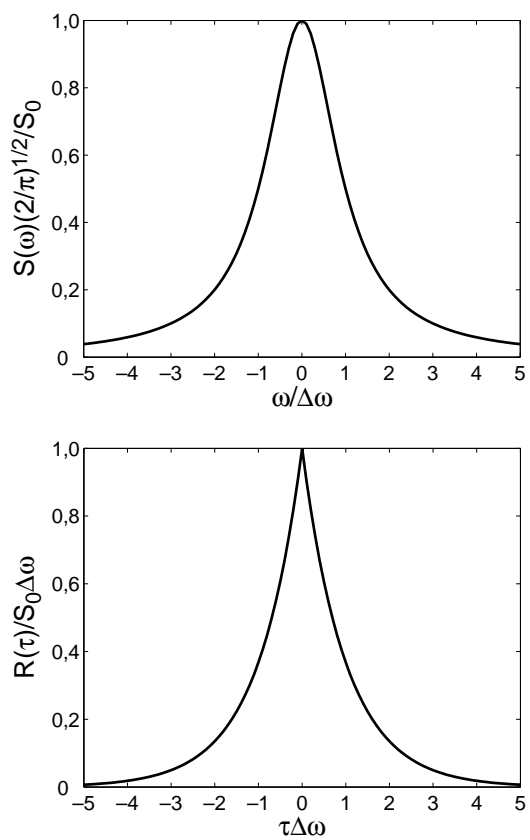
Gauso spektras yra aprašomas tokia formule:

$$(14.29) \quad S(\omega) = S_0 \exp\left(-\frac{\omega^2}{\Delta\omega^2}\right).$$

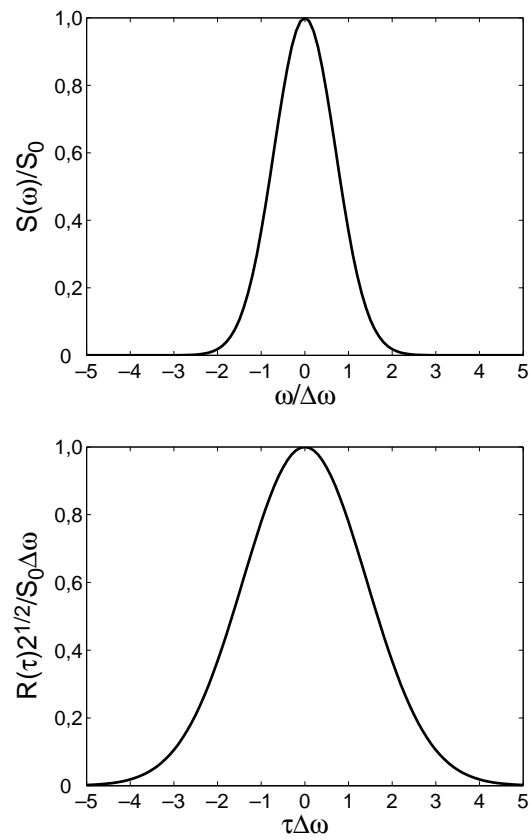
Jo koreliacinė funkcija taip pat yra Gauso pavidalo:

$$(14.30) \quad R(\tau) = S_0 \sqrt{\pi} \Delta\omega \exp\left(-\frac{\Delta\omega^2 \tau^2}{4}\right).$$

Šis spektras ir koreliacinė funkcija pavaizduoti 14.4 pav. Spektro plotis yra  $\Delta\omega$ , koreliacinė trukmė –  $2/\Delta\omega$ . Taigi, kaip ir Lorencio spektro atveju, kuo platesnis spektras, tuo mažesnė koreliacijos trukmė.



14.3 pav. Lorencio formos spektras (viršuje) ir jo koreliacinė funkcija (apačioje)



14.4 pav. Gauso formos spektras (viršuje) ir jo koreliacinė funkcija (apačioje)

## 14.5. Atsitiktinis procesas

Klasikinis atsitiktinio proceso pavyzdys yra Brauno dalelių judėjimas. Sakykime, vyksta  $N$  vienodų Brauno dalelių vienmatis judėjimas, prasidėjęs nuo tos pačios padėties. Pirmosios dalelės koordinatė  $X$  bus laiko  $x_1(t)$  funkcija, antrosios  $x_2(t)$ , trečiosios  $x_3(t)$  ir taip toliau. Tuo pačiu laiko momentu  $t$  kiekvienos dalelės nuokrypis nuo pradinės padėties  $X_t$  bus atsitiktinis dydis. Kiekvienas įrašas  $x_j(t)$  yra atskira atsitiktinio ansamblio realizacija. Kai sistema ergodinė, vidurkinimas pagal ansamblį duoda tą patį, ką ir vidurkinimas laike. Brauno dalelių atveju tai reiškia, kad suvidurkinę fiksuotu laiko momentu visų dalelių koordinates  $X_t$  (ar kitas charakteristikas) gauname tą patį, ką ir vidurkindami pagal laiką vienos dalelės koordinatę. Vidurkinimo trukmė turi būti pakankamai didelė.

Triukšminė, arba nekoherentinė, šviesa taip pat yra atsitiktinis procesas. Tai gi jai, kaip ir Brauno dalelėms, taikoma stochastinių (atsitiktinių) procesų teorija. Svarbi atsitiktinio dydžio charakteristika yra jo tikimybės pasiskirstymo dėsnis. Pagnagrinėsime du atvejus: tolydujį skirstinį ir normalųjį (Gauso) skirstinį.

### 14.5.1. Tolydusis skirstinys

Atkyrę kompleksinės amplitudės amplitudinę ir fazinę dalis galime parašyti

$$(14.31) \quad A(t) = a_0(t)e^{i\varphi(t)}.$$

Tegu fazė kinta atsitiktinai intervale  $[0, 2\pi]$  ir yra tokia pat tikimybė, kad gali realizuotis bet kuri fazės reikšmė. Tuomet tikimybės tankio funkcija  $P(\varphi)$  nepriklauso nuo fazės  $\varphi$ :

$$(14.32) \quad P(\varphi) = \frac{1}{2\pi}.$$

Ji yra normuota į vienetą, t. y.

$$(14.33) \quad \int_0^{2\pi} P(\varphi) d\varphi = 1.$$

Dėsnis (14.32) yra tolydusis skirstinys. Atsitiktinius skaičius nuo 0 iki 1, kurie yra tolydžiai pasiskirstę, generuoja „Scilab“ funkcija:

`rand('uniform');`



### 14.5.2. Normalusis (Gauso) skirstinys

Kitas galimas ir labai svarbus fizikoje pasiskirstymo dėsnis yra normalusis skirstinys. Jo tankio funkcija yra Gauso eksponentė:

$$(14.34) \quad P(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(a-a_0)^2}{2\sigma^2}\right),$$

čia  $a$  yra atsitiktinis dydis,  $a_0$  – jo vidurkis ir vertė, kuriai esant tikimybė maksimali,  $\sigma$  – dispersija. Dydžio  $a$  vidurkį  $\bar{a}$  randame pagal

$$(14.35) \quad \bar{a} = \int_{-\infty}^{\infty} aP(a)da.$$

Suintegravę gauname

$$(14.36) \quad \bar{a} = a_0.$$

Dydžio  $a$  dispersijos kvadratas

$$(14.37) \quad \int_{-\infty}^{\infty} (a-a_0)^2 P(a)da = \sigma^2.$$

Atsitiktinius normaliojo skirstinio skaičius, kurių dispersija lygi 1 ir vidurkis nulinis, generuoja „Scilab“ funkcija

`rand('normal')`;

Normalusis skirstinys yra svarbus dėl to, kad yra centrinė ribinė teorema.

## 14.6. Centrinė ribinė teorema

Tegu atsitiktinis dydis  $Y$  yra didelio skaičiaus  $N$  atsitiktinių dydžių  $X$  superpozicija:

$$(14.38) \quad Y = X_1 + X_2 + \dots + X_N.$$

Apibrėžkime naująjį dydį  $\Delta Y$ :

$$(14.39) \quad \Delta Y = \frac{Y - N\bar{x}}{\sqrt{N}},$$

arba

$$(14.40) \quad \Delta Y = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_N,$$

čia

$$(14.41) \quad Z_j = \frac{X_j - \bar{x}}{\sqrt{N}}.$$

$\bar{x}$  yra atsitiktinio dydžio  $X$  vidurkis. Dydžio  $Z$  tikimybės tankio funkcija  $P_Z(z)$  susijusi su dydžio  $X$  tankio funkcija  $P_X(x)$  sąryšiu:

$$(14.42) \quad P_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} P_X(x) \delta\left(z - \frac{x - \bar{x}}{\sqrt{N}}\right) dx.$$

Tikimybės tankio funkcijos Furjė transformacija vadinama charakteristine funkcija. Raskime dydžio  $Z$  charakteristinę funkciją  $f_z(k)$ :

$$(14.43) \quad \begin{aligned} f_Z(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} P_Z(z) e^{ikz} dz = \int_{-\infty}^{\infty} P_X(x) e^{ik \frac{x - \bar{x}}{\sqrt{N}}} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P_X(x) \left(1 + ik \frac{x - \bar{x}}{\sqrt{N}} - \frac{k^2}{2N} (x - \bar{x})^2 + \dots\right) dx = \\ &1 - \frac{k^2}{2N} \sigma_x^2 + \dots \end{aligned}$$

Čia  $\sigma_x$  yra dydžio  $X$  dispersija. Dydžio  $\Delta Y$  tikimybės tankio funkcija  $P_{\Delta Y}(\Delta y)$  susijusi su  $P_Z z$  sąryšiu

$$(14.44) \quad P_{\Delta Y}(\Delta y) = \int \dots \int dz_1 dz_2 \dots dz_N \delta(\Delta y - (z_1 + z_2 + \dots + z_N)) P_Z(z_1) P_Z(z_2) \dots P_Z(z_N).$$

Čia pasinaudota tuo, kad suminio proceso tikimybės sudauginamos. Rasime dydžio  $\Delta y$  charakteristinę funkciją:

$$(14.45) \quad \begin{aligned} f_{\Delta Y}(k) &= \int P_{\Delta Y}(\Delta y) e^{ik\Delta y} d\Delta y = \\ &= \int d\Delta y \int \dots \int dz_1 \dots dz_N e^{ik\Delta y} \delta(\Delta y - (z_1 + \dots + z_N)) P_Z(z_1) \dots P_Z(z_N) = \\ &\int \dots \int dz_1 dz_2 \dots dz_N e^{ik(z_1 + \dots + z_N)} P_Z(z_1) \dots P_Z(z_N) = f_Z^N(k). \end{aligned}$$

Iš (14.43) gauname

$$(14.46) \quad f_{\Delta Y}(k) = f_Z^N(k) = \left(1 - \frac{k^2}{2N} \sigma_x^2 + \dots\right)^N.$$

Riboje  $N \rightarrow \infty$  turime

$$(14.47) \quad f_{\Delta Y}(k) = \exp\left(-\frac{k^2 \sigma_X^2}{2}\right).$$

Dydžio  $\Delta Y$  tikimybės tankio funkciją randame apskaičiavę atvirkštinę Furjė transformaciją:

$$(14.48) \quad P_{\Delta Y}(\Delta y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik\Delta y} e^{-\frac{k^2 \sigma_X^2}{2}} dk$$

arba

$$(14.49) \quad P_{\Delta Y}(\Delta y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X}} e^{-\frac{\Delta y^2}{2\sigma_X^2}}.$$

Tai yra įrodymas centrinės ribinės teoremos, kuri skamba taip: bet kokių atsitiktinių dydžių didelio skaičiaus superpozijos tikimybės tankio funkcija yra Gauso, arba aprašoma normaliuoju skirstiniu. Sumuojamo dydžio  $X$  pasiskirstymas gali būti bet koks, vienintelis reikalavimas, kad jo momentai būtų baigtiniai, arba Teiloro eilutė (14.43) būtų baigtinė.

Iš centrinės ribinės teoremos daroma svarbi išvada, kad daugelio sudėtingų procesų tikimybės tankio funkcija yra Gauso.

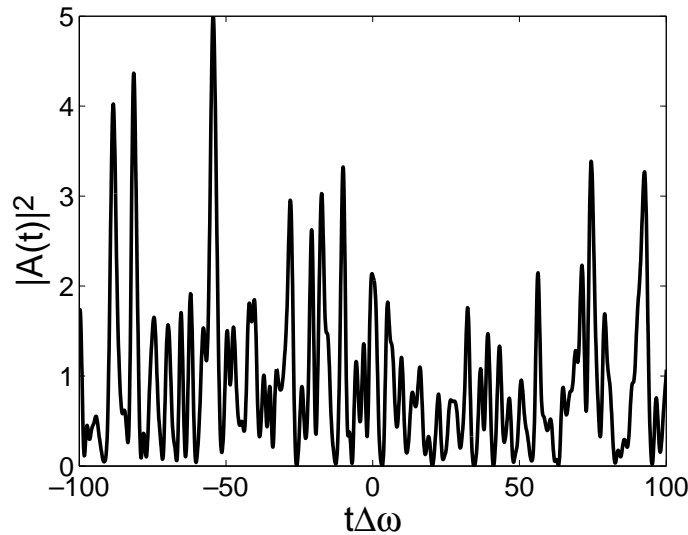
## 14.7. Gauso–Gauso triukšminė šviesa. Užduotis

Gauso–Gauso triukšmine šviesa vadinsime tokią šviesą, kurios tikimybės tankio funkcija yra Gauso pavidalo ir spektrinis tankis taip pat aprašomas Gauso funkcija [17]. Toks triukšmas gali būti sumodeliuotas šitaip. Panagrinėkime monochromatinių šaltinių, kurių fazės ir dažniai atsitiktiniai, ansamblį. Suminis laikinis signalas užrašomas taip:

$$(14.50) \quad A(t) = A_0 \sum_{j=1}^N e^{-i\omega_j t + i\varphi_j}.$$

Tegu dažniai  $\omega_j$  pasiskirstę pagal normalųjį skirstinį, o fazės  $\varphi_j$  – pagal tolydųjį.  $N$  turi būti pakankamai didelis skaičius. Tokio signalo koreliacinė funkcija:

$$(14.51) \quad R(\tau) = \langle A^*(t)A(t+\tau) \rangle = A_0^2 \sum_{j,k=1}^N \langle \exp[-i\omega_j(t+\tau) + i\varphi_j + i\omega_k t - i\varphi_k] \rangle.$$



14.5 pav. Gauso–Gauso triukšmo intensyvumas. Viena realizacija

Kadangi fazės atsitiktinės, tai vidurkis yra nenuliniai nariai tik tuomet, kai  $j = k$ .  
Taigi

$$(14.52) \quad R(\tau) = A_0^2 \sum_{j=1}^N \langle \exp(-i\omega_j \tau) \rangle.$$

Likusi suma skaičiuojama atsižvelgus į tai, kad dažniai  $\omega_j$  aprašomi normaliuoju skirstiniu (14.34), kurio vidurkis yra nulinis:

$$(14.53) \quad P(\omega_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\omega} e^{-\frac{\omega_j^2}{2\sigma_\omega^2}}.$$

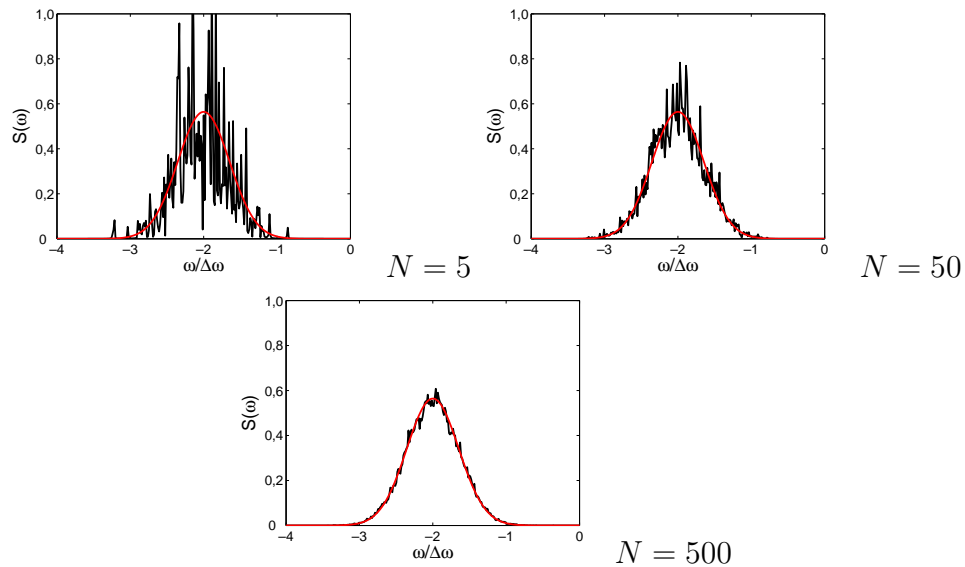
Taigi

$$(14.54) \quad R(\tau) = NA_0^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\omega} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_j \exp(-i\omega_j \tau) \exp\left(-\frac{\omega_j^2}{2\sigma_\omega^2}\right) = NA_0^2 e^{-\frac{\tau^2 \sigma_\omega^2}{2}}.$$

Iš (14.30) formulės paaikėja, kad tai yra Gauso spektro stochastinis procesas, kurio spektro plotis

$$(14.55) \quad \Delta\omega = \sqrt{2}\sigma_\omega.$$

14.5 pav. pavaizduotas vienos realizacijos intensyvumas.



14.6 pav. Gauso–Gauso triukšmo spektras, apskaičiuota, kai realizacijų yra  $N = 5$ ; 50; 500 (juoda linija). Raudona linija – teorinė kreivė

**Užduotis.** Sumodeliuoti Gauso–Gauso triukšmą. Pavaizduoti vienos realizacijos intensyvumą (14.5 pav.). Nusibraizyti jo spektro vidurkį iš  $N = 5, 50, 500$  realizacijų (14.6 pav.).

„Scilab“ ruošinys:

```
clear ; clc ; close ;
```

```
nt=256;
ht=0.1;
t=-nt*ht : ht : nt*ht-ht ;
```

```
hw = ... ; // daznio zingsnis
aw = ... ;
w = -aw : hw : aw-hw ;
```

```
a=1/sqrt(2);
N=50;
```

```
S=0;
S0=exp(-w.^2/(a^2*2))/(a*sqrt(2)*sqrt(%pi)); // teorine formule
```

```

for ib=1:500

for in=1:N

    wr(in)=rand(1,1,'normal')*a;
    phir(in)=rand(1,1,'uniform')*2*%pi;
end

for it=1:length(t)

    A(it)=sum(...)/sqrt(N);
end

S=S+fftshift(abs(fft(A)).^2)*ht^2/(2*nt*ht)/%pi/2;

S1=S/ib; // vidurkinimas

//piesimas
drawlater();
delete(gce());
plot(w,S1,'k',w,S0,'r');
set(gca(),'data_bounds',[-2, 0; 2,1])
drawnow();
sleep(20)
//piesimas

end;

```

## 14.8. Gauso ir Lorencio triukšminė šviesa

Gauso ir Lorencio triukšmine šviesa vadinsime tokią šviesą, kurios tikimybės tankis yra Gauso funkcija, o spektras – Lorencio funkcija [17]. Toks triukšminis laikinis signalas gaunamas atsitiktinio klaidžiojimo uždavinyje. Vienmačiu atveju uždavinys formuluojamas taip: pradedant nuo koordinatų pradžios  $x = 0$  dalelė gali peršokti su vienoda tikimybe  $1/2$  tiek į koordinatę  $x = \Delta$ , tiek į  $x = -\Delta$ . Klausimas: kaip toli nuklys dalelė po  $N$  žingsnių? Jei kiekvienas žingsnis trunka  $\tau$ , tai  $N$  žingsnių

trunka  $t = N\tau$  laiko. Laiko momentu  $t_j = j\tau$  tikimybės tankio funkcija lygi

$$(14.56) \quad P_{X_j} = \frac{1}{2} (\delta(x - \Delta) + \delta(x + \Delta)).$$

Charakteristinė funkcija:

$$(14.57) \quad f_{X_j} = \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} P_{X_j} = \cos(k\Delta).$$

Dalelės koordinatę po  $N$  žingsnių nusako suma

$$(14.58) \quad Y_N = X_1 + X_2 + \dots + X_N.$$

Jos tikimybės tankio funkcija

$$(14.59) \quad P_{Y_N} = \int \dots \int dx_1 \dots dx_N \delta(y - x_1 - \dots - x_N) P_{X_1}(x_1) \dots P_{X_N}(x_N).$$

Atitinkama charakteristinė funkcija yra

$$(14.60) \quad \begin{aligned} f_{Y_N}(k) &= \int dy e^{iky} P_{Y_N}(y) = \\ &= \int dx_1 \dots \int dx_N e^{ik(x_1 + \dots + x_N)} P_{X_1}(x_1) \dots P_{X_N}(x_N) = \\ &= f_{X_1}(k) \dots f_{X_N}(k) = (\cos(k\Delta))^N. \end{aligned}$$

Kai  $N \rightarrow \infty$ ,  $\tau \rightarrow 0$ ,  $\Delta \rightarrow 0$ , galima užrašyti diferencialinę lygtį, kurią tenkina charakteristinė funkcija  $f_{Y_N}(k)$ . Pažymėkime

$$(14.61) \quad \begin{aligned} f_{Y_N}(k) &= f_Y(k, N\tau) = f_Y(k, t), \\ P_{Y_N}(y) &= P_Y(y, N\tau) = P_Y(y, t). \end{aligned}$$

Naudodamiesi (14.60) galime užrašyti

$$(14.62) \quad \begin{aligned} f_Y(k, (N+1)\tau) - f_Y(k, N\tau) &= (\cos(k\Delta) - 1) f_Y(k, N\tau) = \\ &= \left( -\frac{k^2 \Delta^2}{2} + \dots \right) f_Y(k, N\tau). \end{aligned}$$

Kairiąją ir dešiniąją lygties pusę dalijame iš  $\tau$  ir randame ribą:

$$(14.63) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{f_Y(k, (N+1)\tau) - f_Y(k, N\tau)}{\tau} = \frac{\partial f_Y(k, t)}{\partial t},$$

$$(14.64) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left( -\frac{k^2 \Delta^2}{2\tau} + \dots \right) f_Y(k, N\tau) = -Dk^2 f_Y(k, t).$$

Čia

$$(14.65) \quad D = \frac{\Delta^2}{2\tau} = \text{const.}$$

Taigi, diferencialinė lygtis, kurią tenkina charakteristinė funkcija, yra

$$(14.66) \quad \frac{\partial f_Y(k, t)}{\partial t} = -Dk^2 f_Y(k, t).$$

Atlikę šios lygties atvirkštinę Furjė transformaciją gauname tikimybės tankio funkcijos lygtį:

$$(14.67) \quad \frac{\partial P_Y(y, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P_Y(y, t)}{\partial y^2}.$$

Raskime (14.66) lygties sprendinį, kai pradinė sąlyga yra:

$$(14.68) \quad f_Y(k, 0) = 1.$$

Tai atitinka tokią (14.67) lygties pradinę sąlygą:

$$(14.69) \quad P_Y(y, 0) = \delta(y).$$

(14.66) lygties sprendinys yra

$$(14.70) \quad f_Y(k, t) = \exp(-Dk^2 t).$$

Atlikę atvirkštinę Furjė transformaciją randame tikimybės tankio funkciją, kuri tenkina (14.67) lygtį.

$$(14.71) \quad P_Y(y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-iky} e^{-Dk^2 t} = \sqrt{\frac{1}{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{y^2}{4Dt}\right).$$

(14.67) yra difuzijos lygtis, (14.71) – jos sprendinys. Tikimybės tankis laikui bėgant difunduoja: viršūnė mažėja, o gaubtinė plečiasi. Be to, palyginę (14.71) su (14.34), galime padaryti svarbią išvadą, kad atsitiktinio klaidžiojimo uždavinys tikimybės tankio funkcija yra Gauso pavidalo, arba normalusis skirstinys, kurio dispersija

$$(14.72) \quad \sigma^2 = 2Dt.$$



Sukonstruokime signalą  $A(t)$ , kuris yra amplitudžių, kurių fazės  $\varphi(t)$  atsitiktinai „klaidžioja“, superpozicija:

$$(14.73) \quad A(t) = A_0 (e^{i\varphi_1(t)} + e^{i\varphi_2(t)} + \dots + e^{i\varphi_N(t)}).$$

Fizikiniu požiūriu tai reikštų, kad  $A(t)$  atitinka lauką, kurį spinduliuoja  $N$  atomų. Jų fazės atsitiktinai kinta dėl tarpusavio susidūrimų. Tarsime, kad kiekvieno atomo fazė pradiniu laiko momentu yra lygi nuliui:

$$(14.74) \quad \varphi_j(0) = 0.$$

Rasime tokio signalo koreliaciją:

$$(14.75) \quad R(\tau) = \langle A^*(t)A(t+\tau) \rangle = A_0^2 \langle (e^{-i\varphi_1(t)} + \dots + e^{-i\varphi_N(t)}) (e^{i\varphi_1(t+\tau)} + \dots + e^{i\varphi_N(t+\tau)}) \rangle.$$

Sudauginę eksponentes, kurių fazės skirtingos, ir suskaičiavę vidurkį pagal ansamblius  $\langle \dots \rangle$ , gauname nulį. Taigi, palieka tik sandaugos, kurių fazės vienodos:

$$(14.76) \quad R(\tau) = A_0^2 \sum_{j=1}^N \langle e^{i(\varphi_j(t+\tau) - \varphi_j(t))} \rangle.$$

Kadangi sistema stacionari, galime užrašyti

$$(14.77) \quad R(\tau) = A_0^2 \sum_{j=1}^N \langle e^{i(\varphi_j(\tau) - \varphi_j(0))} \rangle = A_0^2 \sum_{j=1}^N \langle e^{i\varphi_j(\tau)} \rangle.$$

Čia pasinaudota (14.74) lygybe. Kadangi visi  $N$  atomų vienodi, tai

$$(14.78) \quad R(\tau) = A_0^2 N \langle e^{i\varphi(\tau)} \rangle.$$

Kai  $\tau > 0$ , pagal (14.71) turime

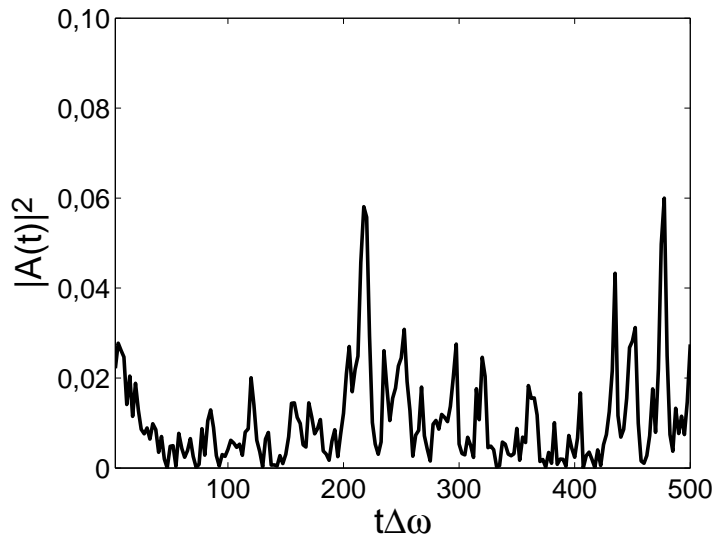
$$(14.79) \quad P_\varphi(\varphi, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D\tau}} \exp\left(-\frac{\varphi^2}{4D\tau}\right).$$

Taigi

$$(14.80) \quad \langle e^{i\varphi(\tau)} \rangle = \frac{1}{\sqrt{4\pi D\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\varphi} e^{-\frac{\varphi^2}{4D\tau}} d\varphi = e^{-D\tau}.$$

Ši lygybė gauta, kai  $\tau > 0$ . Koreliacijos funkcija pasižymi tokia simetrijos savybe:

$$(14.81) \quad R(-\tau) = \langle A^*(t)A(t-\tau) \rangle = \langle A^*(t+\tau)A(t) \rangle = R^*(\tau).$$



14.7 pav. Gauso ir Lorencio triukšmo intensyvumas. Viena realizacija

Vadinasi,

$$(14.82) \quad R(\tau) = A_0^2 N e^{-D|\tau|}.$$

Prisiminę (14.28) formulę, matome, kad ši koreliacinė funkcija atitinka Lorencio formos spektrinį tankį (14.27). Pagal atsitiktinio klaidžiojimo algoritmą sumodeliuotas Gauso ir Lorencio triukšmas pavaizduotas 14.7 pav. Šio triukšmo koreliacijos trukmė efektyviai mažesnė nei to paties pločio Gauso–Gauso triukšmas dėl to, kad Lorencio gaubtinė krinta ne taip staigiai kaip Gauso gaubtinė.

## 15 SKYRIUS

# Optinių bangų koherentiškumo tyrimas

Vykstant stacionariam procesui pagal Vinerio ir Činčino teoremą koreliacinės funkcijos plotis yra atvirkščiai proporcingas spektro pločiui. Tai reiškia, kad koreliacinė trukmė  $\tau_c$  – laiko atkarpa, kurioje triukšminio signalo amplitudė mažai kinta, – yra dydis, susijęs su spektro pločiu  $\Delta\nu$  kaip

$$(15.1) \quad \tau_c \sim \frac{1}{\Delta\nu}.$$

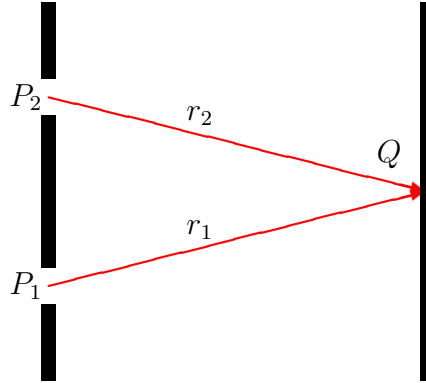
Čia buvo kalbama apie laikinę koreliaciją. Tačiau, be laikinio koherentiškumo, šviestos šaltiniai yra apibūdinami erdvinio koherentiškumu. Procesas laike dažnai gali būti laikomas stacionariu, o erdviniai skirstiniai būna nehomogeniniai dėl baigtinio pluošto spindulio.

Erdvinį ir laikinį koherentiškumą galima tirti pasitelkus Jungo schemą (15.1 pav.). Norint išskirti tik laikinį koherentiškumą, naudojama Maikelsono schema (15.2 pav.).

### 15.1. Jungo eksperimentas

Jungo eksperimento schema pavaizduota 15.1 pav. Šioje schemoje yra dalijamas bangos frontas. Pažymėkime taškus, kuriuose yra apatinis ir viršutinis plyšiai  $P_1$  ir  $P_2$ , tašką ekrane  $Q$ , atstumus  $P_1Q$  bei  $P_2Q$  kaip  $r_1$  ir  $r_2$ . Intensyvumas taške  $Q$

$$(15.2) \quad I(Q) = \langle A^*(Q, t)A(Q, t) \rangle,$$



15.1 pav. Jungo schema

čia

$$(15.3) \quad A(Q, t) = K_1 A(P_1, t - r_1/c) + K_2 A(P_2, t - r_2/c),$$

o  $K_1$  ir  $K_2$  yra kompleksiniai dydžiai, priklausantys nuo plyšio formos bei matmenų. Įrašę (15.3) į (14.2), gauname

$$(15.4) \quad I(Q) = |K_1|^2 \langle |A(P_1, t - r_1/c)|^2 \rangle + |K_2|^2 \langle |A(P_2, t - r_2/c)|^2 \rangle + \\ K_1 K_2^* \langle A(P_1, t - r_1/c) A^*(P_2, t - r_2/c) \rangle + K_1^* K_2 \langle A^*(P_1, t - r_1/c) A(P_2, t - r_2/c) \rangle.$$

Pažymėkime

$$(15.5) \quad I^{(1)}(Q) = |K_1|^2 \langle |A(P_1, t - r_1/c)|^2 \rangle, \\ I^{(2)}(Q) = |K_2|^2 \langle |A(P_2, t - r_2/c)|^2 \rangle, \\ \Gamma_{12}(\tau) = \langle A(P_1, t + \tau) A^*(P_2, t) \rangle.$$

Čia  $I^{(1)}$  ir  $I^{(2)}$  yra intensyvumai, kuriuos gautume uždengę atitinkamai antrąjį ir pirmąjį plyšį.  $\Gamma_{12}$  yra erdvinė-laikinė koreliacinė funkcija. Gauname

$$(15.6) \quad I(Q) = I^{(1)}(Q) + I^{(2)}(Q) + K_1 K_2^* \Gamma_{12} \left( \frac{r_2 - r_1}{c} \right) + K_1^* K_2 \Gamma_{21} \left( \frac{r_1 - r_2}{c} \right).$$

Kadangi koreliacinė funkcija pasižymi savybe

$$(15.7) \quad \Gamma_{21}(-\tau) = \Gamma_{12}^*(\tau),$$

tai

$$(15.8) \quad I(Q) = I^{(1)}(Q) + I^{(2)}(Q) + K_1 K_2^* \Gamma_{12} \left( \frac{r_2 - r_1}{c} \right) + K_1^* K_2 \Gamma_{12}^* \left( \frac{r_2 - r_1}{c} \right).$$

Taigi

$$(15.9) \quad I(Q) = I^{(1)}(Q) + I^{(2)}(Q) + 2|K_1 K_2| \operatorname{Re} \left( \Gamma_{12} \left( \frac{r_2 - r_1}{c} \right) \right).$$

Pažymėję savojo koherentiškumo funkcijas  $\Gamma_{11}(\tau)$ ,  $\Gamma_{22}(\tau)$  bei žinodami, kad

$$(15.10) \quad |\Gamma_{12}(0)| \leq |\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)|^{1/2},$$

įtraukiame normuotąjį dydį

$$(15.11) \quad \gamma_{12}^{(k)}(\tau) = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)}},$$

kuris vadinamas kompleksiniu koherentiškumo laipsniu. Matome, kad

$$(15.12) \quad 0 \leq |\gamma_{12}^{(k)}(\tau)| \leq 1.$$

Kadangi

$$(15.13) \quad \begin{aligned} I^{(1)}(Q) &= |K_1|^2 \Gamma_{11}(0), \\ I^{(2)}(Q) &= |K_2|^2 \Gamma_{22}(0), \end{aligned}$$

galime parašyti

$$(15.14) \quad I(Q) = I^{(1)}(Q) + I^{(2)}(Q) + 2\sqrt{I^{(1)}(Q)I^{(2)}(Q)} \operatorname{Re} \left( \gamma_{12}^{(k)} \left( \frac{r_2 - r_1}{c} \right) \right).$$

Atskirkime kompleksinio koherentiškumo laipsnio amplitudinę ir fazinę dalis:

$$(15.15) \quad \gamma_{12}^{(k)}(\tau) = \gamma_{12}(\tau) e^{-i2\pi\nu_0\tau + \alpha_{12}(\tau)}.$$

Čia išskirta greitai kintanti bėgant laikui fazinė dalis.  $\alpha_{12}(\tau)$  yra lėta laiko funkcija,  $\nu_0$  – centrinis dažnis. Turime

$$(15.16) \quad I(Q) = I^{(1)}(Q) + I^{(2)}(Q) + 2\sqrt{I^{(1)}(Q)I^{(2)}(Q)} \gamma_{12} \left( \frac{r_2 - r_1}{c} \right) \cos \left( 2\pi\nu_0 \frac{r_2 - r_1}{c} - \alpha_{12} \left( \frac{r_2 - r_1}{c} \right) \right).$$

Kompleksinio koherentiškumo laipsnio modulį  $\gamma_{12}$  galima nustatyti eksperimentu, matuojant interferencinių juostų matomumą  $V$ :

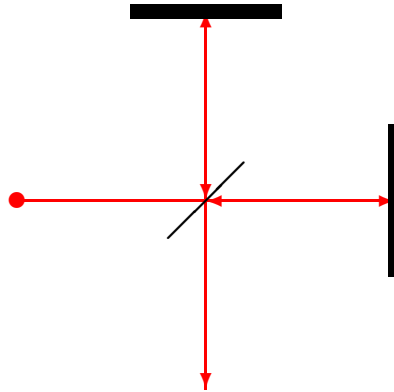
$$(15.17) \quad V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}.$$

Čia  $I_{\max}$  ir  $I_{\min}$  yra atitinkamai maksimalus ir minimalus intensyvumai. Kai  $\tau \ll \tau_c$ ,

$$(15.18) \quad I(Q)_{\max}^{\min} = I^{(1)}(Q) + I^{(2)}(Q) \pm 2\sqrt{I^{(1)}(Q)I^{(2)}(Q)} \gamma_{12}(0).$$

Kai  $I^{(1)}(Q) = I^{(2)}(Q)$ , gauname  $V = \gamma_{12}(0)$ . Tai reiškia, kad matomumas yra lygus erdviniam koherentiškumo laipsniui. O, jei  $\tau \sim \tau_c$ , tai  $V = \gamma_{12}(\tau)$ . Matomumas turės skirtingas vertes, priklausančias nuo užlaikymo trukmės  $\tau$ .

Laikinio koherentiškumo laipsniui matuoti naudojama Maikelsono schema.



15.2 pav. Maikelsono schema

## 15.2. Maikelsono interferometras

Maikelsono interferometras pavaizduotas 15.2 pav. Viršutinį veidrodį paslinkus atstumu  $h$ , vertikalusis spindulys užlaikomas horizontaliojo atžvilgiu  $\Delta t = 2h/c$ ,  $c$  yra šviesos greitis. Detektorius fiksuoja abiejų spindulių suminį intensyvumą  $I_D$ :

$$(15.19) \quad I_D = \langle |K_1 A(t) + K_2 A(t + \frac{2h}{c})|^2 \rangle.$$

Kai užlaikymas  $\Delta t$ , palyginti su koreliacijos trukme  $\tau_c$ , mažas, suminis atsakas osciliuoja keičiant  $h$  taip, kad maksimumai būna tuomet, kai  $2h$  atitinka sveiką bangos ilgių  $\lambda$  skaičių. Osciliacijų gaubiamoji mažėja iki nulio, kai užlaikymas yra daug didesnis už koreliacijos trukmę. Detektuojamas intensyvumas, priklausantis nuo atstumo  $h$ , vadinamas interferograma.

Išskleidę (15.19) išraišką gauname ( $K_1$  ir  $K_2$  realieji):

$$(15.20) \quad I_D(h) = K_1^2 \langle |A(t)|^2 \rangle + K_2^2 \langle |A(t + 2h/c)|^2 \rangle + K_1 K_2 \langle A(t + 2h/c) A^*(t) \rangle + K_1 K_2 \langle A^*(t + 2h/c) A(t) \rangle.$$

Pažymėkime:

$$(15.21) \quad I_0 = \langle |A(t)|^2 \rangle = \langle |A(t + 2h/c)|^2 \rangle$$

ir

$$(15.22) \quad \Gamma(\tau) = \langle A(t + \tau) A^*(t) \rangle.$$

Ši koreliacinė funkcija yra vadinama savojo koherentiškumo funkcija.

$$(15.23) \quad I_D(h) = (K_1^2 + K_2^2) I_0 + K_1 K_2 \Gamma(2h/c) + K_1 K_2 \Gamma^*(2h/c) = (K_1^2 + K_2^2) I_0 + 2K_1 K_2 \text{Re}(\Gamma(2h/c)).$$

Pamatę, kad

$$(15.24) \quad I_0 = \Gamma(0),$$

įrašome normuotą dydį

$$(15.25) \quad \gamma^{(k)}(\tau) = \frac{\Gamma(\tau)}{\Gamma(0)},$$

kuris vadinamas kompleksiniu koherentiškumo laipsniu. Jis pasižymi tokia savybe:

$$(15.26) \quad \gamma^{(k)}(0) = 1, \quad |\gamma^{(k)}(\tau)| \leq 1.$$

Tuomet

$$(15.27) \quad I_D(h) = (K_1^2 + K_2^2)I_0 \left( 1 + \frac{2K_1K_2}{K_1^2 + K_2^2} \operatorname{Re}(\gamma^{(k)}(2h/c)) \right).$$

Toliau tarsime, kad nuostoliai abiejuose interferometro pečiuose vienodi:  $K_1 = K_2 = K$ . Be to, atskirsime amplitudinę ir fazinę  $\gamma^{(k)}$  dalis:

$$(15.28) \quad \gamma^{(k)}(\tau) = \gamma(\tau)e^{-i2\pi\nu_0\tau + i\alpha(\tau)},$$

čia

$$(15.29) \quad \gamma(\tau) = |\gamma^{(k)}(\tau)|, \quad \alpha(\tau) = \arg(\gamma^{(k)}(\tau)) + 2\pi\nu_0\tau.$$

Kadangi

$$(15.30) \quad \nu_0\tau = \frac{c}{\lambda_0} \frac{2h}{c} = \frac{2h}{\lambda_0},$$

gauname

$$(15.31) \quad I_D(h) = 2K^2I_0 \left( 1 + \gamma(2h/c) \cos \left[ 2\pi \frac{2h}{\lambda_0} - \alpha \left( \frac{2h}{c} \right) \right] \right).$$

Čia tarta, kad nuostoliai ant veidrodžių vienodi:  $K_1 = K_2 = K$ . Kai  $h$  nedideli, gauname, kad matomumas

$$(15.32) \quad V = \left| \gamma^{(k)} \left( \frac{2h}{c} \right) \right| = \gamma \left( \frac{2h}{c} \right).$$

Kai  $V(h)$  krinta iki nulio, tuomet  $h$  atitinka užlaikymą, didesnę už koreliacinę arba koherentiškumo trukmę. Kitaip tariant, koherentiškumo trukmė yra susijusi su galimybe sukurti interferencinį paveikslą.

Kaip matėme, koreliacinė funkcija yra susijusi su spektru. Furjė spektroskopija – tai optikos sritis, kurioje, remiantis interferogramomis, atlikus išmatuotos koreliacinės funkcijos Furjė transformaciją, nustatomas spinduliuotės spektras.





## VII DALIS

### **Impulsinis lazeris**



## 16 SKYRIUS

# Kokybės moduliacija

Impulsinio lazerio pranašumas yra tas, kad visa impulso energija sutelkiama trumpame laiko intervale. Tai lemia dideles vidutinių galių vertes.

Čia aprašysime moduluotos kokybės lazerio (angl. *Q-switched*) veikimą.

### 16.1. Kokybės moduliacijos pagrindimas

13.5 skyrelyje iš pusiau klasikinių lazerio lygčių išvedėme balanso lygtis. Taikėme tokius apribojimus: 1) fotonų skaičius ir apgraža kinta pakankamai lėtai; 2) tarp atskirų modų nėra fazinių sąryšių. Dabar taikysime dar daugiau apribojimų ir užrašysime balanso lygtis paprastu pavidalu:

$$(16.1) \quad \dot{n} = -2\kappa n + WnD,$$

$$(16.2) \quad \dot{D} = \frac{D_0 - D}{T} - 2WnD.$$

Lygindami su (13.90) ir (13.92) matome, kad dingio sumos pagal  $\lambda$  ir vietoje  $d_\mu$  rašome apgražos tankį  $D$  [24]. Tai leidžia šios prielaidos. Pirma, generuojama tik viena moda, nebelieka sumos pagal  $\lambda$ . Antra, apgražos tankio nevienalytiškumas išilgai lazerio rezonatoriaus ašies  $z$  yra nedidelis. Taigi, įdubos dėl  $|g|^2 \sim \sin(kz)^2$  gali būti neįskaitytos. Tai teisinga, kai generacijos slenkstį viršija nedaug. Ir trečia, juostos išplitimas yra vienalytis. Visi atomai spinduliuoja ties tuo pačiu dažniu. Dėl to vietoje  $d_\mu$  parašytas  $D$ .

Šios lygtys užrašytos dviejų lygmenų sistemai. Panagrinėkime realistiškesnį atvejį, keturių lygmenų schemą (16.1 pav.). Užrašysime balanso lygtis nuliniam bei

antram lygmenims, laikydami, kad trečio ir pirmo lygmenų užpildos greitai relaxuoja į žemesnius. Atkreipkime dėmesį į daugiklį 2 (16.2) lygtyje. Jis atsiranda dėl to, kad vienas šuolis pakeičia apgražą dviem. Pavyzdžiui, dėl sugerties šuolio viršutinis lygmuo pasipildo vienetu, o apatinis lygmuo sumažėja vienetu. Rašant lygtis atskiriems lygmenims, daugiklio 2 nebus.

$$(16.3) \quad N_0 + N_2 = N,$$

$$(16.4) \quad \dot{N}_2 = RN_0 - BnN_2 - AN_2,$$

$$(16.5) \quad \dot{n}_2 = BnN_2 - 2\kappa n.$$

Čia  $A$  ir  $B$  – Einšteino koeficientai,  $R$  – kaupinimo sparta. Panašiai kaip buvo daroma 2 skyriuje iš šių lygčių išvesime generacijos sąlygą. Iš stacionarumo sąlygos  $\dot{n} = 0$  gauname du galimus (16.5) sprendinius:

$$(16.6) \quad N_2^0 = \frac{2\kappa}{B},$$

$$(16.7) \quad n^0 = 0.$$

Iš  $\dot{N}_2 = 0$ , gauname lygtį

$$(16.8) \quad RN_0 - Bn^0N_2^0 - AN_2^0 = 0,$$

ir įrašę (16.6) gauname

$$(16.9) \quad n^0 = \frac{N_0R}{2\kappa} - \frac{A}{B}.$$

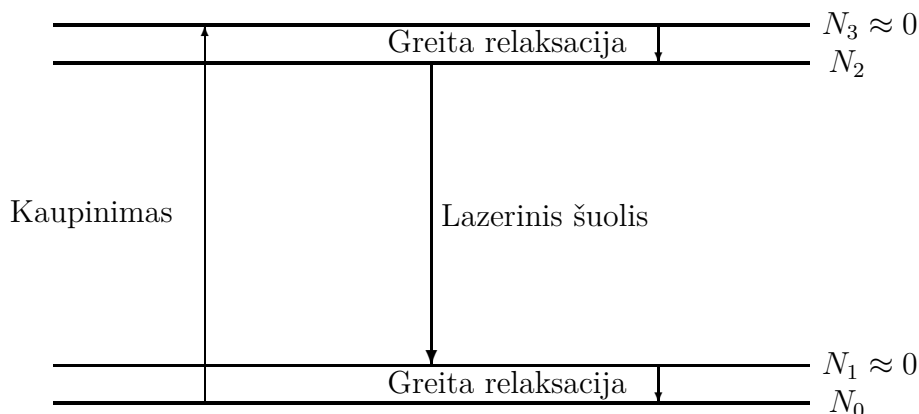
Fotonų skaičius neneigiamas, ir generacija vyksta, kai

$$(16.10) \quad R > \frac{A}{B} \frac{2\kappa}{N_0}.$$

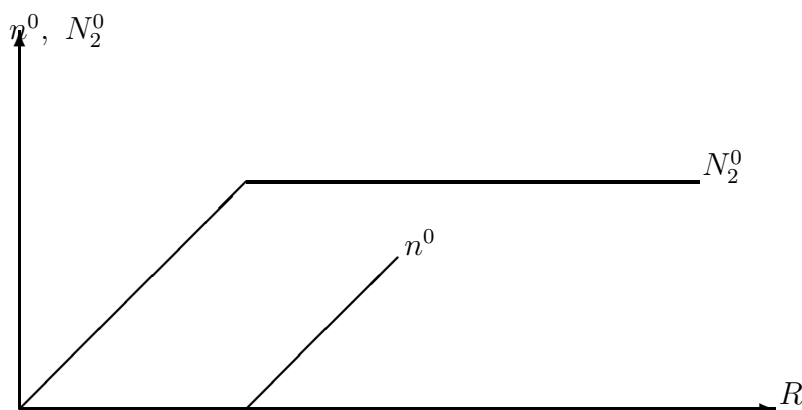
Esant generacijai,  $n^0 > 0$ , o antro lygmens užpilda (16.6) nepriklauso nuo kaupinimo  $R$ . Kai generacija nevyksta,  $n^0 = 0$ , iš (16.8) gauname

$$(16.11) \quad N_2^0 = \frac{RN_0}{A}.$$

Antro lygmens užpilda didėja tiesiškai didėjant kaupinimui  $R$ . Ji didėja, kol prasideda generacija, ir tuomet užpildos vertė nebekinta. Tai schemiškai pavaizduota 16.2 pav.



16.1 pav. Keturių lygmenų schema



16.2 pav. Fotonų skaičiaus ir apgrąžos kitimo priklausomybė nuo kaupinimo. Scheminis vaizdas

Taigi, dabar galime pagrįsti lazerio, kuriam būdinga kokybės moduliacija, veikimą. Kurį laiką nuostoliai rezonatoriuje būna dideli. Tuomet generacija nevyksta ir galima pasiekti dideles apgrąžos vertes. Paskui nuostoliai staigiai sumažėja ir generuojamas galingas impulsas, nes perjungimo metu apgrąža, o kartu ir stiprinimas, būna dideli.

Moduliacija, t. y. būdas, kuriuo keičiami nuostoliai rezonatoriuje, būna pasyvi arba aktyvi. Aktyvi kokybės moduliacija gali būti vykdoma naudojant Pokelso elementą, pasyvi – dažais.

## 16.2. Milžiniško impulso formavimasis. Užduotis

Čia remsimės [25] straipsniu ir panagrinėsime, kaip susiformuoja milžiniškas impulsas (angl. *giant pulse*) lazeryje, kuriam būdinga kokybės moduliacija. Nagrinėsime

mažų nuostolių režimą, kai jau yra sukaupta didelė apgrąža. Remsimės balanso lygtimis. Perrašysime (16.1) ir (16.2) pastarojoje atmetę lėtą relaksacijos narį:

$$(16.12) \quad \dot{n} = -2\kappa n + BnD,$$

$$(16.13) \quad \dot{D} = -2BnD.$$

Čia vietoje  $W$  rašome Einšteino koeficientą  $B$ . Tai yra dvi susijusios diferencialinės lygtys. Analiziškai jos nesprenžiamos, tačiau galima rasti svarbias charakteristikas – impulso energiją ir viršūnės vertę.

Užrašykime lygtis bedimensiu pavidalu. Tam panaudojame dydį  $D_p = \frac{2\kappa}{B}$  ir bedimensį laiką  $\tau = 2\kappa t$ . Gauname

$$(16.14) \quad \frac{dn}{d\tau} = n \left( -1 + \frac{D}{D_p} \right),$$

$$(16.15) \quad \frac{dD}{d\tau} = -2 \frac{D}{D_p} n.$$

(16.14) padauginame iš 2 ir sudedame su (16.15). Turime

$$(16.16) \quad \frac{d(D + 2n)}{d\tau} = -2n.$$

Suintegruosime šią lygtį intervale  $[0, \infty]$  atsižvelgdami į tai, kad pradinis (i) ir galutinis (f) fotonų skaičius labai mažas:  $n_i \approx 0$ ,  $n_f \approx 0$ . Taigi,

$$(16.17) \quad D_i - D_f = 2 \int_0^{\infty} n d\tau.$$

Iš čia matome, kad išspinduliuotų fotonų kiekis yra susijęs su apgrąžos pokyčiu. Impulso energijai galime parašyti

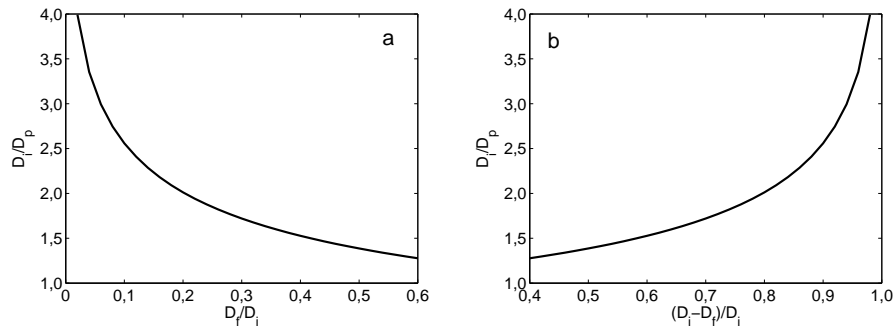
$$(16.18) \quad E = \frac{1}{2}(D_i - D_f)V\hbar\omega.$$

Padalykime (16.12) iš (16.13). Gausime lygtį

$$(16.19) \quad \frac{dn}{dD} = \frac{D_p}{2D} - \frac{1}{2}.$$

Suintegravę turime

$$(16.20) \quad n - n_i = \frac{1}{2} \left[ D_p \log \left( \frac{D}{D_i} \right) - (D - D_i) \right].$$



16.3 pav.  $D_i/D_p = f(D_f/D_i)$  (a) ir  $D_i/D_p = f((D_i - D_f)/D_i)$  (b) funkcijų grafikai

Vietoje  $n$  įrašome  $n_f$ , vietoje  $D - D_f$  ir vėl atsižvelgiame į tai, kad  $n_i \approx 0$ ,  $n_f \approx 0$ . Gauname lygtį

$$(16.21) \quad \beta = \frac{\log x}{x - 1},$$

kurioje

$$(16.22) \quad x = \frac{D_f}{D_i}, \quad \beta = \frac{D_i}{D_p}.$$

Galime pavaizduoti grafiką  $\beta = \beta(x)$  arba  $D_i/D_p = f(D_f/D_i)$  (16.3 pav., a). Matome, kad  $1 - x = \frac{D_i - D_f}{D_i}$ , todėl šį grafiką galime perskaičiuoti į  $D_i/D_p = f((D_i - D_f)/D_i)$  grafiką (16.3 pav., b). Iš jo matome, kaip impulso energija priklauso nuo pradinės apgražos: ji didėja, didėjant apgražai.

Grįžkime prie (16.19) lygties. Iš jos tampa aiški dydžio  $D_p$  prasmė. Kai  $D = D_p$ ,  $dn/dD = 0$ . Tai yra impulso viršūnės sąlyga. Įrašę  $D = D_p$  į (16.20) randame fotonų skaičių  $n_p$  impulso viršūnėje:

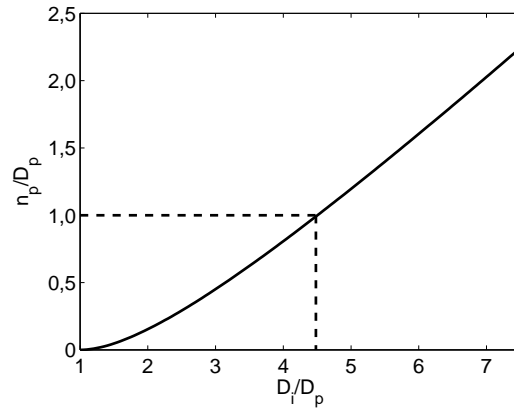
$$(16.23) \quad n_p = \frac{1}{2} \left[ D_p \log \left( \frac{D_p}{D_i} \right) - (D_p - D_i) \right].$$

Čia buvo atmetas  $n_i \approx 0$ .  $n_p/D_p$  kaip pradinės apgražos  $D_i/D_p$  funkcija pavaizduota 16.4 pav. Matome, kad fotonų skaičius viršūnėje didėja, didėjant pradinei apgražai.

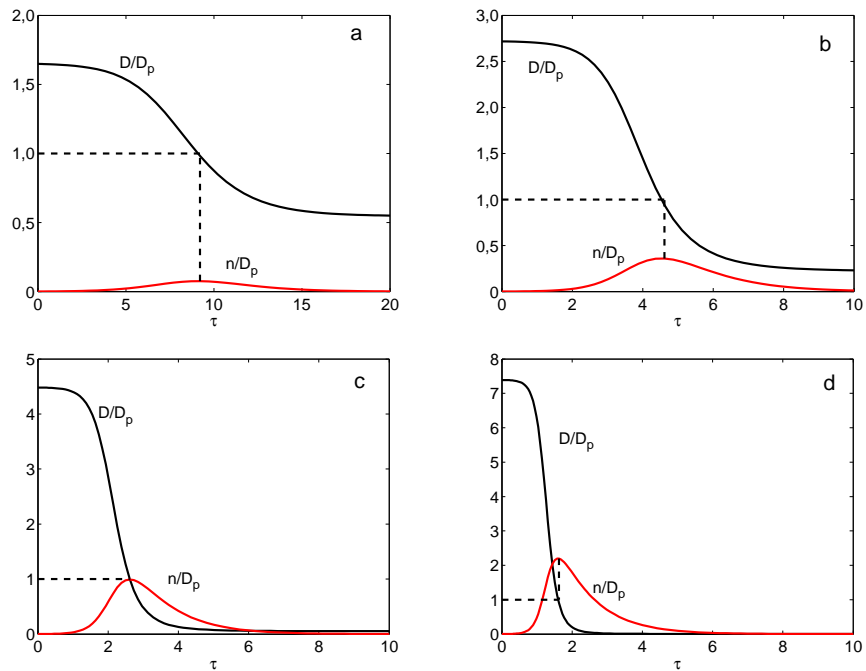
Milžiniško impulso formavimasis pavaizduotas 16.5 pav. Čia taip pat matome, kaip keičiasi apgražos vertė nuo pradinės  $D_i$  iki galutinės  $D_f$ . Grafikai gauti, modeliuojant (16.12) ir (16.13) lygtis (žr. užduotį).

**Užduotis.** Sumodeliuoti (16.12) ir (16.13) lygtis RK4 metodu. Pradinės sąlygos pateiktos 16.5 pav. pavadinime.

Pastaba. Modeliuojant  $n$  ir  $D$  sunormuoti – naudoti kintamuosius  $n/D_p$  ir  $D/D_p$ .



16.4 pav.  $n_p/D_p$  priklausomybės nuo  $D_i/D_p$  grafikas.  $n_p/D_p = 1$ , kai  $D_i/D_p = 4.482$ , žr. 16.5 pav., c



16.5 pav. Fotonų skaičiaus ir apgrąžos priklausomybė nuo laiko. Pradinė apgrąža  $D_i/D_p$ : 1,649 (a); 2,718 (b); 4,482 (c); 7,389 (d). Pradinis fotonų skaičius  $n_i/D_p = 10^{-3}$



# 17 SKYRIUS

## Modų sinchronizacija

Iš balanso lygčių matėme, kad stiprinimo inkrementas priklauso nuo apgrąžos  $D$  (nes neįskaitant nuostolių lygtis fotonų skaičiui  $\dot{n} = WnD$ ). Esant vienalyčiam išplitimui, apgrąža nuo kaupinimo didėja tik iki tam tikros vertės ir paskui jau nepriklauso nuo kaupinimo. Kadangi  $W$  maksimumas yra esant tam tikram dažniui, tai tik vienam dažniui bus tenkinama generacijos sąlyga. Šoninės modos nepasieks generacijos slenksčio. Taigi, vienalyčio išplitimo atveju turėtų generuotis tik viena išilginė moda. Nevienalyčio išplitimo atveju apgrąžos tankio, o kartu ir stiprinimo juostos kontūre atsiranda įdubų. Tampa galimas daugelio išilginių modų stiprinimas.

Pačioje lazerių tyrimo pradžioje buvo pademonstruotas būtent daugiamodis generacijos režimas. Jis buvo pasiektas tiek vienalyčio, tiek nevienalyčio išplitimo atvejais. Iš pirmo žvilgsnio daugiamodė veikia vienalyčio išplitimo atveju prieštarauja ankstesniems argumentams. Tačiau prisiminkime, kad įdubų atsiranda ir šiuo atveju dėl stovinčiųjų bangų susidarymo Fabri ir Pero rezonatoriuje. Taigi, lazeris turi tendenciją veikti daugelio išilginių modų režimu.

Šiame skyriuje bus parodyta, kad sinchronizuojant modas galima išlošti smailinį impulso intensyvumą. Remdamiesi pusiau klasikinėmis lazerio lygtimis ištirsime generuojamo impulso savybes.

### 17.1. Modų sinchronizacijos pagrindimas

Suskaičiuosime spinduliuotės intensyvumą, kai generuojama  $N$  išilginių modų. Pradžioje panagrinėkime nesinchronizuotų (nekoreliuotų) modų atvejį.  $n$ -tosios modos amplitudė

$$(17.1) \quad E_n = E_0 e^{i\omega_n t + i\varphi_n}.$$

Čia paprastumo dėlei tarėme, kad visų modų amplitudė vienoda,  $E_0$ .  $\omega_n$  –  $n$ -tosios modos dažnis:

$$(17.2) \quad \omega_n = \omega_0 + n\Delta\omega,$$

čia  $\omega_0$  – centrinis spinduliuotės dažnis,  $\Delta\omega = \pi c/L$  – atstumas tarp modų dažnių. Jei  $L \approx 1$  m, tai  $\Delta\omega \approx 10$  GHz. Tegu  $\varphi_n$  yra nekoreliuotos fazės. Suminio lauko amplitudė randama iš

$$(17.3) \quad E = \sum_n E_n,$$

o intensyvumas

$$(17.4) \quad I = \langle EE^* \rangle.$$

Gauname dvigubą sumą

$$(17.5) \quad I = |E_0|^2 \left\langle \sum_n \sum_m \exp(i(\varphi_n - \varphi_m) + i\Delta\omega(n - m)t) \right\rangle.$$

Vidurkinant didžiausią indėlį įneš sumos, kai  $n = m$ . Tuomet

$$(17.6) \quad I = |E_0|^2 N.$$

Intensyvumas tiesiogiai proporcingas modų kiekiui.

Dabar tarkime, kad visos modos koreliuotos, t. y. visų fazės sutampa,  $\varphi_n = 0$ . Suskaičiuosime sumą (17.3). Parašome

$$(17.7) \quad E = \sum_{-M}^M E_n = E_0 e^{i\omega_0 t} (S_1 + S_2),$$

čia  $M$  su modų skaičiumi  $N$  susijęs kaip

$$(17.8) \quad M = \frac{N - 1}{2},$$

$N$  nelyginis. Atskirtos sumos

$$(17.9) \quad S_1 = \sum_{n=-M}^{-1} e^{in\Delta\omega t} = \sum_{n=0}^M e^{-in\Delta\omega t} - 1,$$

$$(17.10) \quad S_2 = \sum_{n=0}^M e^{in\Delta\omega t}.$$

Tai yra geometrinės progresijos. Pasinaudosime geometrinės progresijos sumos formule:

$$(17.11) \quad \sum_{n=0}^M q^n = \frac{1 - q^{M+1}}{1 - q}.$$

Gauname

$$(17.12) \quad S_1 = \frac{e^{-i\Delta\omega t} - e^{-i(M+1)\Delta\omega t}}{1 - e^{-i\Delta\omega t}},$$

$$(17.13) \quad S_2 = \frac{1 - e^{i(M+1)\Delta\omega t}}{1 - e^{i\Delta\omega t}}.$$

Sudėję turėsime

$$(17.14) \quad S_1 + S_2 = \frac{\sin(M + \frac{1}{2})\Delta\omega t}{\sin \frac{\Delta\omega t}{2}}.$$

Kadangi  $M + \frac{1}{2} = \frac{N}{2}$ , gauname

$$(17.15) \quad E = E_0 e^{i\omega_0 t} \frac{\sin(\frac{N}{2})\Delta\omega t}{\sin \frac{\Delta\omega t}{2}}.$$

Impulso viršūnėje, kai  $t = 0$ ,

$$(17.16) \quad \frac{\sin(\frac{N}{2})\Delta\omega t}{\sin \frac{\Delta\omega t}{2}} = N.$$

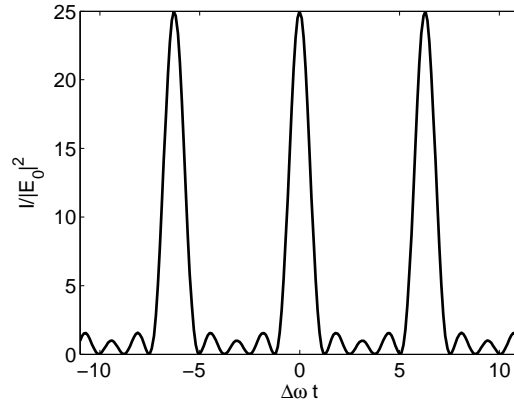
Todėl suminis intensyvumas

$$(17.17) \quad I_{\max} = |E_0|^2 N^2.$$

Jis kvadratiškai priklauso nuo modų skaičiaus ir yra  $N$  kartų didesnis nei esant nesinchronizuotoms modoms. Intensyvumo priklausomybė nuo laiko sinchronizuotų modų atveju pavaizduota 17.1 pav.

## 17.2. Modų sinchronizacijos teorija

Aprašysime modų sinchronizaciją, vykdomą modulatoriumi [16], [13]. Modulatorius gali būti amplitudinis arba fazinis. Abiem atvejais jis periodiškai veikia impulso gaubtinę, šitaip pasiekdamas režimą, kuriuo modos sinchronizuotos.

17.1 pav. Intensyvumo priklausomybė nuo laiko. Sinchronizuotos modos,  $N = 5$ 

Prisiminkime (13.41) ir (13.42) lygtis – bėgančiosios bangos elektrinio lauko stiprio ir poliarizuotumo. Laikydami, kad banga bėga  $z$  ašies kryptimi ir dydžiai yra tiesiškai poliarizuoti, galime parašyti

$$(17.18) \quad \frac{\partial E}{\partial z} + \frac{\partial E}{c\partial t} = \frac{ik}{2\varepsilon_0} P,$$

$$(17.19) \quad \frac{\partial P}{\partial t} = (i(\omega - \omega_0) - \gamma) P + \frac{\sigma}{i\hbar} ED.$$

Čia sandaugas iš  $\theta_{12}$  žymime tiesiog  $\sigma$ . Paprastumo dėlei neįskaitysime išderinimo,  $\omega = \omega_0$  (čia  $\omega_0$  – centrinis šuolio dažnis,  $\omega$  – centrinis spinduliuotės dažnis). Be to, pažymėsime  $\gamma = 1/\tau_{21}$ . Tuomet

$$(17.20) \quad \frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{1}{\tau_{21}} P + \frac{\sigma}{i\hbar} ED.$$

Nagrinėsime keturių lygmenų lazerį, kai lazerinis šuolis vyksta iš antrojo į pirmąjį lygmenį, 16.1 pav. apgražą  $D$  galime pakeisti antrojo lygmens užpilda  $N_2$ . Laikysime, kad vieno praėjimo metu ši užpilda kinta nedaug,

$$(17.21) \quad N_2 = \bar{N}_2,$$

čia  $\bar{N}_2$  – nekintantis dydis. Pereisime prie naujų koordinatės ir laiko:

$$(17.22) \quad \eta = t - z/c, \quad z' = z.$$

Išvestinės

$$(17.23) \quad \frac{\partial}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial z'},$$

$$(17.24) \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \eta}.$$

Lygtys naujuose kintamuosiuose:

$$(17.25) \quad \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{ik}{2\varepsilon_0} P,$$

$$(17.26) \quad \frac{\partial P}{\partial \eta} = -\frac{1}{\tau_{21}} P + \frac{\sigma}{i\hbar} E \bar{N}_2.$$

Rašant šias lygtis nuo  $z'$  buvo numestas apostrofas. Galime užrašyti (17.26) sprendinį:

$$(17.27) \quad P = \frac{\sigma \bar{N}_2}{i\hbar} \int_{-\infty}^{\eta} E(\eta') e^{\frac{1}{\tau_{21}}(\eta' - \eta)} d\eta'.$$

Šį integralą galime suintegruoti  $E(\eta')$  paskleidę Teiloro eilute  $\eta' = \eta - \tau_{21}$  aplinkoje, t. y. ten, kur eksponentės indėlis didžiausias. Skleidinys Teiloro eilute atrodo taip:

$$(17.28) \quad E(\eta' = \eta - \tau_{21}) = E(\eta) - \tau_{21} \frac{\partial E}{\partial \eta} + \frac{\tau_{21}^2}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial \eta^2}.$$

Įrašę šį skleidinį ir suskaičiavę integralą

$$(17.29) \quad \int_{-\infty}^{\eta} e^{\frac{1}{\tau_{21}}(\eta' - \eta)} d\eta' = \tau_{21},$$

iš (17.25) gauname

$$(17.30) \quad \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{\sigma_{21} \bar{N}_2}{2} \left( E(\eta) - \tau_{21} \frac{\partial E}{\partial \eta} + \frac{\tau_{21}^2}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial \eta^2} \right).$$

Čia

$$(17.31) \quad \sigma_{21} = \frac{k\sigma\tau_{21}}{\varepsilon_0\hbar}.$$

Pirmasis narys skliaustuose atitinka stiprinimą lazerinėje terpėje, antrasis – laikinį nunešimą, trečiasis – dispersinį plitimą. Pastaruosius du reiškinius išsamiau aptarsime skyriuje apie impulso sklidimą dispersinėje terpėje. Dabar surasime lygties sprendinį, pasinaudodami Furjė transformacija. Furjė vaizdui

$$(17.32) \quad S(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int E(\eta) e^{-i\Omega\eta} d\eta$$

gauname lygtį

$$(17.33) \quad \frac{\partial S}{\partial z} = \frac{\sigma_{21}\bar{N}_2}{2} \left( S - i\tau_{21}\Omega S - \frac{\Omega^2\tau_{21}^2}{2} S \right).$$

Šios lygties sprendinys

$$(17.34) \quad S(\Omega) = S_0(\Omega) \exp \left( \frac{\sigma_{21}\bar{N}_2}{2} [1 - i\Omega\tau_{21} - \Omega^2\tau_{21}^2/2] z \right),$$

čia

$$(17.35) \quad S_0(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int E_0(\eta') e^{i\Omega\eta'} d\eta',$$

o  $E_0(\eta) = E(\eta, z = 0)$ . Atlikę atvirkštinę Furjė transformaciją, randame elektrinio lauko stiprį:

$$(17.36) \quad E = \int S e^{-i\Omega\eta} d\Omega = e^{g/2} \int S_0 e^{-i\Omega\eta - i\Omega\frac{g}{2}\tau_{21} + \frac{g}{4}\Omega^2\tau_{21}^2} d\Omega.$$

Čia pažymėta  $g = \sigma_{21}\bar{N}_2 z$  – stiprinimo inkrementas. Įrašę (17.35)  $S_0$  išraišką, gauname

$$(17.37) \quad E = \frac{e^{g/2}}{2\pi} \int \int E_0(\eta') \exp \left( i\Omega\eta' - i\Omega\eta - i\Omega\frac{g}{2}\tau_{21} - i\frac{g}{4}\Omega^2\tau_{21}^2 \right) d\Omega d\eta'.$$

Integralą pagal dažnį galime suintegruoti. Čia pateiksime atsakymą:

$$(17.38) \quad \frac{1}{2\pi} \int d\Omega e^{i\Omega(-\eta+\eta'-\frac{g}{2}\tau_{21})-\frac{g}{4}\Omega^2\tau_{21}^2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi g}\tau_{21}} \exp \left( -\frac{(\eta-\eta'+g\tau_{21})^2}{4g\tau_{21}^2} \right).$$

Taigi,

$$(17.39) \quad E(\eta) = \frac{e^{\frac{3}{4}g}}{2\sqrt{\pi g}\tau_{21}} \int d\eta' E_0(\eta') \exp \left( \frac{\eta-\eta'}{2\tau_{21}} - \frac{(\eta-\eta')^2}{4\tau_{21}^2 g} \right).$$

Pažymėsime, kad  $E_0$  yra pradinė impulso gaubtinė, o  $E(\eta)$  – gaubtinė impulsui prasklidus stiprinančią terpę. Vykstant sklidimui rezonatoriuje, banga du kartus pereina stiprinančią terpę ir moduliatorių, patiria nuostolių atsispindėjusi nuo veidrodžio ir vėl grįžta per moduliatorių į aktyvią terpę. To rezultatas – elektrinio lauko amplitudė

$$(17.40) \quad E_2(\eta) = \sqrt{R} T_{AM}(\eta) E(\eta).$$

Čia  $R$  yra veidrodžio atspindžio koeficientas,  $T_{AM}$  – fazinė arba amplitudinė moduliacija. Panagrinėkime amplitudinę moduliaciją. Tuomet

$$(17.41) \quad T_{AM}(\eta) = \exp \left( -\delta_{AM} \sin^2(\omega_m(\eta - \eta_0)) \right).$$

Čia  $\delta_{AM}$  yra moduliacijos gylis,  $\omega_m$  – moduliacijos dažnis,  $\eta_0$  – impulso viršūnės padėtis. Matome, kad periodinis moduliatorius praleidžia impulso viršūnę ir sugeria nutolusias nuo viršūnės dalis. Norima, kad apėjęs rezonatorių impulsas atsikartotų. Tuomet reikia patenkinti sąlygą

$$(17.42) \quad E_2(\eta)e^{i\omega\eta} = E_0(\eta + h)e^{i\omega(\eta+h)}e^{-i\varphi}.$$

Čia  $h$  – poslinkis laike dėl stiprinimo,  $\varphi$  – fazė. Taigi, turime spręsti lygtį:

$$(17.43) \quad \frac{\sqrt{R}e^{\frac{3}{4}g}}{2\sqrt{\pi g\tau_{21}}} \exp(-\delta_{AM}\omega_m^2(\eta - \eta_0)^2) \int d\eta' E_0(\eta') \exp\left(\frac{\eta-\eta'}{2\tau_{21}} - \frac{(\eta-\eta')^2}{4\tau_{21}^2 g}\right) = E_0(\eta + h)e^{i\omega h - i\varphi}.$$

Šios lygties sprendinio ieškosime Gauso impulso pavidalu:

$$(17.44) \quad E_0(\eta) = a_0 e^{-b\eta^2}.$$

Irašę šį sprendinį į (17.39), gauname amplitudę po stiprinimo

$$(17.45) \quad E(\eta) = \frac{a_0}{\sqrt{1 + 4g\tau_{21}^2 b}} \exp\left(\frac{3}{4}g + \left[-b\eta^2 + 2bg\tau_{21}\eta + \frac{g}{4}\right] \frac{1}{1 + 4bg\tau_{21}^2}\right).$$

Pertvarkę užrašome

$$(17.46) \quad E(\eta) = \frac{a_0}{\sqrt{1 + 4g\tau_{21}^2 b}} \exp\left(g - \frac{b(\eta - g\tau_{21})^2}{1 + 4bg\tau_{21}^2}\right).$$

Matome, kad impulso viršūnė yra ties  $\eta_0 = g\tau_{21}$ . Taigi, (17.43) virsta tokia lygtimi:

$$(17.47) \quad \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{1 + 4g\tau_{21}^2 b}} \exp(-\delta_{AM}\omega_m^2(\eta - g\tau_{21})^2) \exp\left(g - \frac{b(\eta - g\tau_{21})^2}{1 + 4bg\tau_{21}^2}\right) = \exp(-b(\eta + h)^2).$$

Iš čia kyla sąlygos

$$(17.48) \quad h = -g\tau_{21},$$

$$(17.49) \quad \delta_{AM}\omega_m^2 = \frac{gb^2 4\tau_{21}^2}{1 + 4g\tau_{21}^2 b},$$

$$(17.50) \quad \sqrt{\frac{R}{1 + 4gb\tau_{21}^2}} \exp g = 1.$$

Iš (17.49) gausime impulso trukmę. Išreiškiame  $b$

$$(17.51) \quad b = \frac{\delta_{AM}\omega_m^2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\delta_{AM}^2\omega_m^4 + \frac{\delta_{AM}\omega_m^2}{g\tau_{21}^2}}.$$

Impulso trukmė

$$(17.52) \quad \tau = \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\omega_m}}\sqrt{\tau_{21}}\sqrt[4]{\frac{g}{\delta_{AM}}}.$$

Ji gauta apytiksliai, laikant, kad pagrindinį indėlį įneša  $1/(g\tau_{21}^2)$  narys. Iš (17.50) užrašome stiprinimo inkremento  $g$  lygtį:

$$(17.53) \quad g = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{R} + \frac{1}{2}\ln(1 + 4gb\tau_{21}^2).$$

Trumpai aptarsime fazinę moduliaciją. Jos atveju vietoje (17.41) turime fazinį daugiklį:

$$(17.54) \quad T_{PM}(\eta) = \exp[-i\delta_{PM}\cos(\omega_m(\eta - \eta_0) + \theta)].$$

Parašysime rezultata, koks gaunamas  $b$ :

$$(17.55) \quad b_{PM} = (1 - i)\frac{\omega_m}{2\tau_{21}}\sqrt{\frac{\delta_{PM}}{g}}.$$

Tiek amplitudinės, tiek fazinės moduliacijos atveju impulso trukmė  $\tau \propto \sqrt{\tau_{21}/\omega_m}$ . Keičiant moduliacijos dažnį galima keisti impulso trukmę.

Moduliacijos dažnis

$$(17.56) \quad \omega_m = \frac{\pi}{\tau_0 - h},$$

čia  $\tau_0$  yra praėjimo trukmė „šaltame“ rezonatoriuje,  $h$  – impulso viršūnės poslinkis dėl stiprinimo. Matėme, kad  $h = -g\tau_{21}$ , taigi

$$(17.57) \quad \omega_m = \frac{\pi}{\tau_0 + \tau_{21}g}.$$

## 17.3. Modų sinchronizacijos modeliavimas. Užduotis

Stiprinamam impulsui buvome gavę (17.30) lygtį. Jos sprendinį dauginome iš Gauso eksponentės dėl moduliacijos įtakos. Apibendrinant, tiek stiprinimą, tiek moduliaciją



aprašys tokia lygtis:

$$(17.58) \quad \frac{\partial E}{\partial z} = c_1 E - c_2 \eta^2 E + c_3 \frac{\partial^2 E}{\partial \eta^2}.$$

Čia neberašome pirmos eilės dalinės išvestinės pagal  $\eta$ , laikydami, kad pereita prie bėgančiosios koordinatinių sistemos. Antras narys dešinėje pusėje aprašo moduliaciją. Spektrine kalba ši lygtis atrodo taip

$$(17.59) \quad \frac{\partial S}{\partial z} = C_1 S - C_2 \Omega^2 S + C_3 \frac{\partial^2 S}{\partial \Omega^2}.$$

Darbe [12] parodyta, kad (17.59) lygties sprendinį galima skleisti Ermito ir Gauso modomis, ir stabili yra tik nulinės eilės moda – Gauso moda. Jos išraiška

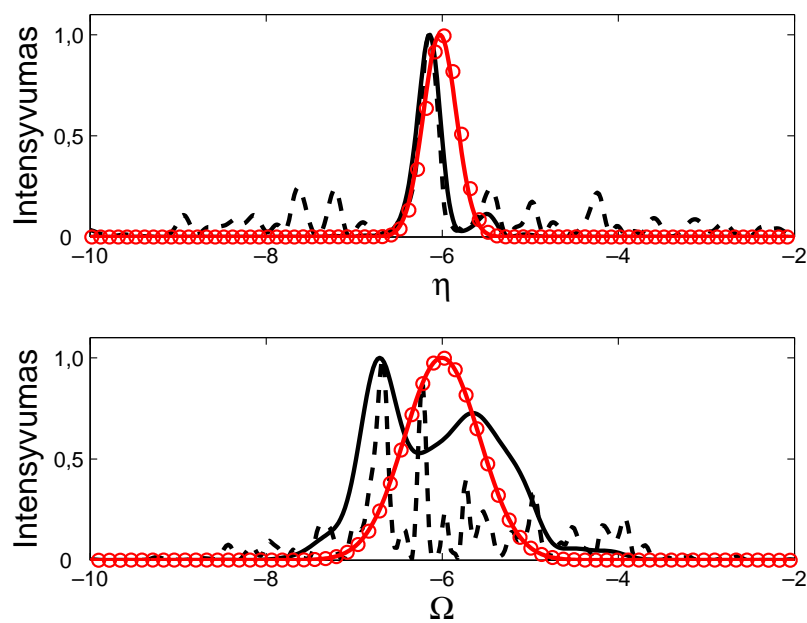
$$(17.60) \quad \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\Omega^2}{\Omega_P^2}\right),$$

čia  $\Omega_P = (C_3/C_2)^{1/4}$ .

17.2 pav. pavaizduoti (17.59) lygties modeliavimo rezultatai. Pradinė sąlyga yra plataus spektro Gauso–Gauso triukšmas, 14.7 skyrelis. Matome, kad teorinė formulė gerai atitinka sumodeliuotą profilį.

**Užduotis.** Sumodeliuoti (17.59) lygtį, kai pradinė sąlyga yra plataus spektro Gauso–Gauso triukšmas. Gautą impulsą palyginti su teorine formule (17.60). Parametrai surašyti 17.2 pav. pavadinime.

Pastaba. 14.7 skyrelyje pateiktas programos ruošinys, modeliuojantis Gauso–Gauso triukšmą. Dispersinis narys diskretizuojamas taip pat, kaip difrakcijos narys parabolinės difrakcijos lygties atveju (10.5 skyrelis).



17.2 pav. (17.59) lygties modeliavimas.  $C_1 = 50$ ,  $C_2 = 0,2$ ,  $C_3 = 1$ .  $z$ : 0,01 (brūkšninė linija); 0,2 (ištiesinė juoda linija); 3 (raudona linija). Teorinė formulė (17.60) – raudoni rutuliukai. Pradinio triukšmo spektro plotis  $\Delta\omega = 4$

## VIII DALIS

# Dispersijos teorija



Iki šiol buvo kalbėta apie dviejų lygmenų sistemą ir šviesos sąveiką su tokia sistema arti rezonanso. Tačiau šviesa gali sąveikauti su atomu nevykstant šuoliams tarp lygmenų. Tokia nerezonansinė sąveika lemia medžiagos tiesinio jautrio dispersiją. Medžiagos lūžio rodiklis priklauso nuo krintančios spinduliuotės dažnio.

Kai sąveikaujančios šviesos intensyvumas pakankamai didelis, pradeda atsirasti kokybiškai naujų reiškinių. Juos sąlygoja medžiagos netiesiškumas, kalbama apie netiesinius medžiagos jautrius. Pirmas netiesinės optikos reiškinys buvo stebimas vos atsiradus lazeriams. Tai buvo lazerio spinduliuotės antrosios harmonikos generacija.

Šioje dalyje panagrinėsime medžiagos dispersiją vadovaudamiesi dviem teorijomis: klasikine ir kvantine. Klasikinė teorija pateikiama tiek tiesinė, tiek netiesinė; kvantinė tik tiesinė. Netiesinių jautrių kvantmechaninė teorija yra nuodugnai nagrinėjama remiantis netiesine optika [6] knygoje.



## 18 SKYRIUS

# Klasikinė dispersijos teorija

### 18.1. Anharmoninio osciliatoriaus lygtis

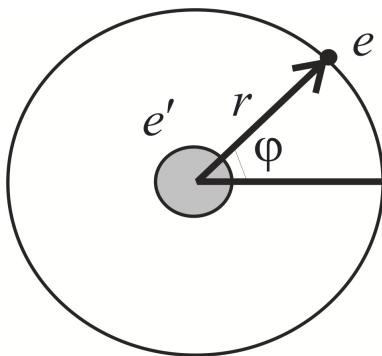
Panagrinėkime vieno elektrono, kurio krūvis  $e$ , judėjimą apie branduolį, kurio krūvis  $e'$  (18.1 pav.). Užrašysime tokios sistemos lagranžianą.

Elektrono greičio vektorių  $\mathbf{v}$  patogiu užrašyti polinėje koordinačių sistemoje  $(r, \varphi)$ , kurios pradžia yra branduolio centre:

$$(18.1) \quad \mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{r}_0 + r\dot{\varphi}\vec{\varphi}_0,$$

čia  $\mathbf{r}_0$  ir  $\vec{\varphi}_0$  – vienetiniai ortai. Pirmas dėmuo atitinka judėjimą išilgai spindulio, antras – apskritimu. Greičio kvadratas:

$$(18.2) \quad v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2.$$



18.1 pav. Elektrono judėjimas apie branduolį

Elektrono kinetinė energija

$$(18.3) \quad T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2).$$

Čia  $m$  – elektrono masė. Elektrono potencinė energija  $U$  branduolio elektrostatiniame lauke yra lygi

$$(18.4) \quad U = -\frac{1}{r} \frac{|ee'|}{4\pi\epsilon_0}.$$

Pilnutinė energija  $E$  yra kinetinės ir potencinės energijų suma

$$(18.5) \quad E = T + U = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{1}{r} \frac{|ee'|}{4\pi\epsilon_0}.$$

$\dot{\varphi}$  išreikšime per judesio kiekio momentą  $M$ , kuris yra tvarus dydis:

$$(18.6) \quad M = mr^2\dot{\varphi}.$$

Iš čia

$$(18.7) \quad \dot{\varphi} = \frac{M}{mr^2}.$$

Energija (18.5) tuomet atrodo taip:

$$(18.8) \quad E = \frac{m\dot{r}^2}{2} - \frac{1}{r} \frac{|ee'|}{4\pi\epsilon_0} + \frac{M^2}{2mr^2} = \frac{m\dot{r}^2}{2} + U_{\text{eff}}(r).$$

Čia efektyviaja potencine energija  $U_{\text{eff}}$  pažymėta

$$(18.9) \quad U_{\text{eff}}(r) = -\frac{1}{r} \frac{|ee'|}{4\pi\epsilon_0} + \frac{M^2}{2mr^2}.$$

$U_{\text{eff}}(r)$  grafikas pavaizduotas 18.2 pav.

Ši funkcija pasižymi tokiomis savybėmis: kai  $r \rightarrow 0$ ,  $U_{\text{eff}} \rightarrow +\infty$ ; kai  $r \rightarrow \infty$ ,  $U_{\text{eff}} \rightarrow -0$ .  $U_{\text{eff}} = 0$  taške  $r_0 = \frac{M^2}{2m\alpha}$ . Išdiferencijavę  $U_{\text{eff}}(r)$  pagal  $r$  ir prilyginę išvestinę nuliui, gauname minimumo tašką  $p = \frac{M^2}{m\alpha}$ .

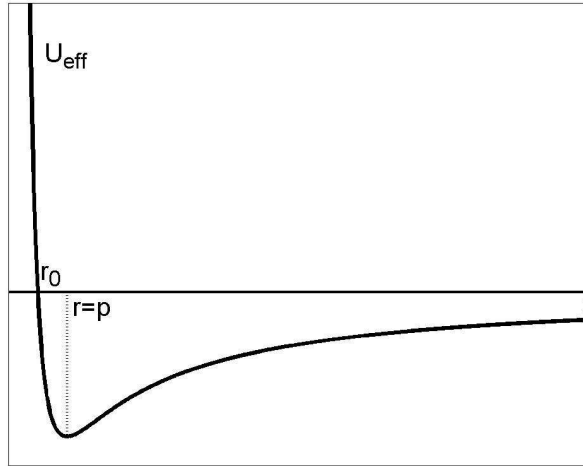
Lagranžianas  $L$  yra kinetinės ir potencinės energijų skirtumas:

$$(18.10) \quad L = \frac{m\dot{r}^2}{2} - U_{\text{eff}}.$$

Iš Lagranžo lygties

$$(18.11) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial L}{\partial r}$$



18.2 pav. Efektyvioji potencinė energija  $U_{\text{eff}}(r)$ 

gauname lygtį:

$$(18.12) \quad m\ddot{r} + \frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial r} = 0.$$

Ši lygtis atitinka antrąjį Niutono dėsnį. Joje neįskaityti nuostoliai ir išorinio lauko poveikis. Įskaitysime nuostolius, (18.12) prirašydami  $\gamma\dot{r}$ . Toliau laikysime, kad atomas yra veikiamas krintančios elektromagnetinės bangos. Kaip ir 12.1 skyriuje laikysime, kad sąveika vyksta tik su elektriniu lauku ir kad svarbus tikslai laikinis elektrinio lauko stiprio kitimas  $E(t)$ . Tuomet judėjimo lygtis

$$(18.13) \quad m\ddot{r} + \gamma\dot{r} + \frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial r} = -eE(t).$$

Norint toliau nagrinėti uždavinį, reikia rasti išvestinę  $\frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial r}$ . Efektinės potencinės energijos išraiška yra gana sudėtinga. Uždavinys supaprastėja, tarus, kad elektrono padėtis yra netoli potencinės energijos minimumo  $r = p$  (išorinė jėga nėra didelė), tuomet  $U_{\text{eff}}$  galima skleisti Teilorio eilute taško  $p$  aplinkoje:

$$(18.14) \quad U_{\text{eff}}(r) = U_{\text{eff}}(p) + x\beta_1 + \frac{1}{2}x^2\beta_2 + \frac{1}{6}x^3\beta_3 + \frac{1}{24}x^4\beta_4 + \dots$$

Čia  $x = r - p$  yra poslinkis nuo pusiausvyros padėties:

$$(18.15) \quad \beta_k = \left. \frac{\partial^k U_{\text{eff}}}{\partial r^k} \right|_{r=p}.$$

Aišku, kad  $\beta_1 = 0$ . Potencinės energijos išvestinė

$$(18.16) \quad \frac{\partial U_{\text{eff}}(r)}{\partial r} = x\beta_2 + \frac{1}{2}x^2\beta_3 + \frac{1}{6}x^3\beta_4 + \dots$$

Įrašę į judėjimo lygtį gauname

$$(18.17) \quad \ddot{x} + \gamma_1\dot{x} + x\omega_0^2 + \frac{1}{2}\frac{\beta_3}{m}x^2 + \frac{1}{6}\frac{\beta_4}{m}x^3 + \dots = -\frac{e}{m}E(t).$$

Čia  $\omega_0^2 = \beta_2/m$  atitinka savąjį svyravimų dažnį.  $\gamma_1 = \gamma/m$ . Tai yra anharmoninio osciliatoriaus lygtis veikiant trinčiai ir išorinei jėgai.

## 18.2. Tiesinė dispersijos teorija

Tiesinėje dispersijos teorijoje laikoma, kad krintantis laukas yra silpnas, ir anharmoninius narius su  $x^2$  ir  $x^3$  galima atmesti. Palieka lygtis

$$(18.18) \quad \ddot{x} + \gamma_1\dot{x} + \omega_0^2x = -\frac{e}{m}E(t).$$

Ši lygtis reiškia, kad potencinės energijos minimumas yra aproksimuotas parabole. Tegu krinta viena monochromatinė dažnio  $\omega$  banga

$$(18.19) \quad E(t) = E_0e^{-i\omega t} + (*).$$

Sprendinio ieškosime tokiu pačiu pavidalu:

$$(18.20) \quad x = x^{(1)}e^{-i\omega t} + (*).$$

Įrašę šį sprendinį į lygtį gauname

$$(18.21) \quad -x^{(1)}\omega^2 - i\gamma_1\omega x^{(1)} + \omega_0^2x^{(1)} + (*) = -\frac{e}{m}E_0 + (*).$$

Iš čia

$$(18.22) \quad x^{(1)} = -\frac{eE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma_1\omega)}$$

ir

$$(18.23) \quad x = -\frac{eE_0e^{-i\omega t}}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma_1\omega)} + (*).$$

Vieno elektrono dipolinis momentas  $\theta$  gali būti užrašytas taip:

$$(18.24) \quad \theta = -ex = \frac{e^2 E}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma_1\omega)} + (*).$$

Medžiagos poliarizuotumas yra lygus dipoliniam momentui, padaugintam iš elektronų skaičiaus  $N$

$$(18.25) \quad P = N\theta = \frac{e^2 NE}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma_1\omega)} + (*).$$

Medžiagoje kuriamas slinkties vektorius

$$(18.26) \quad D = \varepsilon_0 E + P = \varepsilon_0 \varepsilon(\omega) E_0 e^{-i\omega t} + (*).$$

Čia  $\varepsilon(\omega)$  yra medžiagos dielektrinė skvarba, ji priklauso nuo krintančios spinduliuotės dažnio  $\omega$ . Matome, kad

$$(18.27) \quad \varepsilon(\omega) = 1 + \frac{e^2 N}{m\varepsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma_1\omega)}.$$

Dielektrinė skvarba susijusi su lūžimo rodikliu ir sugerties koeficientu (12.3 skyrius). Turime

$$(18.28) \quad n'^2(\omega) = \varepsilon(\omega) = 1 + \frac{e^2 N}{m\varepsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma_1\omega)}.$$

Prisiminę, kad  $n'(\omega) = n(\omega) + i\kappa(\omega)$  ir atskyrę realiąją bei menamąją dalis, gauname

$$(18.29) \quad \begin{aligned} n^2(\omega) - \kappa^2(\omega) &= 1 + \frac{e^2 N(\omega_0^2 - \omega^2)}{m\varepsilon_0([\omega_0^2 - \omega^2]^2 + \gamma_1^2 \omega^2)}, \\ 2n(\omega)\kappa(\omega) &= \frac{e^2 N\omega\gamma_1}{m\varepsilon_0([\omega_0^2 - \omega^2]^2 + \gamma_1^2 \omega^2)}. \end{aligned}$$

Toli nuo rezonanso, kai  $|\omega_0^2 - \omega^2| \gg \gamma_1\omega$ , sugertis yra nedidelė, ir

$$(18.30) \quad n^2(\omega) \approx 1 + \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Matome, kad šiuo atveju lūžio rodiklis nedaug skiriasi nuo 1, todėl

$$(18.31) \quad n^2(\omega) - 1 = (n(\omega) - 1)(n(\omega) + 1) \approx 2(n(\omega) - 1).$$

Iš pastarųjų dviejų formulių užrašome

$$(18.32) \quad n(\omega) \approx 1 + \frac{e^2 N}{2\varepsilon_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Iš (18.32) matyti, kad toli nuo rezonanso didėjant dažniui lūžio rodiklis didėja. Tokia situacija vadinama normaliąja dispersija.

Kai elektrinio lauko dažnis artimas savajam,  $\omega \approx \omega_0$ , tuomet

$$(18.33) \quad n'(\omega) = n(\omega) + i\kappa(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)} \approx 1 + \frac{e^2 N}{2m\varepsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma_1\omega)}.$$

Atskyrę realiąją ir menamąją dalis, gauname

$$(18.34) \quad n(\omega) = 1 + \frac{e^2 N(\omega_0^2 - \omega^2)}{2m\varepsilon_0([\omega_0^2 - \omega^2]^2 + \gamma_1^2 \omega^2)},$$

$$\kappa(\omega) = \frac{e^2 N \gamma_1 \omega}{2m\varepsilon_0([\omega_0^2 - \omega^2]^2 + \gamma_1^2 \omega^2)}.$$

Šiuo atveju lūžimo rodiklis mažėja didėjant dažniui, tai vadinama anomaliąja dispersija.  $\kappa(\omega)$  yra rezonansinio tipo kreivė, kurios maksimumas ties  $\omega_0$ .

## 18.3. Netiesinė dispersijos teorija

Kai medžiaga yra veikiamą lazerio spinduliuotės, nepakanka atsižvelgti tik į parabolinį narį (18.14)  $U_{\text{eff}}$  išraiškoje. Būtina įskaityti tolesnius Teiloro eilutės narius. Išskirsime du atvejus: kai terpė centrosimetrinė ir necentrosimetrinė. Kai terpė centrosimetrinė (pvz., stiklas, vanduo, oras), potencialo išraiškoje nebelieka nelyginių laipsnių narių. Judėjimo lygtyje paliks du nariai: tiesinis ir kubinis. O necentrosimetrinės terpės (pvz., anizotropinis kristalas) atveju  $U_{\text{eff}}$  išraiškoje lieka tiek lyginiai, tiek nelyginiai nariai. Judėjimo lygtyje rašome tiesinį ir kvadratinį narius. Centrosimetrinės terpės dar vadinamos kubinėmis, o necentrosimetrinės – kvadratinėmis.

### 18.3.1. Kvadratinė terpė

Tokioje terpėje gali vykti tribangė sąveika: dvi skirtingų dažnių bangos krinta į medžiagą, trečia yra generuojama. Užrašysime krintančiąją bangą:

$$(18.35) \quad E(t) = E_1 e^{-i\omega_1 t} + E_2 e^{-i\omega_2 t} + (*).$$

Judėjimo lygtis šiuo atveju

$$(18.36) \quad \ddot{x} + \gamma_1 \dot{x} + x\omega_0^2 + ax^2 = -\frac{e}{m} E(t).$$

Čia  $a = \frac{1}{2} \frac{\beta_3}{m}$ . Laikydami, kad laukas gana silpnas, mažo dydžio  $\eta$  eilės, spręsimė šią lygtį pasitelkę trikdžių teoriją. Sprendinį skleisime eilute

$$(18.37) \quad x = x^{(1k)} + x^{(2k)} + x^{(3k)} + \dots$$

Čia  $x^{(1k)} \sim \eta^1$ ,  $x^{(2k)} \sim \eta^2$ ,  $x^{(3k)} \sim \eta^3$  ir t. t. Įrašę šį skleidinį į judėjimo lygtį ir surinkę narius prie atitinkamų  $\eta$  laipsninių narių, gauname lygtis

$$(18.38) \quad \ddot{x}^{(1k)} + \gamma_1 \dot{x}^{(1k)} + \omega_0^2 x^{(1k)} = -\frac{e}{m} E(t),$$

$$(18.39) \quad \ddot{x}^{(2k)} + \gamma_1 \dot{x}^{(2k)} + \omega_0^2 x^{(2k)} = -a[x^{(1k)}]^2$$

ir t. t. (18.38) sutampa su (18.18), tik dabar  $E(t)$  yra dviejų dažnių bangų superpozicija. Lygties sprendinys

$$(18.40) \quad x^{(1k)} = x^{(1)}(\omega_1)e^{-i\omega_1 t} + x^{(1)}(\omega_2)e^{-i\omega_2 t} + (*),$$

čia

$$(18.41) \quad x^{(1)}(\omega_j) = -\frac{eE_j}{mD(\omega_j)},$$

$$(18.42) \quad D(\omega_j) = \omega_0^2 - \omega_j^2 - i\gamma_1\omega_j.$$

Gautą sprendinį įrašome į (18.39). Dešinėje esantis narys turės fazinių daugiklių, kurių dažniai tokie:  $\pm(\omega_1 + \omega_2)$ ,  $\pm(\omega_1 - \omega_2)$ ,  $\pm 2\omega_1$ ,  $\pm 2\omega_2$  ir 0. Pavyzdžiui, dvigubam dažniui  $2\omega_1$  turėtume spręsti lygtį

$$(18.43) \quad \ddot{x}^{(2)} + \gamma_1 \dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} = \frac{-a(eE_1)^2 e^{-2i\omega_1 t}}{m^2 D^2(\omega_1)}.$$

Ji sprendžiama analogiškai kaip ir (18.38). Sprendinys:

$$(18.44) \quad x^{(2)}(2\omega_1) = \frac{-a(eE_1)^2 e^{-2i\omega_1 t}}{m^2 D^2(\omega_1) D(2\omega_1)}.$$

Šis sprendinys aprašo antrosios harmonikos generaciją. Kitu atveju, suminio dažnio generacijos,

$$(18.45) \quad x^{(2)}(\omega_1 + \omega_2) = \frac{-ae^2 E_1 E_2 e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t}}{m^2 D(\omega_1 + \omega_2) D(\omega_1) D(\omega_2)}.$$

Dažnis  $(\omega_1 - \omega_2)$  atitinka skirtuminio dažnio generaciją, jai

$$(18.46) \quad x^{(2)}(\omega_1 - \omega_2) = \frac{-ae^2 E_1 E_2^* e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t}}{m^2 D(\omega_1 - \omega_2) D(\omega_1) D(-\omega_2)}.$$

Pagaliau, kai generuojamas nulinis dažnis (angl. *optical rectification*)

$$(18.47) \quad x^{(2)}(0) = \frac{-ae^2 E_1 E_1^*}{m^2 D(0) D(\omega_1) D(-\omega_1)} + \frac{-ae^2 E_2 E_2^*}{m^2 D(0) D(\omega_2) D(-\omega_2)}.$$

Tiesinė poliarizuotumo dalis skaičiuojama pagal formulę

$$(18.48) \quad P^{(1)} = -eNx^{(1)} = \varepsilon_0 \chi^{(1)}(\omega) E,$$

o kvadratinis poliarizuotumas skaičiuojamas analogiškai, pavyzdžiui, antrosios harmonikos generacijos atveju

$$(18.49) \quad P^{(2)}(2\omega_1) = -eNx^{(2)} = \varepsilon_0 \chi^{(2)}(2\omega_1) E_1^2.$$

$\chi^{(1)}$  ir  $\chi^{(2)}$  yra atitinkamai tiesinis ir kvadratinis jautriai. Klasikinėje dispersijos teorijoje jie randami pagal

$$(18.50) \quad \chi^{(1)}(\omega_j) = -\frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m D(\omega_j)},$$

$$(18.51) \quad \chi^{(2)}(2\omega_1) = \frac{Nae^3}{\varepsilon_0 m^2 D^2(\omega_1) D(2\omega_1)}.$$

Aiškiai matyti, kad tiesinis ir kvadratinis jautriai yra tarpusavyje susiję.

Reikia atkreipti dėmesį, kad šiame skyrelyje rašėme tik skaliarinius dydžius, nes laikėme, kad abiejų dažnių bangos (18.35) lygtyje yra vienodos poliarizacijos. Jei rašytume vektorius, tai gautume, kad  $\chi^{(2)}$  yra tenzorius, arba

$$(18.52) \quad \mathbf{P}^{(2)}(\omega_1 + \omega_2) = \varepsilon_0 \widehat{\chi}^{(2)}(\omega_1 + \omega_2, \omega_1, \omega_2) \mathbf{E}_1(\omega_1) \mathbf{E}_2(\omega_2).$$

Šis užrašas yra sutrumpinimas tokio užrašo:

$$(18.53) \quad P_i^{(2)}(\omega_1 + \omega_2) = \varepsilon_0 \sum_{jk} \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1 + \omega_2, \omega_1, \omega_2) E_j(\omega_1) E_k(\omega_2).$$

### 18.3.2. Kubinė terpė

Kai terpė kubinė, (18.14) išraiškoje atmetamas kubinis narys,  $\beta_3 = 0$ . Tuomet sprendžiama judėjimo lygtis

$$(18.54) \quad \ddot{x} + \gamma_1 \dot{x} + x\omega_0^2 - bx^3 = -\frac{e}{m}E(t).$$

Čia  $b = -\frac{1}{6} \frac{\beta_4}{m}$ . Krintančių bangų yra trys (keturbangė sąveika):

$$(18.55) \quad E(t) = E_1 e^{-i\omega_1 t} + E_2 e^{-i\omega_2 t} + E_3 e^{-i\omega_3 t} + (*).$$

Sprendinio ieškome (18.37) eilutės pavidalo. Gauname lygtis

$$(18.56) \quad \ddot{x}^{(1k)} + \gamma_1 \dot{x}^{(1k)} + \omega_0^2 x^{(1k)} = -\frac{e}{m}E(t),$$

$$(18.57) \quad \ddot{x}^{(2k)} + \gamma_1 \dot{x}^{(2k)} + \omega_0^2 x^{(2k)} = 0,$$

$$(18.58) \quad \ddot{x}^{(3k)} + \gamma_1 \dot{x}^{(3k)} + \omega_0^2 x^{(3k)} = b[x^{(1k)}]^3.$$

Pirmosios lygties sprendinys

$$(18.59) \quad x^{(1k)} = x^{(1)}(\omega_1) e^{-i\omega_1 t} + x^{(1)}(\omega_2) e^{-i\omega_2 t} + x^{(1)}(\omega_3) e^{-i\omega_3 t} + (*),$$

čia  $x^{(1)}(\omega_j)$  apibrėžtas (18.41). Lygties (18.56) sprendinys yra gėstantis laike dėl nuostolių  $\gamma_1$ , todėl

$$(18.60) \quad x^{(2k)} = 0.$$

$x^{(3k)}$  yra įvairių dažnių komponentų, kurie gaunami, pakėlus kubu  $x^{(1k)}$ , superpozija. Galimos įvairios kombinacijos. Čia panagrinėsime saviveiką, t. y., kai į terpę krinta vieno dažnio  $\omega$  banga ir kubinėje terpėje generuojama to paties dažnio banga. Kartu gali generotis  $3\omega$  dažnio banga. Tuomet

$$(18.61) \quad E(t) = E_0 e^{-i\omega t} + (*),$$

$$(18.62) \quad x^{(1k)} = x^{(1)}(\omega) e^{-i\omega t} + (*), \quad x^{(1)}(\omega) = -\frac{eE_0}{mD(\omega)},$$

$$(18.63) \quad x^{(3k)} = x^{(3)}(\omega) e^{-i\omega t} + x^{(3)}(3\omega) e^{-i3\omega t} + (*).$$

Čia

$$(18.64) \quad x^{(3)}(\omega) = -3 \frac{be^3 |E_0^2| E_0}{m^3 D(\omega)^2 D(-\omega)},$$

$$(18.65) \quad x^{(3)}(3\omega) = -\frac{be^3 E_0^3}{m^3 D(\omega)^3}.$$

Panašiai kaip buvo įtrauktas kvadratinis jautris, įtrauksime kubinį jautrį  $\widehat{\chi}^{(3)}$ . Bendru atveju kubinis poliarizuotumas

$$(18.66) \quad P_i^{(3)}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) = \varepsilon_0 \sum_{jkl} \chi_{ijkl}^{(3)}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3) E_j(\omega_1) E_k(\omega_2) E_l(\omega_3).$$

Saviveikos atveju

$$(18.67) \quad P^{(3)}(\omega = \pm\omega \mp \omega + \omega) = 3\varepsilon_0 \chi^{(3)}(\omega = \pm\omega \mp \omega + \omega) |E(\omega)|^2 E(\omega).$$

Čia

$$(18.68) \quad \chi^{(3)}(\omega) = \frac{bNe^4}{\varepsilon_0 m^3 D(\omega)^2 D(-\omega)}.$$



## 19 SKYRIUS

# Kvantinė dispersijos teorija\*

### 19.1. Tiesinė teorija

Remdamiesi klasikine tiesine dispersijos teorija gavome (18.25) tiesinio poliarizavimo išraišką. Tiesinis poliarizuotumas  $P^{(1)} = \varepsilon_0 \chi^{(1)}(\omega) E$ , tiesinis jautris

$$(19.1) \quad \chi(\omega) = \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m (\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma_1 \omega)}.$$

$\omega_0$  yra savasis elektrono svyravimo dažnis. Kai skirtingi elektronai svyruoja skirtingais savaisiais dažniais  $\omega_k$ , tai tiesinis jautris yra suma

$$(19.2) \quad \chi(\omega) = \sum_k \frac{e^2 N_k}{\varepsilon_0 m (\omega_k - \omega)^2}.$$

Čia  $N_k$  yra elektronų, svyruojančių atitinkamu dažniu, skaičius. Šioje formulėje nėra nuostolių nario  $\gamma_1$ . Matome, kad nuostolių neįskaitymas lemia tiesinio jautrio didėjimą į begalybę ties  $\omega = \omega_k$ . Norint gauti sugertį ir anomalią dispersiją, būtina jį įskaityti. Tačiau vis tiek klasikinė formulė nėra gera. Aproximuojant ją eksperimentiškai išmatuotą poliarizuotumą, gaunama, kad  $N_k$  nėra sveikasis skaičius, o dažnių  $\omega_k$  daugiau negu atome elektronų. Norint išvengti šių prieštaravimų, reikia remtis kvantine teorija.

Jau buvome gavę dipolinio momento išraišką dviejų lygmenų atomui (12.55). Dabar mus domina ne atomo perėjimas iš vieno lygmens į kitą, o jo sąveika su šviesa, liekant tame pačiame lygmenyje  $\Psi_k(\vec{r}, t)$ . Šrėdingerio lygties su hamiltonianu  $\hat{H}_A$  bangines funkcijas dabar žymėsime kaip  $\Psi_k^{(0)}(\vec{r}, t)$ . Šrėdingerio lygties sprendinys ieškomas trikdžių eilutės pavidalo

$$(19.3) \quad \Psi_k(\vec{r}, t) = \Psi_k^{(0)}(\vec{r}, t) + \Psi_k^{(1)}(\vec{r}, t).$$

Iš Šrėdingerio lygties (12.1) gauname

$$(19.4) \quad i\hbar \frac{\partial \Psi_k^{(0)}}{\partial t} = \hat{H}_A \Psi_k^{(0)},$$

$$(19.5) \quad i\hbar \frac{\partial \Psi_k^{(1)}}{\partial t} = \hat{H}_A \Psi_k^{(1)} + \hat{H}_I \Psi_k^{(0)}.$$

Atskiriame erdvinę ir laikinę dalis:

$$(19.6) \quad \Psi_k^{(1)}(\vec{r}, t) = u_{k1}(\vec{r}) e^{-i\omega_k t + i\omega t} + u_{k2}(\vec{r}) e^{-i\omega_k t - i\omega t}.$$

Irašome į (19.5), gauname

$$(19.7) \quad \hbar(\omega_k - \omega) u_{k1} = \hat{H}_A u_{k1} + \frac{\mathbf{E}_0 \vec{\theta}}{2} \psi_k^{(0)},$$

$$(19.8) \quad \hbar(\omega_k + \omega) u_{k2} = \hat{H}_A u_{k2} + \frac{\mathbf{E}_0 \vec{\theta}}{2} \psi_k^{(0)}.$$

Čia  $\psi_k^{(0)}$  yra tikrinė  $\hat{H}_A$  funkcija,  $\Psi_k^{(0)}(\vec{r}, t) = \psi_k^{(0)}(\vec{r}) e^{-i\omega_k t}$ . Be to, pasinaudojome sąveikos hamiltoniano išraiška

$$(19.9) \quad \hat{H}_I = \vec{\theta} \mathbf{E}_0 \cos(\omega t) = \frac{1}{2} \vec{\theta} \mathbf{E}_0 [e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}].$$

(19.7) ir (19.8) neliko priklausomybių nuo laiko. Skleisime  $u_{k1,2}$  tikrinėmis atomo hamiltoniano funkcijomis:

$$(19.10) \quad u_{k1} = \sum_j A_{kj}^{(1)} \psi_j^{(0)},$$

$$(19.11) \quad u_{k2} = \sum_j A_{kj}^{(2)} \psi_j^{(0)}.$$

Dauginame iš kairės (19.7) ir (19.8) iš  $\psi_n^{(0)*}$  ir integruojame pagal erdvines koordinates. Pasinaudojame ortonormuotumo sąlyga:

$$(19.12) \quad \int \psi_n^{(0)*} \psi_j^{(0)} d^3 r = \delta_{nj}.$$

Pažymime matricinį elementą

$$(19.13) \quad \vec{\theta}_{nk} = \int \psi_n^{(0)*} \vec{\theta} \psi_k^{(0)} d^3 r.$$

Taigi, gauname

$$(19.14) \quad \hbar(\omega_k - \omega)A_{kn}^{(1)} = \hbar\omega_n A_{kn}^{(1)} + \frac{\mathbf{E}_0 \vec{\theta}_{nk}}{2},$$

$$(19.15) \quad \hbar(\omega_k + \omega)A_{kn}^{(2)} = \hbar\omega_n A_{kn}^{(2)} + \frac{\mathbf{E}_0 \vec{\theta}_{nk}}{2}.$$

Iš čia išsireiškiame skleidimo koeficientus

$$(19.16) \quad A_{kn}^{(1)} = \frac{\mathbf{E}_0 \vec{\theta}_{nk}}{2\hbar(\omega_{nk} - \omega)},$$

$$(19.17) \quad A_{kn}^{(2)} = \frac{\mathbf{E}_0 \vec{\theta}_{nk}}{2\hbar(\omega_{nk} + \omega)},$$

čia

$$(19.18) \quad \omega_{nk} = \omega_k - \omega_n.$$

Surašę  $A$  į  $u$ , o pastarąsias į  $\Psi_k^{(1)}$ , gauname

$$(19.19) \quad \Psi_k^{(1)}(\vec{r}, t) = \sum_j \frac{\mathbf{E}_0 \vec{\theta}_{jk}}{2\hbar(\omega_{jk} - \omega)} \psi_j^{(0)} e^{-i\omega_k t + i\omega t} + \sum_j \frac{\mathbf{E}_0 \vec{\theta}_{jk}}{2\hbar(\omega_{jk} + \omega)} \psi_j^{(0)} e^{-i\omega_k t - i\omega t}.$$

Liko suskaičiuoti dipolinį momentą:

$$(19.20) \quad \vec{p} = \int (\Psi_k^{(0)} + \Psi_k^{(1)})^* \vec{\theta} (\Psi_k^{(0)} + \Psi_k^{(1)}) d^3 r.$$

Matyti, kad laisvojo atomo dipolinis momentas lygus nuliui,  $\int \Psi_k^{(0)*} \vec{\theta} \Psi_k^{(0)} d^3 r = 0$ , o  $\int \Psi_k^{(1)*} \vec{\theta} \Psi_k^{(1)} d^3 r$  remiantis tiesine teorija yra nykstamai mažas. Be to, operatorius  $\theta$  yra ermitinis, todėl

$$(19.21) \quad \int \Psi_k^{(1)*} \vec{\theta} \Psi_k^{(0)} d^3 r = \left( \int \Psi_k^{(0)*} \vec{\theta} \Psi_k^{(1)} d^3 r \right)^*$$

ir

$$(19.22) \quad \vec{p} = \int \Psi_k^{(0)*} \vec{\theta} \Psi_k^{(1)} d^3 r + (*).$$

Suskaičiuojame pirmąjį matricos elementą:

$$(19.23) \quad \int \Psi_k^{(0)*} \vec{\theta} \Psi_k^{(1)} d^3r = \sum_j \frac{\mathbf{E}_0 \vec{\theta}_{jk}}{2\hbar(\omega_{jk} - \omega)} e^{i\omega t} \vec{\theta}_{kj} + \sum_j \frac{\mathbf{E}_0 \vec{\theta}_{jk}}{2\hbar(\omega_{jk} + \omega)} e^{-i\omega t} \vec{\theta}_{kj}.$$

Kai terpė izotropinė, gauname tiesinį poliarizuotumą:

$$(19.24) \quad P^{(1)} = Np = \sum_j \frac{2N\omega_{kj}|\theta_{kj}|^2}{\hbar(\omega_{kj}^2 - \omega^2)} E_0 \cos(\omega t).$$

Iš čia užrašome tiesinio jautrio išraišką:

$$(19.25) \quad \chi^{(1)} = \sum_j \frac{2N\omega_{kj}|\theta_{kj}|^2}{\varepsilon_0 \hbar(\omega_{kj}^2 - \omega^2)}.$$

Palyginkime ją su klasikine (19.2). Matome, kad vietoje elektronų skaičiaus  $N_k$  atsiranda dydis, nebūtinai sveikasis skaičius. Tas dydis vadinamas osciliatoriaus stipriu. Be to, kitaip negu klasikinėje teorijoje, rezonansinių dažnių gali būti be galo daug.  $\omega_{kj}$  gali būti neigiamas, todėl osciliatoriaus stipris gali įgyti neigiamas reikšmes.

## IX DALIS

### Šviesos sklidimas tiesinėje ir netiesinėje terpėje



## 20 SKYRIUS

### Tiesinės terpės

Dispersinėje terpėje šviesos impulsas sklinda grupiniu greičiu. Pakankamai ilgoje terpėje pradeda reikštis dispersinis plitimas: impulso amplitudė mažėja, o trukmė didėja. Šiuos procesus aprašo dispersinio sklidimo lygtis.

#### 20.1. Grupinis greitis

6.3.1 skyrelyje buvo nagrinėjama dviejų skirtingų dažnių bangų sudėtis – mušimai. Tuomet sudedamųjų bangų greičiai buvo vienodi. Dispersinėje terpėje skirtingų dažnių ir bangų ilgių komponentai sklinda skirtingais greičiais. Sudedant dvi skirtingų ilgių skirtingais greičiais sklindančias bangas, gaunama bangų grupė, kuri sklinda grupiniu greičiu. Kaip matome iš 20.1 pav., apatinės bangos antrasis maksimumas pasivys viršutinės bangos antrąjį maksimumą po laiko tarpo  $t = \Delta\lambda/\Delta v$ . Čia  $\Delta\lambda$  – bangų ilgių skirtumas,  $\Delta v$  – greičių skirtumas. Taigi bangų grupės maksimumas per šią laiko tarpą pasislinks atstumu  $\lambda$ , o grupinis greitis  $u$  randamas pagal formulę

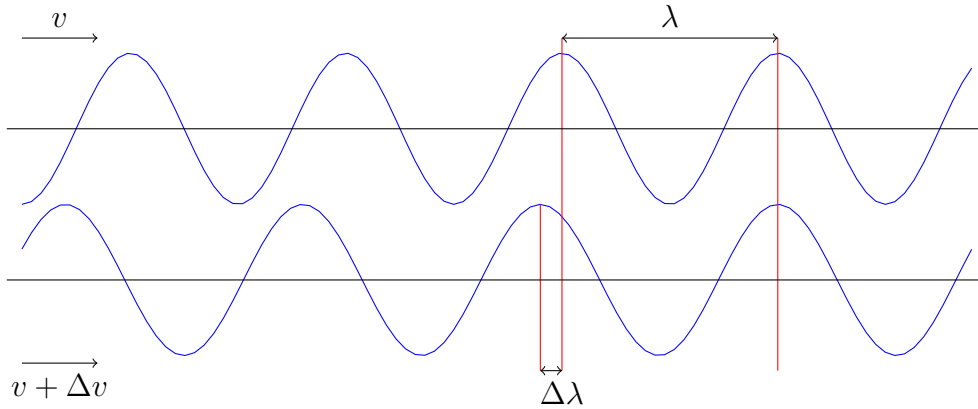
$$(20.1) \quad u = v - \lambda \frac{\Delta v}{\Delta \lambda}.$$

Kai  $\Delta\lambda \rightarrow 0$  ir  $\Delta v \rightarrow 0$ , tuomet

$$(20.2) \quad u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}.$$

Ši formulė vadinama Relėjaus formule. Įrašę į ją  $\lambda = 2\pi/k$  ir  $v = \omega/k$  išraiškas, galime parodyti, kad (20.1) yra tapati tokiai grupinio greičio išraiškai:

$$(20.3) \quad u = \frac{d\omega}{dk}.$$



20.1 pav. Schema Relėjaus formulės išvedimui

Sąlyga  $\frac{dv}{d\lambda} > 0$  atitinka normaliąją dispersiją, tuomet grupinis greitis yra mažesnis už fazinį. Anomaliosios dispersijos atveju  $\frac{dv}{d\lambda} < 0$  ir grupinis greitis viršija fazinį.

## 20.2. Sklidimo tiesinėje dispersinėje terpėje lygtis

Prisiminkime (13.4) Maksvelo lygtis laisvoje terpėje ( $\mathbf{J}_T = 0$ ):

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \\
 \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\
 \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\
 \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{20.4}$$

Gausime lygtį, kuri aprašo šviesos impulso sklidimą tokioje terpėje. Laikysime, kad terpė izotropinė, šviesa tiesiškai poliarizuota. Dėl to rašysime skaliarinius dydžius. Impulsą  $E(t)$  galime pavaizduoti Furjė integralu

$$E(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) e^{i\omega t} d\omega.
 \tag{20.5}$$

Furjė komponentas

$$E(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{-i\omega t} dt.
 \tag{20.6}$$



Tiesinėje dispersinėje terpėje poliarizuotumas priklauso nuo dažnio

$$(20.7) \quad P^{(1)}(\omega) = \varepsilon_0 \chi^{(1)}(\omega) E(\omega).$$

Rasime jo priklausomybę nuo laiko. Analogiškai kaip (20.5) parašome

$$(20.8) \quad \begin{aligned} P^{(1)}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P^{(1)}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}(\omega) E(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \end{aligned}$$

Įrašome  $E(\omega)$  (20.6) išraišką:

$$(20.9) \quad P^{(1)}(t) = \frac{\varepsilon_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}(\omega) E(t') e^{i\omega(t-t')} d\omega dt'.$$

Pažymime integralą

$$(20.10) \quad \chi^{(1)}(t-t') = \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}(\omega) e^{i\omega(t-t')} d\omega.$$

Tai yra tiesinio atsako funkcija. Gauname

$$(20.11) \quad P^{(1)}(t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}(t-t') E(t') dt' = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}(t') E(t-t') dt'.$$

Tai yra dviejų funkcijų sąsūka. Slinkties vektoriui galime parašyti

$$(20.12) \quad D^{(1)}(t) = \varepsilon_0 E(t) + P^{(1)}(t).$$

Kadangi

$$(20.13) \quad E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t') E(t-t') dt',$$

tai

$$(20.14) \quad D^{(1)}(t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(t') E(t-t') dt',$$

čia

$$(20.15) \quad \varepsilon(t) = \delta(t) + \chi^{(1)}(t).$$

Paveikiame antrąją (20.4) lygtį rot operatoriumi:

$$(20.16) \quad \text{rot rot } \mathbf{E} = \text{grad div } \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \mathbf{B}).$$

Pasinaudojame pirmąja ir ketvirtąja lygtimis:

$$(20.17) \quad \Delta E = \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} D^{(1)}.$$

Čia perėjome prie skaliarinių dydžių. Pasinaudosime (20.14)  $D(t)$  išraiška. Į ją įrašysime tokį  $E(t)$

$$(20.18) \quad E(t) = \frac{1}{2} A(t, z) e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} + (*).$$

Čia  $A(t, z)$  yra impulso gaubtinė,  $\omega_0$  ir  $k_0$  – nešlio dažnis ir bangos skaičius. Gauname

$$(20.19) \quad \begin{aligned} D^{(1)} &= \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^{(1)}(t') A(t - t', z) e^{i(\omega_0(t-t') - k_0 z)} dt' + (*) = \\ &= \frac{1}{2} e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^{(1)}(t') A(t - t', z) e^{-i\omega_0 t'} dt' + (*) = \\ &= \frac{1}{2} e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^{(1)}(t') e^{-i\omega_0 t'} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{\partial^m A}{\partial t^m}(t')^m dt' + (*). \end{aligned}$$

Suintegravę gauname

$$(20.20) \quad D^{(1)}(t, z) = \frac{1}{2} e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} \varepsilon_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i)^m}{m!} \frac{\partial^m A}{\partial t^m} \frac{\partial^m \varepsilon(\omega_0)}{\partial \omega_0^m} + (*).$$

Čia

$$(20.21) \quad \varepsilon(\omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^{(1)}(t') e^{-i\omega_0 t'} dt'$$

ir

$$(20.22) \quad \frac{\partial^m \varepsilon(\omega_0)}{\partial \omega_0^m} = (-i)^m \int_{-\infty}^{\infty} (t')^m \varepsilon^{(1)}(t') e^{-i\omega_0 t'} dt'.$$

(20.17) lygtyje

(20.23)

$$\Delta E = \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - 2ik_0 \frac{\partial A}{\partial z} - k_0^2 A \right) e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} + (*)$$

$$\frac{\partial^2 D^{(1)}}{\partial t^2} = \frac{\varepsilon_0}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i)^m}{m!} \frac{\partial^m \varepsilon(\omega_0)}{\partial \omega_0^m} \left( \frac{\partial^{m+2} A}{\partial t^{m+2}} - 2i\omega_0 \frac{\partial^{m+1} A}{\partial t^{m+1}} - \omega_0^2 \frac{\partial^m A}{\partial t^m} \right) e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} + (*).$$

Lygtis tuomet atrodo taip

(20.24)

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - 2ik_0 \frac{\partial A}{\partial z} - k_0^2 A - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i)^m}{c^2 m!} \frac{\partial^m \varepsilon(\omega_0)}{\partial \omega_0^m} \left( \frac{\partial^{m+2} A}{\partial t^{m+2}} + 2i\omega_0 \frac{\partial^{m+1} A}{\partial t^{m+1}} - \omega_0^2 \frac{\partial^m A}{\partial t^m} \right) = 0.$$

Šioje lygtyje paliksime iki antros eilės išvestinių pagal laiką narius. Be to, išvestinės  $\frac{\partial^m \varepsilon(\omega_0)}{\partial \omega_0^m}$  išreiškiamos per išvestines  $\frac{\partial^m k_0}{\partial \omega_0^m}$ , pasinaudojus sąryšiais  $n = n(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)}$  ir  $k(\omega) = \frac{n\omega}{c} = \frac{\sqrt{\varepsilon}\omega}{c}$ . Paliekame narius iki antrosios eilės laikinės išvestinės. Gauname

$$(20.25) \quad \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{u_0} \frac{\partial A}{\partial t} - i \frac{g_0}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{i}{2k_0} \left( \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \frac{1}{u_0^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \right) = 0.$$

Čia  $u_0$  ir  $g_0$  yra grupinis greitis ir grupinio greičio dispersijos dažniui  $\omega_0$  koeficientas:

$$(20.26) \quad u_0 = \frac{1}{\frac{\partial k}{\partial \omega}} = \frac{\partial \omega}{\partial k},$$

$$g_0 = \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}.$$

Narius skliaustuose atmesime dėl lėtai kintančių amplitudžių artinio:

$$(20.27) \quad \left| \frac{A}{T} \right| \gg \left| \frac{\partial A}{\partial t} \right|, \quad \left| \frac{A}{\lambda} \right| \gg \left| \frac{\partial A}{\partial z} \right|.$$

Lieka lygtis

$$(20.28) \quad \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{u_0} \frac{\partial A}{\partial t} - i \frac{g_0}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0.$$

Tai ir yra impulso dispersinio sklidimo tiesinėje terpėje lygtis. Ji užrašyta lėtai kintančiai impulso amplitudei. Palikti nariai tik iki antros eilės išvestinių. Ją galima pratęsti – įskaityti aukštesnės eilės išvestines.

Šią lygtį galime gauti kitaip, pamatę, kad (20.17) lygtis spektrine kalba užrašoma taip:

$$(20.29) \quad \Delta E(\omega) = -\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) E(\omega) = -k^2(\omega) E(\omega).$$

Šios lygties sprendinys yra (kai  $\Delta$  pakeičiamas į  $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ )

$$(20.30) \quad E(\omega, z) = E(\omega, z = 0)e^{\pm ik(\omega)z}.$$

Impulso gaubinės  $A(t)$  Furjė vaizdas (5.36):

$$(20.31) \quad S(\Omega, z) = \int_{-\infty}^{\infty} A(t, z)e^{-i\Omega t} dt,$$

jam randame

$$(20.32) \quad S(\Omega, z) = S(\Omega, z = 0)e^{i(k(\omega) - k_0)z}.$$

Lėtai kintančių amplitudžių artinys yra tapatus siauro spektro sąlygai. Tuomet galime skleisti  $k(\omega)$  Teiloro eilute  $\omega_0$  aplinkoje:

$$(20.33) \quad k(\omega) = k_0 + \Omega \frac{1}{u_0} + \Omega^2 \frac{g_0}{2} + \dots$$

Čia  $\Omega = \omega - \omega_0$ . Turime

$$(20.34) \quad S(\Omega, z) = S(\Omega, z = 0) \exp \left( iz \left[ \frac{\Omega}{u_0} + g_0 \frac{\Omega^2}{2} \right] \right).$$

Tai yra tokios diferencialinės lygties sprendinys:

$$(20.35) \quad \frac{\partial S}{\partial z} = i \left( \frac{\Omega}{u_0} + \frac{g_0}{2} \Omega^2 \right) S.$$

Ši lygtis yra (20.28) lygtis spektrine kalba.

Matome, kad dispersinio sklidimo metu tiesinėje terpėje spektrinės amplitudės modulis nekinta. Keičiasi tik jos fazė. Pratęsus lygtį aukštesnės eilės išvestinėmis, prie trečiosios eilės laikinės išvestinės atsirastų  $h = \frac{\partial^3 k}{\partial \omega^3}$  ir pan. Panagrinėsime įvairius lygties artinius.

## 20.3. Dispersijos teorijos artiniai

Dispersijos teorijos artinys priklauso nuo to, kiek (20.28) lygtyje paliekama narių su dalinėmis išvestinėmis. Pirmuoju artiniu paliekamas tik pirmasis narys, antruoju – du ir t. t.

### 20.3.1. Pirmasis artinys

Pirmuoju artiniu (20.28) lygtis atrodo taip:

$$(20.36) \quad \frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{1}{u_0} \frac{\partial A}{\partial t}.$$

Tai yra paprasčiausia banginė lygtis. Jos sprendinys:

$$(20.37) \quad A(t, z) = A_0\left(t - \frac{z}{u_0}\right).$$

Toks impulsas sklinda nekeisdamas savo formos. Tačiau toks artinys galioja tik mažiems atstumams  $z$ . Norint aprašyti kompleksinės amplitudės kitimą dėl dispersijos, reikia atsižvelgti į aukštesnės eilės išvestines.

### 20.3.2. Antrasis artinys

Antruoju artiniu impulso sklidimo dispersinėje terpėje lygtis atrodo taip:

$$(20.38) \quad \frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{1}{u_0} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i}{2} g_0 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}.$$

Šią lygtį galima supaprastinti, pakeitus kintamuosius:

$$(20.39) \quad \begin{aligned} z &\rightarrow z, \\ t &\rightarrow t' = t - \frac{z}{u_0}. \end{aligned}$$

Tuomet

$$(20.40) \quad \begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial z}(t', z) &= \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial A}{\partial t'} \frac{1}{u_0}, \\ \frac{\partial A}{\partial t}(t', z) &= \frac{\partial A}{\partial t'} \end{aligned}$$

ir

$$(20.41) \quad \frac{\partial A}{\partial z}(t', z) = \frac{i}{2} g_0 \frac{\partial^2 A}{\partial t'^2}.$$

Ši lygtis panaši į parabolinę difrakcijos lygtį, tik vietoje skersinių erdviųjų koordinatų  $x, y$  turime laiką  $t$ . Ji aprašo dispersinį impulso plitimą. Sprendžiama analogiškai kaip parabolinė difrakcijos lygtis (10 skyrius). Ją išsprendę, kai pradinė sąlyga – Gauso impulsas, gauname tokį atsakymą:

$$(20.42) \quad A = \frac{a_v}{\sqrt{1+iz/L_d}} \exp\left[-\frac{t'^2}{\tau_0^2} \frac{1}{1+iz/L_d}\right].$$

Čia

$$(20.43) \quad L_d = \frac{\tau_0^2}{2g_0}.$$

Šio dydžio modulis vadinamas dispersinio plitimo nuotoliu. Impulsas išlaiko pradinę formą, kol  $z \ll |L_d|$ . Kai sklidimo nuotolis  $z$  artimas arba didesnis už  $|L_d|$ , tuomet panašiai kaip Gauso pluošto difrakcijos atveju gaubtinės amplitudė krinta, o plotis didėja – vyksta dispersinis plitimas. Įvertinsime dispersinio plitimo nuotolį kvarco stikle. Bangos ilgiui  $\lambda_0 = 1 \mu\text{m}$  GVD koeficientas  $g_0 \approx 10^{-26} \text{s}^2/\text{m}$ . Kai impulso trukmė  $\tau_0 = 1 \text{ ps}$ ,  $|L_d| = 50 \text{ m}$ , o kai  $\tau_0 = 10 \text{ fs}$ ,  $|L_d| = 5 \text{ mm}$ .

### 20.3.3. Trečiasis artinys

Kai terpė pakankamai ilga arba kai GGD koeficientas  $g_0$  artimas 0, tuomet tenka įskaityti ir trečiosios eilės išvestinę:

$$(20.44) \quad \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{i}{2}g_0 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{\hbar_0}{6} \frac{\partial^3 A}{\partial t^3}.$$

Tokia lygtis aprašo gana sudėtingą impulso gaubtinės kitimą, prarandama simetrija laiko  $t'$  atžvilgiu.

## 20.4. Modeliavimas. Užduotis

Sumodeliuoti (20.28) lygtį, kai pradinė sąlyga – Gauso impulsas:

$$(20.45) \quad A(t, z = 0) = a_0 \exp\left(-\frac{t^2}{\tau_0^2}\right).$$

Čia  $a_0$  ir  $\tau_0$  – impulso amplitudė ir trukmė.

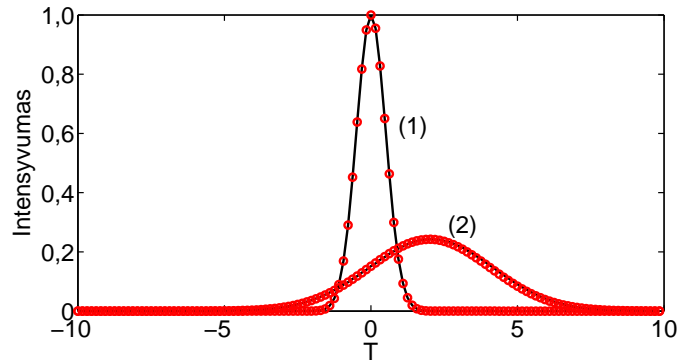
Prieš modeliuojant (20.28) lygtį patartina sunormuoti. Įtraukiame bedimensius kintamuosius

$$(20.46) \quad T = t/\tau_0, \quad Z = z/L_d, \quad B = A/a_0,$$

čia  $L_d$  buvo apibrėžtas (20.43). Be to, įrašome charakteringąjį nunešimo ilgį

$$(20.47) \quad L_\nu = \tau_0 u_0.$$

$$(20.48) \quad \frac{\partial B}{\partial Z} = -\frac{L_d}{L_\nu} \frac{\partial B}{\partial T} + \frac{i}{4} \frac{\partial^2 B}{\partial T^2}.$$



20.2 pav. Impulso judėjimas dispersinėje terpėje.  $L_d/L_\nu = 0,5$ ,  $\Delta T = 20/128$ ,  $\Delta Z = 0,01$ .  $Z$ : 0,01 (1); 4 (2). Modeliuota pagal (20.49) (juoda linija) ir (20.52) (raudoni rutuliukai)

Šią lygtį modeliuosime pagal diskretizavimo schemą:

$$(20.49) \quad B(T, Z + \Delta Z) = B(T, Z) + \Delta Z \left( -\frac{L_d}{L_\nu} D_t + \frac{i}{4} D_{tt} \right),$$

čia

$$(20.50) \quad D_t = \frac{1}{2\Delta T} (B(T + \Delta T, Z) - B(T - \Delta T, Z)),$$

$$(20.51) \quad D_{tt} = \frac{1}{\Delta T^2} (B(T + \Delta T, Z) + B(T - \Delta T, Z) + 2B(T, Z)).$$

Čia  $\Delta T$  ir  $\Delta Z$  yra laikinis ir erdvinis žingsniai.

Rezultatą galima palyginti su suskaičiuotu naudojant Furjė atvaizdavimą. Impulso spektras kintant atstumui kinta pagal (20.34). Normuotuose kintamuosiuose

$$(20.52) \quad S(\Omega', Z) = S(\Omega', 0) \exp \left( iZ \left[ \frac{L_d}{L_\nu} \Omega' + \frac{1}{4} \Omega'^2 \right] \right).$$

Čia  $\Omega' = \Omega \tau_0$  – normuotas dažnis. Norint gauti  $S(\Omega', 0)$ , reikia atlikti pradinio impulso  $B_0 = \exp(-T^2)$  Furjė transformaciją.  $B(T, Z)$  gaunamas atlikus atvirkštinę spektrinės amplitudės  $S(\Omega', Z)$  Furjė transformaciją.

20.2 pav. palyginti šie du skaičiavimo būdai.

„SciLab“ programos ruošinys:

```
clear ; clc ; close ;
```

```

a=10;
Nt=128;
ht=2*a/Nt;
t=-a:ht:a-ht;

aw=...;
hw=...;

w=-aw:hw:aw-hw;

A0=...; // pradine salyga
A=A0;
S0=fftshift(fft(A0));

Nz=400;
hz=0.01;
ik=1;
for iz=1:Nz

    //===== diskretizavimas =====
    for it=2:Nt-1
        A(it)=A0(it)+...;
    end;

    A0=A;
    //=====

    //===== Spektras =====
    z=hz*iz;
    S=S0.*...;
    A_analit=ifft(S);
    //=====

    // ===== piesimas=====
    drawlater();
    delete(gcf());
    plot(t,abs(A).^2,'k',t,abs(A_analit).^2,'ro');
    set(gcf(),'data_bounds',[-10, 0; 10, 1])
    drawnow();
    sleep(20)

```



//=====

end ;

## 20.5. Faziškai moduluotų impulsų sklidimas

(20.41) lygties, užrašytos spektrine kalba, sprendinys yra

$$(20.53) \quad S(\Omega, z) = S_0(\Omega) \exp\left(-\frac{i}{2}g_0\Omega^2 z\right).$$

Kaip minėta, sklisdama spektrinė amplitudė nekinta, kinta tik spektro fazė pagal dėsnį

$$(20.54) \quad \varphi(\Omega, z) = \varphi_0(\Omega) - \frac{g_0}{2}\Omega^2 z,$$

čia  $\varphi_0(\Omega)$  yra dydžio  $S_0(\Omega)$  fazė. Matome, kad atsiranda kvadratinė dažninė fazės moduliacija. Tokio tipo spektrinės fazės moduliacija yra būdinga impulsui, kurio kompleksinės amplitudės fazės moduliacija kvadratinė. Faziškai moduluoto impulso gaubtinė

$$(20.55) \quad A(t) = a_v \exp\left(-\frac{t^2}{\tau_0^2}(1 + i\gamma_0)\right).$$

Čia  $\gamma_0$  – fazės moduliacijos parametras. Kai  $\gamma_0 = 0$ , ši formulė aprašo nemoduluotą Gauso impulsą. Kai  $\gamma_0 \neq 0$ , impulso fazė

$$(20.56) \quad \varphi(t) = -\frac{\gamma_0}{\tau_0^2}t^2.$$

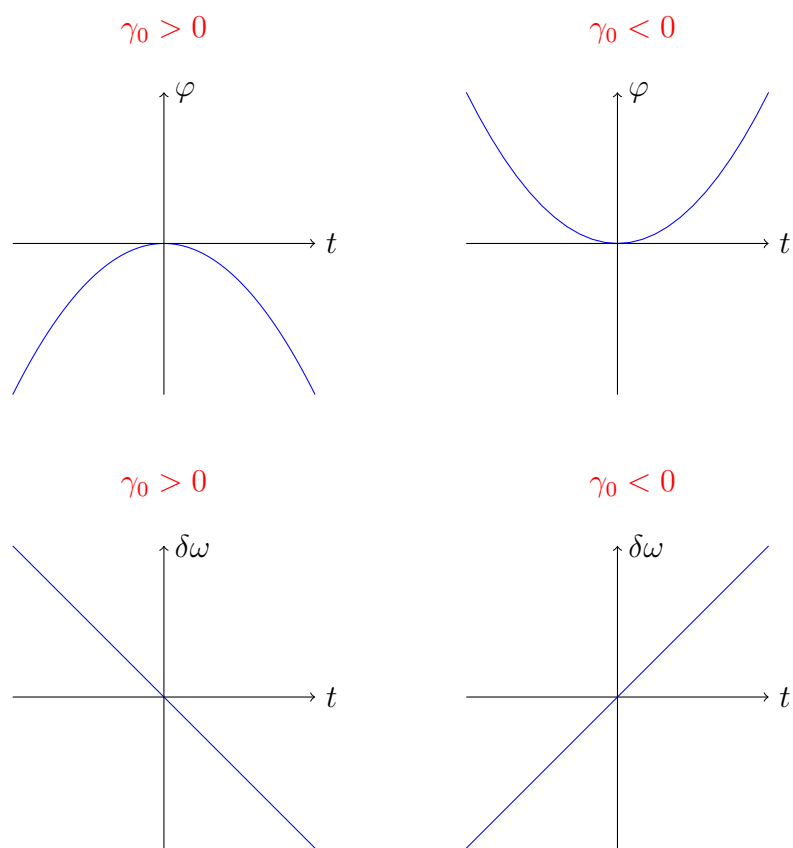
Tokiam impulsui būdinga tiesinė dažnio moduliacija. Iš tikrųjų, dažnis

$$(20.57) \quad \omega(t) = \omega_0 + \frac{d\varphi}{dt},$$

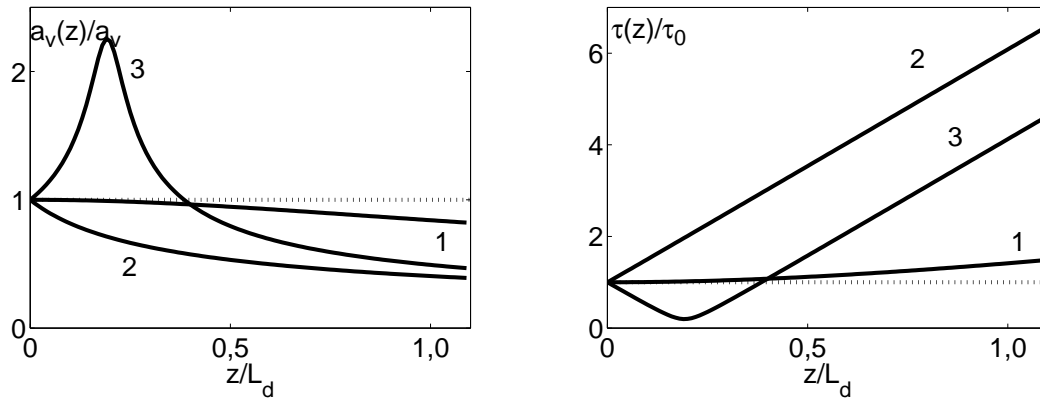
ir dažnio nuokrypis (deviacija)

$$(20.58) \quad \delta\omega(t) = \omega - \omega_0 = -\frac{2\gamma_0}{\tau_0^2}t$$

tiesiškai priklauso nuo laiko  $t$ . Fazės ir dažnio priklausomybės nuo laiko grafikai, kai parametro  $\gamma_0$  ženklai skirtingi, pavaizduoti 20.3 pav. Nešlio dažnio moduliacija trumpai vadinama čirpu, o moduluoti impulsai – čirpuotais impulsais.



20.3 pav. Fazės moduliacija



20.4 pav. Amplitudės (kairėje) ir impulso trukmės (dešinėje) priklausomybė nuo sklindimo nuotolio  $z$ .  $\gamma_0 g_0 = 0$  (1),  $\gamma_0 g_0 < 0$  (2),  $\gamma_0 g_0 > 0$  (3)

Kadangi Gauso funkcijos spektras taip pat yra Gauso funkcija, tai (20.55) impulso spektro fazė irgi yra kvadratiškai moduluota. Sklindant tokiame impulsui dispersinėje terpe, dėl dispersijos atsirandanti fazės moduliacija sumuojama su pradine fazės moduliacija ((20.54) formulė) ir esant tam tikram atstumui šios dvi fazės gali viena kitą kompensuoti. Sakoma, kad impulsas susifazuoja. Tuomet jo trukmė būna mažiausia. Ar spektro fazė gali pavirsti nuliu, dar priklauso nuo  $\gamma_0$  ir  $g_0$  ženklų.

Apskaičiavę (20.55) kompleksinės amplitudės Furjė vaizdą, gauname, kad spektro fazė

$$(20.59) \quad \varphi_0(\Omega) = \frac{\Omega^2 \tau_0^2}{4(1 + \gamma_0^2)} \gamma_0.$$

Matome, kad ji kvadratiškai priklauso nuo dažnio  $\Omega$ . Jei  $\gamma_0 g_0 > 0$ , tuomet atstumu  $z = z_0$  impulsas susifazuoja. Iš sąlygos  $\varphi = 0$  randame

$$(20.60) \quad z_0 = \frac{\gamma_0 L_d}{1 + \gamma_0^2}.$$

Amplitudės ir trukmės kitimas kintant sklindimo nuotoliui pavaizduotas 20.4 pav.  $\gamma_0 g_0 = 0$  atvejis atitinka faziškai nmoduliuotą Gauso impulsą, sklindamas terpe jis dispersiškai plinta – amplitudė mažėja, o trukmė didėja (1 kreivė). 3 kreivė atitinka faziškai moduluoto impulso spūdą. O jei  $\gamma_0 g_0 < 0$ , tuomet impulsas išsifazuoja dar greičiau nei nmoduliuotas impulsas, 2 kreivė.



# 21 SKYRIUS

## Anizotropinės terpės

Anizotropinės medžiagos pavyzdys – kristalas. Šitame skyriuje panagrinėsime plokščių monochromatinių bangų sklidimą anizotropinėse medžiagose. Gausime Frenelio lygtis, aprašančias fazinius ir grupinius greičius. Matysime, kad gali sklisti dvi skirtingų greičių bangos – paprastoji ir nepaprastoji. Vykstant netiesinėms parametrinėms tribangėms sąveikoms dvejetainis lūžimas yra panaudojamas faziniam sinchronizmui pasiekti.

### 21.1. Dielektrinės skvarbos tenzoriai

19.1 skyriuje buvo nagrinėjama kvantinė tiesinė dispersijos teorija, buvo gauta  $\chi^{(1)}$  išraiška izotropinei terpei. Kai terpė anizotropinė, matriciniai elementai  $\theta_{jk}$  priklauso nuo krypties. Tuomet tiesinis jautris, o kartu ir dielektrinė skvarba yra tenzoriai. Poliarizuotumas užrašomas taip:

$$(21.1) \quad \mathbf{P} = \varepsilon_0 \hat{\chi} \mathbf{E}$$

arba atskiriems vektoriaus  $\mathbf{P}$  komponentams:

$$(21.2) \quad P_i = \varepsilon_0 \sum_{j=1,2,3} \chi_{ij} E_j.$$

Elektrinis slinkties vektorius

$$(21.3) \quad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

arba atskiriems vektoriaus  $\mathbf{D}$  komponentams:

$$(21.4) \quad D_i = \varepsilon_0 E_i + \varepsilon_0 \sum_{j=1,2,3} \chi_{ij} E_j = \sum_{j=1,2,3} \varepsilon_0 (\delta_{ij} + \chi_{ij}) E_j.$$

Čia  $\delta_{ij}$  yra Kronekerio delta. Trumpiau galima parašyti taip:

$$(21.5) \quad D_i = \sum_j \varepsilon_{ij} E_j,$$

čia

$$(21.6) \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_0 (\delta_{ij} + \chi_{ij})$$

yra dielektrinės skvarbos tenzorius. Spinduliuotės energijos tankis  $w$ :

$$(21.7) \quad w = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) = \frac{1}{2} \sum_i E_i D_i = \frac{1}{2} \sum_{i,j} E_i \varepsilon_{ij} E_j.$$

Galima parodyti, kad dielektrinės skvarbos tenzorius yra simetrinis. Iš tikrųjų, (21.7) lygybėje sukeitę  $i$  ir  $j$  indeksus vietomis, gauname

$$(21.8) \quad w = \frac{1}{2} \sum_{i,j} E_j \varepsilon_{ji} E_i.$$

Iš pastarųjų dviejų lygčių užrašome:

$$(21.9) \quad 0 = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ji}) E_i E_j,$$

todėl

$$(21.10) \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}.$$

Taigi, dielektrinės skvarbos tenzorius yra simetrinis.

Įtraukime naujus kintamuosius

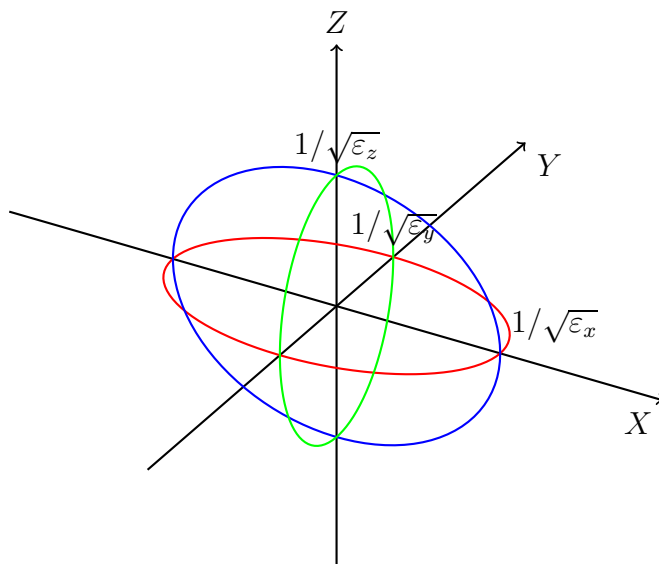
$$(21.11) \quad x_i = E_i / \sqrt{2w}.$$

Tuomet (21.7) energijos tankio išraišką galime perrašyti taip:

$$(21.12) \quad \sum_{i,j} \varepsilon_{ij} x_i x_j = 1.$$

Šią lygybę galima padaryti paprastesnio pavidalo:

$$(21.13) \quad \varepsilon_x x^2 + \varepsilon_y y^2 + \varepsilon_z z^2 = 1,$$



21.1 pav. Pagrindinės dielektrinės skvarbos tenzoriaus ašys

tinkamai orientavus koordinačių ašis. Tuomet dielektrinės skvarbos tenzorius yra įstrižas (diagonalus):

$$(21.14) \quad \hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix}.$$

(21.13) yra elipsoido lygtis, o  $x$ ,  $y$ ,  $z$  – pagrindinės dielektrinės skvarbos tenzoriaus ašys. Elipsoidas pavaizduotas 21.1 pav.

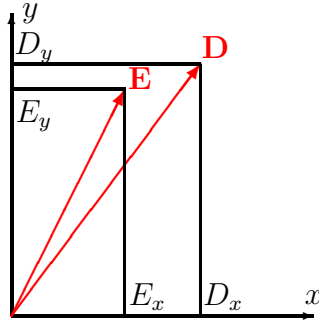
Anizotropiniame kristale elektrinio slinkties vektoriaus  $\mathbf{D}$  komponentai

$$(21.15) \quad D_x = \epsilon_x E_x, \quad D_y = \epsilon_y E_y, \quad D_z = \epsilon_z E_z.$$

Bendru atveju  $\epsilon_x \neq \epsilon_y \neq \epsilon_z$ , todėl  $\mathbf{E}$  ir  $\mathbf{D}$  vektoriai nelygiagretūs, 21.2 pav.

## 21.2. Plokščiosios monochromatinės bangos anizotropinėje terpėje

Užrašykime dar kartą Maksvelo lygtis:



21.2 pav. Elektrinio lauko stiprio ir slinkties vektoriai

$$\begin{aligned}
 \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \\
 \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\
 \text{div } \mathbf{B} &= 0, \\
 \text{div } \mathbf{D} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{21.16}$$

Tegu visi keturi vektoriai  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  ir  $\mathbf{H}$  yra plokščiosios monochromatinės bangos:

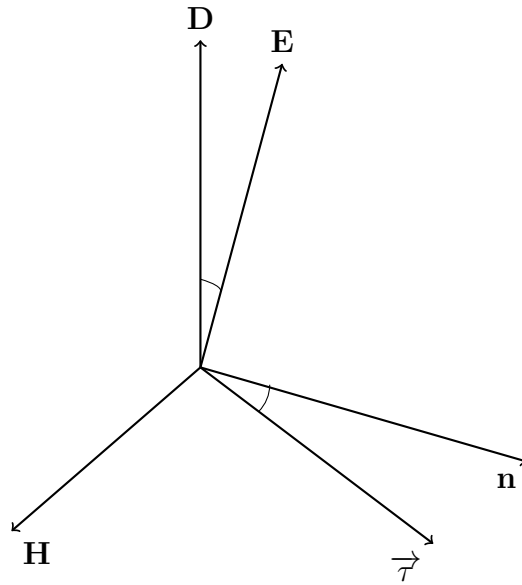
$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 \exp(-i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})), \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}_0 \exp(-i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})), \\
 \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 \exp(-i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})), \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \exp(-i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})).
 \end{aligned}
 \tag{21.17}$$

$\mathbf{E}_0$ ,  $\mathbf{D}_0$ ,  $\mathbf{B}_0$  ir  $\mathbf{H}_0$  yra pastovūs vektoriai. Be to, laikysime, kad terpė nemagnetinė:  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ . Įrašę (21.17) išraiškas į (21.16) lygtis, gauname

$$\begin{aligned}
 -\mathbf{k} \times \mathbf{H} &= \omega \mathbf{D}, \\
 \mathbf{k} \times \mathbf{E} &= \omega \mu_0 \mathbf{H}, \\
 \mathbf{k} \cdot \mathbf{D} &= 0, \\
 \mathbf{k} \cdot \mathbf{H} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{21.18}$$

Įtraukime vienetinius vektorius  $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$  ir  $\vec{\tau} = \mathbf{S}/S$ , čia  $\mathbf{S}$  yra Pointingo vektorius.  $\vec{\tau}$  vadinamas spinduliniu vektoriumi. Iš (21.18) matome, kad vektorius  $\mathbf{n}$  statmenas vektoriams  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$ . O iš Pointingo vektoriaus apibrėžimo  $\mathbf{S} \sim [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]$  žinome, kad  $\vec{\tau}$  yra statmenas  $\mathbf{E}$  ir  $\mathbf{H}$  vektoriams. Kaip minėta,  $\mathbf{E}$  ir  $\mathbf{D}$  vektoriai tarpusavyje nelygiagretūs, ir, kaip paaiškėja iš (21.18), abu statmeni vektoriumi  $\mathbf{H}$ . Vektorių kryptys parodytos 21.3 pav.





21.3 pav. Vektorių tarpusavio kryptys

### 21.3. Frenelio lygtis faziniams greičiams

Iš antrosios (21.18) lygties išreiškę  $\mathbf{H}$  ir įrašę jo išraišką į pirmąją lygtį, gauname

$$(21.19) \quad \mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{E}) - \mathbf{E} + \mu_0 v^2 \mathbf{D} = 0.$$

Čia  $v = \omega/k$ . Iš (21.15) turime

$$(21.20) \quad D_i = \varepsilon_i E_i.$$

Tuomet (21.19) lygtis atskiriems vektoriaus  $\mathbf{E}$  komponentams atrodo taip:

$$(21.21) \quad n_i(\mathbf{n}\mathbf{E}) - E_i(1 - v^2 \mu_0 \varepsilon_i) = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Tegu krintančiosios bangos elektrinio lauko stiprio vektorius  $\mathbf{E}$  orientuotas išilgai pirmosios pagrindinės dielektrinės skvarbos tenzoriaus ašies. Tuomet

$$(21.22) \quad D_1 = \varepsilon_1 E_1, \quad D_2 = D_3 = E_2 = E_3 = 0,$$

$\vec{\tau}$  lygiagretus  $\mathbf{n}$ , ir  $\mathbf{E}$  statmenas  $\mathbf{n}$ . Iš (21.21) gauname

$$(21.23) \quad E_1(1 - v_1^2 \mu_0 \varepsilon_1) = 0,$$

ir

$$(21.24) \quad v_1 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_0}}.$$

Pažymėkime

$$(21.25) \quad v_i = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_i \mu_0}}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Greičiai  $v_i$  yra pagrindiniai bangos sklidimo greičiai. (21.21) lygtį tuomet galime perrašyti taip:

$$(21.26) \quad n_i(\mathbf{nE}) - E_i \left(1 - \frac{v^2}{v_i^2}\right) = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Padauginę šią lygybę iš

$$(21.27) \quad \frac{n_i}{1 - \frac{v^2}{v_i^2}},$$

susumavę pagal  $i$  ir pasinaudoję tuo, kad

$$(21.28) \quad \begin{aligned} \sum_i n_i E_i &= (\mathbf{nE}), \\ \sum_i n_i^2 &= 1, \end{aligned}$$

gauname

$$(21.29) \quad \sum_{i=1}^3 \frac{n_i^2}{v_i^2 - v^2} = 0.$$

Tai yra Frenelio lygtis, leidžianti nustatyti bet kokia kryptimi sklindančios bangos fazinį greitį  $v$

Padauginę (21.19) lygtį skaliariškai iš  $\mathbf{D}$  ir pasinaudoję (21.20) gauname

$$(21.30) \quad - \sum_i \varepsilon_i E_i^2 + \mu_0 v^2 D^2 = 0.$$

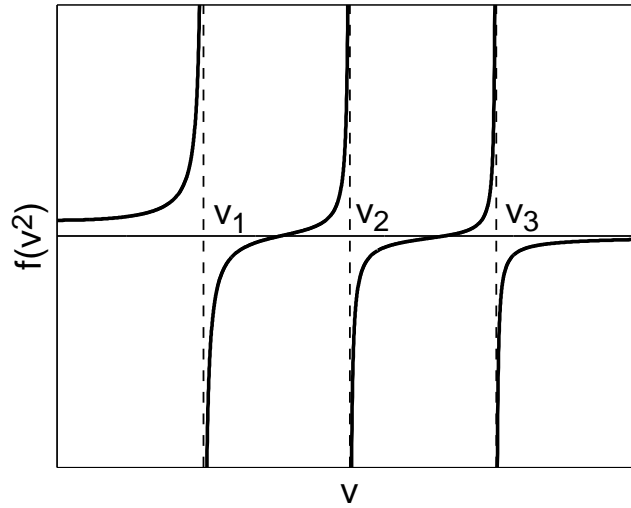
Iš šios lygties ir (21.25) gauname

$$(21.31) \quad v^2 = \frac{1}{D^2} \sum_i v_i^2 D_i^2.$$

Matome, kad fazinis greitis visiškai priklauso nuo vektoriaus  $\mathbf{D}$  krypties.

Panagrinėkime (21.29) lygties sprendinius. Matome, kad  $v$  negali būti nei didesnis, nei mažesnis už visus  $v_i$ . 21.4 pav. pavaizduotas tokios funkcijos grafikas:

$$(21.32) \quad f(v^2) = \sum_{i=1}^3 \frac{n_i^2}{v_i^2 - v^2}.$$

21.4 pav. Funkcijos  $f(v^2)$  grafikas

Ši funkcija kerta nulį dviejuose taškuose, vadinasi, galimi tik du greičiai  $v'$  ir  $v''$ . Parodysime, kad juos atitinkantys vektoriai  $\mathbf{D}'$  ir  $\mathbf{D}''$  yra statmeni vienas kitam. Tam užrašome dvi lygtis:

$$(21.33) \quad \mathbf{n}(\mathbf{nE}') - \mathbf{E}' + \mu_0 v'^2 \mathbf{D}' = 0,$$

$$\mathbf{n}(\mathbf{nE}'') - \mathbf{E}'' + \mu_0 v''^2 \mathbf{D}'' = 0.$$

Pirmąją padauginame iš  $\mathbf{D}''$ , antrąją – iš  $\mathbf{D}'$  ir atimame vieną iš kitos. Gauname

$$(21.34) \quad (\mathbf{D}'\mathbf{E}'' - \mathbf{D}''\mathbf{E}') - \mu_0 (v'^2 - v''^2) \mathbf{D}'\mathbf{D}'' = 0.$$

Kadangi

$$(21.35) \quad \mathbf{D}'\mathbf{E}'' = \sum_{i,j} \varepsilon_{ij} E'_j E''_i = \sum_{i,j} \varepsilon_{ji} E'_j E''_i = \mathbf{D}''\mathbf{E}',$$

tai

$$(21.36) \quad \mathbf{D}'\mathbf{D}'' = 0.$$

Iki šiol nagrinėjome šviesos sklidimą anizotropinėje terpėje, gavome Frenelio lygtis (21.29) faziniams greičiams nustatyti. Dabar panagrinėsime, kaip sklinda energijos srautas, kurio kryptis sutampa su Pointingo vektoriaus kryptimi. Grupinis greitis  $v_r$  su faziniu  $v$  susijęs sąryšiu [19]:

$$(21.37) \quad v_r = v / (\mathbf{n} \vec{\tau}).$$

Ši sąryšį galima parodyti, suskaičiavus  $v_r = \frac{\partial \omega}{\partial k}$  iš Frenelio lygties. Čia to nedarysime. Vektoriškai padauginę pirmąją bei antrąją (21.18) lygtis iš  $\vec{\tau}$ , gauname tokias lygtis:

$$(21.38) \quad \begin{aligned} (\vec{\tau} \mathbf{k}) \mathbf{H} &= \omega \vec{\tau} \times \mathbf{D}, \\ (\vec{\tau} \mathbf{k}) \mathbf{E} &= -\omega \mu_0 \vec{\tau} \times \mathbf{H}. \end{aligned}$$

Iš pirmosios lygties išreiškiame vektorių  $\mathbf{H}$  ir įrašome gautą išraišką į antrąją lygtį. Tuomet gauname:

$$(21.39) \quad (\vec{\tau} \mathbf{k}) \mathbf{E} = -\omega^2 \mu_0 (\vec{\tau} (\vec{\tau} \mathbf{D}) - \mathbf{D}) / (\vec{\tau} \mathbf{k}).$$

Pasinaudojame sąryšiais  $\mathbf{k} = \mathbf{n}k$ ,  $v = \omega/k = v_r(\mathbf{n} \vec{\tau})$ , ir gauname

$$(21.40) \quad \vec{\tau} (\vec{\tau} \mathbf{D}) - \mathbf{D} + \frac{1}{\mu_0 v_r^2} \mathbf{E} = 0.$$

Ši lygtis analogiška (21.19), tereikia atlikti pakeitimus:

$$(21.41) \quad \mathbf{n} \rightarrow \vec{\tau}, \quad \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{D}, \quad \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{E}, \quad \mu_0 v^2 \rightarrow \frac{1}{\mu_0 v_r^2}.$$

Iš (21.40) pagrindiniams spinduliniams vektoriams  $v_{ri}$ , atitinkantiems situaciją, kai  $E$  vektorius lygiagretus vienai iš pagrindinių dielektrinės skvarbos tenzorius kryptų, gauname

$$(21.42) \quad v_{ri} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_i \mu_0}} = v_i.$$

Taigi, pagrindiniai grupiniai greičiai sutampa su pagrindiniais faziniais greičiais. Juos žymėsime  $v_i$ . (21.40) lygtis atskiriems vektorių komponentams atrodo taip:

$$(21.43) \quad \tau_i (\vec{\tau} \mathbf{D}) - D_i \left(1 - \frac{v_i^2}{v_r^2}\right) = 0.$$

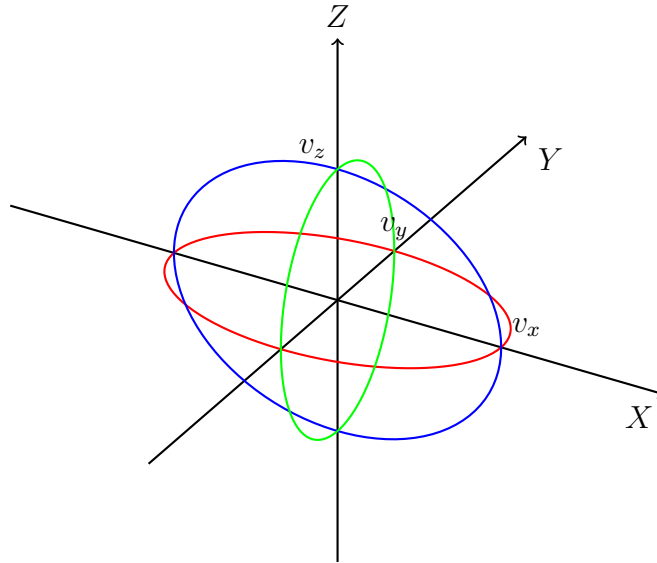
Iš šios lygties, analogiškai kaip gavome (21.29) iš (21.26), gauname

$$(21.44) \quad \sum_i \frac{\tau_i^2 v_i^2}{v_i^2 - v_r^2} = 0.$$

Be to, galime parodyti, kad

$$(21.45) \quad \frac{1}{v_r^2} = \frac{1}{E^2} \sum_i \frac{E_i^2}{v_i^2},$$

taigi grupinį greitį lemia vektoriaus  $\mathbf{E}$  kryptis. Galimi du grupiniai greičiai, ir juos atitinkančių bangų elektriniai lauko stipriai yra tarpusavyje statmeni.



21.5 pav. Spindulinių greičių elipsoidas

## 21.4. Dvejopas lūžimas

(21.13) lygtyje pakeitę  $x_i$  į  $\sqrt{\mu_0}x_i$ , gausime:

$$(21.46) \quad \frac{x^2}{v_x^2} + \frac{y^2}{v_y^2} + \frac{z^2}{v_z^2} = 1,$$

čia  $x_i = E_i \sqrt{\mu_0} / \sqrt{2w}$ , o  $v_i$  – pagrindiniai greičiai, apibrėžti (21.25). Ši lygtis aprašo elipsoidą, pavaizduotą 21.5 pav. Tai yra spindulinių greičių elipsoidas. Kaip žinome, bendru atveju elipsoidą galima kirsti dviem būdais taip, kad pasidarytų apskritimas. Ašys, statmenos šiems apskritimams, yra vadinamos optinėmis ašimis. Jei du iš trijų spindulinių greičių sutampa, turime sukimosi elipsoidą. Tuomet yra tik viena optinė ašis, ir ji sutampa su sukimosi ašimi. Šitaip kristalai skirstomi į vienašius ir dviašius. Toliau nagrinėsime tik vienašius kristalus ( $v_1 = v_2$ ). Matysime, kad kristalu gali sklisti dvi skirtingų greičių ir poliarizacijų bangos. Toks reiškinys vadinamas dvejopu lūžimu. Gausime spindulinių greičių ir lūžimo rodiklių lygtis.

Pažymėkime spindulino greičio vektorių  $\mathbf{r} = \vec{\tau} v_r$  ir jo komponentą  $r_i = x_i = \tau_i v_r$ . Tuomet (21.44) Frenelio lygtyje  $\tau_i = x_i / v_r$ , ir

$$(21.47) \quad \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2 v_i^2}{v_i^2 - v_r^2} = 0.$$

Bendru atveju ši lygtis aprašo ketvirtos eilės paviršių. Panagrinėkime paprastesnius

atvejus. Tegu  $x_3 = 0$ . Tuomet turime

$$(21.48) \quad \frac{x_1^2 v_1^2}{v_1^2 - v_r^2} = -\frac{x_2^2 v_2^2}{v_2^2 - v_r^2}.$$

Padauginame šią lygtį iš  $\frac{1}{v_1^2 v_2^2}$  ir įrašome  $v_r^2 = x_1^2 + x_2^2$ . Gauname

$$(21.49) \quad \frac{x_1^2}{v_1^2 v_2^2 - v_2^2 (x_1^2 + x_2^2)} = -\frac{x_2^2}{v_1^2 v_2^2 - v_1^2 (x_1^2 + x_2^2)}$$

ir

$$(21.50) \quad v_1^2 v_2^2 (x_1^2 + x_2^2) = (x_1^2 + x_2^2) (v_1^2 x_1^2 + v_2^2 x_2^2).$$

Iš čia kyla

$$(21.51) \quad \frac{x_1^2}{v_2^2} + \frac{x_2^2}{v_1^2} = 1.$$

Tai yra pirmosios bangos spindulinių greičių lygtis. Antrosios bangos spindulinių greičių lygtį gauname iš sąlygos

$$(21.52) \quad v_3^2 - v_r^2 = 0.$$

Ji atrodo taip:

$$(21.53) \quad \frac{x_1^2}{v_3^2} + \frac{x_2^2}{v_3^2} = 1.$$

Panagrinėkime, kokios yra pirmosios ir antrosios bangų poliarizacijos. Kai  $x_3 = 0$ , iš (21.45) lygties turime

$$(21.54) \quad \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{1}{E^2} \left( \frac{E_1^2 + E_2^2}{v_1^2} + \frac{E_3^2}{v_3^2} \right).$$

Pirmajai bangai, kuriai galioja (21.51), esant  $v_1 = v_2$ , gauname

$$(21.55) \quad \frac{1}{v_1^2} = \frac{1}{E^2} \left( \frac{E_1^2 + E_2^2}{v_1^2} + \frac{E_3^2}{v_3^2} \right),$$

taigi

$$(21.56) \quad E_3 = 0.$$

O antrajai bangai, remdamiesi (21.53), gauname

$$(21.57) \quad \frac{1}{v_3^2} = \frac{1}{E^2} \left( \frac{E_1^2 + E_2^2}{v_1^2} + \frac{E_3^2}{v_3^2} \right)$$

ir

$$(21.58) \quad E_1 = E_2 = 0.$$

Abiejų bangų  $\vec{\tau}$  vektorius yra statmenas  $z$  ašiai, nes  $x_3 = 0$ . Pirmosios bangos  $\mathbf{E}$  vektorius statmenas ir  $\vec{\tau}$ , ir  $z$  ašiai. Pirmoji banga yra poliarizuota statmenai plokštumai, kurioje guli  $\vec{\tau}$  ir  $z$  ašis. Ši plokštuma vadinama pagrindine plokštuma. O antrosios bangos  $E = E_3$ , tai reiškia, kad poliarizacijos vektorius guli pagrindinėje plokštumoje. Pirmoji banga vadinama paprastąja (angl. *ordinary*) arba o banga, antroji – nepaprastąja (angl. *extraordinary*) arba e banga.

Nagrinėjome (21.47) lygtį tuo atveju, kai  $x_3 = 0$ . Analogiškus rezultatus gautume, kai  $x_1 = 0$  arba  $x_2 = 0$ . Kai  $x_1 = x_2 = 0$ , t. y. banga sklinda lygiagrečiai su optine ašimi (vienašis kristalas,  $v_1 = v_2$ ), tuomet  $r^2 = x_3^2$  ir

$$(21.59) \quad \frac{x_3^2 v_3^2 (v_1^2 - x_3^2) (v_2^2 - x_3^2)}{v_3^2 - r^2} = 0.$$

Vienai bangai gauname

$$(21.60) \quad x_3 = v_1, \quad E = E_1, \quad \text{kitai turime}$$

$$x_3 = v_2, \quad E = E_2.$$

Kai  $v_1 = v_2$ , abi bangos sklinda vienodais greičiais, išėjime susidaro elipsiškai poliarizuota banga.

Panagrinėkime (21.29) Frenelio lygtį faziniams greičiams. Gausime lūžimo rodiklių lygtis. Kadangi  $k = \omega/v$ , tai  $v = \omega/k$ . Vektoriaus  $\mathbf{n}$  dedamoji  $n_i = k_i/k$ . Taigi turime

$$(21.61) \quad \sum_{i=1}^3 \frac{k_i^2}{v_i^2 - \frac{\omega^2}{k^2}} = 0.$$

Nagrinėsime atvejį, kai  $k_y = 0$ . Tuomet iš (21.61) išvedame dvi lygtis:

$$(21.62) \quad \frac{k_x^2}{v_1^2 - \frac{\omega^2}{k_x^2 + k_z^2}} = -\frac{k_z^2}{v_3^2 - \frac{\omega^2}{k_x^2 + k_z^2}},$$

$$v_2^2 - \frac{\omega^2}{k_x^2 + k_z^2} = 0.$$

Pažymėsime

$$(21.63) \quad k_x = \frac{\omega}{c} n_x, \quad k_z = \frac{\omega}{c} n_z,$$

$$v_1 = v_2 = \frac{c}{n_o}, \quad v_3 = \frac{c}{n_e},$$

čia  $n_x, n_z$  yra lūžio rodikliai, atitinkantys fazinius greičius  $x$  ir  $z$  kryptimis.  $n_o$  ir  $n_e$  yra paprastosios bei nepaprastosios bangų lūžio rodikliai. Iš antrosios (21.62) lygties galime užrašyti

$$(21.64) \quad \frac{c^2}{n_o^2} = \frac{c^2}{n_x^2 + n_z^2}$$

arba

$$(21.65) \quad \frac{n_x^2 + n_z^2}{n_o^2} = 1.$$

Iš pirmosios (21.63) lygties turime

$$(21.66) \quad \frac{n_x^2}{\frac{c^2}{n_o^2} - \frac{c^2}{n_x^2 + n_z^2}} = -\frac{n_z^2}{\frac{c^2}{n_e^2} - \frac{c^2}{n_x^2 + n_z^2}}.$$

Iš šios lygties gauname

$$(21.67) \quad \frac{n_x^2}{n_e^2} - \frac{n_x^2}{n_x^2 + n_z^2} = -\frac{n_z^2}{n_o^2} + \frac{n_z^2}{n_x^2 + n_z^2}.$$

Iš pastarosios lygties užrašome

$$(21.68) \quad \frac{n_x^2}{n_e^2} + \frac{n_z^2}{n_o^2} = 1.$$

(21.65) yra lygtis paprastosios bangos lūžio rodikliams  $x$  ir  $z$  kryptimis, (21.68) – nepaprastosios bangos. Pastaroji yra elipsės lygtis. Kristalai, kurių  $n_e < n_o$ , vadinami neigiamais kristalais, o tie, kurių  $n_e > n_o$ , – teigiamais.



## 22 SKYRIUS

### Netiesinės terpės

Kai spinduliuotė yra pakankamai intensyvi, efektyvioji potencinė energija negali būti aprašoma parabole. Vyksta nauji, netiesiniai, reiškiniai. Čia aptarsime trečios ir antros eilės netiesines terpes. Nagrinėsime tik parametrines sąveikas. Tai yra tokios sąveikos, kurių metu šuoliai vyksta tik į virtualius lygmenis ir galutinis energijos lygmuo sutampa su pradiniu.

#### 22.1. Kubinės terpės

##### 22.1.1. Netiesinis lūžio rodiklis

Panašiai kaip 20.2 skyriuje naudojome tiesinę atsako funkciją  $\chi^{(1)}(t)$ , dabar pasitelkime netiesinę atsako funkciją. Kubinio poliarizuotumo priklausomybė nuo laiko randama iš Furjė transformacijos:

$$(22.1) \quad \mathbf{P}^{(3)}(t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}^{(3)}(\omega_4 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \exp(i\omega_4 t) d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3,$$

čia

$$(22.2) \quad \mathbf{P}^{(3)}(\omega_4 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3) = \varepsilon_0 \hat{\chi}^{(3)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \mathbf{E}(\omega_1) \mathbf{E}(\omega_2) \mathbf{E}(\omega_3).$$

Integralą (22.1) galima užrašyti kaip

$$(22.3) \quad \mathbf{P}^{(3)}(t) = \varepsilon_0 \int_0^{\infty} dt' dt'' dt''' \hat{\chi}^{(3)}(t', t'', t''') : \mathbf{E}(t-t') \mathbf{E}(t-t'-t'') \mathbf{E}(t-t'-t''-t'''),$$

čia kubinio atsako funkcija

$$(22.4) \quad \hat{\chi}^{(3)}(t', t'', t''') = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\chi}^{(3)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \exp(i(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)t' + i(\omega_2 + \omega_3)t'' + i\omega_3 t) \times d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3.$$

Panagrinėkime, koks yra  $\mathbf{P}^{(3)}(t)$ , terpe sklindant šviesos impulsui, kurio elektrinio lauko stipris:

$$(22.5) \quad \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{e} A(t) \exp(i(\omega t - \mathbf{kr})) + (*).$$

Čia  $\mathbf{e}$  yra poliarizacijos vektorius. Atkreipsime dėmesį, kad čia rašomas daugiklis  $\frac{1}{2}$ . Jo nerašėme (18.61) formulėje, bet dėl to pasikeičia tik amplitudės dydis. Terpė yra izotropinė, šviesos poliarizacija tiesinė, vietoje vektorių ir tenzorių rašysime skaliarus. Įrašę (22.5) į (22.3) gauname

$$(22.6) \quad P^{(3)}(t, \mathbf{r}) = \frac{3}{8} \varepsilon_0 \chi^{(3)}(\omega) |A|^2 A e^{i(\omega t - \mathbf{kr})} + (*) + (3\omega).$$

Čia tarta, kad  $A(t)$  kinta daug lėčiau negu  $\chi^{(3)}(t', t'', t''')$ , t. y. netiesinis atsakas yra neinerčinis.  $(3\omega)$  žymi narius su trigubo dažnio komponentais. Jų toliau nenagrinėsime. Pirmasis (22.6) narys kinta tuo pačiu dažniu kaip ir krintančioji banga; šis narys aprašo impulso savimoduliaciją. Panagrinėkime, kaip pakinta terpės lūžio rodiklis dėl netiesinio atsako. Elektrinio lauko slinkties vektorius kubinio netiesiškumo terpėje

$$(22.7) \quad D(t) = \varepsilon_0 E(t) + P^{(1)}(t) + P^{(3)}(t) = D^{(1)} + P^{(3)},$$

čia

$$(22.8) \quad D^{(1)}(t) = \varepsilon_0 E(t) + P^{(1)}(t).$$

Kaip ir anksčiau, užrašome tiesinį slinkties vektorių

$$(22.9) \quad D^{(1)}(t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^{(1)}(t') E(t - t') dt',$$

čia

$$(22.10) \quad \varepsilon^{(1)}(t) = \delta(t) + \chi^{(1)}(t).$$

Irašę (22.5) į (22.9), gauname

$$(22.11) \quad D^{(1)}(t) = \varepsilon_0 \varepsilon^{(1)}(\omega) E(t),$$

čia

$$(22.12) \quad \varepsilon^{(1)}(\omega) = 1 + \chi^{(1)}(\omega).$$

Priminsime, kad  $\omega$  yra impulso nešlio dažnis. Čia vėl laikyta, kad atsakas neinerčinis. Taigi gauname

$$(22.13) \quad \begin{aligned} D(t) &= \varepsilon_0 \varepsilon^{(1)}(\omega) E(t) + \frac{3}{8} \varepsilon_0 \chi^{(3)}(\omega) |A|^2 A e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})} + (*) = \\ &= \varepsilon_0 \left( \varepsilon^{(1)}(\omega) + \frac{3}{4} \chi^{(3)}(\omega) |A|^2 \right) E = \varepsilon_0 \varepsilon E. \end{aligned}$$

Čia dielektrinė skvarba

$$(22.14) \quad \varepsilon = \varepsilon^{(1)}(\omega) + \frac{3}{4} \chi^{(3)}(\omega) |A|^2.$$

Lūžio rodiklis  $n$  su dielektrine skvarba susijęs sąryšiu

$$(22.15) \quad n^2 = \varepsilon.$$

Pažymėkime

$$(22.16) \quad n_0^2 = \varepsilon^{(1)}(\omega),$$

tuomet

$$(22.17) \quad n^2 = \varepsilon = n_0^2 + \frac{3}{4} \chi^{(3)}(\omega) |A|^2.$$

Menamoji  $\varepsilon^{(1)}$  dalis aprašo tiesinę sugertį, o  $\chi^{(3)}(\omega)$  menamoji dalis – dvifotonę sugertį. Laikysime šiuos du procesus nereikšmingais ir kad  $n^2$  yra realus. Tuomet kai laukas gana silpnas

$$(22.18) \quad \begin{aligned} n &= n_0 \sqrt{1 + \frac{3}{4n_0^2} \chi^{(3)} |A|^2} \approx n_0 + \frac{3}{8n_0} \chi^{(3)} |A|^2 \\ &= n_0 + \Delta n. \end{aligned}$$

Čia

$$(22.19) \quad \Delta n = \frac{3}{8n_0} \chi^{(3)} |A|^2$$

yra netiesinis lūžio rodiklio pokytis. Dar yra naudojami tokie žymėjimai:

$$(22.20) \quad n = n_0 + \frac{1}{2}n_2|A|^2 + n_0 + n_2^{(I)}I,$$

čia  $I$  – intensyvumas, lygus

$$(22.21) \quad I = \frac{cn_0\varepsilon_0}{2}|A|^2,$$

$$(22.22) \quad n_2 = \frac{3}{4n_0}\chi^{(3)},$$

$$(22.23) \quad n_2^{(I)} = n_2 \frac{|A|^2}{2I} = \frac{n_2}{c\varepsilon_0 n_0} = \frac{3\chi^{(3)}}{4n_0^2 c\varepsilon_0}.$$

Atkreipsime dėmesį, kad čia nagrinėtas tik toks atvejis, kai krintančioji banga yra tiesiškai poliarizuota. Apskritiminės poliarizacijos atveju netiesinis lūžio rodiklis yra kitoks [6]. Tuomet reikia atsižvelgti į tenzorines  $\chi^{(3)}$  savybes ((18.66) formulė).

### 22.1.2. Netiesinė Šrėdingerio lygtis

Netiesinė Šrėdingerio lygtis aprašo impulso sklidimą kubinio netiesiškumo terpėje. Ji gaunama panašiai kaip (20.28) lygtis. Kubinėje terpėje vietoje banginės lygties (20.17) turime

$$(22.24) \quad \Delta E = \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} D^{(1)} + \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} P^{(3)},$$

t. y. prisideda narys, kurio poliarizuotumas kubinis. Antroji jo išvestinė pagal laiką skaičiuojama apytiksliai, remiantis lėtai kintančių amplitudžių artiniu:

$$(22.25) \quad \frac{\partial^2 P^{(3)}}{\partial t^2} \approx -\omega^2 \frac{3}{8} \varepsilon_0 \chi^{(3)} |A|^2 A e^{i(\omega t - kz)} + (*).$$

Tuomet gauname lygtį (Laplaso operatorių  $\Delta$  pakeitę į  $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ )

$$(22.26) \quad \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{u_0} \frac{\partial A}{\partial t} - i \frac{g_0}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -i \frac{3}{8} \chi^{(3)} \frac{\omega^2}{c^2 k^2} |A|^2 A.$$

Atlikę pakeitimą (20.39), gauname lygtį

$$(22.27) \quad i \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{g_0}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \beta |A|^2 A = 0,$$

čia apostrofai numesti. Ši lygtis vadinama netiesine Šrėdingerio lygtimi. Joje

$$(22.28) \quad \beta = \frac{3\chi^{(3)}k}{8n_0^2}$$

yra netiesinio ryšio koeficientas. Antrasis netiesinės Šrėdingerio lygties narys aprašo impulso dispersinį plėtimąsi, trečiasis – saviveiką.

### 22.1.3. Netiesinės Šrėdingerio lygties normavimas

Prieš modeliuojant Šrėdingerio lygtį patartina sunormuoti. Panagrinėkime atvejį, kai krintančioji banga – Gauso impulsas, kurio kompleksinė amplitudė

$$(22.29) \quad A(t, z = 0) = A_0(t) = a_0 \exp(-t^2/\tau_0^2).$$

Pažymėsimė

$$(22.30) \quad \begin{aligned} T &= t/\tau_0, \\ A &= a_0 B, \\ L_n &= \frac{1}{\beta a_0^2}, \\ L_d &= \frac{\tau_0^2}{2g_0}, \\ Z &= \frac{z}{L_d}. \end{aligned}$$

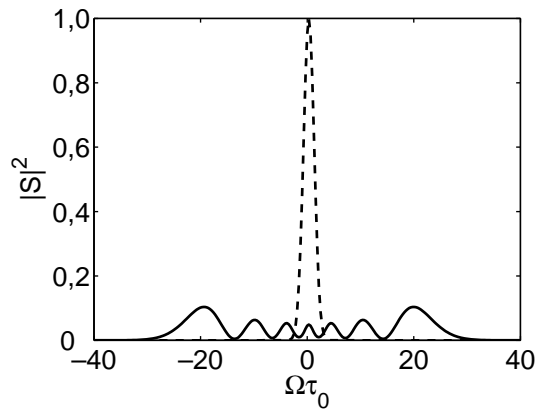
Čia  $L_d$  yra dispersinio plitimo nuotolis,  $L_n$  – netiesinis ilgis,  $T$ ,  $Z$ ,  $B$  – bedimensiai laikas, nuotolis ir amplitudė. Padarius šiuos pakeitimus, netiesinė Šrėdingerio lygtis būna tokio bedimensio pavidalo:

$$(22.31) \quad i \frac{\partial B}{\partial Z} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 B}{\partial T^2} - \frac{L_d}{L_n} |B|^2 B = 0.$$

### 22.1.4. Savimoduliacijos modeliavimas. Užduotis

Panagrinėkime (22.27) lygties paskutinio nario įtaką impulso gaubtinei ir spektro kitimą sklidimo netiesinėje terpėje metu. Laikysime, kad dispersija nedidelė, tuomet turime

$$(22.32) \quad i \frac{\partial A}{\partial z} - \beta |A|^2 A = 0.$$



22.1 pav. Spektro kitimas dėl savimoduliacijos.  $z/L_n$ : 0 (brūkšniuota linija), 20 (iš-tisinė linija)

Šią lygtį normuosime šiek tiek kitaip negu praeitame skyrelyje. Kadangi dispersinio nario nėra, tai sklidimo nuotolį patogiau normuoti į netiesinį ilgį:

$$(22.33) \quad Z = z/L_n.$$

Čia  $L_n$  yra apibrėžiamas taip pat, kaip praeitame skyrelyje. Pažymėję  $B = A/a_0$ , gauname

$$(22.34) \quad i \frac{\partial B}{\partial Z} - |B|^2 B = 0.$$

Ši lygtis gali būti išspręsta analiziškai. Kompleksiškai sujunkime šią lygtį:

$$(22.35) \quad -i \frac{\partial B^*}{\partial Z} - |B|^2 B^* = 0.$$

Padauginkime (22.34) iš  $B^*$ , o (22.35) iš  $B$  ir atimkime vieną iš kitos. Gauname

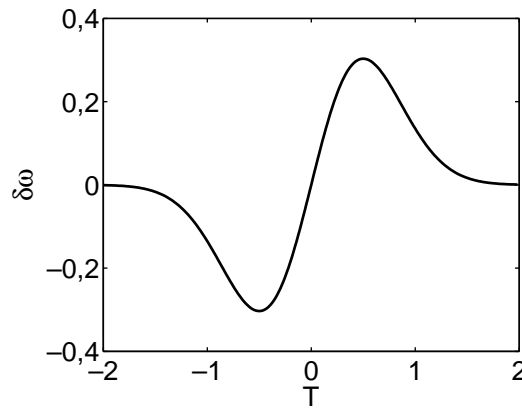
$$(22.36) \quad \frac{\partial |B|^2}{\partial Z} = 0.$$

Iš čia kyla svarbi išvada: savimoduliacijos metu amplitudė nekinta. Galime parašyti

$$(22.37) \quad i \frac{\partial B}{\partial Z} - |B_0|^2 B = 0.$$

Šios lygties sprendinys yra

$$(22.38) \quad B = B_0 \exp(-i|B_0|^2 Z).$$



22.2 pav. Gauso impulso dažnio pokytis dėl savimoduliacijos

**Užduotis.** Atlikti šio sprendinio sparčiąją Furjė transformaciją, kai impulsas yra Gauso:  $B_0 = \exp(-T^2)$ . Pavaizduoti, kaip spektro gaubtinė priklauso nuo sklidimo nuotolio (22.1 pav.).

Fazės pokytis dėl savimoduliacijos lygus

$$(22.39) \quad \delta\varphi = -|B_0|^2 Z$$

ir atsirandanti dažnio moduliacija

$$(22.40) \quad \delta\omega = \frac{\partial\delta\varphi}{\partial t} = \frac{\partial\delta\varphi}{\tau_0\partial T}.$$

Skindant Gauso impulsui turime

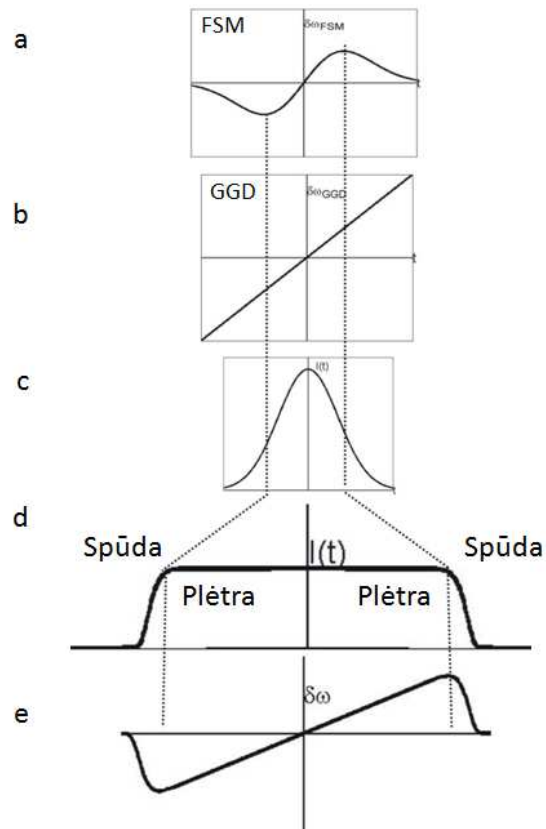
$$(22.41) \quad \tau_0\delta\omega = 2ZT \exp(-2T^2).$$

Dažnio pokyčio grafikas pavaizduotas 22.2 pav. Matome, kad dažninė moduliacija koordinčių pradžioje yra arti tiesinės.

### 22.1.5. Šrėdingerio lygtis esant normaliajai ir anomalijai GGD

Matėme, kad fazės pokytis dėl dispersijos Gauso impulso atveju yra

$$(22.42) \quad \delta\varphi_{\text{GGD}} = \frac{zt^2}{2g_0(L_d^2 + z^2)}.$$



22.3 pav. a – dažnio pokytis dėl fazinės savimoduliacijos, b – dažnio pokytis dėl grupinių greičių dispersijos, c – Gauso impulso gaubtinė, d – susiformavęs plokščios viršūnės impulsas, e – dažnio pokytis

Dėl to atsirandantis dažnio pokytis

$$(22.43) \quad \delta\omega_{GGD} = \frac{zt}{g_0(L_d^2 + z^2)}.$$

Jo ženklas priklauso nuo grupinių greičių dispersijos (GGD) koeficiento  $g_0$  ženklo. Kai GGD normalioji,  $g_0 > 0$ , kai anomalioji  $g_0 < 0$ . Kai  $g_0 > 0$ , dėl savimoduliacijos ir dispersijos atsirandančių dažnio moduliacijų ženklai sutampa, impulsas netiesinėje terpėje plinta sparčiau (22.3 pav.). Impulso kraštuose vyksta spūda, dėl to sklinda plokščios viršūnės impulsas.

Anomaliosios GGD atveju atsirandantys dėl GGD ir saviveikos čirpai gali kompensuoti vienas kitą, tuomet formuojasi solitonai.



### 22.1.6. *Split-step Fourier* metodas. Užduotis

Netiesinė Šrėdingerio lygtis gali būti sprendžiama *split-step Fourier* metodu. Šiuo metodu modeliuojamos netiesinės diferencialinės lygtys su dalinėmis išvestinėmis.

Netiesinę Šrėdingerio lygtį

$$(22.44) \quad \frac{\partial A}{\partial z} = i \frac{g_0}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - i\beta |A|^2 A$$

galime užrašyti bendresniu pavidalu:

$$(22.45) \quad \frac{\partial A}{\partial z} = (\widehat{D} + \widehat{N}) A.$$

Čia operatoriai

$$(22.46) \quad \begin{aligned} \widehat{D} &= i \frac{g_0}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \\ \widehat{N} &= -i\beta |A|^2. \end{aligned}$$

Formalus (22.45) lygties sprendinys yra [2]

$$(22.47) \quad A(t, z) = \exp\left((\widehat{D} + \widehat{N})(z - z_0)\right) A_0.$$

Čia  $A_0(t) = A(t, z_0)$ . Pažymėkime  $h = z - z_0$ , tuomet

$$(22.48) \quad A(t, z_0 + h) = \exp\left((\widehat{D} + \widehat{N})h\right) A(t, z_0).$$

Šioje išraiškoje esančios eksponentės skleidinys Teiloro eilute yra

$$(22.49) \quad \exp\left((\widehat{D} + \widehat{N})h\right) = 1 + (\widehat{D} + \widehat{N})h + (\widehat{D}^2 + \widehat{D}\widehat{N} + \widehat{N}\widehat{D} + \widehat{N}^2)\frac{h^2}{2} + \dots$$

Palyginkime šį skleidinį su tokiu

$$(22.50) \quad \begin{aligned} \exp(\widehat{D}h) \exp(\widehat{N}h) &= (1 + \widehat{D}h + \widehat{D}^2\frac{h^2}{2} + \dots)(1 + \widehat{N}h + \widehat{N}^2\frac{h^2}{2} + \dots) = \\ &= 1 + (\widehat{D} + \widehat{N})h + (\widehat{D}^2 + 2\widehat{D}\widehat{N} + \widehat{N}^2)\frac{h^2}{2} + \dots \end{aligned}$$

Nesunku matyti, kad jeigu operatoriai  $\widehat{D}$  ir  $\widehat{N}$  nekomutuoja, tai yra  $\widehat{D}\widehat{N} - \widehat{N}\widehat{D} \neq 0$ , tuomet šie du skleidiniai nesutampa. Tačiau jeigu žingsnis  $h$  yra pakankamai mažas ir galime atmesti  $O(h^2)$  tikslumo narius, tuomet (22.49) eksponentę galime prilyginti eksponenčių sandaugai (22.50):

$$(22.51) \quad \exp\left((\widehat{D} + \widehat{N})h\right) = \exp(\widehat{D}h) \exp(\widehat{N}h).$$

Vietoje (22.48) turime

$$(22.52) \quad A(t, z_0 + h) = \exp(\widehat{D}h) \exp(\widehat{N}h) A(t, z_0).$$

Pažymėkime

$$(22.53) \quad A_1(t, z_0 + h) = \exp(\widehat{N}h) A(t, z_0).$$

Aiškliai matyti, kad  $A_1$  yra diferencialinės lygties

$$(22.54) \quad \frac{\partial A_1}{\partial z} = \widehat{N} A_1$$

sprendinys. Ši lygtis yra paprasta diferencialinė netiesinė lygtis. Ją galima spręsti Rungės ir Kuto ketvirtu metodu, kai pradinė sąlyga  $A(z_0)$ . Ieškomas dydis

$$(22.55) \quad A(t, z_0 + h) = \exp(\widehat{D}h) A_1$$

yra lygties

$$(22.56) \quad \frac{\partial A}{\partial z} = \widehat{D} A$$

sprendinys. Tai yra tiesinė lygtis su dalinėmis išvestinėmis. Ji sprendžiama naudojant Furjė transformaciją. Atlikę (22.56) Furjė transformaciją pagal laiką gauname lygtį

$$(22.57) \quad \frac{\partial S(\Omega, z)}{\partial z} = -i \frac{g_0}{2} \Omega^2 S(\Omega, z).$$

Šios lygties sprendinys

$$(22.58) \quad S(\Omega, z_0 + h) = S(\Omega, z_0) \exp\left(-i \frac{g_0}{2} \Omega^2 h\right).$$

Atlikę dydžio  $S(\Omega, z_0 + h)$  atvirkštinę Furjė transformaciją, gauname ieškomą  $A(t, z_0 + h)$ . Norint rasti  $A(t, z_0 + 2h)$ , pradinė sąlyga prilyginama gautam sprendiniui  $A(t, z_0 + h)$  ir atliekami tie patys veiksmai: sprendžiama netiesinė lygtis (22.54), paskui diferencialinė lygtis (22.56). Iteruojant  $N$  kartų randamas  $A(t, z_0 + Nh)$ .

(22.51) galima simetrinti:

$$(22.59) \quad \exp\left((\widehat{D} + \widehat{N})h\right) = \exp\left((\widehat{D}/2 + \widehat{N} + \widehat{D}/2)h\right) = \exp(\widehat{D}h/2) \exp(\widehat{N}h) \exp(\widehat{D}h/2).$$

Tuomet kiekviename žingsnyje reikia spręsti tris diferencialines lygtis: vieną kartą tiesinę su dalinėmis išvestinėmis žingsniu  $h/2$ , paskui netiesinę žingsniu  $h$  ir vėl tiesinę žingsniu  $h/2$ . Pažymėsime, kad simetrizuoto *split-step Fourier* metodo atveju tikslumas yra didesnis, nes eksponenčių skleidiniuose sutampa nariai iki  $O(h^3)$ , o ne  $O(h^2)$ , kaip buvo taikant paprastą *split-step Fourier* metodą.

**Užduotis.** Sumodeliuoti (22.31) lygtį *split-step Fourier* metodu.

„SciLab“ programos ruošinys:

```

clear ; clc ; close ;

//===== netiesine funkcija =====
function AA1=func(z,AA0,NNt)
sigma=-10;// netiesinio rysio koeficientas
AA1(1,1:NNt)=-sigma*(AA0(1,1:NNt).^2+AA0(2,1:NNt).^2).*AA0(2,1:NNt);
AA1(2,1:NNt)=sigma*(AA0(1,1:NNt).^2+AA0(2,1:NNt).^2).*AA0(1,1:NNt);
endfunction
//=====
a=20;
NNt=512;
ht=2*a/NNt;
t=-a:ht:a-ht;

aw=...;
hw=...;

w=-aw:hw:aw-hw;
w=fftshift(w); // gudrybe, kad nereiketu 'shiftinti'
                // daug kartu cikle pagal z

A0=exp(-t.^2); // pradine salyga - Gauso impulsas
S0=(fft(A0));

Nz=100;
hz=0.05;
z=0:hz/2:hz;

//===== piesimas =====
subplot(2,1,1)
plot(w,abs(S0).^2,'k');
set(gca(),'data_bounds',[-20, 0; 20, 400])
fig1=gce();
subplot(2,1,2)
plot(t,abs(A0).^2,'k');
set(gca(),'data_bounds',[-10, 0; 10, 1])
fig2=gce();
//=====

for iz=1:Nz

```

```

AA0=[real(A0); imag(A0)];
AA=ode(AA0,0,z,list(func,NNt))
A0=AA(1,NNt*2+1:3*NNt)+%i*AA(2,NNt*2+1:3*NNt);
S0=...;
S=S0.*...;
A0=...;

//===== piesimas=====
drawlater();
delete(fig1);
delete(fig2);
subplot(2,1,1)
plot(w,abs(S0).^2,'k');
set(gca(),'data_bounds',[-20, 0; 20, 400])
title('Spektras');
fig1=gce();
subplot(2,1,2)
plot(t,abs(A0).^2,'k');
set(gca(),'data_bounds',[-10, 0; 10, 1])
title('Amplitude');
fig2=gce();
drawnow();
sleep(20)

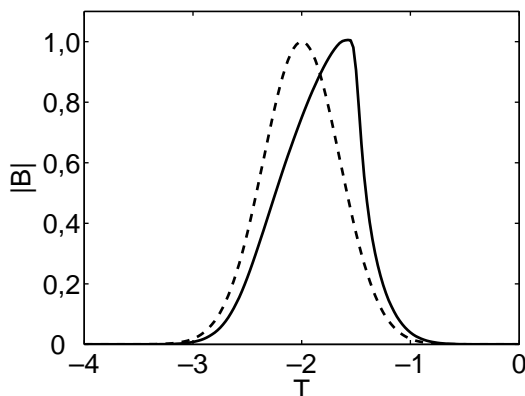
//=====
end;

```

### 22.1.7. Smūginės bangos

Išvesdami netiesinę Šrėdingerio lygtį laikėme, kad netiesinis atsakas neinerčinis. Be to, skaičiuodami antrosios eilės išvestinę neįskaitėme amplitudės išvestinių. Femtosekundiniams impulsams tokie artūnūmai nebegalioja. Įskaitę minėtus faktorius, gautume patikslintą lygtį:

$$(22.60) \quad i \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{g_0}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \beta |A|^2 A + i \beta_1 \frac{\partial}{\partial t} (|A|^2 A) = 0.$$



22.4 pav. Smūginės bangos susidarymas

Tokia lygtis aprašo smūginių bangų susidarymą. Iš tikrųjų, kadangi

$$(22.61) \quad \beta_1 \frac{\partial}{\partial t} (|A|^2 A) = \beta_1 |A|^2 \frac{\partial A}{\partial t} + \beta_1 A \frac{\partial |A|^2}{\partial t},$$

tai

$$(22.62) \quad i \frac{\partial A}{\partial z} + i \beta_1 |A|^2 \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{g_0}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \beta |A|^2 A + i \beta_1 A \frac{\partial}{\partial t} (|A|^2) = 0.$$

Antrasis dėmuo aprašo impulso dalių judėjimą greičiais, priklausančiais nuo intensyvumo. Kuo didesnis intensyvumas, tuo lėčiau sklinda impulso dalis. Lėčiausiai juda impulso viršūnė – susidaro smūginė banga (22.4 pav.).

## 22.2. Kvadratinės terpės

### 22.2.1. Tribangės sąveikos lygtys

Jau nagrinėjome (20.17) ir (22.24) bangines lygtis tiesinės ir kubinės terpių atvejais. Kvadratinei terpei parašome

$$(22.63) \quad \Delta E = \mu_0 \frac{\partial^2 D^{(1)}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 P^{(2)}}{\partial t^2}.$$

Paprastumo dėlei nagrinėsime sąveiką trijų monochromatinių bangų, kurių spektriniai komponentai:

$$\begin{aligned}
 S_1(\omega) &= A_1\delta(\omega - \omega_1) + A_1^*\delta(\omega + \omega_1), \\
 (22.64) \quad S_2(\omega) &= A_2\delta(\omega - \omega_2) + A_2^*\delta(\omega + \omega_2), \\
 S_3(\omega) &= A_3\delta(\omega - \omega_3) + A_3^*\delta(\omega + \omega_3).
 \end{aligned}$$

Čia  $A_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) gali priklausyti nuo erdvinių koordinačių. Gauname tokias laikines priklausomybes:

$$\begin{aligned}
 E_1(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} A_1 e^{i\omega t} \delta(\omega - \omega_1) d\omega + (*) = A_1 e^{i\omega_1 t} + (*), \\
 (22.65) \quad E_2(t) &= A_2 e^{i\omega_2 t} + (*), \\
 E_3(t) &= A_3 e^{i\omega_3 t} + (*).
 \end{aligned}$$

Randame kiekvienos bangos slinkties vektorių

$$\begin{aligned}
 D_1^{(1)}(t) &= \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\omega) S_1(\omega) e^{i\omega t} d\omega + (*) = \varepsilon_0 \varepsilon(\omega_1) A_1 e^{i\omega_1 t} + (*), \\
 (22.66) \quad D_2^{(1)}(t) &= \varepsilon_0 \varepsilon(\omega_2) A_2 e^{i\omega_2 t} + (*), \\
 D_3^{(1)}(t) &= \varepsilon_0 \varepsilon(\omega_3) A_3 e^{i\omega_3 t} + (*).
 \end{aligned}$$

Kvadratinis poliarizuotumas:

$$\begin{aligned}
 (22.67) \quad P_1^{(2)}(t) &= \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(2)}(\omega'_3, \omega'_1, \omega'_2) S_2^*(\omega'_2) S_3(\omega'_3) e^{i(\omega'_3 - \omega'_2)t} d\omega + (*) + (\omega_3 + \omega_2) = \\
 &= \varepsilon_0 \chi^{(2)}(\omega_3, \omega_1, \omega_2) A_2^* A_3 e^{i(\omega_3 - \omega_2)t} + (*) + (\omega_3 + \omega_2), \\
 P_2^{(2)}(t) &= \varepsilon_0 \chi^{(2)}(\omega_3, \omega_1, \omega_2) A_1^* A_3 e^{i(\omega_3 - \omega_1)t} + (*) + (\omega_3 + \omega_1), \\
 P_3^{(2)}(t) &= \varepsilon_0 \chi^{(2)}(\omega_3, \omega_1, \omega_2) A_1 A_2 e^{i(\omega_1 + \omega_2)t} + (*) + (\omega_1 - \omega_2).
 \end{aligned}$$

Čia  $(\omega_k + \omega_j)$  žymi papildomus narius su atitinkamais dažniais. Pirmoje formulėje integruojama pagal  $\omega'_2, \omega'_3$  ( $d\omega = d\omega'_2 d\omega'_3$ ). Mus domina sąveika, kurioje  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ .

Nagrinėjame sklaidimą išilgai  $z$  ašies,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ . Iš (22.63) užrašome

$$(22.68) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2} A_1 &= -k^2(\omega_1)A_1 - \frac{\chi^{(2)}(\omega_3, \omega_1, \omega_2)\omega_1^2}{c^2} A_2^* A_3, \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} A_2 &= -k^2(\omega_2)A_2 - \frac{\chi^{(2)}(\omega_3, \omega_1, \omega_2)\omega_2^2}{c^2} A_1^* A_3, \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} A_3 &= -k^2(\omega_3)A_3 - \frac{\chi^{(2)}(\omega_3, \omega_1, \omega_2)\omega_3^2}{c^2} A_1 A_2, \end{aligned}$$

čia  $k(\omega_j) = \frac{\omega_j}{c} \sqrt{\varepsilon(\omega_j)} = k_j$ , kur  $\varepsilon(\omega_j)$  yra laikomas realiuoju dydžiu (nėra sugerties). Parašome  $A_j = A'_j e^{-ik(\omega_j)z}$ , tuomet

$$(22.69) \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} A_j = e^{-ik(\omega_j)z} \left( \frac{\partial^2 A'_j}{\partial z^2} - 2ik(\omega_j) \frac{\partial A'_j}{\partial z} + k^2(\omega_j) A'_j \right).$$

Pirmas narys skliaustuose atmetamas dėl lėtai kintančių amplitudžių artinio. Be to, trečias narys susiprastins su pirmu nariu dešinėje (22.68) lygčių pusėje. Palieka lygtys (atmetus apostrofus)

$$(22.70) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} A_1 &= -i\sigma_1 A_2^* A_3 e^{-i\Delta k z}, \\ \frac{\partial}{\partial z} A_2 &= -i\sigma_2 A_1^* A_3 e^{-i\Delta k z}, \\ \frac{\partial}{\partial z} A_3 &= -i\sigma_3 A_1 A_2 e^{i\Delta k z}, \end{aligned}$$

čia  $\sigma_j = \chi^{(2)}(\omega_3, \omega_1, \omega_2) \frac{\omega_j^2}{2c^2 k(\omega_j)}$  yra netiesinio ryšio koeficientas.  $\Delta k = k_3 - k_1 - k_2$  – fazinis išderinimas. Sąveika efektyviausia, kai  $\Delta k = 0$ . Ši sąlyga vadinama fazinio sinchronizmo sąlyga.

## 22.2.2. Fazinio sinchronizmo sąlyga

Panagrinėkime fazinio sinchronizmo sąlygą antrosios harmonikos generacijos atveju, t. y. kai

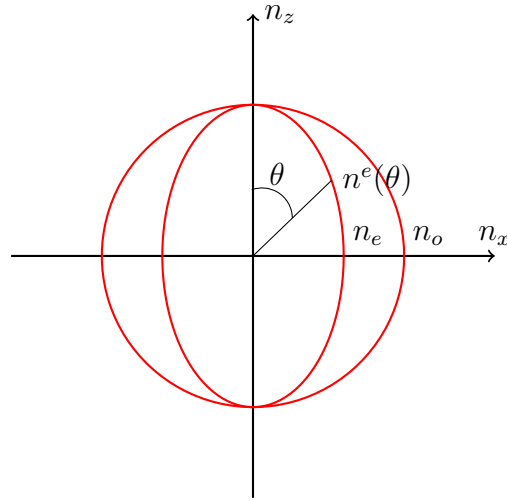
$$(22.71) \quad \omega_1 = \omega_2 = \frac{\omega_3}{2}.$$

Šiuo atveju fazinio sinchronizmo sąlyga  $\Delta k = 0$  gali būti užrašyta taip:

$$(22.72) \quad \omega_1 n(\omega_1) + \omega_1 n(\omega_1) = 2\omega_1 n(2\omega_1)$$

arba

$$(22.73) \quad n(\omega_1) + n(\omega_1) = 2n(2\omega_1).$$



22.5 pav. Lūžio rodikliai vienašiam kristale

Sąlyga, kad  $n(\omega_1)$  sutaptų su  $n(2\omega_1)$ , galėtų būti pasiekta izotropinėje dispersinėje terpėje, tačiau tokiu atveju vienas iš dažnių pakliūtų į sugerties juostą, taigi sąveika nevyktų efektyviai. Tačiau antros harmonikos generacijai naudojami anizotropiniai kristalai. Kaip minėta, anizotropiniame kristale galimas dvejopas lūžis ir sklinda dviejų skirtingų greičių – o ir e – bangos. e bangos lūžio rodiklis priklauso nuo kampo  $\theta$ , kurį sudaro sklidimo kryptis su optine ašimi – 22.5 pav. Čia pavaizduota elipsė atitinka lygtį

$$(22.74) \quad \frac{n_z^2}{n_o^2} + \frac{n_x^2}{n_e^2} = 1,$$

apskritimas – o bangos lūžio rodiklį. Pavaizduotas paveikslėlis atitinka neigiamą kristalą, kai  $n_e < n_o$ . Kaip matome iš brėžinio

$$(22.75) \quad \begin{aligned} n_x &= n^e(\theta) \sin \theta, \\ n_z &= n^e(\theta) \cos \theta. \end{aligned}$$

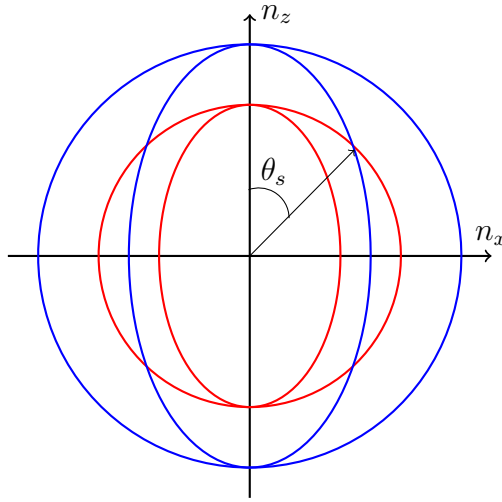
Pasinaudoję (22.74) randame

$$(22.76) \quad n^e(\theta) = \frac{n_o n_e}{\sqrt{n_o^2 - (n_o^2 - n_e^2) \cos^2 \theta}}.$$

Neigiamame kristale galimi du sąveikos tipai: oo-e (I tipo) ir oe-e (II tipo). Panagrinėkime oo-e sąveiką, t. y. kai pirmoji harmonika yra o banga, o antroji harmonika – e banga. Tuomet fazinio sinchronizmo sąlyga atrodo taip

$$(22.77) \quad n_o(\omega_1) = n^e(2\omega_1).$$





22.6 pav. Fazinio sinchronizmo kampas

Naudojantis šia sąlyga ir (22.76) galima gauti fazinio sinchronizmo kampą  $\theta_s$ . Pažymėkime

$$(22.78) \quad n_{o1} = n_o(\omega_1), \quad n_{o2} = n_o(2\omega_1), \quad n_{e2} = n_e(2\omega_1).$$

Turime

$$(22.79) \quad n_{o1} = \frac{n_{o2}n_{e2}}{\sqrt{n_{o2}^2 - (n_{o2}^2 - n_{e2}^2) \cos^2(\theta_s)}}.$$

Iš čia gauname

$$(22.80) \quad \theta_s = \arccos \left[ \frac{n_{o2}}{n_{o1}} \sqrt{\frac{n_{o1}^2 - n_{e2}^2}{n_{o2}^2 - n_{e2}^2}} \right].$$

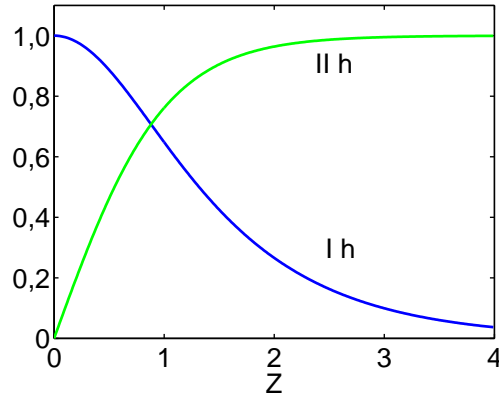
Matome, kad turi būti  $n_{o1} > n_{e2}$ , nes  $n_{o2} > n_{e2}$ , 22.6 pav.

### 22.2.3. Užduotis. Antrosios harmonikos generacija

Sumodeliuoti RK4 metodu antrosios harmonikos generaciją. Lygtys yra šios

$$(22.81) \quad \begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial z} &= -\sigma A_1 A_3, \\ \frac{\partial A_3}{\partial z} &= \sigma A_1^2. \end{aligned}$$

Kompleksinių skaičių (22.70) lygtyje atsikratyta, padarius pakeitimą  $A_1 \rightarrow \exp(i\frac{\pi}{4})A_1$ . Be to,  $\sigma_1 = \sigma_3 = \sigma$  ir tariama, kad yra tenkinama fazinio sinchronizmo sąlyga



22.7 pav. Pirmosios ir antrosios harmonikų amplitudžių kitimo priklausomybė nuo kristalo ilgio

$\Delta k = 0$ . Pirmoji lygtis aprašo pirmosios harmonikos amplitudės kitimą, antroji lygtis – antrosios harmonikos. Sunormuokime šias lygtis. Tam panaudojame bedimensius kintamuosius  $B_1$ ,  $B_3$  ir  $Z$ :

$$(22.82) \quad \begin{aligned} A_1 &= a_0 B_1, \quad A_3 = a_0 B_3, \\ Z &= \frac{z}{L_n}, \quad L_n = \frac{1}{\sigma a_0}. \end{aligned}$$

Gauname bedimensių kintamųjų lygtis:

$$(22.83) \quad \begin{aligned} \frac{\partial B_1}{\partial Z} &= -B_1 B_3, \\ \frac{\partial B_3}{\partial Z} &= B_1^2. \end{aligned}$$

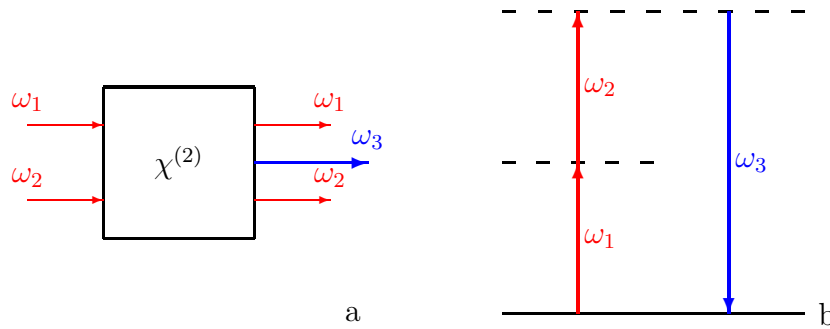
Palyginame gautą sprendinį su teoriniu:

$$(22.84) \quad \begin{aligned} B_1 &= 1/\cosh(Z), \\ B_3 &= \tanh(Z). \end{aligned}$$

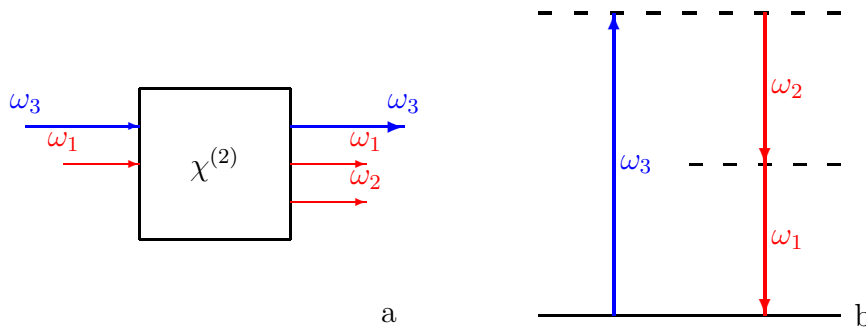
Teorinių sprendinių grafikai pavaizduoti 22.7 pav.

## 22.2.4. Kiti tribangės sąveikos atvejai

Bendresnis atvejis nei antrosios harmonikos generacija yra suminio dažnio generacija. Tuomet į terpę paleidžiamos dvi bangos (dažniai  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ) ir yra generuojama suminio dažnio banga ( $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ ) (22.8 pav.). Netiesinėje terpėje taip pat galima generuoti skirtuminį dažnį, kai paleidžiamos  $\omega_3$  ir  $\omega_1$  dažnių bangos, o generuojama



22.8 pav. Suminio dažnio generacija



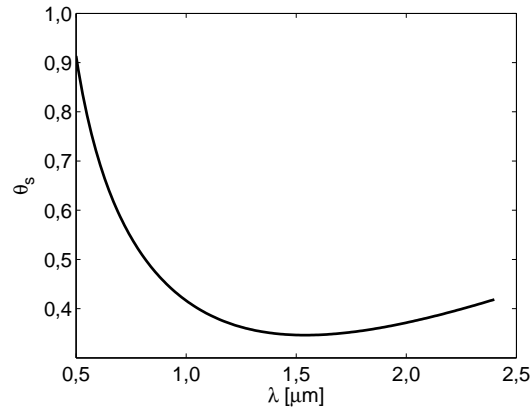
22.9 pav. Parametrinis stiprinimas

$\omega_2 = \omega_3 - \omega_1$  dažnio banga (22.9 pav.). Kai pradinė  $\omega_1$  dažnio banga silpna, ji ima energiją iš  $\omega_3$  dažnio bangos ir stiprinasi. Pirmoji banga vadinama signaline, antroji – kaupinimo, o procesas – parametriniu stiprinimu. Generuojama skirtuminio dažnio banga vadinama šalutine.

Kitas įdomus atvejis – parametrinė generacija, kai į terpę paleidžiama tik kaupinimo banga ir generuojamos signalinė ir šalutinė bangos. Iš (22.70) lygčių matome, kad, esant nulinėms  $A_1$  ir  $A_2$  vertėms, jų išvestinės lygios nuliui. Taigi šios lygtys nepaaiškina generuojamų bangų atsiradimo. Norint paaiškinti parametrinę generaciją, reikia kvantmechaninio aprašymo, kuriame parodoma, kad signalinių bei šalutinių fotonų fluktuacijos nelygios nuliui. Todėl sakoma, kad generuojama iš kvantinių triukšmų.

### 22.2.5. Užduotis. Fazinio sinchronizmo kreivės

Nubrėžti fazinio sinchronizmo kreives BBO kristalui: a) antrosios harmonikos generacijos atveju; b) parametrinio stiprinimo atveju. Kolinearus atvejais. Gauti 22.10 ir



22.10 pav. Fazinio synchronizmo kreivė antrosios harmonikos generacijos atveju: synchronizmo kampo priklausomybės nuo pirmosios harmonikos bangos ilgio grafikas. BBO kristalas

22.11 pav. pavaizduotas kreives. Zelmejerio (Sellmeier) formulės BBO kristalui:

$$(22.85) \quad n_o^2 = 2,7359 + \frac{0,01878}{\lambda^2 - 0,01822} - 0,01354\lambda^2,$$

$$(22.86) \quad n_e^2 = 2,3753 + \frac{0,01224}{\lambda^2 - 0,01667} - 0,01516\lambda^2.$$

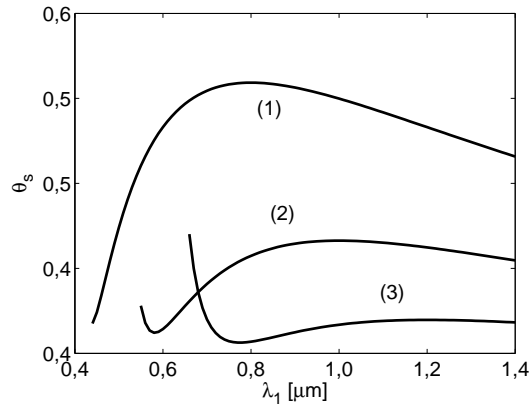
Bangos ilgis  $\lambda$  nurodytas  $\mu\text{m}$ .

## 22.3. Netiesinė šviesolaidžių optika\*

Šviesolaidžius galima panaudoti netiesiniams efektams demonstruoti. Stiklo šviesolaidis yra trečios eilės netiesinė terpė. Šviesos sklidimui šviesolaidyje aprašyti naudojama netiesinė Šrėdingerio lygtis [1], [2], [14].

Pirmieji bandymai su šviesolaidžiais buvo atlikti praeito amžiaus šeštame dešimtmetyje, kai atsirado lazeriai ir netiesinė optika. Tačiau tuomet šviesolaidžių panaudojimas buvo ribotas dėl didelių nuostolių. Septintame dešimtmetyje šią problemą pavyko išspręsti [15], ir netrukus Belo (Bell) laboratorijoje Si šviesolaidžiuose buvo pademonstruoti pirmieji netiesiniai efektai.

Čia parodysime, kaip išvedama netiesinė Šrėdingerio lygtis šviesolaidžiams. Bus pateikti šios lygties modeliavimo rezultatai, demonstruojantys šiuos netiesinius efektus: savimoduliaciją, solitonų formavimąsi bei superkontinuumo generaciją.



22.11 pav. Fazinio sinchronizmo kreivė parametrinio stiprinimo atveju: fazinio sinchronizmo kampo priklausomybės nuo signalinės bangos ilgio  $\lambda_1$  grafikas. BBO kristalas, kaupinimo bangos ilgis  $\lambda_3$  ( $\mu\text{m}$ ): 0,4 (1); 0,5 (2); 0,6 (3)

### 22.3.1. Netiesinė Šrėdingerio lygtis šviesolaidžiams

Kaip ir 22.1.2 skyrelyje pradėsime nuo banginės lygties kubinei terpei:

$$(22.87) \quad \Delta E = \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} D^{(1)} + \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} P^{(3)}.$$

Atlikę Furjė transformaciją, Furjė vaizdui  $E(\omega, \mathbf{r})$  gauname lygtį

$$(22.88) \quad -\Delta E(\omega, \mathbf{r}) - \frac{\omega^2 \varepsilon(\omega, x, y)}{c^2} E(\omega, \mathbf{r}) = \mu_0 \omega^2 P^{(3)}(\omega, \mathbf{r}).$$

Čia  $\varepsilon(\omega, x, y)$  parodo lūžio rodiklio  $n = \sqrt{\varepsilon}$  priklausomybę nuo skersinių koordinatėjų  $(x, y)$ . Ši priklausomybė sąlygojama šviesolaidžio konfigūracijos. Lūžio rodiklis taip pat priklauso nuo dažnio  $\omega$ . Pradžioje panagrinėkime atvejį, kai sklidimas yra tiesinis. Tuomet nagrinėjama lygtis

$$(22.89) \quad \Delta E + \frac{\omega^2 \varepsilon(\omega, x, y)}{c^2} E = 0.$$

Jos sprendinį galima faktorizuoti:

$$(22.90) \quad E(\omega, x, y, z) = F(x, y) V(\omega, z).$$

Čia  $F$  ir  $V$  yra atitinkamai skersinė ir išilginė  $E$  dalys. Įrašę šią išraišką į lygtį, gauname

$$(22.91) \quad V \Delta_{\perp} F + F \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\omega^2 \varepsilon(\omega, x, y)}{c^2} V F = 0.$$

Šią lygtį dalijame iš  $VF$  ir gauname lygtį

$$(22.92) \quad \frac{\Delta_{\perp} F}{F} + \frac{1}{V} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\omega^2 \varepsilon(\omega, x, y)}{c^2} = 0,$$

kurią galime perskirti į dvi lygtis:

$$(22.93) \quad \frac{\Delta_{\perp} F}{F} + \frac{\omega^2 \varepsilon(\omega, x, y)}{c^2} = \lambda(\omega),$$

$$(22.94) \quad \frac{1}{V} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\lambda(\omega).$$

Čia  $\lambda(\omega)$  yra konstanta, nepriklausanti nuo  $x$ ,  $y$ ,  $z$  koordinatė. Pastarąsias dvi lygtis pertvarkome:

$$(22.95) \quad \Delta_{\perp} F + \frac{\omega^2 \varepsilon(\omega, x, y)}{c^2} F = \lambda(\omega) F,$$

$$(22.96) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\lambda(\omega) V.$$

Jos įgauna tikrinių verčių uždavinio formą.  $\lambda$  turi tikrinės vertės prasmę. Lygtį (22.96) galime išspręsti, sprendinys yra

$$(22.97) \quad V = e^{\sqrt{-\lambda}z}.$$

$\lambda$  gali būti kompleksinis:

$$(22.98) \quad \lambda = (\beta - i\alpha/2)^2,$$

tuomet

$$(22.99) \quad \sqrt{-\lambda} = -i\beta - \alpha/2.$$

$\alpha$  turi gesimo koeficiento prasmę. Iš tikrųjų, įrašę  $V$  į  $E$  (22.90) išraišką, gauname  $E(\omega, \mathbf{r}) = F(x, y)e^{-i\beta z - \alpha z/2}$ . Intensyvumas proporcingas pastarosios išraiškos modulio kvadratui,  $|E|^2 \propto e^{-\alpha z}$ . Taigi,  $\alpha$  yra gesimo koeficientas, gesimas vyksta išilgai  $z$  koordinatės.

Grįžkime prie netiesinės lygties (22.88). Čia vėl atliekame faktorizavimą (22.90).  $F$  vėl tenkina lygtį (22.95). O  $V$  yra kitoks nei tiesiniu atveju. Faktorizavę turime:

$$(22.100) \quad F \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + V \Delta_{\perp} F + \frac{\omega^2 \varepsilon(\omega, x, y)}{c^2} V F = -\mu_0 \omega^2 P^{(3)}.$$

Pasinaudojame (22.95). Dauginame iš  $F^*$  ir integruojame pagal  $x, y$ :

$$(22.101) \quad \int F^* F dx dy \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + V \lambda \int F^* F dx dy = -\mu_0 \omega^2 \int F^* P^{(3)} dx dy.$$

Irašome  $P^{(3)}$  išraišką:

$$(22.102) \quad P^{(3)} = \varepsilon_0 \chi^{(3)}(\omega) |E(\omega, \mathbf{r})|^2 E(\omega, \mathbf{r}) = \varepsilon_0 \chi^{(3)}(\omega) |V|^2 V |F|^2 F.$$

Integralas (22.101) dešinėje:

$$(22.103) \quad \int F^* P^{(3)} dx dy = \varepsilon_0 \chi^{(3)} V |V|^2 \int |F|^4 dx dy.$$

Taigi, gauname lygtį:

$$(22.104) \quad -\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \lambda V = \chi^{(3)} \frac{\omega^2}{c^2} S |V|^2 V,$$

čia šviesos greitis  $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$  ir pažymėta

$$(22.105) \quad S = \frac{\int |F|^4 dx dy}{\int |F|^2 dx dy}.$$

Atskirkime lėtai kintančią amplitudę ir greitą fazinę dalį:

$$(22.106) \quad V = \frac{1}{2} A(\Omega, z) e^{i\omega_0 t - i\beta_0 z} + (*).$$

Čia  $\beta_0 = \beta(\omega_0)$ ,  $\omega_0$  yra nešlio dažnis. Dažnio pokytis  $\Omega = \omega - \omega_0$ . Vykstant saviveikai gauname lygtį:

$$(22.107) \quad -\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + 2i\beta_0 \frac{\partial A}{\partial z} + \left( \beta_0^2 - \left( \beta - \frac{i\alpha}{2} \right)^2 \right) A = \frac{\omega^2}{c^2} S \frac{3}{8} \chi^{(3)} |A|^2 A.$$

Šią lygtį galime perrašyti taip:

$$(22.108) \quad \left( i \frac{\partial}{\partial z} + \beta_0 + \frac{\omega}{c} \sqrt{n(\omega)^2 + q(\omega)} \right) \left( i \frac{\partial}{\partial z} + \beta_0 - \frac{\omega}{c} \sqrt{n(\omega)^2 + q(\omega)} \right) A(\Omega, z) = 0,$$

čia pažymėta

$$(22.109) \quad q(\omega) = S \frac{3}{8} \chi^{(3)} |A|^2,$$

$$(22.110) \quad n^2 = \frac{c^2}{\omega^2} \left( \beta - \frac{i\alpha}{2} \right)^2 = \lambda \frac{c^2}{\omega^2}.$$

Galime spręsti tik į vieną pusę judančios bangos lygtį:

$$(22.111) \quad \left( i \frac{\partial}{\partial z} + \beta_0 - \frac{\omega}{c} \sqrt{n^2 + q} \right) A(\Omega, z) = 0.$$

Šaknį skleidžiame Teiloro eilute:  $\sqrt{n^2 + q} \approx n \left( 1 + \frac{q}{2n^2} \right)$ . Gauname

$$(22.112) \quad \left( i \frac{\partial}{\partial z} + \beta_0 - \left( \beta - i \frac{\alpha}{2} + q \frac{\omega}{c} \frac{1}{2n_0} \right) \right) A(\Omega, z) = 0.$$

Čia nario prie  $q$  vardiklyje neįskaitėme lūžio rodiklio dispersijos. Bangos skaičių  $\beta$  skleidžiame Teiloro eilute centrinio dažnio  $\omega_0$  aplinkoje:

$$(22.113) \quad \beta = \beta_0 + \frac{\partial \beta}{\partial \omega} \Omega + \frac{\partial^2 \beta}{\partial \omega^2} \frac{\Omega^2}{2} + \dots = \beta_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial^m \beta}{\partial \omega^m} \frac{\Omega^m}{m!}.$$

Įrašę šį skleidinį gauname

$$(22.114) \quad \frac{\partial A(\Omega, z)}{\partial z} + \frac{\alpha}{2} A(\Omega, z) = i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial^m \beta}{\partial \omega^m} \frac{\Omega^m}{m!} A(\Omega, z) + i q \frac{\omega}{c} \frac{1}{2n_0} A(\Omega, z).$$

Lieka atlikti atvirkštinę šios lygties Furjė transformaciją. Gauname

$$(22.115) \quad \frac{\partial A(t, z)}{\partial z} + \frac{\alpha}{2} A(t, z) = i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial^m \beta}{\partial \omega^m} \frac{i^m}{m!} \frac{\partial^m A}{\partial t^m} + i S \frac{1}{2n_0} FT^{-1} \left[ \frac{\omega}{c} \frac{3}{8} \chi^{(3)}(\omega) |A(\Omega, z)|^2 A(\Omega, z) \right].$$

Sumoje paliekame narius iki antrosios eilės laikinės išvestinės. Be to, neįskaitome netiesinio nario dispersijos. Neatsižvelgiame į gesimą  $\alpha$ . Tuomet gauname lygtį

$$(22.116) \quad \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{u_0} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i g_0}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = i \gamma |A|^2 A,$$

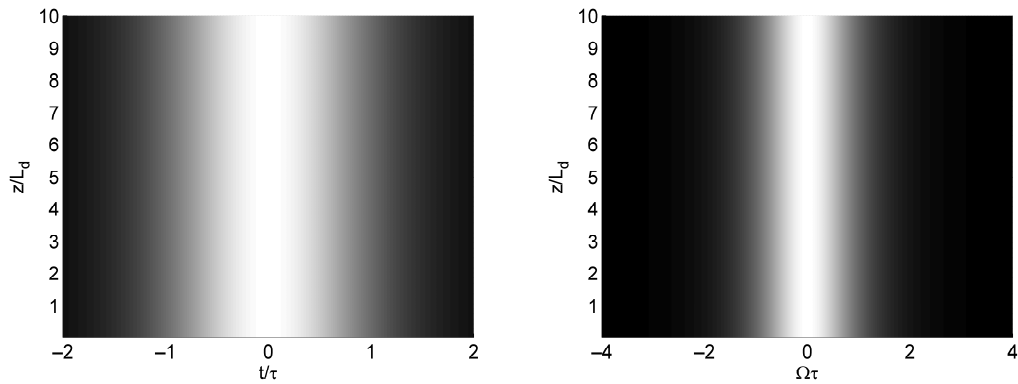
čia  $\gamma = S \frac{1}{2n_0} \frac{\omega_0}{c} \frac{3}{8} \chi^{(3)}(\omega_0)$ . Perėję prie judančios koordinatinių sistemos ir atsikratę pirmosios eilės išvestinės, gauname

$$(22.117) \quad i \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{g_0}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\gamma |A|^2 A.$$

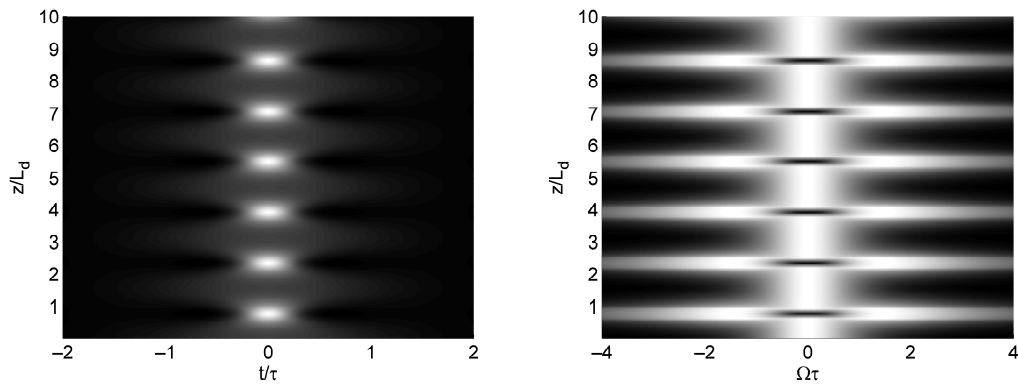
Tai yra netiesinė Šrėdingerio lygtis. Įrašome naujus kintamuosius  $N^2 = \frac{\gamma a_0^2 \tau^2}{|g_0|}$ ,  $\delta_0 = \text{sgn}(g_0) = \pm 1$ .  $A = a_0 B$ ,  $\tau$  – impulso trukmė. Gauname bedimensę lygtį:

$$(22.118) \quad i \frac{\partial B}{\partial Z} - \frac{\delta_0}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial T^2} + N^2 |B|^2 B = 0.$$





22.12 pav. Pirmos eilės solitonas šviesolaidyje. Intensyvumas (kairėje) ir spektrinis intensyvumas (dešinėje).  $\delta_0 = -1$ ,  $N = 1$



22.13 pav. Antros eilės solitonas šviesolaidyje. Intensyvumas (kairėje) ir spektrinis intensyvumas (dešinėje).  $\delta_0 = -1$ ,  $N = 2$

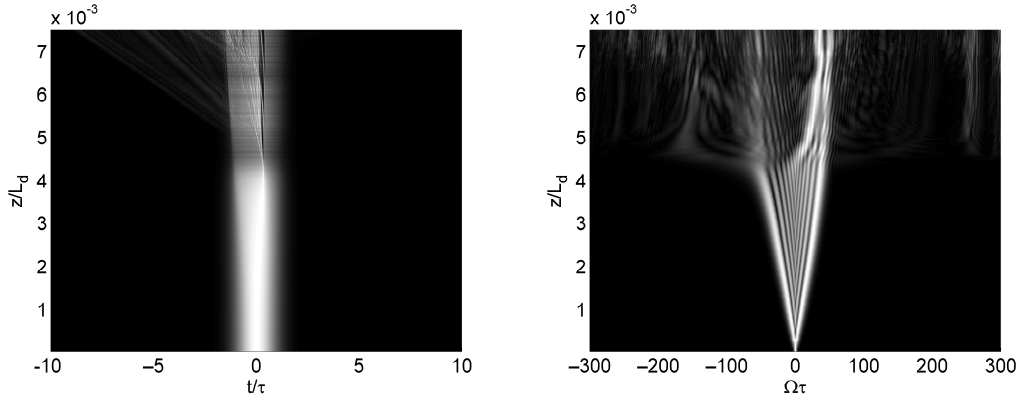
### 22.3.2. Netiesiniai reiškiniai šviesolaidžiuose

#### Solitonai

Anomalios grupinių greičių dispersijos atveju (ženklas  $\delta_0 = \text{sgn}(g_0) = -1$ ), kai  $N = 1$ , netiesinę Šrėdingerio lygtį (22.118) tenkina toks solitoninis sprendinys:

$$(22.119) \quad \text{sech}(T)e^{iz}.$$

Tai yra paprasčiausias solitoninio sprendinio atvejis. Solitonai galimi ir kai  $N \neq 1$ . 22.12 ir 22.13 pav. pavaizduoti solitonai, kai  $N = 1$  ir  $N = 2$ . Tokie solitonai atitinkamai vadinami pirmos ir antros eilės. Matome, kad antros eilės solitonas periodiškai osciliuoja išilgai koordinatės  $z$ .



22.14 pav. Savimoduliacija ir superkontinuumo generacija. Intensyvumas (kairėje) ir spektrinis intensyvumas (dešinėje).  $\delta_0 = +1$ ,  $N = 100$ ,  $L/L_h = 0,01$

### Savimoduliacija ir superkontinuumas

Kai grupinių greičių dispersija normali (ženklas  $\delta_0 = \text{sgn}(g_0) = +1$ ), vyksta savimoduliacija, spektras plinta. Kai kuriais atvejais spektras gali smarkiai išplisti, generuojasi superkontinuumas. Tuomet (22.113) skleidinyje nepakanka įskaityti narius tik iki antros eilės išvestinės. Reikia atsižvelgti į tolimesnius narius. Čia pateiksime tokios lygties modeliavimo rezultatus:

$$(22.120) \quad i \frac{\partial B}{\partial Z} - \frac{\delta_0}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial T^2} - i \frac{L_d}{L_h} \frac{\partial^3 B}{\partial T^3} + N^2 |B|^2 B = 0.$$

Čia  $L_h = 6\tau^3/h$ , kur  $h = \partial^3 \beta / \partial \omega^3$ .  $L_h$  yra charakteringasis ilgis, kuriame turi būti įskaityta trečios eilės išvestinė. 22.14 pav. pavaizduoti savimoduliacija ir superkontinuumo atsiradimas, kai  $N = 100$ .

# Literatūra

- [1] Agrawal G. P., Nonlinear fiber optics: its history and recent progress [Invited], *JOSA B* 28, A1-A10 (2011).
- [2] Agrawal G. P., Nonlinear fiber optics (2007).
- [3] Allen L., Beijersbergen M. W., Spreeuw R. J. C., Woerdman J. P., Orbital angular momentum of light and transformation of Laguerre-Gaussian laser modes, *Phys. Rev. A*, 45, 8185–8190 (1992).
- [4] Arfken G. B., Weber H. J., *Mathematical methods for physicists* (1995).
- [5] Bandzaitis A., Grabauskas D., *Kvantinė mechanika* (1975).
- [6] Boyd R. W., *Nonlinear optics* (2003).
- [7] Couillet P., Gil L., Rocco F., Optical vortices, *Opt. Commun.*, 73, 403–407 (1989).
- [8] Fleck Jr. J. A., Ultrashort-pulse generation by Q-switched lasers, *Phys. Rev. B*, 1, 84–100 (1970).
- [9] Forysiak W., Moloney J. V., Dynamics of synchronously pumped mode-locked color-center lasers, *Phys. Rev. A*, 45, 3275–3288 (1992).
- [10] Goodman J. W., *Statistical optics* (1985).
- [11] Haken H., *Laser light dynamics* (1986).
- [12] Haus H. A., A theory of forced mode locking, *IEEE J. Quantum. Electron.*, QE-11, 323–330 (1975).
- [13] Herrmann J., Wilhelmi B., *Laser fuer ultrakurze lichtimpulse* (1984).
- [14] Hohengen T., Schmidt F., On the numerical simulations of nonlinear Schrodinger type equations in fiber optics, ZIB Report 02-04 (Januar 2002).

- 
- [15] Kapron F. P., Keck D. B., Maurer R. D., Radiation losses in glass optical waveguides, *App. Phys. Lett.* 17, 423–425 (1970).
- [16] Kuizenga D. J., Siegman A. E., FM and AM mode locking of the homogeneous laser – part I: theory, *IEEE J. Quantum Electron.*, QE-8, 694–708 (1970).
- [17] Loudon R., *The quantum theory of light* (2000).
- [18] Mandel L., Wolf E., *Optical coherence and quantum optics* (1995).
- [19] Matveev A. N., *Optics* (1988).
- [20] Nye J. F., Berry M. V., Dislocations in wave trains, *Proc. R. Soc. London A*, 336, 165–190 (1974).
- [21] Risken H., *The Fokker-Planck equation* (1989).
- [22] Scully M. O., Zubairy M. S., *Quantum optics* (1997).
- [23] Stabinis A., Valiulis G., *Ultratrumpųjų šviesos impulsų netiesinė optika*, Vilnius (2008).
- [24] Svelto O., *Principles of Lasers* (1998).
- [25] Wagner W. G., Lengyel B. A., Evolution of giant pulse in a laser, *J. Appl. Phys.* 34, 2040–2046 (1963).
- [26] Yariv A., *Quantum electronics* (1989).



## Užsienietiškų pavardžių rodyklė

Pavardė lietuviškai	Pavardė angliškai
Basovas	Basov
Beselis	Bessel
Bolcmanas	Boltzmann
Braunas	Brown
Cenderis	Zehnder
Chinčinas	Khintchine
Dekartas	Descartes
Dopleris	Doppler
Einšteinas	Einstein
Ermitas	Hermite
Fabri	Fabry
Ferma	Fermat
Fokeris	Fokker
Fraunhoferis	Fraunhofer
Frenelis	Fresnel
Furjė	Fourier
Gausas	Gauss
Glauberis	Glauber
Grynas	Green
Guji	Gouy
Hamiltonas	Hamilton
Helmholcas	Helmholtz
Jungas	Young
Kirkhofas	Kirchhoff
Krankas	Crank
Kronekeris	Kronecker
Kulonas	Coulomb
Kutas	Kutta
Lageras	Laguerre
Lagranžas	Lagrange
Lanževenas	Langevin
Laplasas	Laplace
Lorencas	Lorentz
Ostrogradskis	Ostrogradsky

Pavardė lietuviškai	Pavardė angliškai
Machas	Mach
Maikelsonas	Michelson
Maimanas	Maiman
Maksvelas	Maxwell
Naikvistas	Nyquist
Nikolsonas	Nicolson
Oileris	Euler
Pero	Perot
Plankas	Planck
Pointingas	Poynting
Pokeltas	Pockels
Prochorovas	Prokhorov
Puasonas	Poisson
Relėjus	Rayleigh
Rungė	Runge
Snelijus	Snellius
Sudaršanas	Sudarshan
Šanonas	Shannon
Šrėdingeris	Schroedinger
Taunsas	Towns
Teiloras	Taylor
Tvisas	Twiss
Vineris	Wiener
Vitakeris	Whitaker
Zomerfeldas	Sommerfeld