1. Įvadas. Laisvųjų dalelių kvantinės mechanikos elementai

1.1. Branduolio nukleonų energijos diskretumo aiškinimas. Dalelė stačiakampėje potencialo duobėje

Dalelės ***banginė funkcija*** – tai koordinačių ir laiko kompleksinė funkcija $\Psi(x,y,z,t)$, kuri apibūdina dalelės judėjimo būseną ir kurios modulio kvadratas lygus tikimybės tankiui aptikti duotosios būsenos dalelę erdvės taške su koordinatėmis x, y ir z laiko momentu t:

$$|\Psi|^2 = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}V}$$

Banginės funkcijos normavimo sąlyga:

$$\int_{\infty} |\Psi|^2 \, \mathrm{d}V = 1$$

Šrėdingerio lygtis (nenuostovioji):

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + U(x,y,z,t)\Psi = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

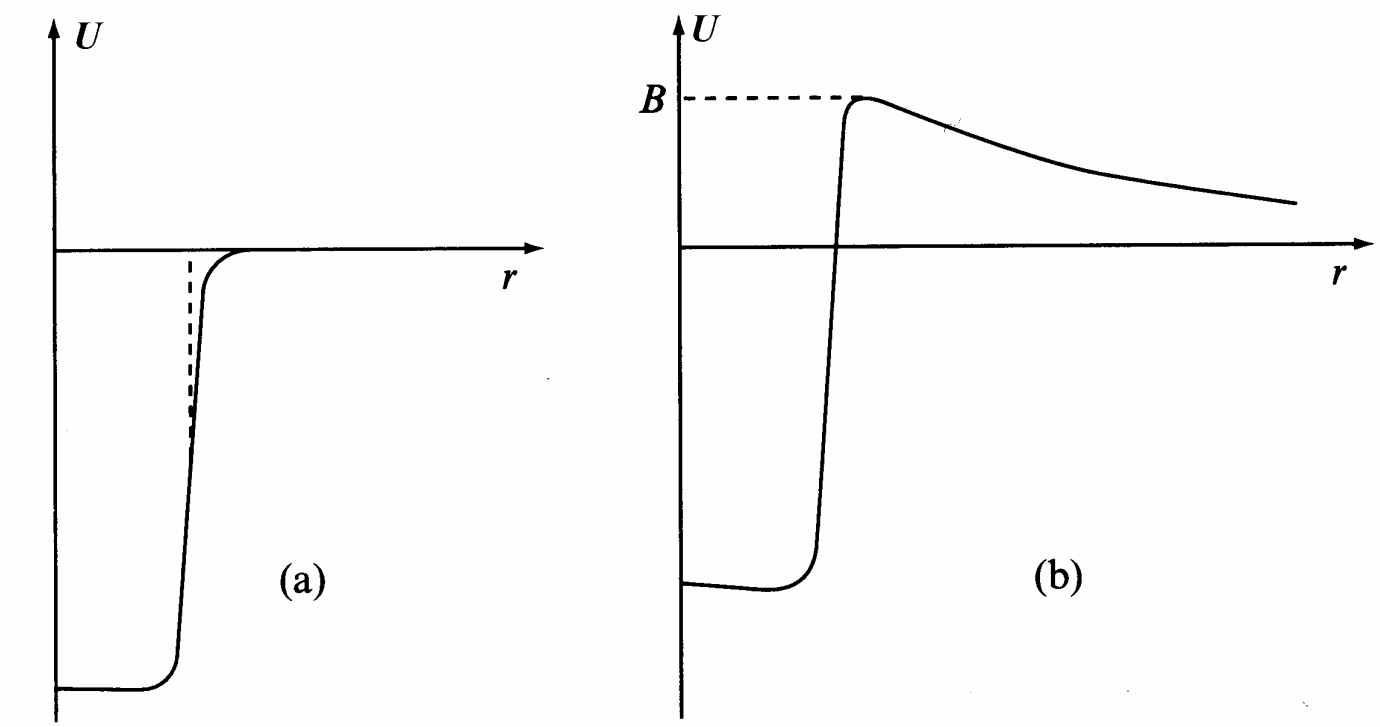
Jeigu dalelės potencinė energija U išreikštu pavidalu nepriklauso nuo laiko (t. y. jeigu dalelė juda ***nuostoviajame potencialiniame lauke***), tada šios lygties sprendiniai yra tokio pavidalo:

$$\Psi(x,y,z,t) = \psi(x,y,z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et/\hbar},$$

o erdvinių koordinačių funkciją $\psi(x,y,z)$ nusako ši lygtis:

$$\nabla^2\psi + \frac{2m}{\hbar^2}[E - U(x,y,z)]\psi = 0.$$

Tai yra ***nuostovioji Šrėdingerio lygtis***. ***Nuostoviosios būsenos.***

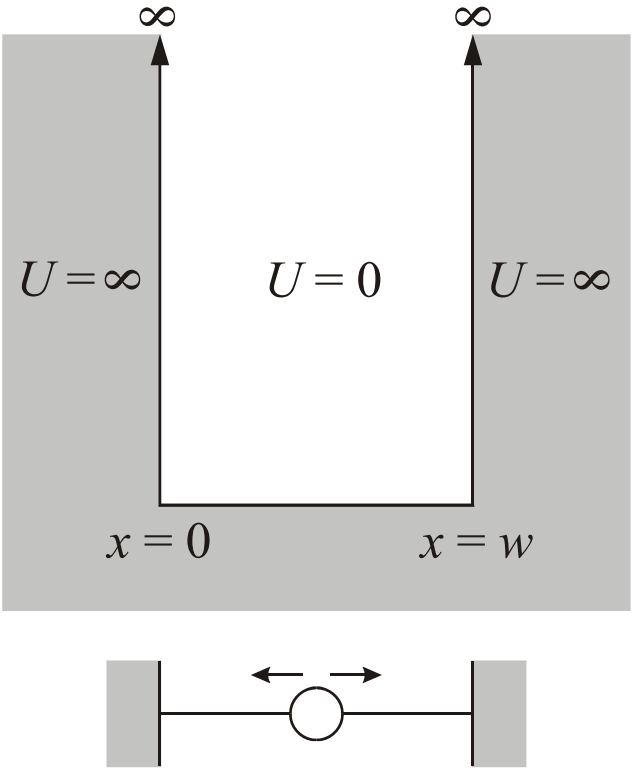


1.1 pav. Neutrono (a) ir protono (b) potencinės energijos priklausomybė nuo atstumo iki branduolio centro. Už branduolio ribų protoną veikia tik kuloninė stūmos jėga, kurią atitinka potencinė energija $U = Ze^2 / (4\pi\varepsilon_0 r)$.

Reikalavimai bangine funkcijai („standartinės sąlygos“): banginė funkcija turi būti:

1) baigtinė (tikimybės tankis negali būti begalinis);
2) vienareikšmė (tikimybė negali būti daugiareikšmė);
3) tolydi (tikimybės tankis erdvėje negali kisti šuoliais).

Jeigu dalelė yra potencialo duobėje, tada šios sąlygos gali būti tenkinamos tik esant tam tikroms E vertėms.



1.2 pav. Realios potencialo duobės aproksimacija – begalinio gylio stačiakampė potencialo duobė. Dalelė gali laisvai judėti erdvės srityje $0 \le x \le w$, tačiau negali būti erdvės srityse $x < 0$ ir $x > w$. Apačioje pavaizduotas tokios sistemos klasikinis analogas: rutuliukas, kuris slysta be trinties išilgai vielos ir tampriai atšoka nuo kietų sienų taškuose $x = 0$ ir $x = w$

$$U(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le w; \\ \infty, & x < 0 \text{ ir } x > w. \end{cases}$$

Atitinkama nuostovioji Šrėdingerio lygtis:

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi = 0 \qquad (0 \le x \le w).$$

arba:

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} + k^2\psi = 0 \qquad (0 \le x \le w),$$

čia

$$\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E} = k$$

Iš banginės funkcijos tolydumo reikalavimo išplaukia dvi kraštinės sąlygos:

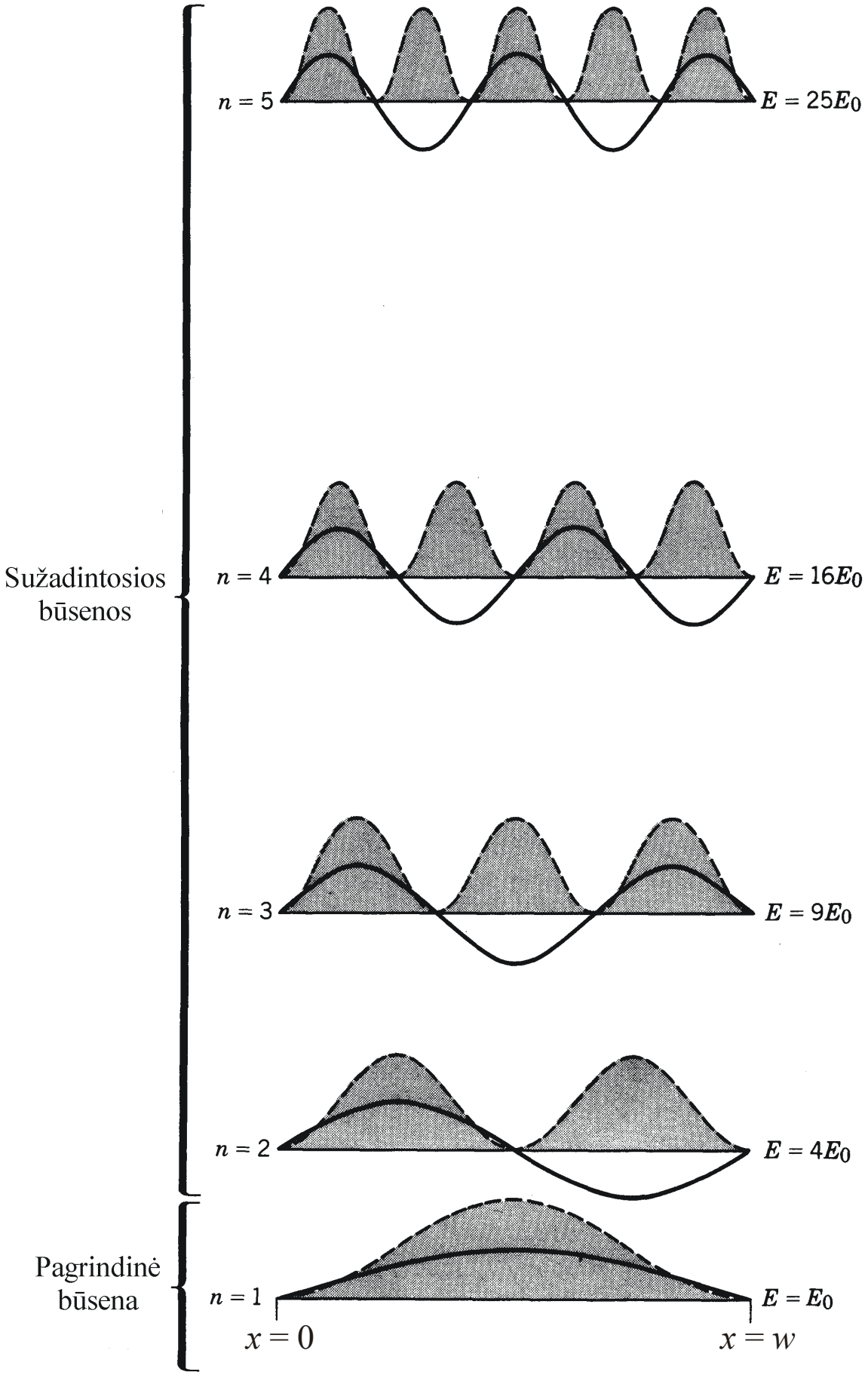
$$\psi(0) = 0, \quad \psi(w) = 0.$$

Šios kraštinės sąlygos tenkinamos tik tada, kai $kw = n\pi$ ($n = 0, \pm1, \pm2, ...$), t. y. kai

$$E = E_n = n^2\frac{\pi^2\hbar^2}{2mw^2} = n^2\frac{h^2}{8mw^2} \qquad (n = 1, 2, 3, ...).$$

Atitinkami normuotieji sprendiniai (banginės funkcijos) yra

$$\psi(x) = \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{w}}\sin\frac{n\pi}{w}x.$$



1.3 pav. Be galo gilios vienmatės stačiakampės potencialo duobės energijos lygmenys, banginės funkcijos (ištisinės kreivės) ir tikimybės tankiai (brūkšninės kreivės). Energija E_0 lygi $h^2/(8mw^2)$

Trimatis uždavinys: dalelė uždaryta kubinėje potencialo duobėje („dėžėje“). Atitinkama nuostovioji Šrėdingerio lygtis yra

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\frac{2m}{\hbar^2}E\psi=0.$$

Kraštinės sąlygos:

$$\begin{cases}\psi(0,y,z)=0, & \psi(w,y,z)=0;\\ \psi(x,0,z)=0, & \psi(x,w,z)=0;\\ \psi(x,y,0)=0, & \psi(x,y,w)=0.\end{cases}$$

Lygtis sprendžiama kintamųjų atskyrimo metodu, t. y. ieškoma tokio pavidalo sprendinių:

$$\psi(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z).$$

Įrašius šį reiškinį į pradinę lygtį, ji virsta trim nepriklausomomis lygtimis:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\right)=const=E_x \qquad \text{ir analogiškos lygtys } y \text{ ir } z \text{ atžvilgiu.}$$

Be to, šitaip gauname, kad

$$E_x+E_y+E_z=E.$$

Kiekviena iš šių trijų lygčių yra tokia pati kaip anksčiau išspręsta vienmatės begalinio gylio potencialo duobės Šrėdingerio lygtis. Todėl galima taikyti anksčiau gautas išraiškas:

$$E=E_n=\frac{h^2}{8mw^2}\left(n_x^2+n_y^2+n_z^2\right) \qquad (n_x,n_y,n_z=1,2,3,...),$$

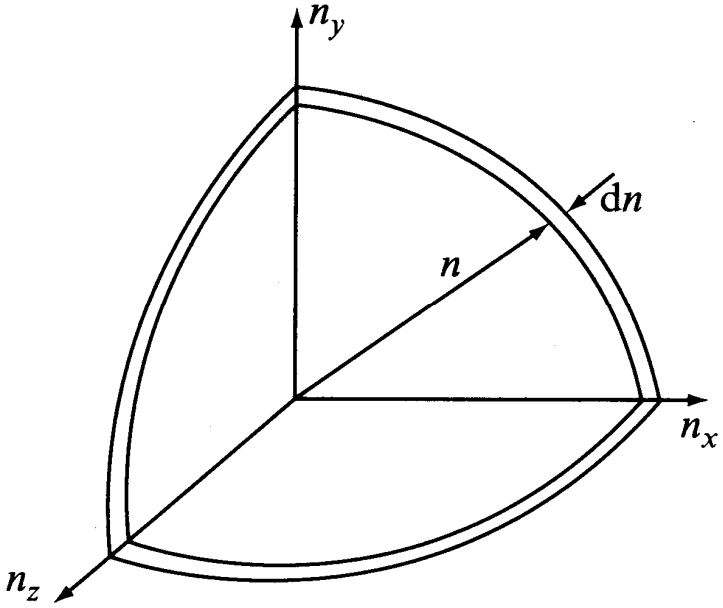
$$\psi(x,y,z)=\psi_{n_x,n_y,n_z}(x)=\left(\frac{2}{w}\right)^{\frac{3}{2}}\sin k_x x\cdot\sin k_y y\cdot\sin k_z z,$$

$$k_x=\frac{n_x\pi}{w},\quad k_y=\frac{n_y\pi}{w},\quad k_z=\frac{n_z\pi}{w}.$$

n_x, n_y ir n_z – ***kvantiniai skaičiai***. Kiekvienas kvantinių skaičių verčių rinkinys atitinka vieną ***kvantinę būseną***.

1.2. Laisvų dalelių būsenų tankis

Būsenų tankis $\rho(E)$ (tiksliau – *energinis* būsenų tankis) apibrėžiamas kaip skirtingų kvantinių būsenų skaičius, atitinkantis vienetinį energijos intervalą ir vienetinį erdvės tūrį.



1.4 pav. Dalelės, kuri uždaryta kubinėje erdvės srityje, kvantines būsenas atitinkantys kvantiniai skaičiai. Kiekvieną būseną atitinka taškas, kurio koordinatės yra sveikieji teigiamieji skaičiai. Visos būsenos, kurios priklauso oktanto sferiniam sluoksniui tarp n ir n + dn, turi apytiksliai vienodą energiją

Oktanto sluoksnyje esančių būsenų skaičius:

$$\rho(E)\mathrm{d}E = \frac{\pi n^2 \mathrm{d}n}{2}$$

Kadangi

$$E = \frac{h^2 n^2}{8mw^2},$$

tai dydžius n ir n dn galima išreikšti dydžiu E. Taip gauname

$$\rho(E)\mathrm{d}E = V\frac{2^{5/2}\pi m^{3/2}}{h^3}\sqrt{E}\mathrm{d}E;$$

čia $V = w^3$ yra kubo tūris.

Dalelės, kuri uždaryta potencialo duobėje, banginės funkcijos yra stovinčiųjų bangų pavidalo. Laisvos dalelės banginės funkcijos yra bėgančiųjų bangų pavidalo:

$$\psi(\boldsymbol{r}) \sim \exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}) = \exp(\mathrm{i}(k_x x + k_y y + k_z z)).$$

Tos bangos dar vadinamos „de Broilio bangomis“. $\boldsymbol{k}$ yra bangos vektorius, kuris susijęs su impulsu $\boldsymbol{p}$:

$$\boldsymbol{p} = \hbar\boldsymbol{k}.$$

Bangų dažnis ω susijęs su dalelės kinetinė energija E:

$$E = \hbar\omega.$$

Jeigu

$$\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E} = k,$$

tada funkcija $\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$ yra Šrėdingerio lygties sprendinys esant bet kokiai $\boldsymbol{k}$ vertei ir bet kokiai neneigiamai E vertei. Tai reiškia, kad laisvos dalelės būsenų tankis $\rho(E) \to \infty$. Antra vertus, kadangi laisvoji dalelė su vienoda tikimybe gali būti bet kuriame erdvės taške, iš normavimo sąlygos išplaukia, kad $\psi(\boldsymbol{r}) \to 0$. Tačiau teoriškai skaičiuojant patogiau operuoti baigtiniais dydžiais. Todėl apibrėžiant laisvos dalelės būsenų tankį daroma formali prielaida, kad dalelė yra viduje kubo, kurio briaunos ilgis w, ir naudojamos periodinės kraštinės sąlygos:

$$\begin{cases} \psi(0,y,z) = \psi(w,y,z); \\ \psi(x,0,z) = \psi(x,w,z); \\ \psi(x,y,0) = \psi(x,y,w). \end{cases}$$

Šios kraštinės sąlygos yra tenkinamos, jeigu dalelės banginio vektoriaus komponentės atitinka šias lygybes:

$$k_x = \frac{2n_x\pi}{w}, \quad k_y = \frac{2n_y\pi}{w}, \quad k_z = \frac{2n_z\pi}{w} \qquad (n_x, n_y, n_z = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$$

Apibrėžiant laisvos dalelės būseną vietoj energinio būsenų tankio $\rho(E)$ patogiau naudoti impulso būsenų tankį $\rho(p)$. Tuo pačiu metodu, kaip ir nagrinėjant kubinę potencialo duobę (t. y. apskaičiavus sferiniame sluoksnyje, kurio spindulys n, esančių būsenų skaičių ir išreiškus dydžius n bei n dn dalelės impulsu p) gaunama tokia impulso būsenų tankio $\rho(p)$ išraiška:

$$\rho(p)\mathrm{d}p = V\frac{4\pi p^2 \mathrm{d}p}{h^3}.$$

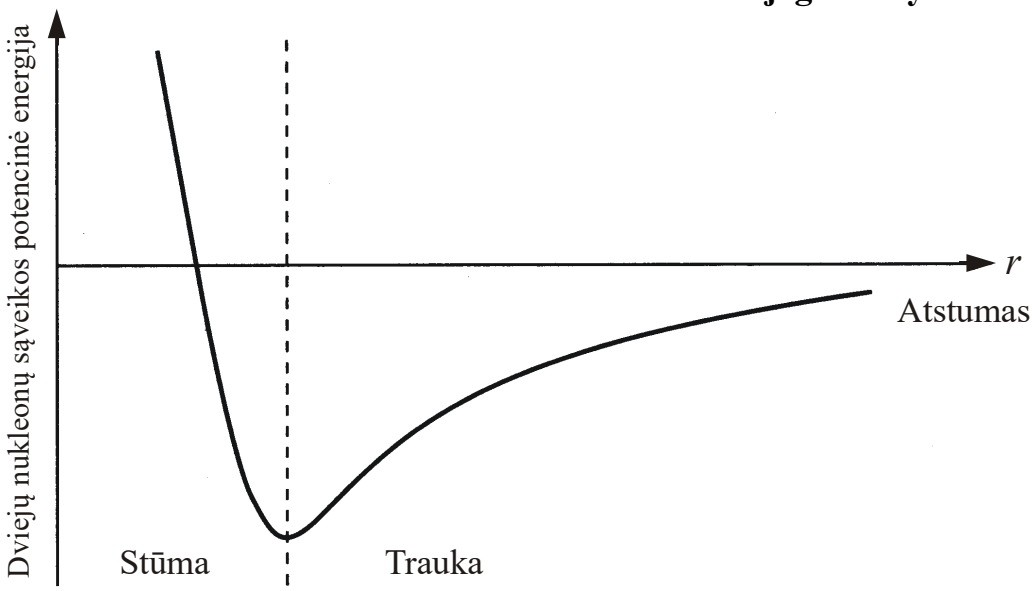
Energinio būsenų tankio išraiška yra tokia pati, kaip ir kubinės potencialo duobės atveju.

Kadangi buvo padaryta prielaida, kad dalelė yra viduje kubo, kurio tūris V, tai iš banginės funkcijos normavimo sąlygos išplaukia tokia laisvos dalelės normuotos banginės funkcijos išraiška:

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}}\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}) \equiv \frac{1}{\sqrt{V}}\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}\right).$$

2. Branduolio ryšio energija

2.1. Branduolinės jėgos savybės



2.1 pav. Dviejų nukleonų sąveikos potencinės energijos priklausomybė nuo atstumo tarp jų

Kadangi branduolinei jėgai yra būdina ***soties*** savybė, tai branduolys yra apytiksliai rutulio formos; jo spindulys lygus

$$R = R_0 A^{1/3}; \quad R_0 \approx 1{,}2 \cdot 10^{-15}\ \text{m}.$$

Branduolinės jėgos savybės:

1. Branduolinė trauka tarp nukleonų yra ***artisiekė***, t. y. ji pasireiškia tik tada, kai atstumas tarp nukleonų yra labai mažas (10^{-15} m eilės).
2. Branduolinė jėga nėra vien tik traukos jėga: ji turi ir stūmos komponentę, kuri pradeda vyrauti, kai atstumas tarp nukleonų sumažėja iki maždaug $0{,}5 \cdot 10^{-15}$ m. Todėl egzistuoja tam tikras pusiausvirasis atstumas tarp gretimų nukleonų. Su tuo susijusi branduolinės jėgos ***soties*** savybė: kiekvieno nukleono (išskyrus branduolio paviršiuje esančius nukleonus) potencinė energija dėl sąveikos su kitais jį supančiai nukleonais yra apytiksliai vienoda visuose branduoliuose. Vienas iš šios soties požymių – apytikslis branduolio medžiagos tankio pastovumas. Branduolio spindulys:
$$R = R_0 A^{1/3}; \quad R_0 \approx 1{,}2 \cdot 10^{-15}\ \text{m}.$$
3. Branduolinei jėgai yra būdinga ***krūvinė simetrija***, t. y. dviejų duotos būsenos neutronų branduolinės sąveikos jėga yra tiksliai lygi dviejų tokių pačių būsenų protonų branduolinės sąveikos jėgai. Neutrono ir protono branduolinės sąveikos jėga nežymiai skiriasi nuo dviejų vienodų nukleonų sąveikos jėgos.
4. Branduolinė jėga priklauso nuo kampo tarp nukleonų sukinių. Sukinys – tai vidinis dalelės (nukleono) judesio kiekio momentas. Empiriškai nustatyta, kad neutrono ir protono sukinių kryptys surištojoje neutrono ir protono sistemoje – deuterio branduolyje (deutone) – yra vienodos. Tai rodo, kad dviejų vienodos sukinio krypties nukleonų vidutinė traukos jėga yra stipresnė už dviejų priešingų sukinio krypčių nukleonų sąveikos jėgą. Iš Paulio draudimo principo išplaukia, kad vienodų nukleonų kvantinės būsenos turi būti skirtingos. Tai reiškia, kad dviejų vienodos erdvinio judėjimo būsenos neutronų arba dviejų protonų sukinių kryptys turi būti priešingos. Dviejų vienodos erdvinio judėjimo būsenos *skirtingų* nukleonų (neutrono ir protono) sukinių kryptys gali būti ir vienodos, ir priešingos, nes Paulio draudimo principas galioja tik tada, kai dalelės yra vienodos. Todėl, atsižvelgus į pirmiau

minėtą dviejų nukleonų traukos jėgos priklausomybę nuo kampo tarp jų sukinių, gaunama, kad *vidutinė* neutrono ir protono traukos jėga branduolyje yra didesnė negu vidutinė dviejų neutronų arba dviejų protonų traukos jėga. Šios dvi jėgos skiriasi maždaug du kartus.

5. Dviejų nukleonų branduolinės sąveikos jėga priklauso nuo kampo tarp abiejų nukleonų pilnutinio sukinio vektoriaus $\boldsymbol{L}_S$ ir jų reliatyviojo judėjimo judesio kiekio momento vektoriaus $\boldsymbol{L}$. Jėgos komponentė, kuri nusako šią priklausomybę, yra vadinama sukinio ir orbitos sąveikos jėga. Ji yra proporcinga skaliarinei sandaugai $\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{L}_S$.

2.2. Branduolio masės defektas. Veiczekerio formulė

$$M = Zm_\mathrm{p} + (A - Z)m_\mathrm{n} - \Delta m$$

Δm – branduolio ***masės defektas***:

$$\Delta m = E_\mathrm{R} / c^2$$

E_R – ryšio energija:

$$E_\mathrm{R} = \Delta m c^2$$

$$E_\mathrm{R} = [Zm_\mathrm{p} + (A - Z)m_\mathrm{n} - M]c^2$$

Dažniausiai vartojamas matavimo vienetas – megaelektronvoltas:

$$1\ \mathrm{MeV} = 10^6\ \mathrm{eV} = 10^6 \cdot 1{,}6022 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J} = 1{,}6022 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{J}$$

Atominis masės vienetas:

$$1\ \mathrm{a.m.v.} = 1{,}660539 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$$

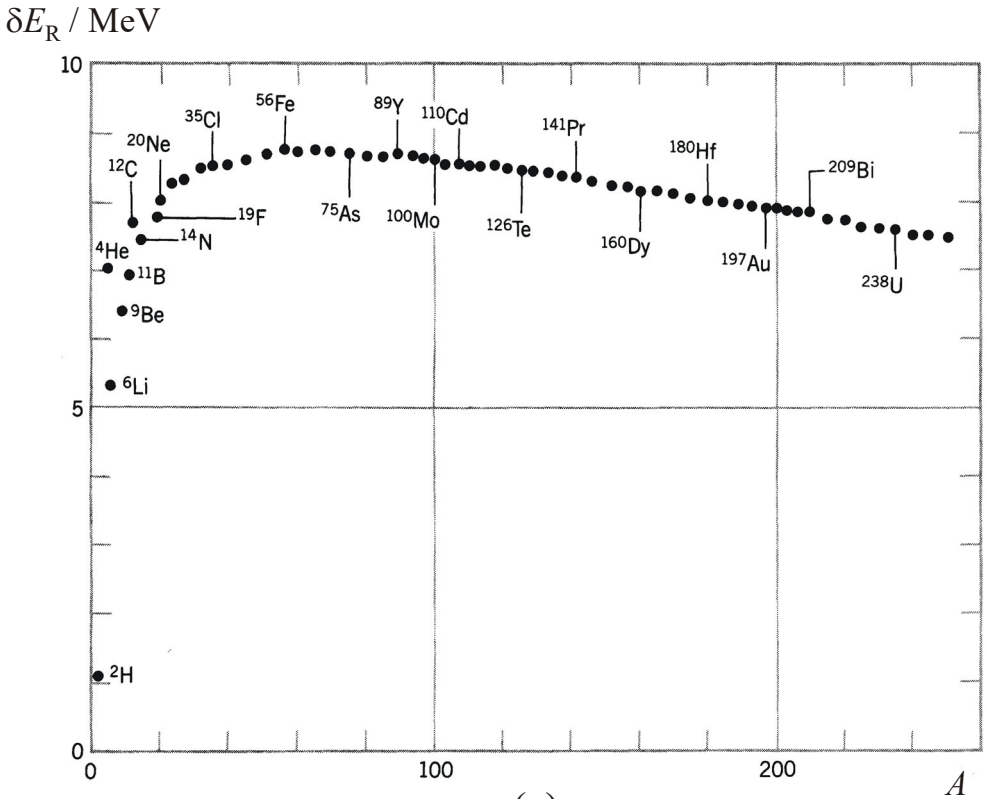
$$m_\mathrm{p} = 1{,}007276\ \mathrm{a.m.v.},\quad m_\mathrm{n} = 1{,}008665\ \mathrm{a.m.v.},\ m_\mathrm{e} = 5{,}48580 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{a.m.v.}$$

Kai masės išreikštos a.m.v., o energija išreikšta MeV, tada

$$E_\mathrm{R} = 931{,}1 \cdot [Zm_\mathrm{p} + (A - Z)m_\mathrm{n} - M] = 931{,}1 \cdot [Zm_\mathrm{H} + (A - Z)m_\mathrm{n} - M_\mathrm{a}]$$

Savitoji ryšio energija – tai ryšio energija vienam nukleonui:

$$\delta E_\mathrm{R} = \frac{E_\mathrm{R}}{A} = \frac{931{,}1}{A} \cdot [Zm_\mathrm{p} + (A - Z)m_\mathrm{n} - M]$$



2.2 pav. Savitosios ryšio energijos priklausomybė nuo branduolio masės skaičiaus A

Veiczekerio formulė:

$$E_{\mathrm{R}} = \alpha A - \beta A^{2/3} - \gamma Z(Z-1)A^{-1/3} - \eta(N-Z)^2 A^{-1} + C$$

$$\alpha = 15{,}5 \text{ MeV},\ \beta = 16{,}8 \text{ MeV},\ \gamma = 0{,}72 \text{ MeV},\ \eta = 23 \text{ MeV},$$

$$C = \begin{cases} +\Delta & \text{jeigu } Z \text{ ir } N \text{ lyginiai,} \\ 0 & \text{jeigu } A \text{ nelyginis,} \\ -\Delta & \text{jeigu } Z \text{ ir } N \text{ nelyginiai;} \end{cases} \qquad \Delta \approx \frac{34}{A^{3/4}} \text{ MeV.}$$

1) Pirmasis dėmuo nusako ryšio energijos dalį, kurią lemia įsotinti ryšiai tarp nukleonų, t. y. vidinių branduolio nukleonų branduolinės traukos jėgos.

2) Antrasis dėmuo atspindi paviršinius efektus, t. y. neįsotintus paviršinių nukleonų ryšius.

3) Trečiasis dėmuo nusako protonų Kulono stūmos potencinę energiją (su minuso ženklu).

4) Ketvirtasis dėmuo – ***simetrijos dėmuo***. Jis atspindi du veiksnius:

a) dviejų skirtingų nukleonų vidutinė traukos jėga yra stipresnė negu dviejų vienodų;

b) didėjant $Z - N$ ir esant pastoviam A, didėja nukleonų pilnutinė kinetinė energija

Pirmojo veiksnio (a) įtakos apskaičiavimas: neutronų santykinė dalis yra $f_{\mathrm{n}} = N / A$, o protonų $f_{\mathrm{p}} = Z / A$. Dviejų nukleonų sąveikos (potencinė) energija yra u_{nn}, u_{pp} ir u_{np}. Kadangi $u_{\mathrm{nn}} = u_{\mathrm{pp}} = u$, o $u_{\mathrm{np}} \approx 2u$, tai pilnutinė nukleonų sąveikos energija yra

$$N(uf_{\mathrm{n}} + 2uf_{\mathrm{p}}) + Z(2uf_{\mathrm{n}} + uf_{\mathrm{p}}) = \frac{u}{A}(N^2 + 4NZ + Z^2) = \frac{u}{2}\left[3A - \frac{(N-Z)^2}{A}\right]$$

5) Penktasis dėmuo – ***porų dėmuo*** – atspindi vienodų nukleonų tendenciją jungtis į poras, kuriose abiejų nukleonų orbitinio judėjimo būsenos yra vienodos, o sukiniai yra priešingi.

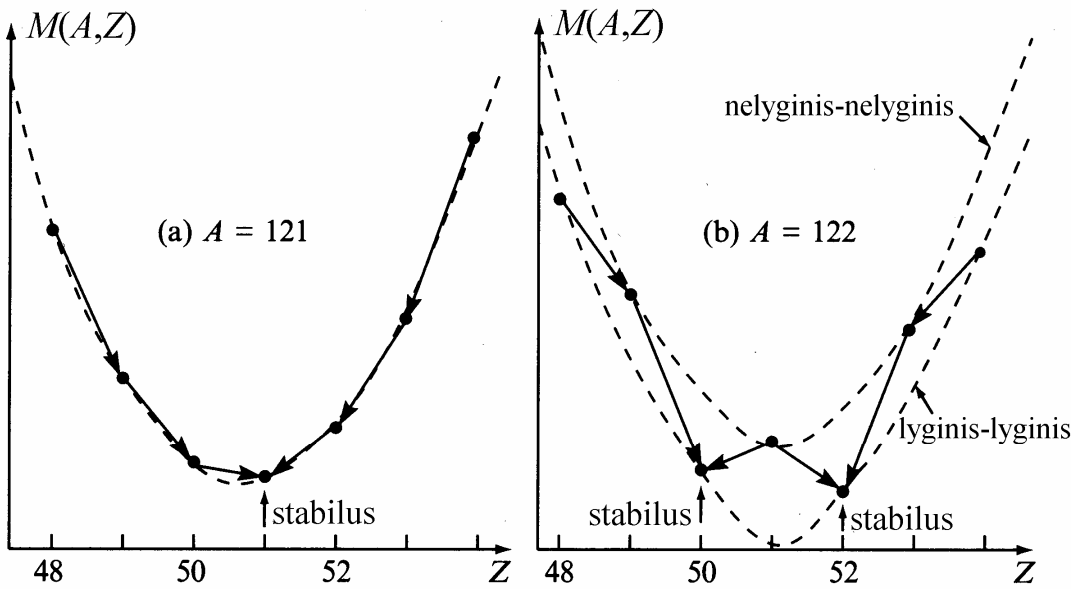
$$E_{\mathrm{R}} = \alpha A - \beta A^{2/3} - \gamma Z(Z-1)A^{-1/3} - \eta(N-Z)^2 A^{-1} + C$$

2.3. Izobarų stabilumo palyginimas

Atomo masės M ir ryšio energijos E_{R} sąryšis:

$$M(A,Z) = ZM_{\mathrm{H}} + Nm_{\mathrm{n}} - E_R / c^2$$

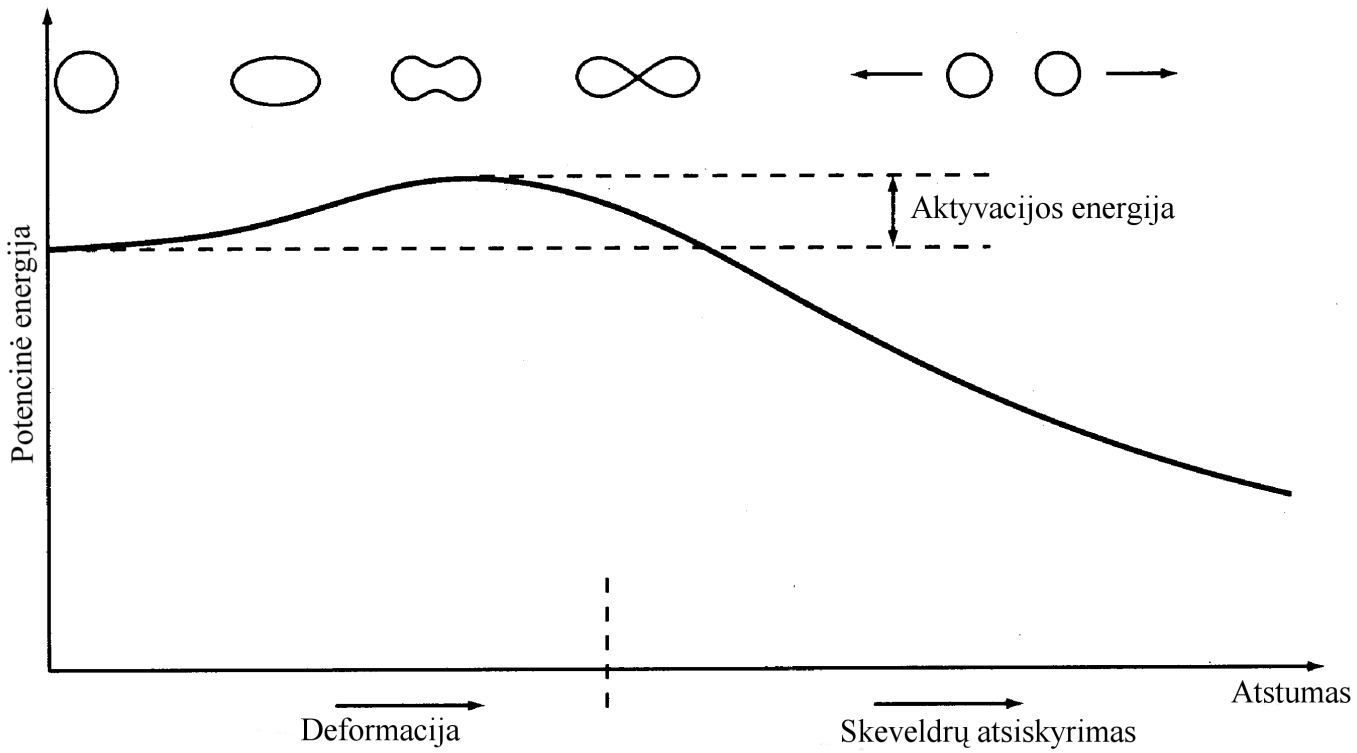
Įrašius E_{R} išraišką (Veiczekerio formulė), gaunama kvadratinė Z funkcija. Todėl, esant pastoviam A, tam tikra Z vertė atitinka mažiausią masę. Atitinkamas izobaras yra stabiliausias.



2.3 pav. Izobarų branduolių stabilumas beta skilimo atžvilgiu. Branduolio masė $M(A,Z)$ apskaičiuota pagal Veiczekerio formulę. Masė M atidėta kaip atominio numerio Z funkcija, esant pastoviam branduolio masės skaičiui A

$$E_{\mathrm{R}} = \alpha A - \beta A^{2/3} - \gamma Z(Z-1)A^{-1/3} - \eta(N-Z)^2 A^{-1} + C$$

2.4. Sunkiųjų branduolių nestabilumas



2.4 pav. Sunkiojo branduolio potencinės energijos priklausomybė nuo branduolio deformacijos (iki dalijimosi) ir nuo atstumo tarp skeveldrų (po dalijimosi)

Sunkiojo branduolio būseną lemia paviršiaus įtempio jėgų ir protonų Kulono stūmos balansas, t. y. II ir III Veiczekerio formulės dėmenys.

Kai $A = 240$, dalijimosi aktyvacijos energija yra maždaug 6 MeV. Dėl šio potencialo barjero sunkieji branduoliai nesidalija savaime. Aktyvacijos energija mažėja didėjant A.

Pagal Veiczekerio formulę galima apskaičiuoti sąlygas, kurios reikalingos, kad sunkusis branduolys dalytųsi savaime (t. y. kad dalijimosi aktyvacijos energija būtų lygi nuliui). Tam reikia remtis prielaida, kad branduolys yra ištempto sukimosi elipsoido formos.

Elipsoido ilgasis pusašis: $a = R(1+\varepsilon)$,

trumpasis pusašis: $b = R(1+\varepsilon)^{-1/2}$,

ε yra ekscentricitetas (jis nusako nuokrypį nuo sferos – branduolio deformaciją). Elipsoido tūris:

$$V = \frac{4}{3}\pi a b^2$$

Kai ε yra mažas, tada branduolio paviršiaus plotas yra

$$S = 4\pi R^2 (1 + \tfrac{2}{5}\varepsilon^2 + \ldots)$$

o Kulono energija yra proporcinga

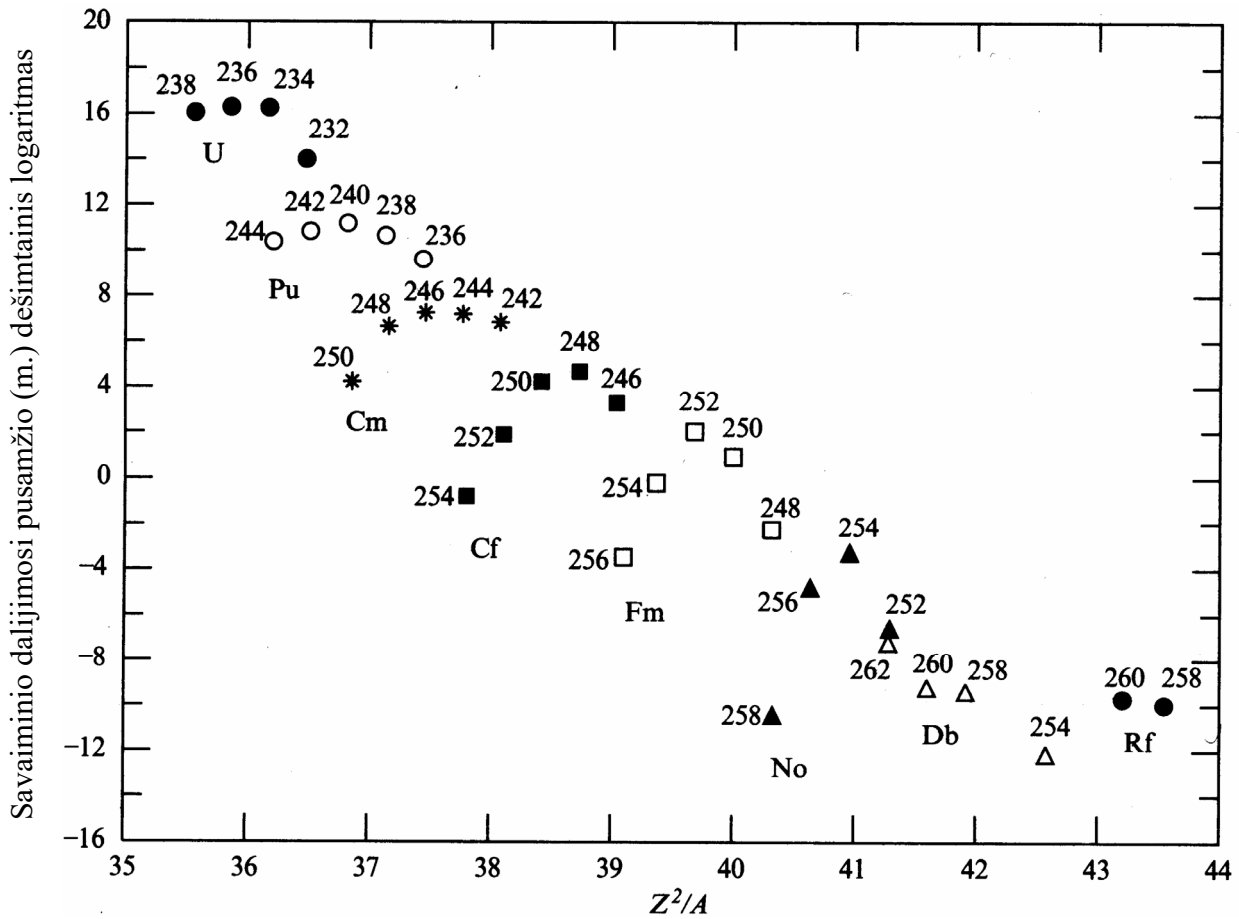
$$E_C \sim (1 - \tfrac{1}{5}\varepsilon^2 + \ldots)$$

Todėl branduolio ryšio energijos pokytis esant mažai branduolio deformacijai yra

$$\Delta E_{\mathrm{R}} = -\frac{2}{5}\beta A^{2/3}\varepsilon^2 + \frac{1}{5}\gamma Z^2 A^{-1/3}\varepsilon^2$$

Ribinė būsena yra tokia kai $\Delta E_{\mathrm{R}} = 0$, t. y.

$$\frac{Z^2}{A} = \frac{2\beta}{\gamma} \approx 49$$



2.5 pav. Sunkiųjų branduolių savaiminio dalijimosi pusamžio logaritmo priklausomybė nuo parametro Z^2 / A

3. Sluoksninis branduolio modelis

Lašelinis ir ***sluoksninis*** branduolio modeliai.

Lašelinis branduolio modelis remiasi panašumais tarp branduolio ir įelektrinto skysčio lašo. Remiantis šiuo modeliu, galima paprasta paaiškinti pirmuosius tris Veiczekerio formulės dėmenis:

Pirmasis dėmuo – įsotintų ryšių įnašas į pilnutinę potencinę energiją.

Antrasis dėmuo atspindi paviršinius efektus, kurie atsiranda dėl nepilnai įsotintų ryšių (analogija – skysčio lašo paviršiaus įtempis).

Trečiasis dėmuo – protonų Kulono stūma.

Kitus du dėmenis paaiškina ***sluoksninis branduolio modelis***. Jis remiasi prielaida, kad tikrąsias jėgas, kurios veikia tarp nukleonų, galima pakeisti viena centrine jėga, kuri yra bendra visiems nukleonams. Tada visi nukleonai yra nepriklausomi vienas nuo kito ir daugelio dalelių sistemos analizė gali būti pakeista vieno nuklono judėjimo stacionariame potencialiniame lauke analize. Tas laukas nusako potencialo duobę, kurioje yra nukleonas. Kaip žinome, potencialo duobėje esančios dalelės energija yra diskreti. Artimų energijos lygmenų grupė (arba vienas energijos lygmuo, kuris yra yra toli nuo visų kitų lygmenų) vadinama ***sluoksniu***.

Skiriami ***protonų sluoksniai*** ir ***neutronų sluoksniai***. Gretimų sluoksnių energijų skirtumas yra ~10 MeV.

3.1. Branduolys kaip daugelio nepriklausomų fermionų sistema

Kadangi branduolius (išskyrus vandenilio branduolį) sudaro keli nukleonai, tai būtina atsižvelgti į nukleonų tapatingumą: visi vienarūšiai nukleonai (protonai arba neutronai) yra neatskiriami vienas nuo kito.

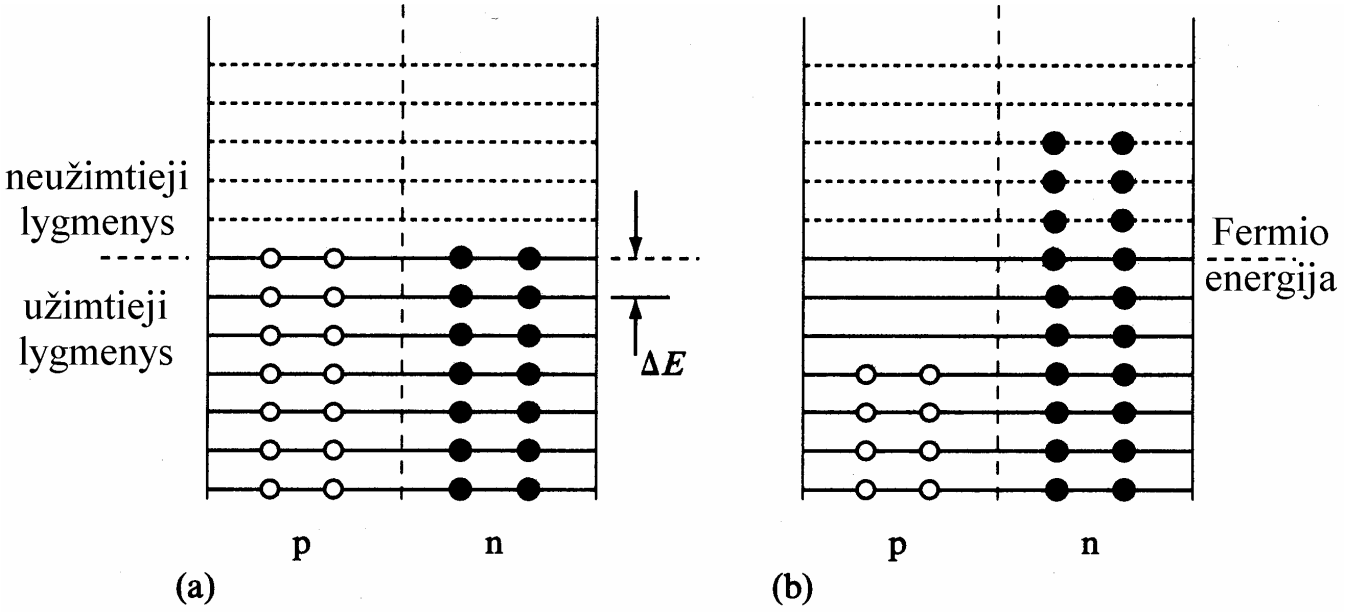
Nukleono sukinio kvantinis skaičius lygus ½. Tai reiškia, kad nukleonai yra ***fermionai***. Todėl jiems galioja ***Paulio draudimo principas***: vienodų fermionų sistemoje negali būti dviejų vienodos būsenos fermionų. Vadinasi, mažiausios energijos būsena yra tokia, kurioje fermionai užima visas mažiausios energijos kvantines būsenas – po vieną fermioną vienai būsenai. Didžiausia užimtos būsenos energija vadinama ***Fermio energija***.

Fermio energijos išraiška, kuri išplaukia iš anksčiau išvestos energinio būsenų tankio išraiškos:

$$E_{\mathrm{F}} = \frac{h^2}{2m}\left(\frac{3A}{16\pi V}\right)^{2/3}.$$

Pagrindinės savybės:

1. Branduolio Fermio energija nepriklauso nuo A.
2. Energinio būsenų tankio vertė ties Fermio energija ($\rho(E_{\mathrm{F}})$) yra tiesiog proporcinga V ir tuo pačiu – branduolio masės skaičiui A. Kitaip sakant, ties Fermio energija vidutinis intervalas tarp energijos lygmenų yra atvirkščiai proporcingas branduolio masės skaičiui: $\Delta E(E_{\mathrm{F}}) \sim 1 / A$.



3.1 pav. Energijos lygmenų užpilda arti Fermio energijos: (a) protonų skaičius lygus neutronų skaičiui, (b) dalis protonų yra pakeisti neutronais

Branduolio sluoksninio modelio variantas, kuriame nėra atsižvelgiama į nukleonų sukinio ir orbitos sąveiką, yra vadinamas ***Fermio dujų modeliu***. Remiantis Fermio dujų modeliu, galima nustatyti Veiczekerio formulės simetrijos dėmens dalį, kurią lemia nukleonų kinetinė energija (likusioji dalis susijusi su tuo, kad dviejų skirtingų nukleonų vidutinė traukos jėga yra didesnė negu dviejų vienodų nukleonų). Kad paversti branduolį, kuriame $N = Z$, branduoliu, kuriame $N > Z$, reikia atlikti darbą, kuris proporcingas

$$(N - Z)^2 \Delta E(E_F)$$

Šis darbas – tai branduolio nukleonų pilnutinės kinetinės energijos padidėjimas (ir ryšio energijos sumažėjimas), kuris susijęs su protonų ir neutronų skaičiaus asimetrija (*kinetinės* energijos – nes taikomas laisvųjų dalelių modelis, kuriame potencinė energija lygi nuliui). Anksčiau įrodyta, kad

$$\Delta E(E_F) \sim 1 / A.$$

Vadinasi, branduolio nukleonų pilnutinės kinetinės energijos pokytis dėl protonų ir neutronų skaičiaus asimetrijos yra proporcingas

$$(N - Z)^2 / A.$$

Šis kinetinės energijos pokytis tokio paties pavidalo kaip ir potencinės energijos pokytis. Todėl abu šie pokyčiai priklauso tam pačiam Veiczekerio formulės dėmeniui – simetrijos dėmeniui.

Remiantis sluoksniniu branduolio modeliu, galima paaiškinti ir paskutinįjį dėmenį – porų dėmenį – Veiczekerio formulėje. Kadangi protonų Fermio energija nėra tiksliai lygi neutronų Fermio energijai, tai nelyginio-nelyginio branduolio pilnutinę galima sumažinti (o ryšio energiją – padidinti) pakeitus vieną protoną neutronu arba atvirkščiai. Taip gauname lyginį-lyginį branduolį. Vadinasi, lyginių-lyginių izobarų porų dėmuo **> 0**, o nelyginių-nelyginių **< 0**. Jeigu vienas iš skaičių Z arba N yra lyginis, o kitas – nelyginis, tada vieno neutrono pakeitimas protonu (arba atvirkščiai) gali ir padidinti, ir sumažinti ryšio energiją, todėl šiuo atveju porų dėmuo ≈ **0**.

Paulio draudimo principas labai apriboja nukleonų galimų susidūrimų skaičių. Todėl, jeigu nėra išorinio poveikio, tada nukleonų būsenos nesikeičia: nukleonai juda branduolyje taip lyg jie būtų „skaidrūs“ vienas kitam.

3.2. Branduolio nukleono kvantiniai skaičiai

Centriniame jėgų lauke esančios dalelės erdvinio judėjimo būseną nusako trys dydžiai:

1) dalelės energija,
2) dalelės judesio kiekio momento (taip pat vadinamo impulso momentu) modulis,
3) dalelės judesio kiekio momento projekcija į laisvai pasirinktą kryptį.

Kiekvieną iš šių dydžių atitinka tam tikras kvantinis skaičius.

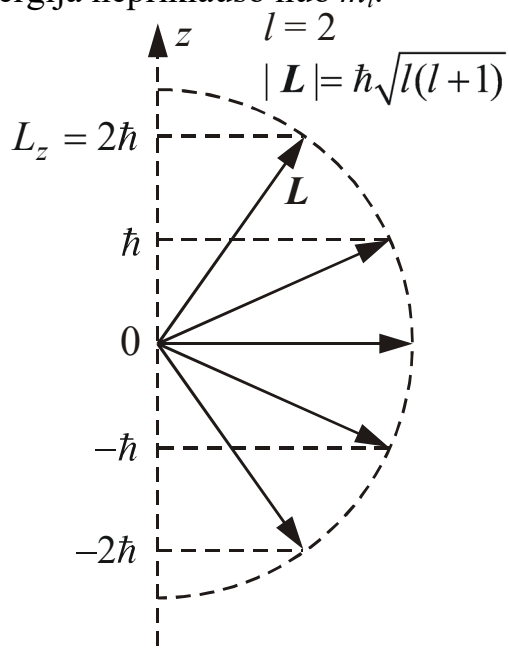
Orbitinio judesio kiekio momento modulį $|\boldsymbol{L}|$ nusako ***orbitinis kvantinis skaičius*** l (kitas pavadinimas – ***šalutinis kvantinis skaičius***):

$$|\boldsymbol{L}| = \hbar\sqrt{l(l+1)} \qquad (l = 0,1,2,...)$$

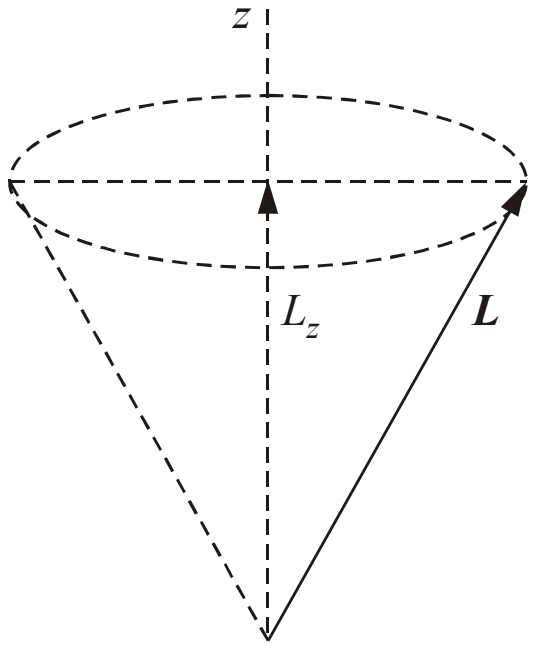
Orbitinio impulso momento vektoriaus $\boldsymbol{L}$ projekciją nusako ***magnetinis kvantinis skaičius*** m_l:

$$L_z = m_l\hbar \qquad (m_l = -l, -l+1, ...l-1, l)$$

Kai nėra išorinių (branduolio atžvilgiu) laukų ir nepaisoma nukleono sukinio, tada nukleono energija nepriklauso nuo m_l.



3.2 pav. Galimi kampai tarp judesio kiekio momento ir išskirtosios krypties



3.3 pav. Judesio kiekio momento vektoriaus precesija aplink išskirtąją kryptį

Kiekvieną l ir m_l porą atitinka kelios galimos energijos. Tos energijos numeruojamos energijos didėjimo kryptimi. Šitaip apibrėžtas numeris žymimas n. Tai yra ***pagrindinis kvantinis skaičius***.

Vietoj l verčių (0, 1, 2, ...) vartojamos raidės – atitinkamai s, p, d, f, g, ... Pvz., jeigu nukleono $n = 2$, o $l = 1$, tada sakoma „2p nukleonas“.

Pilnai apibūdinant nukleono būseną, reikia įskaityti jo ***sukinį*** – vidinį impulso momentą. Nukleono ***sukinio kvantinis skaičius***:

$$s = \frac{1}{2}$$

Sukininio judesio kiekio momento modulis:

$$|\boldsymbol{L}_s| = \hbar\sqrt{s(s+1)} = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar$$

Sukinio magnetinis kvantinis skaičius m_s nusako sukininio judesio kiekio momento projekciją:

$$L_{sz} = m_s\hbar \qquad (m_s = \pm s = \pm 1/2)$$

Jeigu neatsižvelgiama į sąveikas, kurias lemia nukleono sukinys, tada nukleono būseną galima pilnai nusakyti šiais keturiais kvantiniais skaičiais:

$$n,\ l,\ m_l,\ m_s.$$

Skaičiai m_l ir m_s netinka, jeigu yra atsižvelgiama į sąveikas, kurias lemia sukinys (pvz., sukinio ir orbitos sąveika). Tada vietoj m_l ir m_s reikia naudoti ***pilnutinio judesio kiekio momento kvantinį skaičių*** j ir ***pilnutinio judesio kiekio projekcijos kvantinį skaičių*** m_j.

Nukleono pilnutinio judesio kiekio momento vektorius:

$$\boldsymbol{L}_j = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}_s$$

Bendroji kvantinės mechanikos impulso momentų sudėties taisyklė: jeigu sudedamųjų momentų modulius nusako kvantiniai skaičiai l_1 ir l_2, o projekcijas nusako kvantiniai skaičiai m_1 ir m_2, tada suminio momento modulio galimos vertės yra

$$L_\Sigma = \hbar\sqrt{l_\Sigma(l_\Sigma+1)} \qquad (l_\Sigma = |l_1 - l_2|, |l_1 - l_2| + 1, \ldots, l_1 + l_2)\ ,$$

o jo projekcija lygi

$$L_{\Sigma z} = L_{1z} + L_{2z} = m_\Sigma \hbar \qquad (m_\Sigma = m_1 + m_2)$$

Taikant šią taisyklę nukleono orbitinio ($l_1 \equiv l$, $m_1 \equiv m_l$) ir sukininio ($l_2 \equiv s = 1/2$, $m_2 \equiv m_s$) judesio kiekio momentų sudėčiai, gaunama, kad pilnutinio momento $\boldsymbol{L}_j$ modulio galimosios vertės yra:

$$|\boldsymbol{L}_j| = \hbar\sqrt{j(j+1)}$$

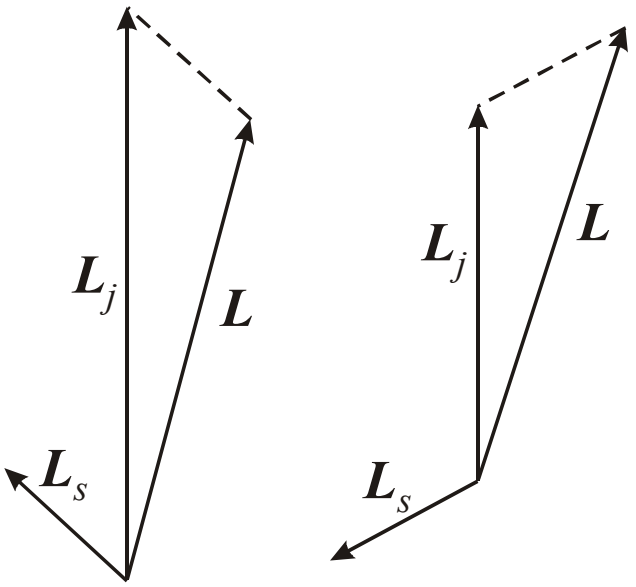
kur kvantinis skaičius j gali būti lygus tik šioms vertėms:

a) jeigu $l > 0$, $\quad j = l \pm \frac{1}{2}$;

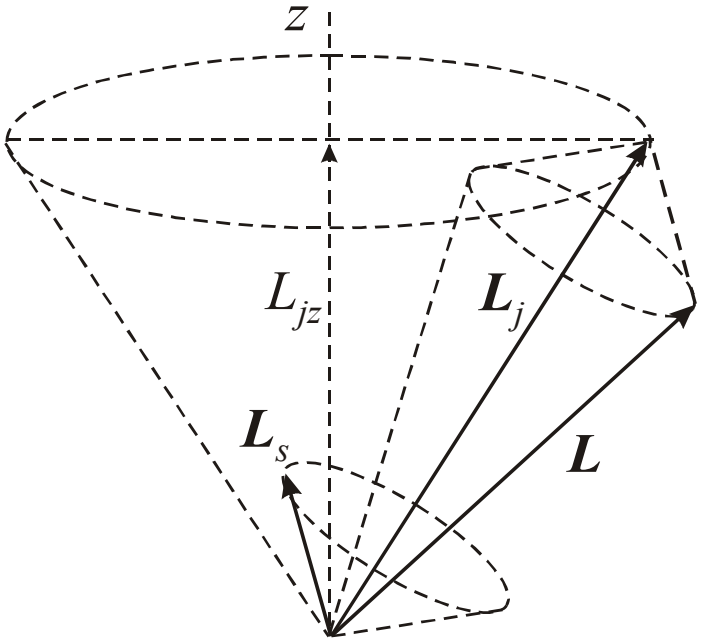
b) jeigu $l = 0$, $\quad j = \frac{1}{2}$

Pilnutinio judesio kiekio momento projekcija:

$$L_{jz} = m_j \hbar \qquad (m_j = -j, -j+1, \ldots, j-1, j)$$



3.4 pav. Du galimi kampai tarp nukleono sukinio vektoriaus $\boldsymbol{L}_s$ ir nukleono orbitinio judesio kiekio momento vektoriaus $\boldsymbol{L}$ bei atitinkami nukleono pilnutinio judesio kiekio momento vektoriai $\boldsymbol{L}_j$



3.5 pav. Nukleono sukininio judesio kiekio momento vektoriaus $\boldsymbol{L}_s$ ir orbitinio judesio kiekio momento vektoriaus $\boldsymbol{L}$ precesija aplink pilnutinio judesio kiekio momento vektorių $\boldsymbol{L}_j$ ir pastarojo vektoriaus precesija aplink išskirtąją kryptį Z

3.3. Nukleono banginė funkcija. Būsenos lyginumas. s nukleonų energijos lygmenys

Nukleono Šrėdingerio lygtis:

$$\nabla^2\psi + \frac{2m}{\hbar^2}[E - U(r)]\psi = 0.$$

Naudojant sferines koordinates, šią lygtį galima išspręsti kintamųjų atskyrimo metodu:

$$\psi(r,\theta,\phi) = X(r)P(\theta)\Phi(\phi) \equiv X(r)Y(\theta,\phi)$$

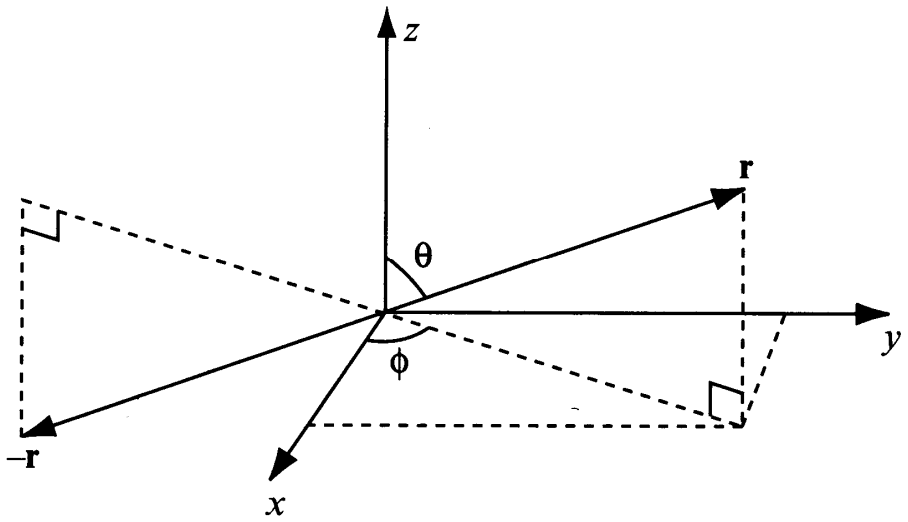
$X(r)$ – „radialioji banginė funkcija“, $Y(\theta, \phi)$ – „kampinė banginė funkcija“. Jų prasmės aiškinimas išplaukia iš banginė funkcijos statistinio aiškinimo. Tam visų pirma apibrėžiame tūrio elementą:

$$\mathrm{d}V = r^2 \sin\theta\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\phi$$

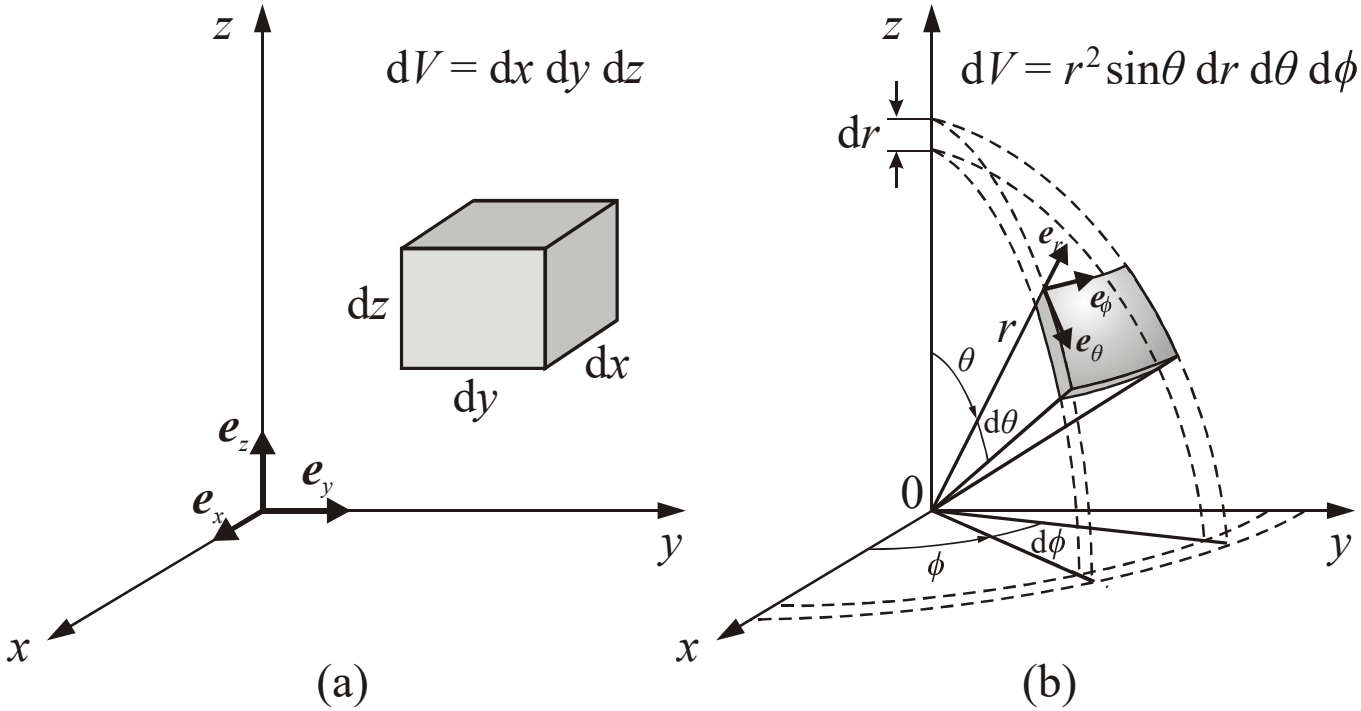
Tikimybė, kad nukleonas priklausys tam tūrio elementui:

$$|\psi(r,\theta,\phi)|^2\, \mathrm{d}V = \left[|X(r)|^2\, r^2 \mathrm{d}r\right]\cdot\left[|Y(\theta,\phi)|^2 \sin\theta\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\phi\right]$$

Vadinasi, $|X(r)|^2\, r^2$ yra radialinis tikimybės tankis, o $|Y(\theta,\phi)|^2$ yra kampinis tikimybės tankis.



3.6 pav. Dekarto ir sferinių koordinačių sąryšis

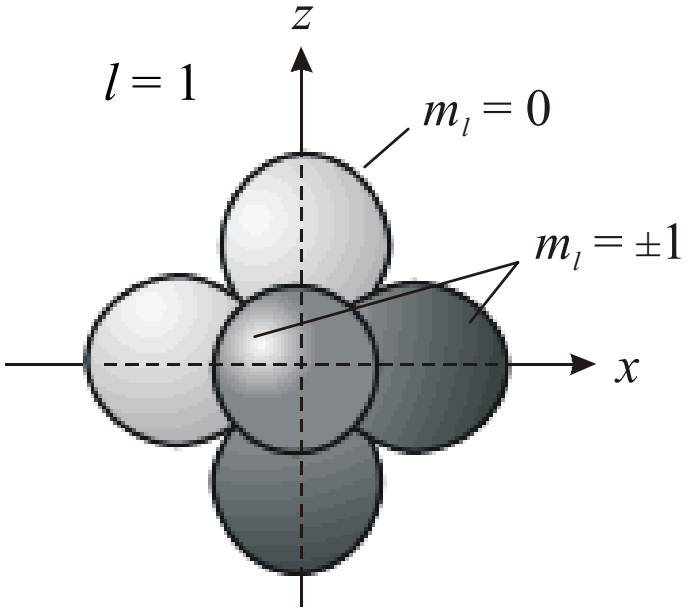


3.7 pav. Baziniai vektoriai ir tūrio elementai Dekarto koordinačių sistemoje (a) ir sferinėje koordinačiu sistemoje (b)

Nuo $U(r)$ pavidalo priklauso tik radialioji funkcija $X(r)$. Kampinės funkcijos $Y(\theta, \phi)$ yra sferinės harmonikos. Kiekvieną kvantinių skaičių l ir m_l porą atitinka tam tikra sferinė harmonika $Y_{lm_l}(\theta,\phi)$. Sferinė harmonika, kuri atitinka $l = 0$, t. y. s nukleonus, yra konstanta:

$$Y_{00} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$$

Kai $l > 0$, $Y(\theta, \phi)$ nėra konstanta, t. y. nukleono pasiskirstymas aplink branduolio centrą nėra sferiškai simetriškas:



3.8 pav. p nukleonų erdvinio tikimybės tankio kampinė dalis $|Y(\theta,\phi)|^2$, atitinkanti tris kvantinio skaičiaus m_l vertes. $|Y(\theta,\phi)|^2$ vertę įvairiomis kryptimis nusako atstumai nuo koordinačių centro iki pavaizduotų paviršių

Būsenos lyginumas (arba banginės funkcijos lyginumas) nusako banginės funkcijos ženklo pokytį atlikus koordinačių inversiją. ***Koordinačių inversijos*** apibrėžtis:

Dekarto koordinačių sistemoje:

$$x \to -x, \quad y \to -y, \quad z \to -z;$$

sferinėje koordinačių sistemoje

$$r \to r, \quad \theta \to \pi - \theta, \quad \phi \to \phi + \pi.$$

Dėl branduolio sferinės simetrijos visos nukleonų banginės funkcijos yra lyginės arba nelyginės. ***Lyginės funkcijos*** nesikeičia atlikus inversiją, o ***nelyginės funkcijos*** keičia tik ženklą. Jeigu banginė funkcija yra lyginė, tada sakoma, kad būsenos ***lyginumas*** yra +1, o jeigu ne, tada –1.

Sferinių harmonikų lyginumas:

$$Y_{lm_l}(\pi - \theta, \pi + \phi) = (-1)^l Y_{lm_l}(\theta,\phi)$$

Apskaičiuojant radialinę funkciją $X(r)$, patogiau ją išreikšti šitaip:

$$X(r) \equiv \frac{\xi(r)}{r}$$

Lygties, kuri nusako pagalbinę radialinę funkciją $\xi(r)$, bendrasis pavidalas yra toks pats kaip vienmačio judėjimo Šrėdingerio lygties:

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}r^2} = \frac{2m}{\hbar^2}\left[U(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} - E\right]\xi \equiv \frac{2m}{\hbar^2}\left[U_l(r) - E\right]\xi$$

$U_l(r)$ – „efektinė potencinė energija“:

$$U_l(r) \equiv U(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} = U(r) + \frac{|\boldsymbol{L}_l|^2}{2mr^2} \qquad (l = 0,1,2,...)$$

Čia antrasis dėmuo – klasikinė apskrita orbita judančios dalelės kinetinės energijos išraiška.

Viena iš dviejų kraštinių sąlygų: $\xi(0) = 0$.
Kita kraštinė sąlyga priklauso nuo $U(r)$ pavidalo.
Kai $l = 0$, tada lygtis funkcijos $\xi(r)$ atžvilgiu yra tokia pati kaip vienmatės begalinio gylio potencialo duobės. Todėl šiame modelyje s nukleonų energijos lygmenų išraiška yra tokia:

$$E_{ns} = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mR^2} = \frac{n^2h^2}{8mR^2} \qquad (l = 0,\ n = 1, 2, ...)$$

3.4. Nukleono banginė funkcija atsižvelgus į nukleono sukinį

Nukleono sukinio projekcija L_{sz} – tai dar vienas „laisvės laipsnis“, kurį turi atspindėti papildomas banginės funkcijos argumentas. Kadangi $L_{sz} = \pm\frac{1}{2}\hbar$, tai

$$\psi(x, y, z, L_{sz}) = \begin{pmatrix} \psi_1(x, y, z) \\ \psi_2(x, y, z) \end{pmatrix} \equiv \psi_1(x, y, z)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \psi_2(x, y, z)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \psi_1(x, y, z)\chi^+ + \psi_2(x, y, z)\chi^-$$

Čia χ^+ ir χ^- yra ***vienetiniai spinoriai***. Kadangi erdvinio judėjimo būsena ir sukininė būsena yra beveik nepriklausomos, tai bendruoju atveju

$$\psi(x, y, z, L_{sz}) \approx \psi(x, y, z)\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \equiv \psi(x, y, z)\chi(L_{sz})$$

Čia $\chi(L_{sz})$ yra spinorius, kuris vadinamas ***sukinine bangine funkcija***. Sukininės funkcijos argumentas yra ***sukininė koordinatė*** L_{sz} (sukinio projekcija). Tai yra diskreti koordinatė, kuri gali įgyti tik dvi vertes. Atitinkamai, sukininės funkcijos normavimo sąlyga yra

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Kai nukleono būsena atitinka $L_{sz} = +\frac{1}{2}\hbar$, tada $\alpha = 1$, $\beta = 0$. Priešingu atveju $\alpha = 0$, $\beta = 1$.

3.5. Branduolio banginė funkcija

N dalelių sistemos banginės funkcijos statistinis aiškinimas:

$$|\Psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_N, t)|^2 \mathrm{d}V_1 \mathrm{d}V_2 \ldots \mathrm{d}V_N$$

yra tikimybė, kad laiko momentu t pirmoji dalelė bus tūrio elemente $\mathrm{d}V_1$, kuriam priklauso taškas $\boldsymbol{r}_1$, antroji dalelė bus tūrio elemente $\mathrm{d}V_2$, kuriam priklauso taškas $\boldsymbol{r}_2$, ir t. t.

Atsižvelgus į dalelių sukinius, kiekvieną dalelę atitinka 4 koordinatės (trys erdvinės ir viena sukininė), o sistemos nuostovioji banginė funkcija yra $4N$ kintamųjų funkcija:

$$\psi = \psi(\boldsymbol{r}_1 s_1, \boldsymbol{r}_2 s_2, ..., \boldsymbol{r}_N s_N)$$

<u>Dalelių tapatingumo</u> pasekmė: sukeitus bet kurias dvi daleles vietomis, naujoji būsena yra neatskiriama nuo senosios. Tai reiškia, kad

$$|\psi(\boldsymbol{r}_1 s_1, \boldsymbol{r}_2 s_2, ..., \boldsymbol{r}_i s_i, ..., \boldsymbol{r}_j s_j, ..., \boldsymbol{r}_N s_N)|^2 = |\psi(\boldsymbol{r}_1 s_1, \boldsymbol{r}_2 s_2, ..., \boldsymbol{r}_j s_j, ..., \boldsymbol{r}_i s_i, ..., \boldsymbol{r}_N s_N)|^2 .$$

Vadinasi,

$$\psi(\boldsymbol{r}_1 s_1, \boldsymbol{r}_2 s_2, ..., \boldsymbol{r}_i s_i, ..., \boldsymbol{r}_j s_j, ..., \boldsymbol{r}_N s_N) = \pm\psi(\boldsymbol{r}_1 s_1, \boldsymbol{r}_2 s_2, ..., \boldsymbol{r}_j s_j, ..., \boldsymbol{r}_i s_i, ..., \boldsymbol{r}_N s_N).$$

„+“ atitinka ***simetrines funkcijas***, o „–“ atitinka ***antisimetrines funkcijas***.

Daugelio dalelių sistemos banginės funkcijos simetrija (arba „antisimetrija“) nekinta laikui bėgant ir nepriklauso nuo jokių išorinių poveikių. Banginės funkcijos simetrijos pobūdis (simetrinė ar antisimetrinė) priklauso tik nuo dalelių prigimties. Dalelės, kurių sistemų banginės funkcijos yra simetrinės, vadinamos ***bozonais***, o dalelės, kurių sistemų banginės funkcijos yra antisimetrinės, vadinamos ***fermionais***. Nukleonai yra fermionai.

Iš prielaidos, kad <u>dalelės yra nepriklausomos</u> (sluoksninis branduolio modelis) išplaukia, kad daugelio dalelių sistemos hamiltonianas yra lygus atskirų dalelių hamiltonianų sumai.

i-tosios dalelės ***hamiltonianas***:

$$\hat{H}_i \equiv -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_i^2 + U(x_i, y_i, z_i)$$

Vienos dalelės Šrėdingerio lygtis – tai hamiltoniano tikrinių verčių lygtis:

$$\hat{H}_i \psi_k(\boldsymbol{r}_i, s_i) = E_k \psi_k(\boldsymbol{r}_1, s_1)$$

Kai dalelės nepriklausomos, tada dalelių sistemos Šrėdingerio lygtis yra

$$(\hat{H}_1 + \hat{H}_2 + ...\hat{H}_N)\psi(\boldsymbol{r}_1, s_1, \boldsymbol{r}_2, s_2, ..., \boldsymbol{r}_N, s_N) = E\psi(\boldsymbol{r}_1, s_1, \boldsymbol{r}_2, s_2, ..., \boldsymbol{r}_N, s_N)$$

Kintamųjų atskyrimo metodu gaunama, kad šios lygties sprendinys yra viendalelės Šrėdingerio lygties sprendinių sandauga:

$$\psi(\boldsymbol{r}_1, s_1, \boldsymbol{r}_2, s_2, ..., \boldsymbol{r}_N, s_N) = \psi_{k_1}(\boldsymbol{r}_1, s_1)\psi_{k_2}(\boldsymbol{r}_2, s_2)...\psi_{k_N}(\boldsymbol{r}_N, s_N),$$

o visos sistemos energija yra lygi atskirų dalelių energijų sumai:

$$E = \sum_{i=1}^{N} E_{k_i} = \sum_{k=1}^{\infty} n_k E_k$$

Čia apatinis indeksas prie „ψ“, „n“ ir „E“ yra viendalelės kvantinės būsenos numeris (t. y. kvantinių skaičių rinkinys), o apatinis indeksas prie „$\boldsymbol{r}$“ ir „s“ yra dalelės numeris.

Sukeitus bet kurias dvi daleles vietomis (t. y. $\boldsymbol{r}_i$ sukeitus su $\boldsymbol{r}_j$, o s_i sukeitus su s_j), gauname funkciją, kuri taip pat yra sprendinys. Todėl ir bet kuris viendalelių funkcijų sandaugų, kurias galima gauti pertvarkius daleles tarp kvantinių būsenų visais įmanomais būdais, tiesinis darinys yra Šrėdingerio lygties sprendinys. Tačiau tik vienas iš tų tiesinių darinių yra antisimetrinė funkcija. Tą tiesinį darinį galima užrašyti determinanto pavidalu:

$$\psi(\boldsymbol{r}_1, s_1, \boldsymbol{r}_2, s_2, ..., \boldsymbol{r}_N, s_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \psi_{k_1}(\boldsymbol{r}_1, s_1) & \psi_{k_2}(\boldsymbol{r}_1, s_1) & ... & \psi_{k_N}(\boldsymbol{r}_1, s_1) \\ \psi_{k_1}(\boldsymbol{r}_2, s_2) & \psi_{k_2}(\boldsymbol{r}_2, s_2) & ... & \psi_{k_N}(\boldsymbol{r}_2, s_2) \\ ... & ... & ... & ... \\ \psi_{k_1}(\boldsymbol{r}_N, s_N) & \psi_{k_2}(\boldsymbol{r}_N, s_N) & ... & \psi_{k_N}(\boldsymbol{r}_N, s_N) \end{vmatrix}$$

Tai yra ***Sleiterio determinantas*** (angl. *Slater determinant*).

Branduolio būsenos (banginės funkcijos) <u>lyginumas</u>:

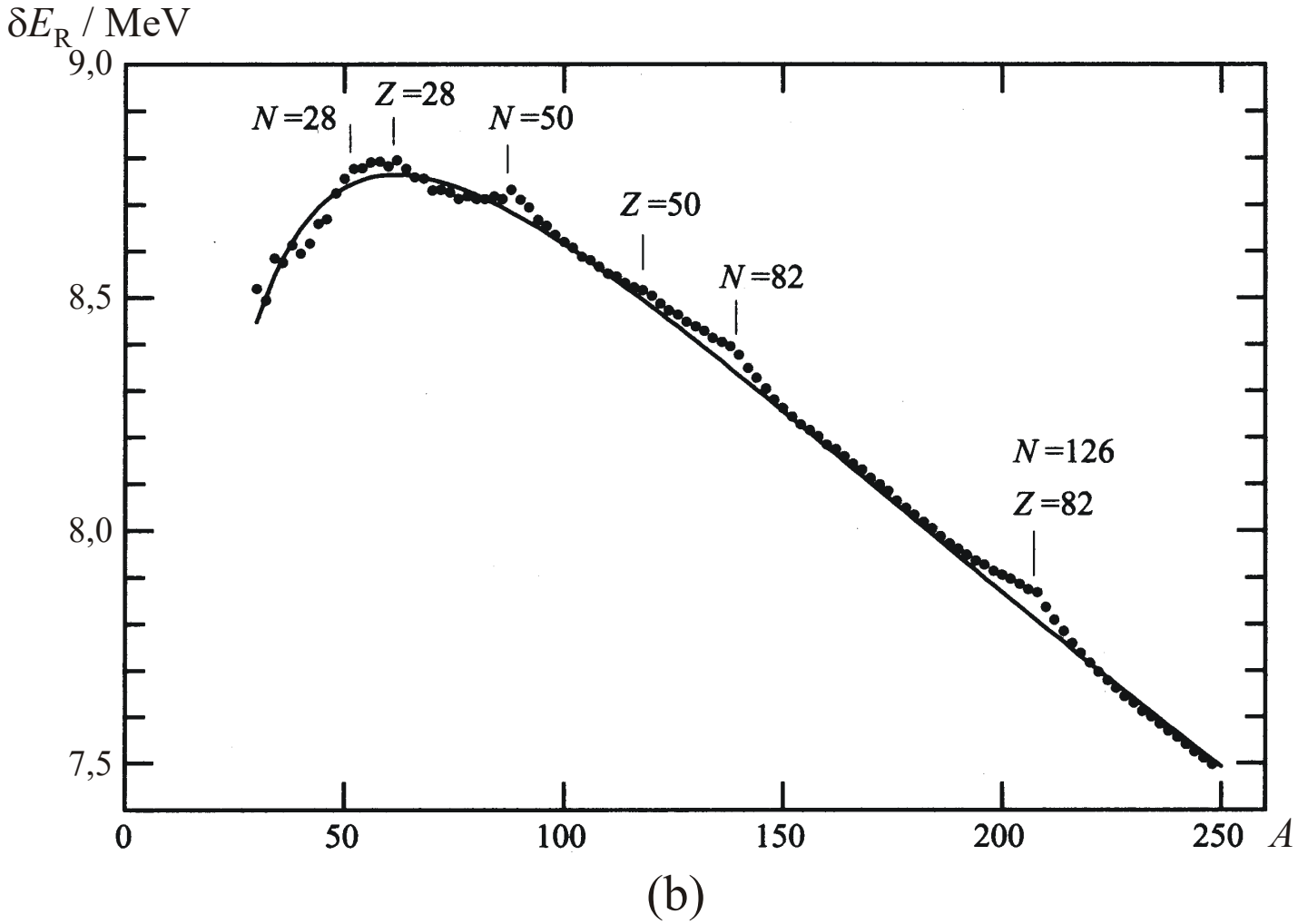
Kadangi branduolio banginė funkcija išreiškiama nukleonų banginių funkcijų sandaugų tiesiniu dariniu, tai viso branduolio būsenos lyginumas yra lygus atskirų nukleonų būsenų lyginumų sandaugai. Kadangi vieno nukleono būsenos lyginumas yra $(-1)^l$, tai, pvz., dviejų nukleonų branduolio (deuterio) būsenos lyginumas yra $(-1)^{l_1+l_2}$. Čia l_1 ir l_2 yra kiekvieno nukleono šalutinis kvantinis skaičius.

3.6. Magiškieji skaičiai. Nukleono sukinio ir orbitos sąveika

Empiriniai požymiai, kurie rodo, kad branduoliai su tam tikru protonų arba neutronų skaičiumi yra ypač stabilūs:

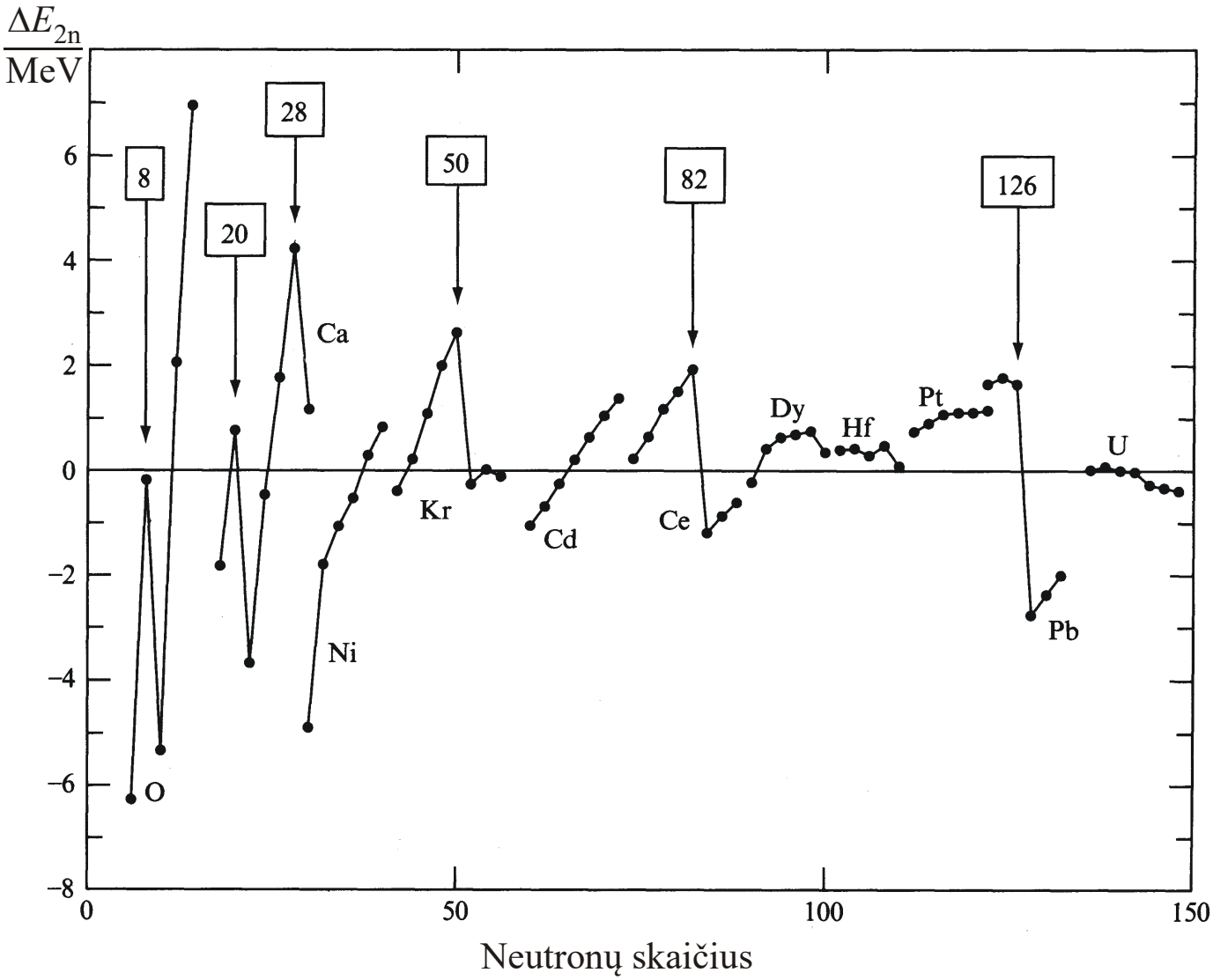
1) Elementai, kurių $Z = 20$ arba 50 (atitinkamai Ca ir Sn), turi daugiau stabilių izotopų;

2) Savitosios ryšio energijos priklausomybėje nuo A yra matomi nuokrypiai nuo glodžios linijos:



3.9 pav. Savitosios ryšio energijos priklausomybė nuo branduolio masės skaičiaus A, kai $A > 30$. Glodžioji kreivė apskaičiuota pagal Veiczekerio formulę, o taškai atitinka matavimų duomenis. Kai A vertė yra lyginė, atidėtas branduolių su masės skaičiais $A - 1$ ir $A + 1$ savitųjų ryšio energijų verčių vidurkis, kad Veiczekerio formulės porų dėmuo neturėtų įtakos

3) Darbo, kurį reikia atlikti, kad pašalinti neutroną arba protoną iš branduolio, priklausomybėje nuo N arba Z yra matomi trūkiai ties tam tikromis N arba Z vertėmis:



3.10 pav. Skirtumas tarp išmatuotos dviejų neutronų atskyrimo energijos ir tos, kurią numato Veiczekerio formulė. Kiekviena linija atitinka grupę branduolių su vienodu protonų skaičiumi

Branduolio magiškasis skaičius – tai tokia neutronų arba protonų skaičiaus vertė, kuri atitinka pilnai užpildytus neutronų arba protonų sluoksnius. Branduolio magiškieji skaičiai yra

2, 8, 20, 28, 50, 82, 126.

Analogija: atomo „magiškieji skaičiai“ – tai atomo elektronų skaičiaus vertės, kurios atitinka pilnai užpildytus atomo elektronų sluoksnius:

2, 10, 18, 36, 54, 86.

Atitinkami cheminiai elementai yra chemiškai inertiški (inertinės dujos) ir ypač stabilūs.

Branduoliai, kuriuose magiškieji yra ir protonų, ir neutronų skaičiai, vadinami ***dukart magiškaisiais***:

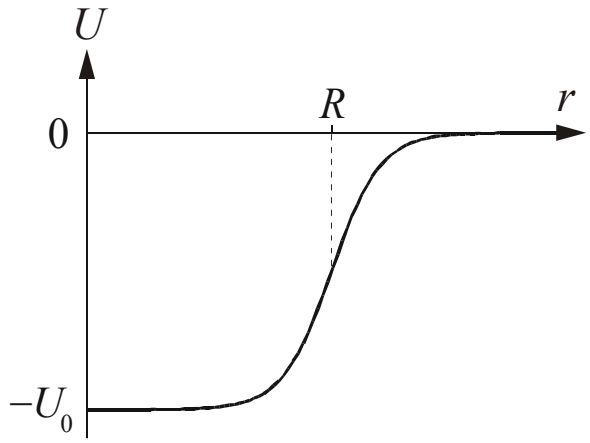
$$^{4}_{2}\mathrm{He},\ ^{16}_{8}\mathrm{O},\ ^{40}_{20}\mathrm{Ca},\ ^{48}_{20}\mathrm{Ca},\ ^{208}_{82}\mathrm{Pb}.$$

Sferinės begalinio gylio potencialo duobės modelis teisingai numato tik tris mažiausius magiškuosius skaičius (2, 8, 20).

Tikslesnė nukleono potencinės energijos išraiška:

$$U(r) \approx -\frac{U_0}{1+\exp\left(\frac{r-R}{a}\right)} + U_{\text{Kul}}(r)$$

Tačiau ir toks modelis teisingai numato tik tris mažiausius magiškuosius skaičius.



3.11 pav. Nukleono potencinė energija branduolyje

Branduolio modelis, kuris teisingai numato visus magiškuosius skaičius ir kai kurias kitas pagrindines branduolio savybes, gaunamas, pridėjus prie $U(r)$ ***sukinio ir orbitos sąveikos*** energiją

$$E_{\text{so}} = U_{\text{so}} \boldsymbol{L}_{\text{s}} \cdot \boldsymbol{L}$$

Čia $U_{\text{so}} < 0$. Galimas E_{so} vertes lemia galimos $\boldsymbol{L}_{\text{s}} \cdot \boldsymbol{L}$ vertės. Jas galima gauti remiantis tuo, kad

$$\boldsymbol{L}_j = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}_s$$

Pakėlus kvadratu:

$$|\boldsymbol{L}_j|^2 = |\boldsymbol{L}|^2 + |\boldsymbol{L}_s|^2 + 2\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{L}_s$$

T. y.

$$\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{L}_s = \frac{1}{2}(|\boldsymbol{L}_j|^2 - |\boldsymbol{L}|^2 - |\boldsymbol{L}_s|^2) = \frac{\hbar}{2}[j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)]$$

Kadangi $s = 1/2$, o $j = l \pm 1/2$, tai

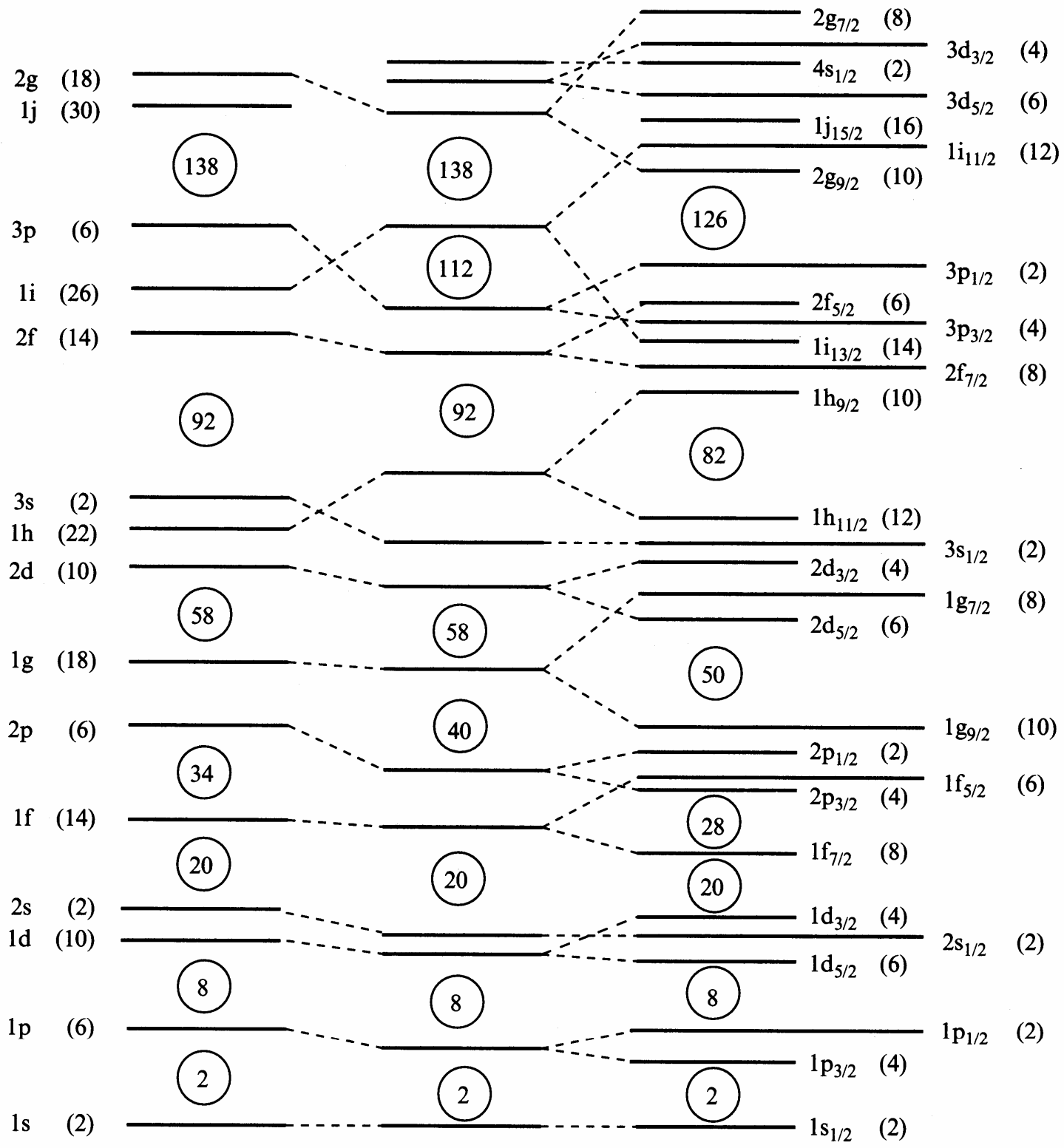
$$\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{L}_s = \begin{cases} \frac{1}{2} l\hbar^2, & \text{kai } j = l + \frac{1}{2}; \\ -\frac{1}{2}(l+1)\hbar^2, & \text{kai } j = l - \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Atitinkamai

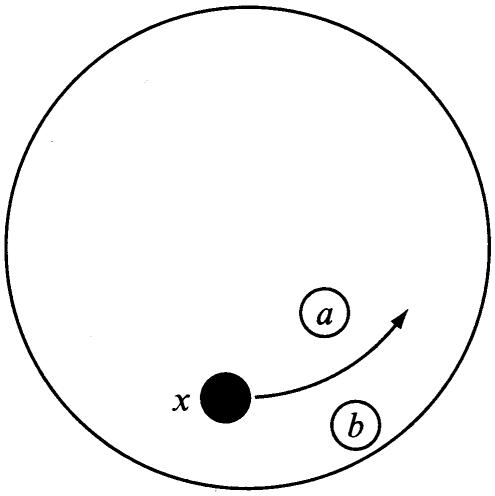
$$E_{\text{so}} = U_{\text{so}} \frac{\hbar^2}{2} \cdot \begin{cases} l, & \text{kai } j = l + \frac{1}{2}; \\ -l-1, & \text{kai } j = l - \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Intervalas tarp dviejų polygmenių, į kuriuos skyla kiekvienas lygmuo su nenuliniu l dėl sukinio ir orbitos sąveikos:

$$\Delta E_{\text{so}} = \frac{1}{2}|U_{\text{so}}|\hbar^2(2l+1)$$



3.12 pav. Nukleono energijos lygmenų diagramos, apskaičiuotos skirtingo pavidalo nukleono potencinėms energijoms, taikant sluoksninį branduolio modelį. Kairioji diagrama atitinka sferinę begalinio gylio potencialo duobę, vidurinioji diagrama atitinka realistišką potencinės energijos priklausomybę nuo radialiosios koordinatės, tačiau be sukinio ir orbitos sąveikos, o dešinioji diagrama gauta atsižvelgus į sukinio ir orbitos sąveiką



3.13 pav. Nukleono x sukinio ir orbitos sąveikos energijos dėmenų, kuriuos sąlygoja skirtingi kaimyniniai nukleonai (a ir b), tarpusavio kompensacijos aiškinimas. Dėl šios kompensacijos sukinio ir orbitos sąveiką patiria tik nukleonai, kurie yra arti branduolio paviršiaus

3.7. Branduolio sukinys

$$L_J = \sqrt{J(J+1)}\hbar \qquad (J = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \text{ arba } J = 1/2,\ 3/2,\ 5/2,\ \ldots)$$

$$L_{Jz} = m_J\hbar \qquad (m_J = -J, -J+1, \ldots J-1, J)$$

$$\boldsymbol{L}_J = \sum_{i=1}^{A}(\boldsymbol{L}_i + \boldsymbol{L}_{si}) = \sum_{i=1}^{A}\boldsymbol{L}_{ji}$$

$$|\, j_1 - j_2 \,| \le J \le |\, j_1 + j_2 \,|$$

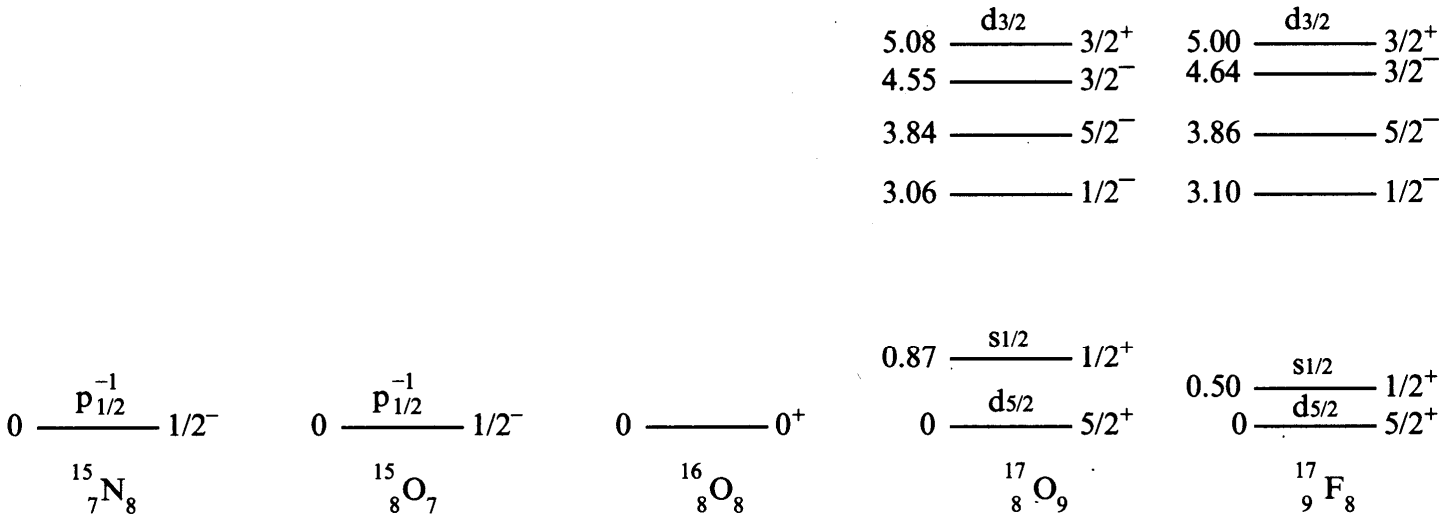
Branduolių pagrindinių būsenų sukinius galima skaičiuoti pagal tokias taisykles:

1. Lyginių-lyginių branduolių pagrindinės būsenos sukinys yra $J = 0$.
2. Branduolių su nelyginiu A sukinį beveik visada lemia vienintelio „nesuporuoto“ nukleono kvantinis skaičius j.
3. Nelyginių-nelyginių branduolių sukinį lemia dviejų nesuporuotųjų nukleonų pilnutinių judesio kiekio momentų vektorinė suma: $\boldsymbol{L}_J = \boldsymbol{L}_{jp} + \boldsymbol{L}_{jn}$, todėl yra galimos kelios vertės.

3.8. Kai kurių branduolių konfigūracijos ir energijos lygmenys

^{17}O branduolio konfigūracija:

$$(1s_{1/2})^2(1p_{3/2})^4(1p_{1/2})^2(1d_{5/2})^1$$



3.14 pav. Branduolių, kurie skiriasi nuo ^{16}O branduolio tik viena vakansija išoriniame sluoksnyje arba vienu papildomu sluoksniu, kuriame yra vienas nukleonas, energijos lygmenų diagramos

3.9. Branduolio magnetinis momentas

Dalelės, kurios krūvis e, o masė m_p, magnetinio momento $\boldsymbol{\mu}$ ir impulso momento $\boldsymbol{L}$ sąryšis:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{2m_\mathrm{p}}\boldsymbol{L}$$

Tai yra „orbitinis“ protono magnetinis momentas. Vidutinė jo vertė lygiagreti z ašiai ir lygi

$$\mu_z = \frac{e\hbar}{2m_\mathrm{p}} m_l \equiv \mu_\mathrm{N} m_l \quad (m_l = -l, -l+1, ..., l-1, l)$$

Čia μ_N yra ***branduolinis magnetonas***:

$$\mu_\mathrm{N} = \frac{e\hbar}{2m_\mathrm{p}} = 5{,}050783 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{J/T}\ = 3{,}15245 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{eV/T}$$

Palyginimas: Boro magnetonas lygus

$$\mu_\mathrm{B} = \frac{e\hbar}{2m_\mathrm{e}} = 9{,}274009 \cdot 10^{-24}\ \mathrm{J/T}\ = 5{,}78838 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{eV/T}$$

Kadangi $\mu_\mathrm{N} << \mu_\mathrm{B}$, tai branduolių magnetinės savybės pasireiškia daug silpniau negu atomų.
„Magnetiniu momentu“ susitarta vadinti didžiausią galimą μ_z vertę. Pvz., protono

$$\mu = \mu_N l$$

Bendruoju atveju nukleono arba branduolio orbitinio magnetinio momento projekcija lygi

$$\mu_z = \frac{g_l L_z \mu_\mathrm{N}}{\hbar} = g_l m_l \mu_\mathrm{N}$$

Čia g_l yra „orbitinis“ ***g faktorius***. Protono $g_l = 1$, neutrono $g_l = 0$. Atsižvelgus į sukinį:

$$\mu_z = \frac{(g_l \langle L_z \rangle + g_s \langle L_{sz} \rangle)\mu_\mathrm{N}}{\hbar} \equiv g_j m_j \mu_\mathrm{N}$$

Čia skliaustai „⟨“ ir „⟩“ žymi vidurkius. „Pilnutinis magnetinis momentas“ – didžiausia μ_z vertė:

$$\mu = g_j j \mu_\mathrm{N}$$

Protono $g_s = 5{,}5856912$, o neutrono $g_s = -3{,}8260837$. Palyginimas: elektrono $g_s = 2$.
Nukleono pilnutinį g faktorių g_j išreikšime kvantiniu skaičiumi j.

$$\langle L_z \rangle = L_{jz} - \langle L_{sz} \rangle = m_j \hbar - \langle L_{sz} \rangle$$

$$\mu_z = \left[g_l m_j + \frac{(g_s - g_l)\langle L_{sz} \rangle}{\hbar} \right] \mu_\mathrm{N}$$

$\langle L_{sz} \rangle$ gaunamas suprojektavus $\boldsymbol{L}_s$ į vektorių $\boldsymbol{L}_j$, o paskui tą projekciją suprojektavus į z ašį:

$$\langle L_{sz} \rangle = \frac{\langle \boldsymbol{L}_s \cdot \boldsymbol{L}_j \rangle}{|\boldsymbol{L}_j|} \cdot \frac{L_{jz}}{|\boldsymbol{L}_j|} = \frac{\langle \boldsymbol{L}_s \cdot \boldsymbol{L}_j \rangle}{|\boldsymbol{L}_j|} \cdot \frac{m_j}{\sqrt{j(j+1)}} = \frac{m_j \langle \boldsymbol{L}_s \cdot \boldsymbol{L}_j \rangle}{j(j+1)\hbar}$$

Vektorinis sąryšis $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_j - \boldsymbol{L}_s$ keliamas kvadratu:

$$|\boldsymbol{L}|^2 = |\boldsymbol{L}_j|^2 + |\boldsymbol{L}_s|^2 - 2\boldsymbol{L}_s \cdot \boldsymbol{L}_j$$

$$\langle \boldsymbol{L}_s \cdot \boldsymbol{L}_j \rangle = \frac{\hbar^2}{2}[j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)]$$

$$\langle L_{sz} \rangle = \frac{m_j \hbar}{2j(j+1)}[j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)]$$

Kadangi

$$j = l \pm \frac{1}{2},$$

tai

$$\text{kai} \quad j = l + \frac{1}{2}, \qquad \langle L_{sz} \rangle = \frac{m_j \hbar}{2j};$$

$$\text{kai} \quad j = l - \frac{1}{2}, \qquad \langle L_{sz} \rangle = -\frac{m_j}{2(j+1)} \hbar.$$

Todėl

$$\text{kai} \quad j = l + \frac{1}{2}, \qquad g_j = g_l \left(1 - \frac{1}{2j} \right) + \frac{g_s}{2j};$$

$$\text{kai} \quad j = l - \frac{1}{2}, \qquad g_j = g_l \frac{j + \frac{3}{2}}{j+1} - \frac{g_s}{2j(j+1)}.$$

Branduolio magnetinio momento projekcija = nukleonų magnetinių momentų projekcijų suma:

$$\mu_z = \frac{1}{\hbar} \sum_{i=1}^{A} (g_{l,i} \langle L_{z,i} \rangle + g_{s,i} \langle L_{sz,i} \rangle) \mu_{\mathrm{N}} \equiv g_J m_J \mu_{\mathrm{N}}$$

Čia g_J yra branduolio g faktorius. „Branduolio magnetinis momentas“:

$$\mu \equiv (\mu_z)_{\max} = g_J J \mu_{\mathrm{N}}$$

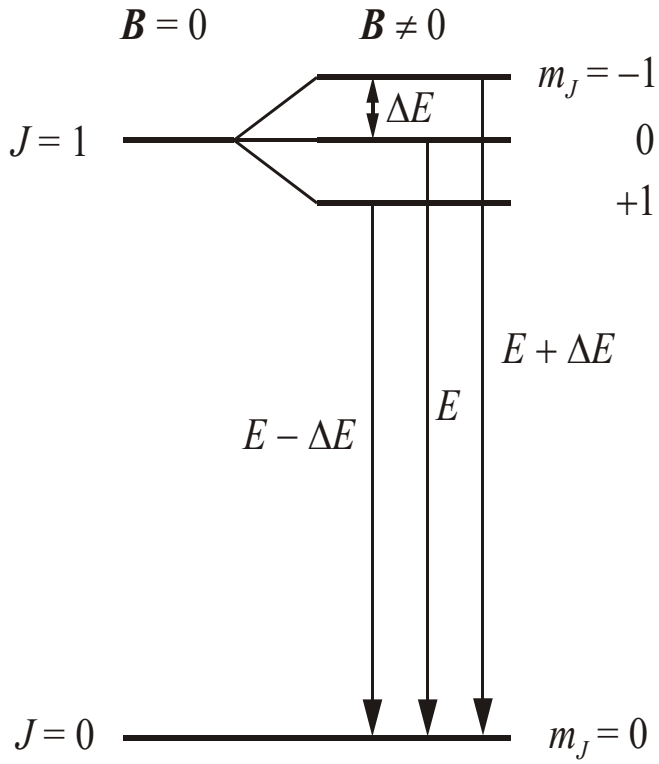
Esant išoriniam magnetiniam laukui, branduolys įgyja papildomą potencinę energiją

$$E_{\mathrm{M}} = -\mu_z B = -m_J g_J \mu_{\mathrm{N}} B \quad (m_J = -J, -J+1, ..., J-1, J)$$

T. y. branduolio energijos lygmuo skyla į $2J+1$ lygmenų, tarp kurių yra tokio dydžio intervalai:

$$\Delta E = g_J \mu_{\mathrm{N}} B$$

Šis reiškinys vadinamas ***branduoliniu Zėmano efektu***.



3.15 pav. Branduolinis Zėmano efektas

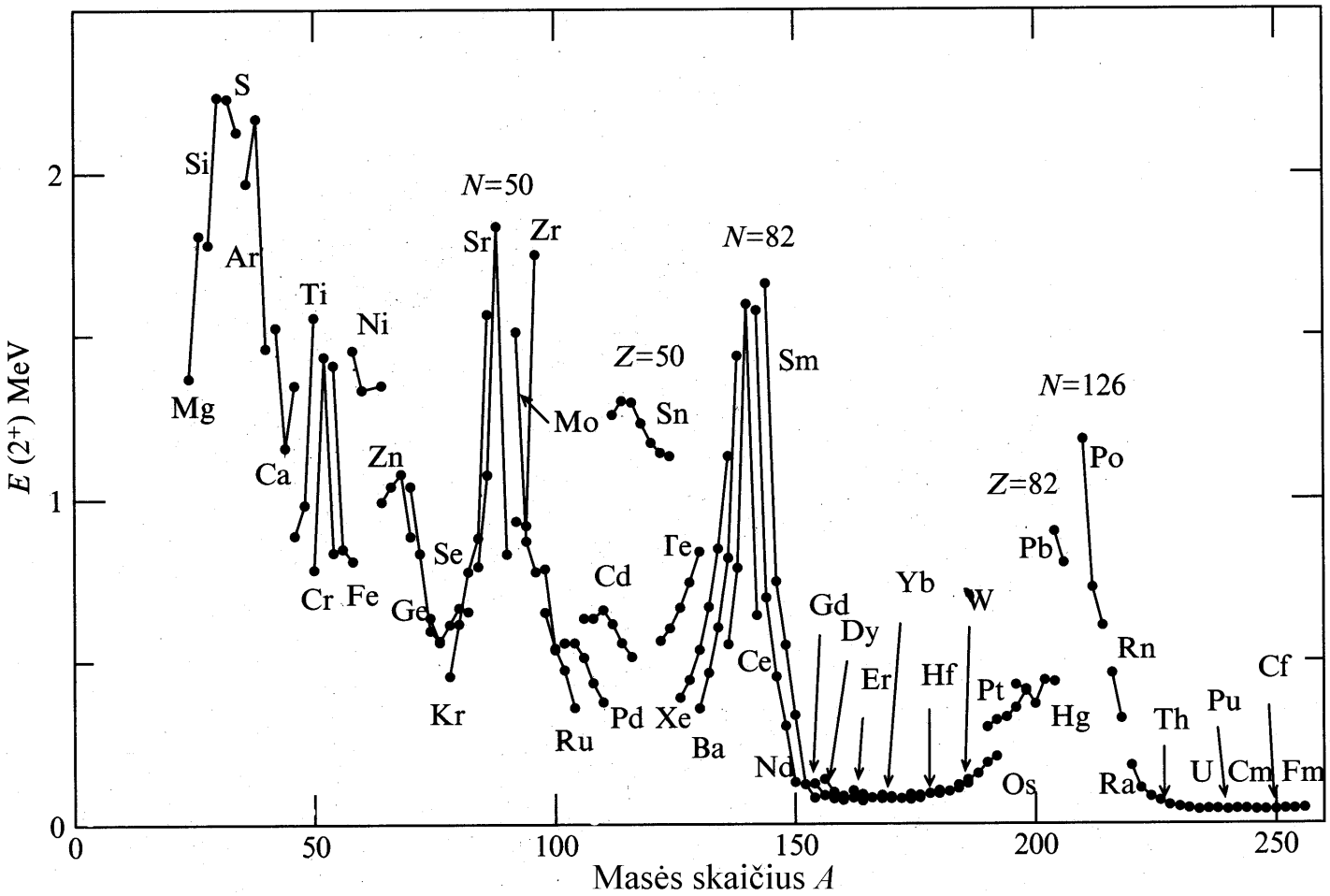
4. Kolektyvinės branduolio būsenos

Daugumos lyginių-lyginių branduolių pirmos sužadintos būsenos sukinys yra 2, o lyginumas +1.

Kai $30 < A < 150$, pirmoji sužadinimo energija yra maždaug 1 MeV.

Kai $150 < A < 190$ ir kai $A > 220$, pirmoji sužadinimo energija yra ~0,1 MeV eilės ir labai silpnai priklauso nuo A.

Šios būsenos ypatingos tuo, kad jos yra susijusios su koordinuotu (kolektyviniu) didelio nukleonų skaičiaus judėjimu.



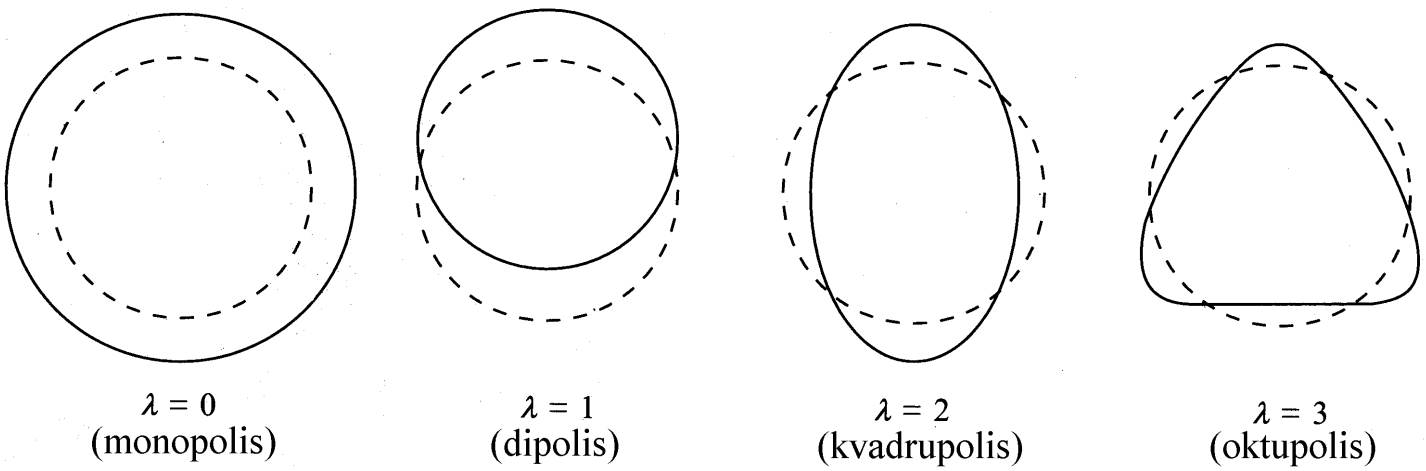
4.1 pav. Lyginių-lyginių branduolių mažiausios sužadinimo energijos. Ištisinės linijos atitinka izotopų sekas

4.1. Virpesių būsenos

Branduolio potencinės energijos priklausomybė nuo deformacijos turi minimumą ties nuline deformacija. Kai deformacija yra maža, potencinės energijos priklausomybė nuo deformacijos dydžio yra apytiksliai parabolinė, kaip ir harmoninio osciliatoriaus. Todėl yra galimi branduolio kaip visumos harmoniniai virpesiai. Atstumas nuo deformuoto branduolio centro iki jo paviršiaus kryptimi θ, ϕ išreiškiamas sferinių harmonikų tiesiniu dariniu:

$$R(\theta,\phi) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{m=-\lambda}^{\lambda} \alpha_{\lambda m}(t) Y_{\lambda m}(\theta,\phi)$$

Kiekviena sferinė harmonika atitinka tam tikrą ***virpesių modą***, taip pat vadinamą ***multipoliu***. ***Multipolio eilė*** yra 2^{λ}.

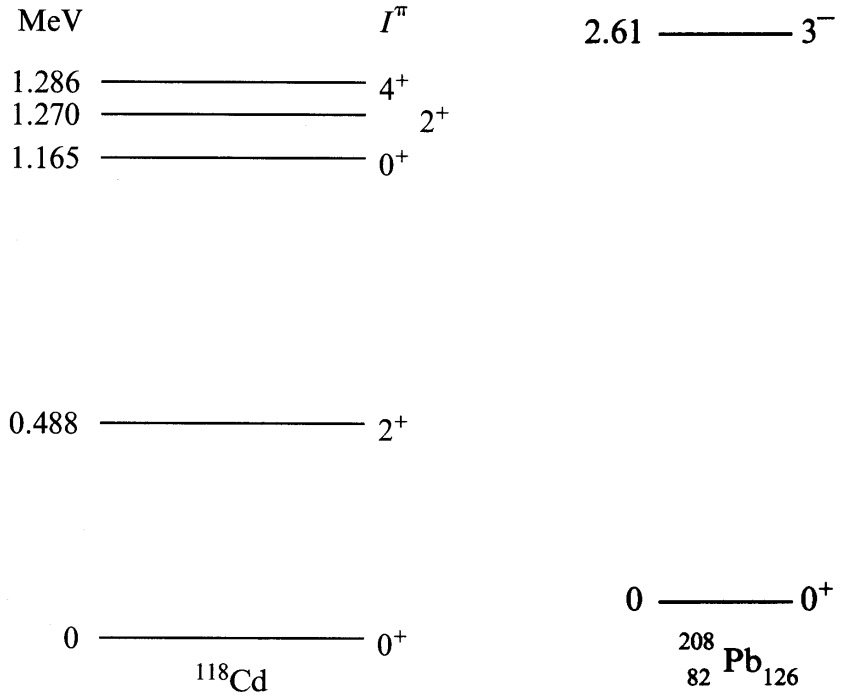


4.2 pav. Sferinės sistemos mažiausios eilės virpesių modos. Punktyrinė linija atitinka pusiausvyros formą, o ištisinė linija nurodo momentinę virpančio paviršiaus formą

Vienos virpesių modos energijos kvantas yra $\hbar\omega_\lambda$. Vienas virpesių energijos kvantas yra vadinamas ***fononu***. Tai yra kvantinė kvazidalelė. Fonono sukinys λ, o lyginumas $(-1)^\lambda$.
Pirmosios keturios virpesių modos:

- ***Monopolis*** ($\lambda = 0$, branduolio būsena 0^+). Tai yra sferiškai simetrinė virpesių moda – periodiniai sferos susitraukimai ir išsiplėtimai. Sužadinimo energija yra didelė (~100 MeV).
- ***Dipolis*** ($\lambda = 1$, branduolio būsena 1^-). Branduolio masės centras nejuda, o neutronai ir protonai juda priešingomis kryptimis. Sužadinimo energijos yra tarp 10 MeV ir 20 MeV.
- ***Kvadrupolis*** ($\lambda = 2$, branduolio būsena 2^+). Tai yra mažiausios eilės virpesių moda, kuri nereikalauja branduolio susispaudimo arba neutronų ir protonų atskyrimo. Yra galimi kelių tipų kvadrupoliniai virpesiai. Mažiausios energijos virpesiuose dalyvauja ne visi nukleonai, o tik tie, kurie yra arti branduolio paviršiaus. „Paviršiniai fononai“. Daugumos lyginių-lyginių branduolių žemiausios energijos sužadintoji būsena atsiranda dėl vieno kvadrupolinio paviršinio fonono sužadinimo. Tai yra 2^+ būsena.

  Fononai yra bozonai, todėl, kai yra daugiau negu vienas fononas, branduolio banginė funkcija turi būti simetrinė. Iš visų būsenų, kurias sudaro du 2^+ fononai, tik būsenos su $J = 0$, 2 ir 4 yra nusakomos simetrinėmis banginėmis funkcijomis (būsenos su $J = 1$ ir 3 nusakomos antisimetrinėmis funkcijomis). Todėl branduolys su dviem kvadrupolinių virpesių fononais gali būti vienoje iš trijų būsenų 0^+, 2^+ ir 4^+, kurių energijos yra maždaug 2 kartus didesnės už vieno kvadrupolinio fonono energiją.
- ***Oktupolis*** ($\lambda = 3$, branduolio būsena 3^-).



4.3 pav. ^{118}Cd ir ^{208}Pb branduolių žemiausieji energijos lygmenys. Pirmasis sužadintasis ^{118}Cd energijos lygmuo atitinka vieno paviršinio kvadrupolinio fonono sužadinimą. Kitos trys artimų energijų ^{118}Cd būsenos atitinka dviejų paviršinių kvadrupolinių fononų sužadinimą. Pirmasis sužadintasis ^{208}Pb energijos lygmuo atitinka vieno oktupolinio fonono sužadinimą

4.2. Deformuoti branduoliai

Kai branduolio sluoksniai yra pilnai užpildyti, branduolys yra sferinis. Tačiau, kai sluoksniai nėra pilnai užpildyti, tada nukleonai, kurių l ir n yra vienodi, užima kvantines būsenas su vienodomis arba artimomis viena kitai magnetinio kvantinio skaičiaus m_l vertėmis. Tokiu atveju branduolys nėra tiksliai sferinis, nes nukleonų (išskyrus s nukleonus) pasiskirstymas, kuris atitinka apibrėžtą m_l reikšmę, nėra sferiškai simetrinis.

Dažniausiai pasitaikanti forma – sukimosi elipsoidas.

Tipiškas nuokrypis nuo sferos – 20 %.

Deformuotų branduolių daugiausia tarp sunkiųjų branduolių: $150 < A < 190$ ir $A > 230$.

4.3. Sukimosi būsenos

Branduolys, kuris yra sukimosi elipsoido formos, gali suktis apie vieną iš dviejų vienodo ilgio ašių.

Kvantinėje mechanikoje įrodoma, kad lyginio-lyginio branduolio žemiausios energijos sukimosi būsenų sukiniai yra 0, 2, 4, ..., o tų būsenų lyginumas yra +1.

Klasikinė besisukančio kietojo kūno judesio kiekio momento išraiška:

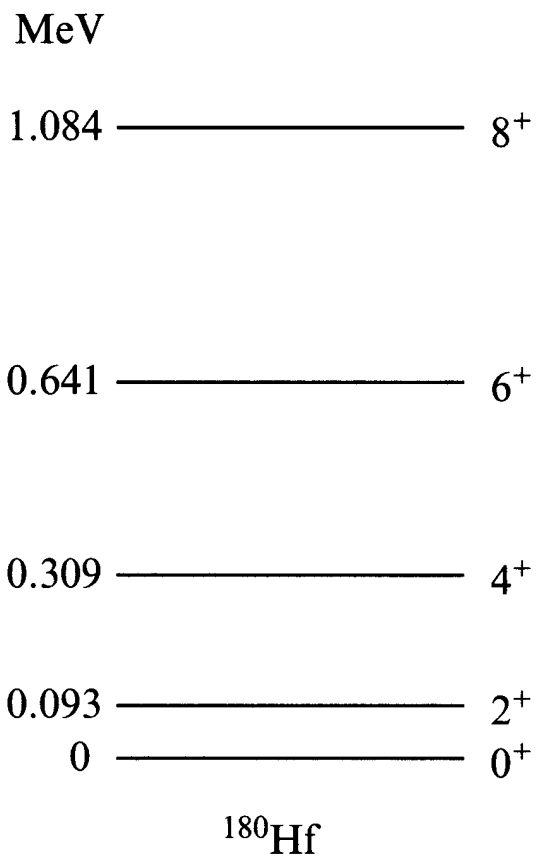
$$L = I\omega$$

I – inercijos momentas, ω – kampinis sukimosi dažnis. Sukimosi kinetinė energija:

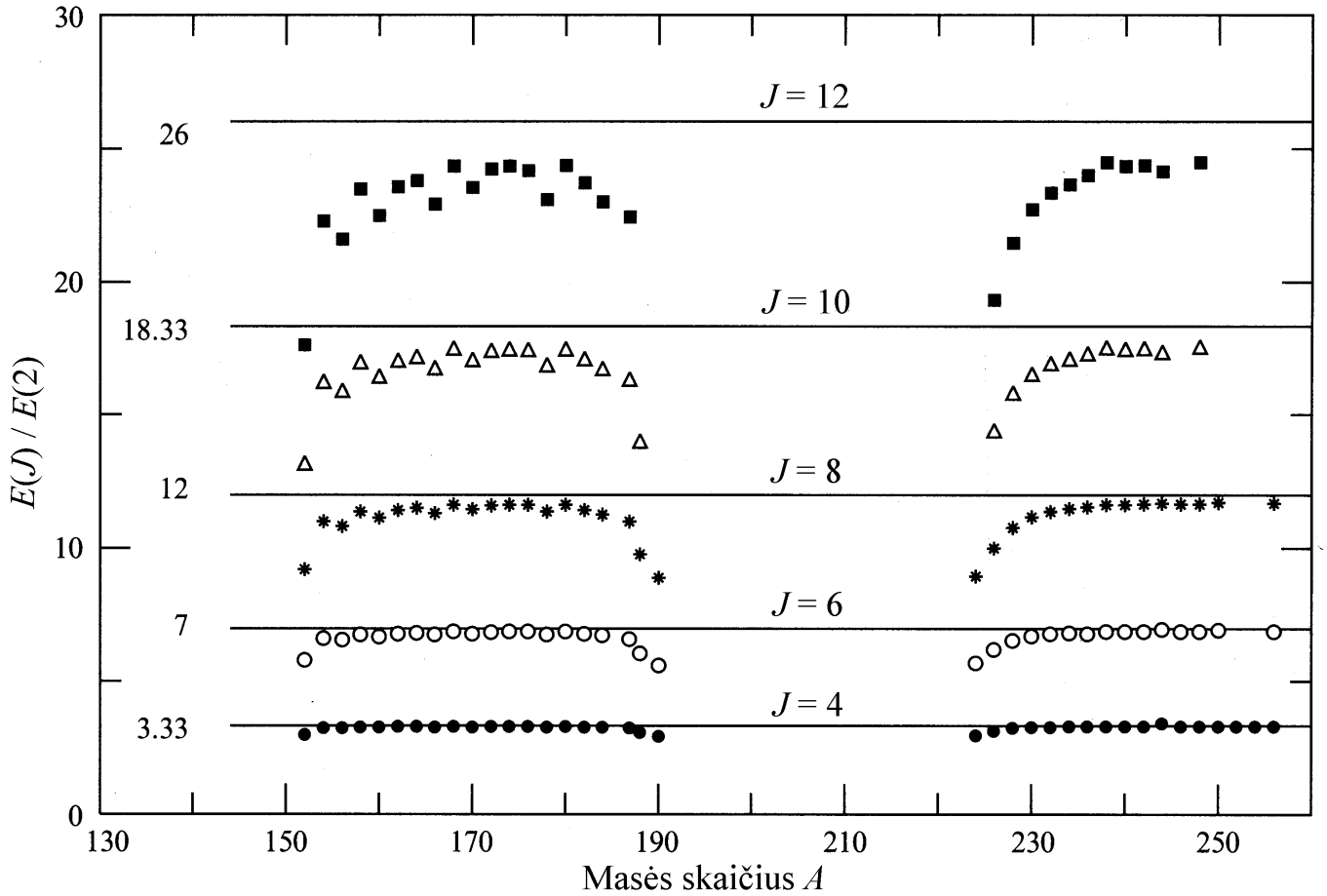
$$E = \frac{1}{2} I\omega^2 \equiv \frac{L^2}{2I}$$

Kadangi $L^2 = J(J+1)\hbar^2$, tai

$$E(J) = \frac{J(J+1)\hbar^2}{2I}$$



4.4 pav. ^{180}Hf branduolio žemiausieji energijos lygmenys ir jų sukiniai bei lyginumai atitinka besisukančio elipsoido modelį.



4.5 pav. Sunkiųjų lyginių-lyginių branduolių sukimosi energijos santykiai, kai masės skaičius atitinka nelygybę $150 \le A \le 190$ arba $A \ge 224$. Taškai atitinka matavimų duomenis, o horizontalios linijos atitinka teorinius santykius, kurie gaunami taikant besisukančio kietojo kūno modelį

5. Branduolių nestabilumas

5.1. Alfa skilimas

5.1.1. Pagrindinės alfa skilimo ypatybės

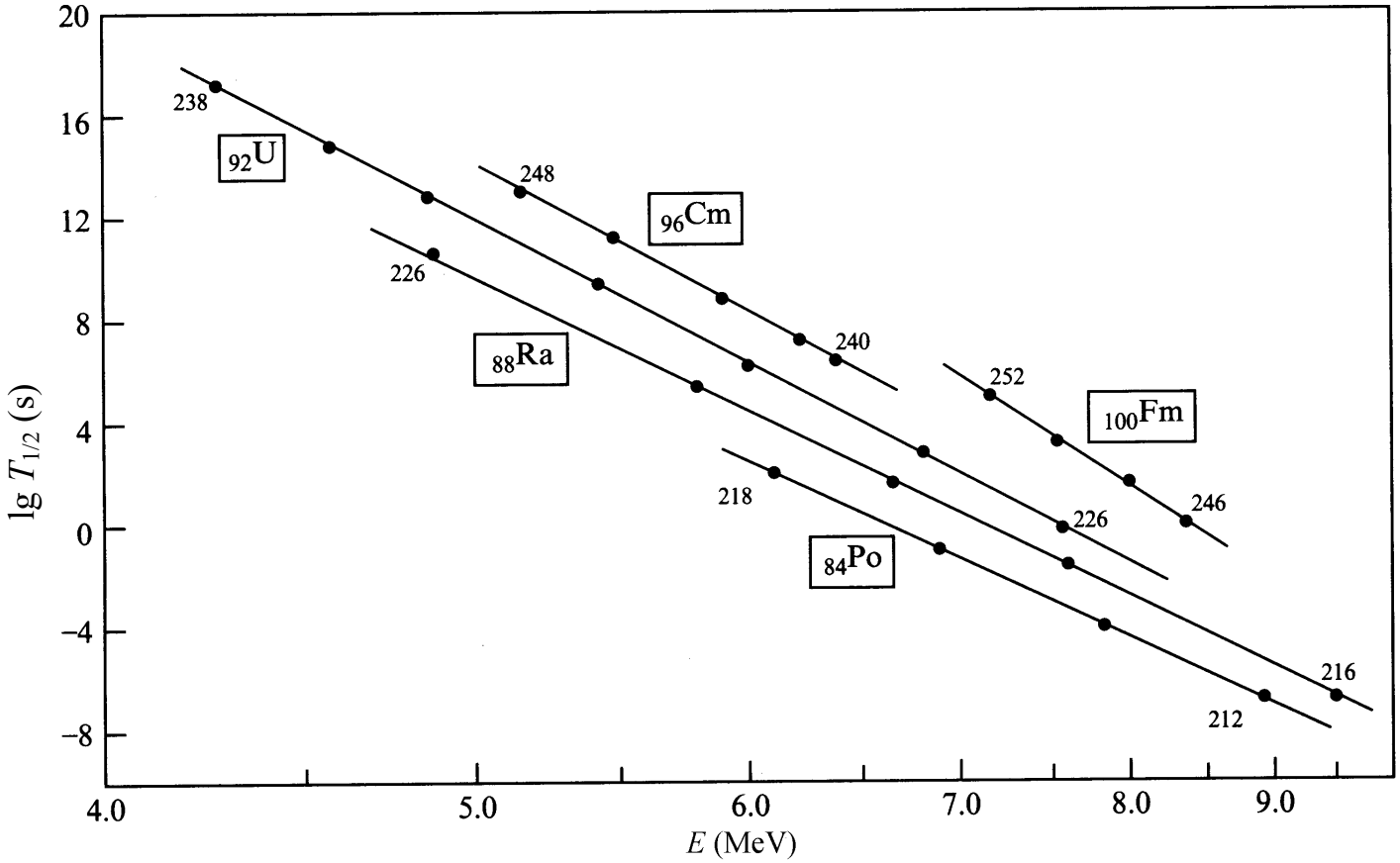
Alfa (α) skilimas yra toks atomo branduolio virsmas, kurio metu branduolys savaime išspinduliuoja α dalelę ($^{4}_{2}\mathrm{He}$ branduolį).

$^{A}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}\mathrm{Y} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$

$^{226}_{88}\mathrm{Ra} \rightarrow {}^{222}_{86}\mathrm{Rn} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$

1. $Z > 82$.
2. Diskrečios energijos.
3. Siauras energijų intervalas: $E = (4 - 8{,}7)$ MeV.
4. Labai stipri pusamžio priklausomybė nuo dalelių energijos. ***Geigerio ir Netolo dėsnis***:

$$\lg T_{1/2} = C + \frac{D}{\sqrt{E}}$$



5.1 pav. Kai kurių branduolių alfa skilimo pusamžio logaritmo priklausomybė nuo alfa dalelių energijos. Linijos atitinka izotopų sekas. Horizontaliosios ašies mastelis proporcingas $-1/E^{1/2}$.

Pirmąją ypatybę lemia tai, kad alfa skilimas susijęs su protonų Kulono stūma. Alfa skilimas yra „energiškai naudingas“, nes alfa dalelė yra ypač stabilus darinys.

Išsiskyrusi energija įvairiems ^{232}U branduolio skilimo tipams

Išspinduliuota dalelė	Išsiskyrusi energija (MeV)	Išspinduliuota dalelė	Išsiskyrusi energija (MeV)
n	–7,26	^{4}He	+5,41
^{1}H	–6,12	^{5}He	–2,59
^{2}H	–10,70	^{6}He	–6,19
^{3}H	–10,24	^{6}Li	–3,79
^{3}He	–9,92	^{7}Li	–1,94

Antrąją ypatybę lemia antrinio branduolio energijos diskretumas

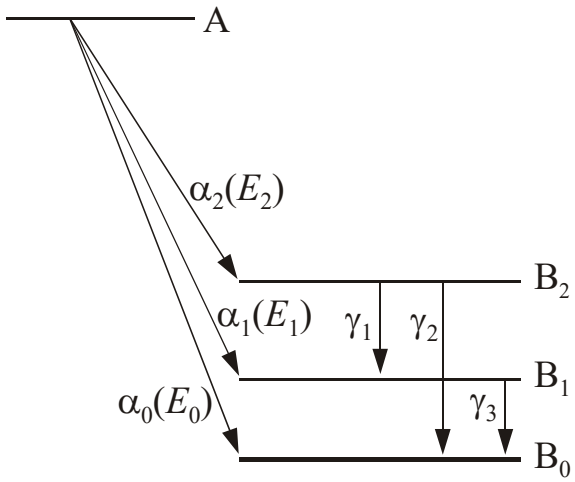
3) ir 4) α skilimo ypatybes paaiškina teorija, kurią 1928 m. sukūrė amerikiečių fizikas G. Gamovas (*Gamow*).

Alfa dalelės potencinė energija:

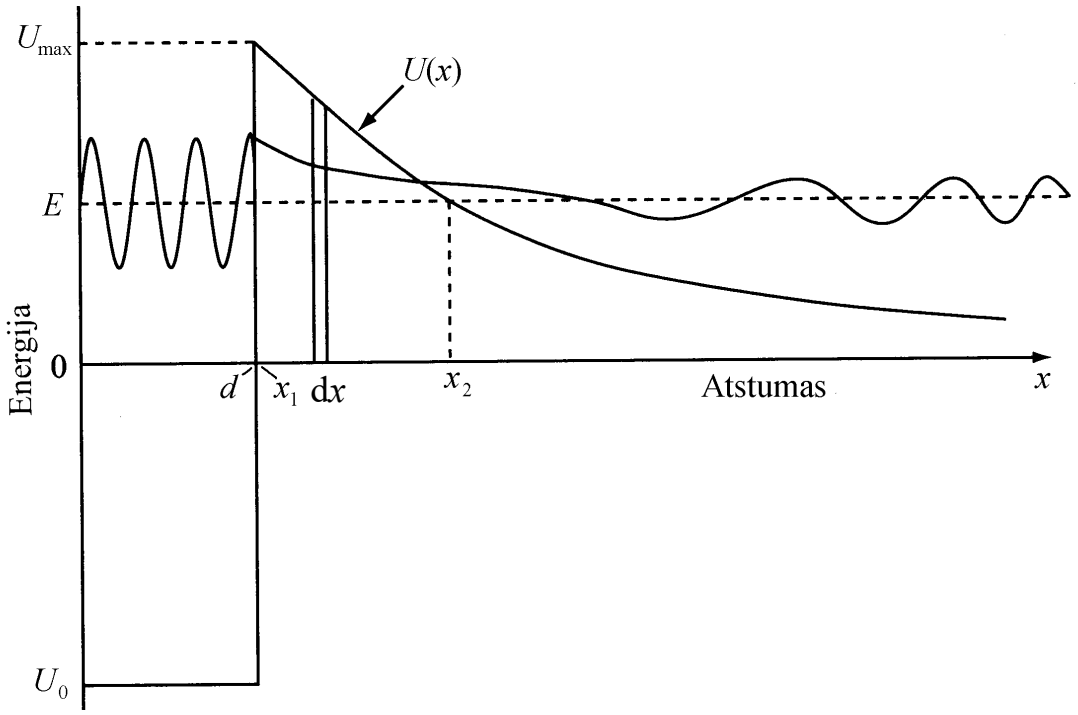
$$U(x) \approx \begin{cases} Ze^2/(2\pi\varepsilon_0 x), & \text{kai } x > d, \\ U_0 < 0, & \text{kai } x \le d. \end{cases}$$

Kuloninio potencialo barjero aukštis:

$$U_{\max} \approx U(d) = \frac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0 d}$$

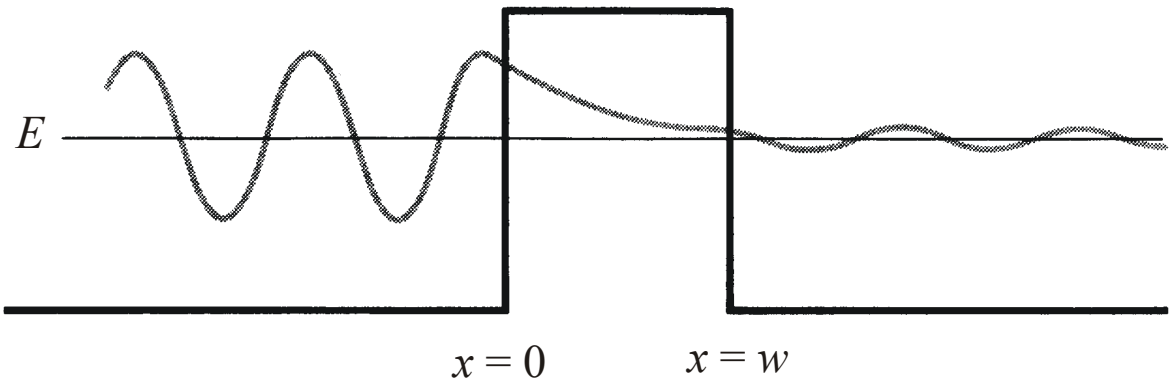


5.2 pav. α dalelių greičių pasiskirstymo aiškinimas



5.3 pav. α dalelės ir antrinio branduolio sąveikos energijos priklausomybė nuo atstumo tarp jų

5.1.2. Laisvos dalelės banginė funkcija ir tunelinis reiškinys



5.4 pav. Dalelės banginė funkcija, kai egzistuoja potencialo barjeras, kurio aukštis yra didesnis už dalelės energiją

Vienmatė Šrėdingerio lygtis:

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} = \frac{2m}{\hbar^2}(U(x) - E)\psi$$

Stačiakampio potencialo barjero atveju šią lygtį reikia spręsti kiekvienai iš trijų sričių:

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi_1}{\mathrm{d}x^2} + k_1^2\psi_1 = 0 \qquad \text{(I sritis)},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi_2}{\mathrm{d}x^2} - k_2^2\psi_2 = 0 \qquad \text{(II sritis)},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi_3}{\mathrm{d}x^2} + k_1^2\psi_3 = 0 \qquad \text{(III sritis)}.$$

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \qquad k_2 = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}$$

Bendrasis sprendinys:

$$\psi_1 = A\exp(\mathrm{i}k_1x) + B\exp(-\mathrm{i}k_1x) \qquad \text{(I sritis)},$$

$$\psi_2 = C\exp(k_2x) + D\exp(-k_2x) \qquad \text{(II sritis)},$$

$$\psi_3 = F\exp(\mathrm{i}k_1x) + G\exp(-\mathrm{i}k_1x) \qquad \text{(III sritis)}.$$

Jeigu dalelių šaltinis yra taške $x = -\infty$, tada

$$G = 0$$

A yra *krintančiosios* bangos amplitudė, B yra *atsispindėjusios* bangos amplitudė, o F yra *praėjusios* bangos amplitudė.

Laisvų ***dalelių srauto tankis*** – vidutinis dalelių skaičius, kuris pereina pro statmeną jų judėjimui vienetinio ploto paviršių per laiko vienetą:

$$i = N\frac{\hbar k}{m}|A|^2,$$

čia N yra dalelių skaičius.

Potencialo barjero skaidris:

$$S \equiv \frac{|F|^2}{|A|^2}.$$

Kai barjeras yra aukštas arba platus, t. y. kai

$$k_2 w >> 1,$$

tada

$$S \approx \exp\left[-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U_0 - E)} \cdot w\right] << 1$$

Toks reiškinys, kai dalelė pereina pro potencialo barjerą, turėdama mažiau energijos, negu jos reikėtų kad pereiti virš barjero, vadinamas ***tuneliniu reiškiniu*** arba ***tuneline pereiga***.

Bet kokios formos plataus potencialo barjero skaidrio eilę galima įvertinti suskaidžius tą barjerą į didelį skaičių N plonų stačiakampių barjerų:

$$S \approx \lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N} S_n \approx \exp\left[-\frac{2}{\hbar}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{2m(U(x)-E)}\mathrm{d}x\right]$$

5.1.3. Geigerio ir Netolo dėsnio išvedimas

$$x_1 \approx d \approx 10^{-14}\ \mathrm{m}$$

Lygties $U(x) = E$ sprendinys:

$$x_2 = \frac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0 E}$$

Jeigu $Z = 100$, o $E = 10$ MeV, tai $x_2 - x_1 \approx 1{,}88\cdot 10^{-14}$ m. Remdamiesi prielaida, kad vidutinė $U - E$ vertė pointegraliniame reiškinyje lygi $0{,}5\cdot(U_{\max} - E) \approx 10$ MeV, gauname $S \approx \exp(-52) \approx 2\cdot 10^{-23}$. Vadinasi, $S << 1$, todėl galima taikyti aukšto ir plataus barjero artinį.

Skilimo konstantą λ lemia alfa dalelės „atsitrenkimų“ į barjerą dažnis ir S:

$$\lambda \approx \frac{\upsilon}{d} S$$

$E = M\upsilon^2/2$. Jeigu $E = 10$ MeV, tai $\upsilon \approx 2\cdot 10^7$ m/s. Todėl

$$\lambda \approx 10^{21}\cdot S \quad [\mathrm{s}^{-1}]$$

Kadangi

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda},$$

tai

$$\lg T_{1/2} \approx B - 0.434 \ln S,$$

čia $T_{1/2}$ išreikštas sekundėmis, o $B \approx -21$. Dydžio $\ln S$ priklausomybė nuo E gaunama, remiantis prielaida, kad potencialo barjero viduje $E << U$ (išskyrus integravimo rėžius, kuriuose $U = E$). Todėl

$$-\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{2m(U(x)-E)}\mathrm{d}x \approx -\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{2mU(x)}\mathrm{d}x = -\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{2m\frac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0 x}}\mathrm{d}x = const(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}) \sim -\frac{1}{\sqrt{E}}$$

(nes $x_2 \sim 1/E$). Vadinasi,

$$\lg T_{1/2} = C + \frac{D}{\sqrt{E}}$$

5.2. Gama spinduliavimas

5.2.1. Gama spinduliavimo ir vidinės konversijos sąvokos

Gama (γ) spinduliuote vadinamos elektromagnetinės bangos, kurių bangos ilgis yra daug mažesnis už atstumą tarp kietojo kūno atomų, t. y. daug mažesnis už 10^{-10} m (1 Å).

Gama spinduliuotė dažniausiai atsiranda dėl branduolio ***kvantinio šuolio*** iš energijos lygmens E_a į žemesnį lygmenį E_b. Išspinduliuoto fotono energija lygi

$$E = h\nu = E_a - E_b$$

Tipiškos gama fotonų („gama kvantų“) energijos: (0,01 – 5) MeV.
Tipiška sužadintojo branduolio gyvavimo trukmė: (10^{-14}–10^{-6}) s
Tačiau yra galimos ir daug labiau ilgaamžės būsenos (> 1 min) – ***metastabiliosios būsenos***.

Sužadinimo energiją branduolys gali prarasti ne tik gama kvanto pavidalu. Yra dar du būdai:
Vidinė konversija: sužadinimo energija tiesiogiai perduodama atomo elektronui.

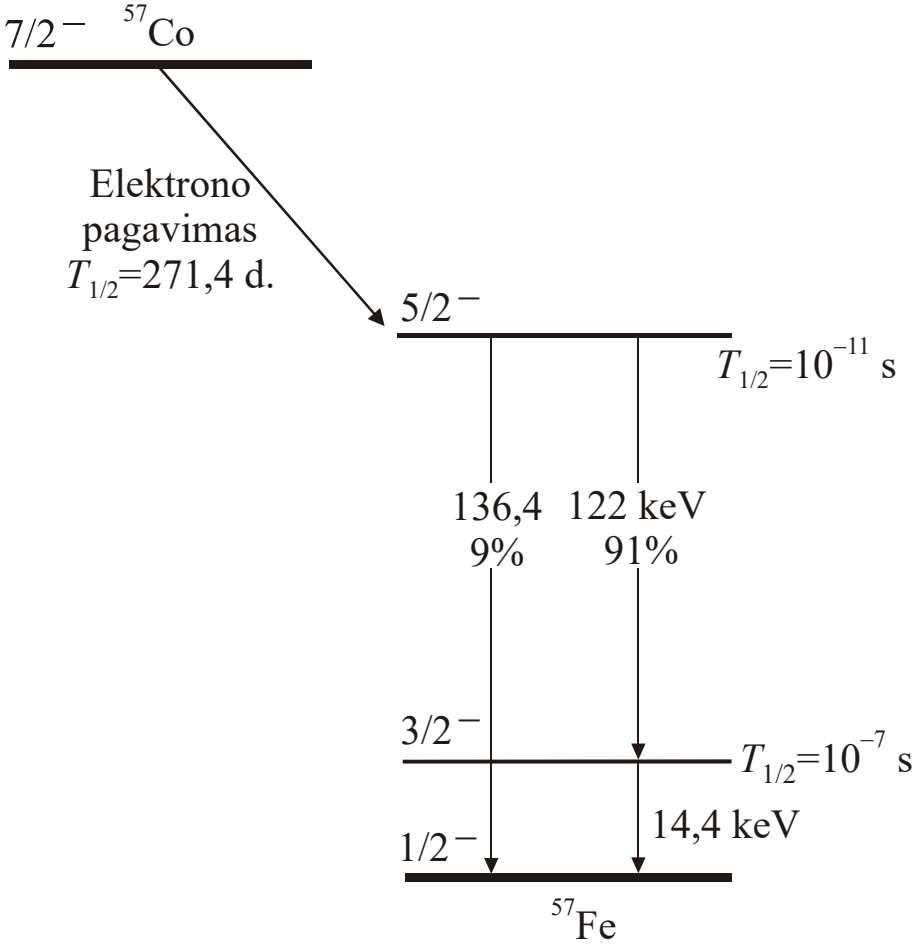
Konversijos elektrono energija: $E_e = E - \varepsilon_r$.

Vidinis porų kūrimas: sužadinimo energija virsta dviejų naujų dalelių – elektrono ir pozitrono pilnutine reliatyvistine energija (t. y. rimties energija + kinetinė energija)

Vidinio porų kūrimo konversijos „slenkstis“ (mažiausia sužadinimo energija) = $2m_0c^2$.

Gama spinduliuotė gali atsirasti ne tik dėl branduolio sužadinimo, bet ir anihiliuojant dalelėms. Paprasčiausia realizuoti elektrono ir pozitrono anihiliacijos reakciją:

$$e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma + 1{,}02 \text{ MeV}$$



5.5 pav. Radioaktyviojo skilimo $^{57}Co \rightarrow {}^{57}Fe$ schema. Šio skilimo metu atsiranda sužadinti ^{57}Fe branduoliai, kurie spinduliuoja trijų energijų gama kvantus

5.2.2. Daugiapolės spinduliuotės sąvoka, jos impulso momentas ir lyginumas

Pagal impulso momento tvermės dėsnį išspinduliuotas fotonas turi impulso momentą

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{L}_{Ja} - \boldsymbol{L}_{Jb}$$

To momento modulis ir kvantiniai skaičiai l ir m apskaičiuojami pagal bendrąsias taisykles:

$$|\boldsymbol{l}| = \hbar\sqrt{l(l+1)},$$

$$|J_a - J_b| \le l \le |J_a + J_b| \qquad \text{(išskyrus } l = 0\text{)}$$

$$m = m_{Ja} - m_{Jb}$$

$$-l \le m \le l$$

Elektromagnetinė spinduliuotė, kuri turi tiksliai apibrėžtą impulso momentą l ir tiksliai apibrėžtą jo projekciją m, yra vadinama ***l, m eilės daugiapole spinduliuote***. Jeigu m vertė nėra apibrėžta (arba nėra svarbi sprendžiamajam uždaviniui), tada l-tosios eilės daugiapolė spinduliuotė taip pat vadinama ***2^l-poline spinduliuote*** (pvz., ***dipolinė spinduliuotė*** atitinka $l = 1$, ***kvadrupolinė spinduliuotė*** atitinka $l = 2$, ***oktupolinė spinduliuotė*** atitinka $l = 3$ ir t. t.). Nulinės eilės („monopolinė“) spinduliuotė neegzistuoja.

Daugiapolė spinduliuotė turi apibrėžtą dažnį. Todėl elektrinis ir magnetinis laukai lygūs

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \boldsymbol{\mathcal{E}}^*(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t}$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \boldsymbol{H}^*(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t}$$

Maksvelo lygtys ir tolydumo lygtis kompleksinėms amplitudėms:

$$\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mathrm{i}\omega}{\varepsilon_0 c^2}[\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})],$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = -\mathrm{i}\omega\varepsilon_0\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{i}\omega\rho(\boldsymbol{r})$$

Taikant šiuos bendrus sąryšius branduoliui, dėmuo $\boldsymbol{j}$ nusako elektros srovę, kuri atsiranda branduolio viduje dėl protonų judėjimo erdvėje. Dėmuo $\boldsymbol{M}$ nusako įmagnetėjimą, kuris atsiranda dėl nukleonų sukininių magnetinių momentų. Klasikinė įmagnetėjimo apibrėžtis – tūrio vieneto dipolinis magnetinis momentas:

$$\boldsymbol{M} \equiv \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\mu}_i$$

Iš Maksvelo lygčių gaunama lygtis $\boldsymbol{H}$ atžvilgiu:

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{H} - k^2\boldsymbol{H} = \nabla \times \boldsymbol{j} + k^2\boldsymbol{M}$$

Ši lygtis yra simetriška inversijos atžvilgiu ($\boldsymbol{j}$ yra nelyginė funkcija, o $\boldsymbol{M}$ yra lyginė funkcija).

5.6 pav. (a) Elektrinis dipolinis momentas, kurį sudaro teigiamas ir neigiamas krūviai, atskirti atstumu $\boldsymbol{r}$. Elektrinis dipolinis momentas lygus $q\boldsymbol{r}$. (b) Magnetinis dipolinis momentas, kurį sukuria apskrita orbita judantis krūvis q. Magnetinis dipolinis momentas lygus $\frac{1}{2}q\,\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$.

Pilnai apibūdinant daugiapolės spinduliuotės lauko erdvinį pasiskirstymą, reikia kartu su kvantiniais skaičiais l ir m nurodyti ir spinduliuotės ***tipą***: elektrinė („E“) ar magnetinė („M“).

Vienas iš požymių, pagal kurį galima atskirti E spinduliuotę nuo M spinduliuotės, yra jos lauko lyginumas. Spinduliuotės lauko lyginumą susitarta tapatinti su jos magnetinio lauko lyginumu:

$$\text{lyginė banga:} \quad \boldsymbol{H}(-\boldsymbol{r}) = +\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}),$$

$$\text{nelyginė banga:} \quad \boldsymbol{H}(-\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}).$$

Spinduliuotės šaltinio išorėje elektrinio lauko $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ lyginumas yra priešingas $\boldsymbol{H}$ lyginumui.

Lyginumas priklauso nuo l ir nuo tipo (E ar M). E spinduliuotės (t. y. jos magnetinio lauko) lyginumas yra priešingas tos pačios eilės M spinduliuotės lyginumui:

l, m eilės elektrinės daugiapolės spinduliuotės lyginumas $(-1)^l$,

l, m eilės magnetinės daugiapolės spinduliuotės lyginumas $-(-1)^l$.

Spinduliuotės lauko lyginumas yra svarbus todėl, kad pradinė ir galutinė branduolio būsenos yra apibrėžto lyginumo. Todėl ir fotono lauko lyginumas turi būti apibrėžtas. Būsenų a ir b lyginumus pažymėjus Π_a ir Π_b, „lyginumo atrankos taisyklę“ galima užrašyti taip:

jeigu $\Pi_a = \Pi_b$, atsiranda tik „lyginė“ spinduliuotė;
jeigu $\Pi_a = -\Pi_b$, atsiranda tik „nelyginė“ spinduliuotė.

Vadinasi, nors bendruoju atveju dėl kvantinio šuolio tarp duotųjų dviejų būsenų „a“ ir „b“ gali atsirasti įvairios eilė daugiapolė spinduliuotė, tačiau kiekvienos eilės l spinduliuotė gali būti tik elektrinė arba tik magnetinė.

l-tosios eilės daugiapolio spinduliavimo tikimybė sparčiai mažėja didėjant l. Todėl dažniausiai pasireiškia tik mažiausios galimos eilės spinduliuotė.

Mažiausioji galima daugiapolės spinduliuotės eilė ($l_{\min}$), kai spinduliuotė atsiranda dėl kvantinio šuolio iš būsenos J_a, Π_a į būseną J_b, Π_b

(A) $J_a \neq J_b$		
Būsenų lyginumai	Elektrinė spinduliuotė	Magnetinė spinduliuotė
$\Pi_a \Pi_b = (-1)^{J_a - J_b}$	$l_{\min} = \lvert J_a - J_b \rvert$	$l_{\min} = \lvert J_a - J_b \rvert + 1$, išskyrus J_a arba $J_b = 0$
$\Pi_a \Pi_b = (-1)^{J_a - J_b + 1}$	$l_{\min} = \lvert J_a - J_b \rvert + 1$, išskyrus J_a arba $J_b = 0$	$l_{\min} = \lvert J_a - J_b \rvert$
(B) $J_a = J_b \neq 0$		
Būsenų lyginumai	Elektrinė spinduliuotė	Magnetinė spinduliuotė
$\Pi_a = \Pi_b$	$l_{\min} = 2$, išskyrus $J_a = J_b = 1/2$	$l_{\min} = 1$
$\Pi_a = -\Pi_b$	$l_{\min} = 1$	$l_{\min} = 2$, išskyrus $J_a = J_b = 1/2$

5.2.3. Daugiapolės spinduliuotės intensyvumas

Tarkime, kad spinduliuotės šaltinio matmenys (d) daug mažesni už bangos ilgį, t. y.

$$kd << 1$$

Čia k yra spinduliuotės bangos skaičius:

$$k \equiv \omega / c$$

Kai nėra įmagnetėjimo (t. y. spinduliuotė atsiranda tik dėl krūvio judėjimo), tada l, m eilės elektrinės ir magnetinės daugiapolės spinduliuotės elektrinio lauko amplitudės atitinkamai lygios

$$a_{\mathrm{E}}(l,m) \approx -\frac{1}{\varepsilon_0 (2l+1)!!}\left(\frac{l+1}{l}\right)^{1/2} k^{l+2} Q_{lm}, \quad \text{t. y.} \quad a_{\mathrm{E}}(l,m) \sim k^{l+2} Q_{lm}$$

$$a_{\mathrm{M}}(l,m) \approx \frac{1}{\varepsilon_0 (2l+1)!!}\left(\frac{l+1}{l}\right)^{1/2} k^{l+2} \frac{M_{lm}}{c}, \quad \text{t. y.} \quad a_{\mathrm{M}}(l,m) \sim k^{l+2} \frac{M_{lm}}{c}.$$

Q_{lm} ir M_{lm} yra elektrinis ir magnetinis ***l, m eilės apibendrintieji daugiapoliai momentai***:

$$Q_{lm} = \int_V \rho(\boldsymbol{r}) r^l Y_{lm}^*(\theta,\phi) \mathrm{d}V,$$

$$M_{lm} = \frac{1}{(l+1)} \int_V r^l Y_{lm}^*(\theta,\phi) \boldsymbol{r} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{j}) \mathrm{d}V \equiv \frac{1}{(l+1)} \int_V (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{j}) \cdot \nabla [r^l Y_{lm}^*(\theta,\phi)] \mathrm{d}V.$$

Atsižvelgus į įmagnetėjimą $\boldsymbol{M}$, prie Q_{lm} ir M_{lm} reikia pridėti atitinkamai šiuos dėmenis:

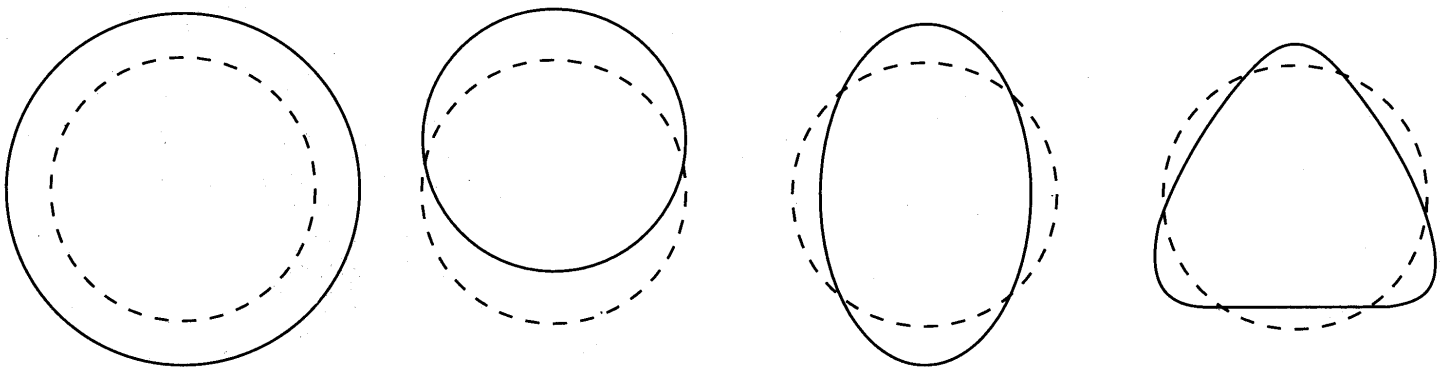
$$Q'_{lm} = \frac{\mathrm{i}k}{(l+1)c} \int_V (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{M}) \cdot \nabla [r^l Y_{lm}^*(\theta,\phi)] \mathrm{d}V \equiv -\frac{\mathrm{i}k}{(l+1)c} \int_V r^l Y_{lm}^*(\theta,\phi) \nabla \cdot (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{M}) \mathrm{d}V,$$

$$M'_{lm} = -\int_V r^l Y_{lm}^*(\theta,\phi) (\nabla \cdot \boldsymbol{M}) \mathrm{d}V \equiv \int_V \boldsymbol{M} \cdot \nabla [r^l Y_{lm}^*(\theta,\phi)] \mathrm{d}V$$

„(2l+1)!!“ yra dvigubas faktorialas: $(2l + 1)!! \equiv 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2l - 1) \cdot (2l + 1)$.

Pointegralinių funkcijų pavidalas rodo, kad:

- Q_{lm} susijęs su elektros krūvio virpamuoju judėjimu,
- M_{lm} susijęs su elektros krūvio sukamuoju judėjimu (t. y. sūkurine elektros srove),
- Q'_{lm} susijęs su įmagnetėjimo sukamuoju judėjimu,
- M'_{lm} susijęs su įmagnetėjimo virpesiais.



$l = 0$ (monopolis) | $l = 1$ (dipolis) | $l = 2$ (kvadrupolis) | $l = 3$ (oktupolis)

5.7 pav. Elektros krūvio, kuris tolygiai pasiskirstęs sferos viduje, virpamasis judėjimas, dėl kurio atsiranda elektrinė dipolinė, kvadrupolinė ir oktupolinė spinduliuotė. Monopolinė spinduliuotė ($l = 0$) yra negalima, nes sferiškai simetrinio krūvio spindulio kitimas nesukelia kintamo lauko.

Daugiapolės spinduliuotės energijos srautas (energijos kiekį, kuris pernešamas per laiko vienetą pro uždarą paviršių, gaubiantį spinduliuotės šaltinį):

elektrinė spinduliuotė: $$U_{\mathrm{E}}(l,m)=\frac{2\varepsilon_0 c}{k^2}\,|\,a_{\mathrm{E}}(l,m)\,|^2,$$

magnetinė spinduliuotė: $$U_{\mathrm{M}}(l,m)=\frac{2\varepsilon_0 c}{k^2}\,|\,a_{\mathrm{M}}(l,m)\,|^2\,.$$

5.2.4. Daugiapolės spinduliuotės kvantinis pobūdis

Pakeičiant klasikines formules, kad jos tiktų branduoliui, reikia atsižvelgti į tai, kad:

1) spinduliuotė yra spinduliuojama atskirais kvantais (fotonais), kurių kiekvieno energija $\hbar\omega$;
2) spinduliuotės šaltinis yra kvantinė sistema, o ne klasikinė srovių ir krūvių sistema.

l,m eilės daugiapolės spinduliuotės kvanto $\hbar\omega$ emisijos tikimybė per laiko vienetą:

elektriniai kvantiniai šuoliai: $$\lambda_{\mathrm{E}}(l,m)=\frac{U_{\mathrm{E}}(l,m)}{\hbar\omega}=\frac{2(l+1)}{l[(2l+1)!!]^2}\frac{k^{2l+1}}{\hbar\varepsilon_0}\,|\,Q_{lm}+Q'_{lm}\,|^2,$$

magnetiniai kvantiniai šuoliai: $$\lambda_{\mathrm{M}}(l,m)=\frac{U_{\mathrm{M}}(l,m)}{\hbar\omega}=\frac{2(l+1)}{l[(2l+1)!!]^2}\frac{k^{2l+1}}{\hbar\varepsilon_0 c^2}\,|\,M_{lm}+M'_{lm}\,|^2$$

Eilės *l* elektriniai kvantiniai šuoliai žymimi E*l* (pvz., E1, E2, ...), o magnetiniai kvantiniai šuoliai žymimia M*l* (pvz., M1, M2, ...). Q_{lm} didumo eilė yra

$$Q_{km}\sim d^l q,$$

kur *d* yra šaltinio matmenys. Todėl *l*-tosios eilės daugiapolės spinduliuotės kvanto išspinduliavimo tikimybė yra proporcinga $(kd)^{2l}$. Kadangi $kd \ll 1$, tai daugiapolės spinduliuotės kvanto emisijos tikimybė sparčiai mažėja didėjant spinduliuotės eilei *l*.

5.2.5. Kvantinio šuolio daugiapoliai momentai

Dydžius ρ ir $\boldsymbol{j}$ daugiapolių momentų apibrėžtyse reikia pakeisti jų kvantmechaniniais analogais:

$$\rho(a,b;\boldsymbol{r})=e\psi_a(\boldsymbol{r})\psi_b^*(\boldsymbol{r}),$$

$$\boldsymbol{j}(a,b;r)=\frac{\mathrm{i}e\hbar}{2M}(\psi_a\nabla\psi_b^*-\psi_b^*\nabla\psi_a).$$

Tada

$$Q_{lm}(a,b)=e\int_V r^l Y_{lm}^*(\theta,\phi)\psi_a(\boldsymbol{r})\psi_b^*(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V,$$

$$M_{lm}(a,b)=-\frac{e\hbar}{M(l+1)}\int_V r^l Y_{lm}^*(\theta,\phi)\nabla\cdot(\psi_b^*\hat{\boldsymbol{L}}\psi_a)\mathrm{d}V$$

Šie dydžiai vadinami „kvantinio šuolio $a\to b$ daugiapoliais momentais“.

$\hat{\boldsymbol{L}}$ yra dalelės judesio kiekio momento operatorius, tačiau be daugiklio $\hbar$:

$$\hat{\boldsymbol{L}}\equiv-\mathrm{i}\cdot\boldsymbol{r}\times\nabla$$

Atsižvelgus į nukleono sukinį, integravimą erdvinių koordinačių atžvilgiu reikia papildyti sumavimu sukininės koordinatės atžvilgiu. Tą sumą sudaro du dėmenys (jie atitinka dvi sukinio projekcijas). Kadangi įmagnetėjimas apibrėžiamas tūrio vienetui, tai kvantinėje įmagnetėjimo išraiškoje nėra integravimo $\boldsymbol{r}$ atžvilgiu, o yra tik sumavimas sukininės koordinatės atžvilgiu:

$$\boldsymbol{M}(a,b;\boldsymbol{r})=\frac{g_s\mu_{\mathrm{N}}}{2}\{\psi_b^*\hat{\boldsymbol{\sigma}}\psi_a\},$$

čia $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ yra sukinio operatorius.

5.2.6. Branduolio kvantinių šuolių tikimybių apskaičiavimas

Anksčiau užrašytas magnetinio ir elektrinio daugiapolių momentų M_{lm} ir Q_{lm} išraiškas galima panaudoti apskaičiuojant jų santykio didumo eilę. Tos dvi išraiškos yra pakartotos žemiau:

$$Q_{lm}(a,b) = e\int_V r^l Y_{lm}^*(\theta,\phi)\psi_a(\boldsymbol{r})\psi_b^*(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V,$$

$$M_{lm}(a,b) = -\frac{e\hbar}{M(l+1)}\int_V r^l Y_{lm}^*(\theta,\phi)\nabla\cdot(\psi_b^*\hat{\boldsymbol{L}}\psi_a)\mathrm{d}V.$$

Kadangi tikslas – rasti tik didumo *eilę*, tai yra leistini šie supaprastinamai:

- divergencijos operatoriaus „$\nabla\cdot$“ poveikis apytiksliai tapatus daugybai iš R^{-1}, kur R yra tos pačios eilės kaip branduolio spindulys;
- operatoriaus $\hat{\boldsymbol{L}}$ poveikis apytiksliai tapatus daugybai iš skaičiaus, kuris yra tos pačios eilės kaip l, todėl galima laikyti, kad tas skaičius susiprastina su daugikliu $(l+1)^{-1}$ prieš integralą.

Todėl

$$\frac{M_{lm}}{Q_{lm}} \approx -\frac{\hbar}{MR}$$

Kadangi dydžių $|M_{lm}+M'_{lm}|^2$ ir $|M_{lm}|^2$ santykio vidurkis yra maždaug 10, tai

$$\frac{|M_{lm}+M'_{lm}|^2}{|Q_{lm}|^2} \approx 10\frac{|M_{lm}|^2}{|Q_{lm}|^2} \approx 10\left(\frac{\hbar}{MR}\right)^2$$

Galima įrodyti, kad

$$\left|\frac{Q'_{lm}}{Q_{lm}}\right| \approx \frac{k\mu_{\mathrm{N}}}{ce} = \frac{\hbar\omega}{2Mc^2}$$

Kadangi nukleono rimties energija Mc^2 yra 1 GeV, tai, kai $\hbar\omega$ yra MeV eilės arba mažesnė,

$$\left|\frac{Q'_{lm}}{Q_{lm}}\right| << 1$$

Todėl dydžių Q'_{lm} galima nepaisyti.

Vadinasi, vienodos eilės ir energijos M ir E kvantinių šuolių tikimybių santykis yra lygus

$$\frac{\lambda_{\mathrm{M}}(l,m)}{\lambda_{\mathrm{E}}(l,m)} = \frac{|M_{lm}+M'_{lm}|^2}{c^2|Q_{lm}|^2} \approx 10\left(\frac{\hbar}{McR}\right)^2.$$

Šio santykio tipiška vertė vidutiniams ir sunkiesiems branduoliams yra 0,01 eilės.

Pagal nepriklausomų nukleonų modelį daugiapolė spinduliuotė gali atsirasti tik tada, kai kvantinis šuolis būna tarp branduolio būsenų, kurios skiriasi tik *vieno* nukleono kvantiniais skaičiais. Tada, apskaičiuojant branduolio daugiapolius momentus, viso branduolio bangines funkcijas ψ_a ir ψ_b galima pakeisti to nukleono viendalelėmis banginėmis funkcijomis. Pagal šį modelį

$$|Q_{lm}|^2 \approx (4\pi)^{-1}e^2\left(\frac{3}{l+3}\right)^2 R^{2l}$$

Įrašius šias formules į λ_{E} ir λ_{M} išraiškas ir atsižvelgus į tai, kad branduolio spindulys lygus

$$R = R_0 A^{1/3};\quad R_0 \approx 1{,}2\cdot 10^{-15}\ \mathrm{m},$$

gaunamos mažiausios eilės daugiapolių kvantinių šuolių tikimybių per sekundę (s^{-1}) išraiškos:

Savaiminio elektrinio šuolio tikimybė per sekundę:

$$\lambda(\mathrm{E1}) = 1{,}0 \cdot 10^{14}\, A^{2/3} E^{3},$$

$$\lambda(\mathrm{E2}) = 7{,}3 \cdot 10^{7}\, A^{4/3} E^{5},$$

$$\lambda(\mathrm{E3}) = 34 A^{2} E^{7},$$

$$\lambda(\mathrm{E4}) = 1{,}1 \cdot 10^{-5}\, A^{8/3} E^{9},$$

$$\lambda(\mathrm{E5}) = 2{,}4 \cdot 10^{-12}\, A^{10/3} E^{11},$$

$$\lambda(\mathrm{E6}) = 4{,}0 \cdot 10^{-19}\, A^{4} E^{13};$$

čia A yra branduolio masės skaičius, o E yra šuolio energija (MeV).

Savaiminio magnetinio šuolio tikimybė per sekundę:

$$\lambda(\mathrm{M1}) = 3{,}1 \cdot 10^{13}\, E^{3},$$

$$\lambda(\mathrm{M2}) = 2{,}2 \cdot 10^{7}\, A^{2/3} E^{5},$$

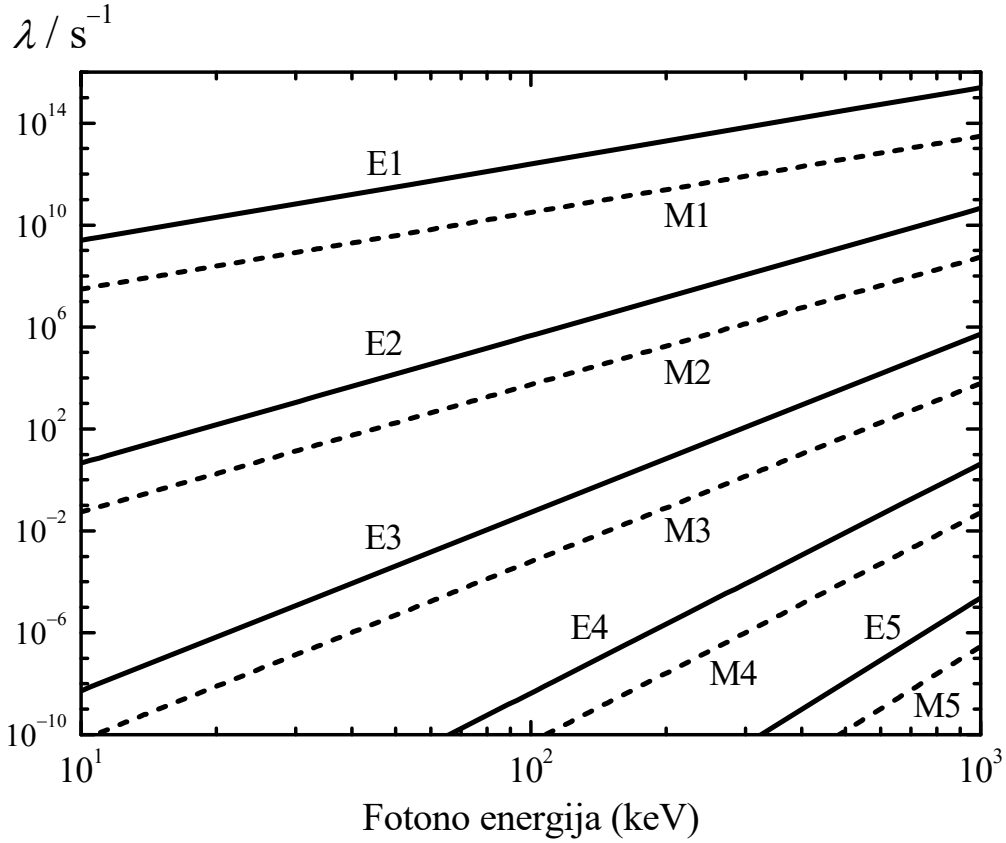
$$\lambda(\mathrm{M3}) = 10 A^{4/3} E^{7},$$

$$\lambda(\mathrm{M4}) = 3{,}3 \cdot 10^{-6}\, A^{2} E^{9},$$

$$\lambda(\mathrm{M5}) = 7{,}4 \cdot 10^{-13}\, A^{8/3} E^{11},$$

$$\lambda(\mathrm{M6}) = 1{,}2 \cdot 10^{-19}\, A^{10/3} E^{13};$$

Šios formulės nusako *spinduliuojamųjų* kvantinių šuolių tikimybes. Tos formulės netinka apskaičiuojant *pilnutines* šuolių tikimybes, nes yra galima ir vidinė konversija.



5.8 pav. Teorinės daugiapolio kvantinio šuolio tikimybės per sekundę priklausomybės nuo šuolio energijos įvairių eilių elektriniams (E) ir magnetiniams (M) šuoliams, kai branduolio masės skaičius lygus 125

Branduolių gama spinduliavimo dėsningumų apibendrinimas:

1. Daugiapolių atrankos taisyklės:

$$\text{kai } J_a \neq J_b\text{:}\quad |J_a - J_b| \leq l \leq J_a + J_b\,,$$
$$\text{kai } J_a = J_b\text{:}\quad 1 \leq l \leq J_a + J_b\,,$$
$$m = m_{Ja} - m_{Jb}\,,$$
$$-l \leq m \leq l\,.$$

2. „Lyginumo atrankos taisyklė“: jeigu šuolio metu branduolio būsenos lyginumas nepakinta, tada šuolyje gali atsirasti arba būti sugeriama tik lyginė daugiapolė spinduliuotė (t. y. nelyginiam l yra galimas tik Ml šuolis, o lyginiam l yra galimas tik El šuolis), o jeigu šuolio metu būsenos lyginumas pakinta, tada šuolyje gali atsirasti arba būti sugeriama tik nelyginė daugiapolė spinduliuotė (t. y. nelyginiam l yra galimas tik El šuolis, o lyginiam l yra galimas tik Ml šuolis).

3. Dažniausiai vyrauja šuoliai, kurių daugiapoliškumo eilė yra lygi mažiausiai leidžiamajai vertei ($l_{\min}$).

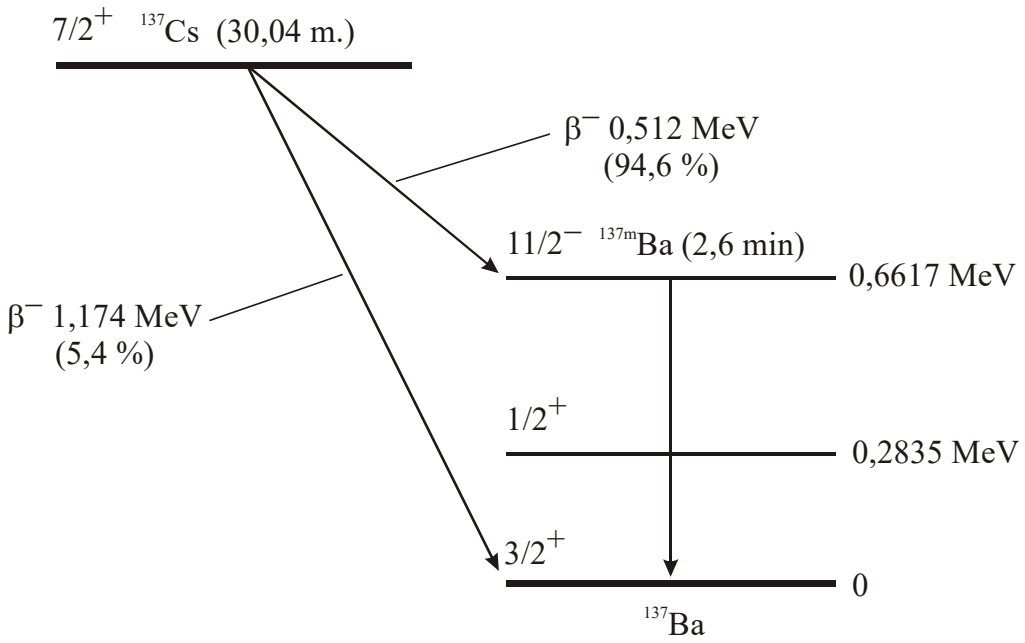
4. Vidutiniams ir sunkiesiems branduoliams elektrinių kvantinių šuolių tikimybė yra maždaug 10^2 kartų didesnė už tos pačios daugiapoliškumo eilės ir energijos magnetinių šuolių tikimybę (tačiau pagal lyginumo atrankos taisyklę duotosios eilės šuolis tarp duotųjų dviejų kvantinių būsenų gali būti tik elektrinis arba tik magnetinis).

5. l+1-osios eilės daugiapolio šuolio tikimybė yra maždaug 10^5 kartų mažesnė už l-tosios eilės daugiapolio šuolio tikimybę.

6. Sujungus taisykles Nr. 4 ir Nr. 5, gaunami tokie apytiksliai šuolių tikimybių santykiai (čia $l' = l + 1$):

$$\frac{\lambda(\mathrm{E}l')}{\lambda(\mathrm{M}l)} = \frac{\lambda(\mathrm{E}l')}{\lambda(\mathrm{E}l)} \cdot \frac{\lambda(\mathrm{E}l)}{\lambda(\mathrm{M}l)} \approx 10^{-5} \times 10^{2} \approx 10^{-3}\,;$$
$$\frac{\lambda(\mathrm{M}l')}{\lambda(\mathrm{E}l)} = \frac{\lambda(\mathrm{M}l')}{\lambda(\mathrm{M}l)} \cdot \frac{\lambda(\mathrm{M}l)}{\lambda(\mathrm{E}l)} \approx 10^{-5} \times 10^{-2} \approx 10^{-7}\,.$$

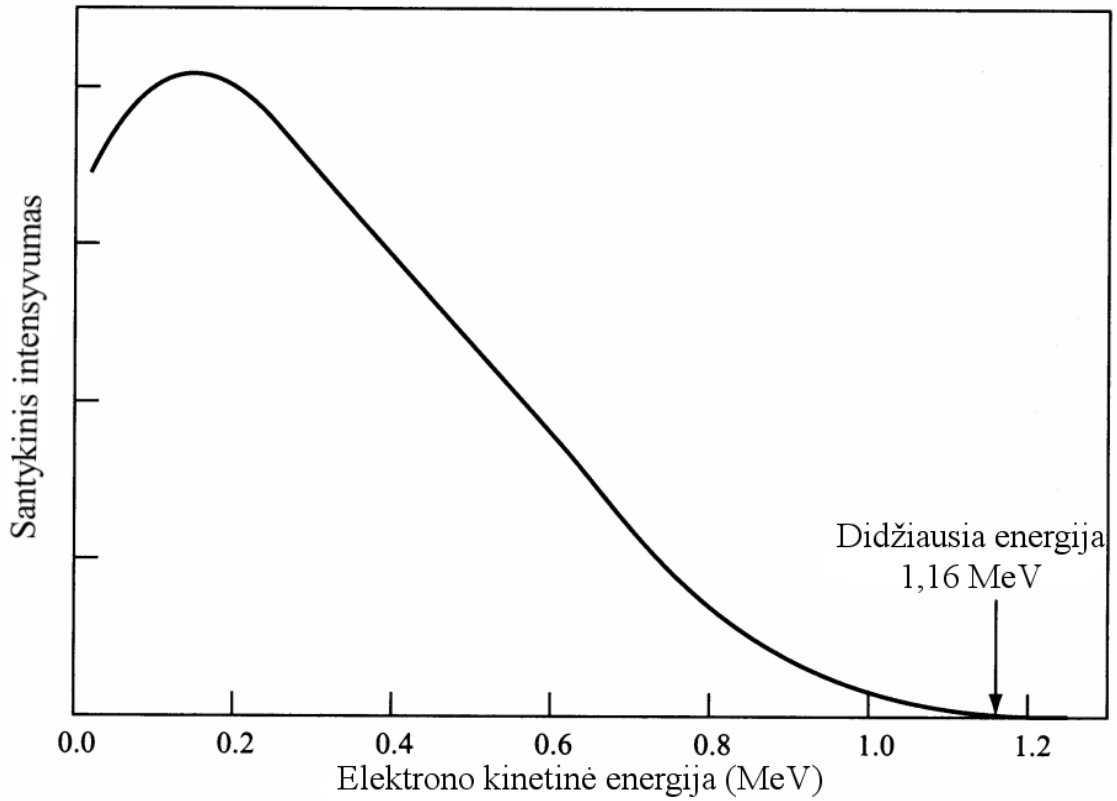
Egzistuoja sužadintieji nuklidai, kurių vidutinė gyvavimo trukmė yra neįprastai ilga (didesnė už 10^{-10} s; gali siekti net kelias valandas arba ilgiau). Tokios ilgaamžės sužadintosios būsenos vadinamos ***metastabiliosiomis būsenomis***. Iš anksčiau suformuluotų taisyklių išplaukia, kad metastabiliosios būsenos egzistavimo sąlyga – tai didelė $l_{\min}$ vertė ir maža šuolio energija. Be to, būsenos gyvavimo trukmė duotojo šuolio atžvilgiu priklauso ir nuo to šuolio rūšies (elektrinis ar magnetinis).



5.9 pav. ^{137}Cs skilimo schema. Schemoje pateikti pusamžiai, didžiausios β dalelių energijos, β skilimo kanalų tikimybės, ^{137}Ba branduolio mažiausios energijos vertės ir intensyviausias kvantinis šuolis tarp ^{137}Ba energijos lygmenų. Antroji sužadintoji ^{137}Ba branduolio būsena yra metastabilioji

5.4. Beta skilimas

5.4.1. Bendrosios beta skilimo savybės



5.13 pav. Elektronų, kuriuos emituoja bismuto izotopas $^{210}_{83}\mathrm{Bi}$, kinetinės energijos pasiskirstymas

Kitaip, negu alfa dalelių arba gama kvantų, beta dalelių spektras yra tolydus. Tačiau pilnutinė duotojo skilimo metu išsiskyrusi energija yra tiksliai apibrėžta ir lygi pirminio ir antrinio branduolių rimties energijų skirtumui. Tai rodo, kad dalį energijos nusineša kita dalelė. Ta dalelė – neutrinas arba antineutrinas.

Elektrono arba pozitrono kinetinė energija:

$$T_\mathrm{e} = E_\mathrm{e} - m_\mathrm{e}c^2$$

Didžiausios elektronų (pozitronų) energijos žymėjimai:
T_0 – didžiausia *kinetinė* energija.
E_0 – didžiausia *reliatyvistinė* energija (t. y. $E_0 = T_0 + m_\mathrm{e}c^2$).

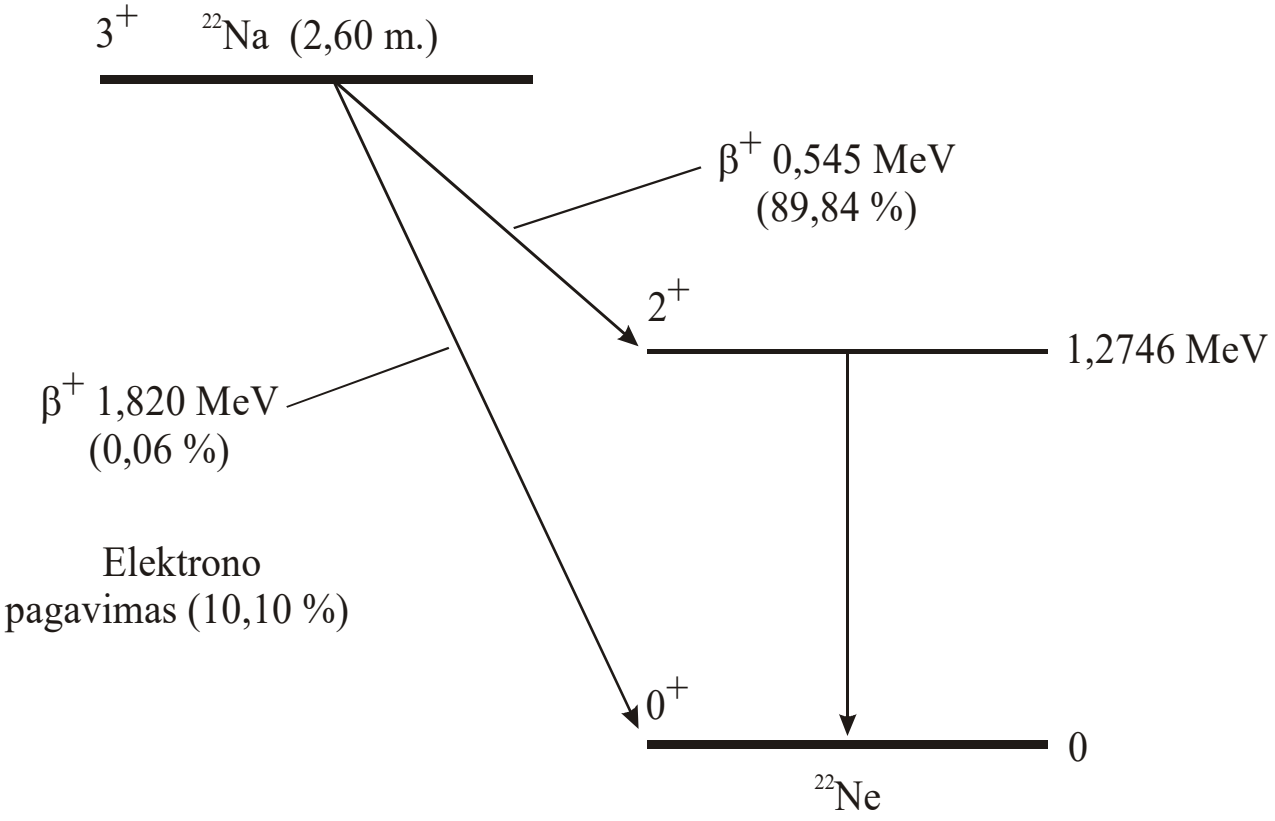
Beta skilimo metu vienas branduolio neutronas virsta protonu arba atvirkščiai:

$$\mathrm{n} \to \mathrm{p} + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}, \qquad \mathrm{p} \to \mathrm{n} + \mathrm{e}^+ + \nu$$

Trečioji beta skilimo rūšis – elektrono pagavimas:

$$\mathrm{p} + \mathrm{e}^- \to \mathrm{n} + \nu$$

Beta skilimas vyksta dėl nukleonų silpnosios sąveikos. Palyginimas: alfa skilimas vyksta dėl stipriosios sąveikos, o gama spinduliavimas atsiranda dėl elektromagnetinės sąveikos.



5.14 pav. ^{22}Na skilimo schema. Schemoje parodyti pusamžis, didžiausios β dalelių energijos, atitinkamų β skilimų tikimybės ir kvantinis šuolis tarp ^{22}Ne lygmenų

5.4.2. Beta dalelių spektras

Branduolio beta skilimas – tai tam tikros rūšies kvantinis šuolis. Nuo gama spinduliavimo skiriasi tuo, kad keičiasi ne tik energija, bet ir nukleono rūšis (neutronas virsta protonu arba atvirkščiai). Taigi, aprašant beta skilimą, protoną ir neutroną reikia laikyti vienos dalelės – nukleono – dviem skirtingomis būsenomis, tarp kurių gali vykti kvantiniai šuoliai.

Bendroji kvantinio šuolio tikimybės per laiko vienetą išraiška:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} |H_{21}|^2 \, \rho(E_0)$$

Čia H_{21} yra trikdžio (silpnosios sąveikos hamiltoniano H) matricos elementas, atitinkantis šuolį iš pradinės būsenos „1“ į galutinę būseną „2“:

$$H_{21} = \int \psi_2^* H \psi_1 \mathrm{d}V \, .$$

ρ yra kvantinių būsenų tankis, atitinkantis pilnutinę išsiskyrusią energiją E_0:

$$\rho(E_0) = \left.\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}E}\right|_{E=E_0}$$

Pradinio branduolio kvantinių skaičių rinkinį žymėsime a. Tada $\psi_1 \equiv \psi_a$.
Galutinėje būsenoje atsiranda dar dvi dalelės – elektronas (pozitronas) ir antineutrinas (neutrinas). Todėl, pažymėjus raide b antrinio branduolio būsenos kvantinius skaičius,

$$\psi_2 = [\psi_b \psi_\mathrm{e} \psi_\nu]$$

$$H_{21} = \int [\psi_b^* \psi_\mathrm{e}^* \psi_\nu^*] H \psi_a \mathrm{d}V$$

Elektrono ir neutrino banginės funkcijos:

$$\psi_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{r}_{\mathrm{e}}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}_{\mathrm{e}})\right], \qquad \psi_{\nu}(\boldsymbol{r}_{\nu}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}_{\nu})\right]$$

Todėl į pointegralinę funkciją įeina daugiklis

$$\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{r})\right]$$

Čia

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}$$

Kadangi branduolio viduje $rP/\hbar << 1$,

$$\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{r})\right] = 1 + \frac{\mathrm{i}(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{r})}{\hbar} + \ldots \approx 1$$

Todėl

$$H_{21} = \frac{1}{V}\int \psi_b^* H \psi_a \mathrm{d}V \equiv \frac{M_{ba}}{V}$$

Čia M_{ba} yra ***branduolio matricos elementas***, kuris nepriklauso nuo $\boldsymbol{p}$ ir $\boldsymbol{q}$:

$$M_{ba} = \int \psi_b^* H \psi_a \mathrm{d}V$$

Šiame artinyje elektronų spektro pavidalą lemia būsenų tankio $\rho(E_{\mathrm{e}})$ pavidalas. Apskaičiuojant $\rho(E_{\mathrm{e}})$, remiamasi prielaida, kad elektronas ir neutrinas uždaryti kubo, kurio kraštinė w, viduje.

$$p_x = \frac{n_x h}{w}, \quad p_y = \frac{n_y h}{w}, \quad p_z = \frac{n_z h}{w}$$

Todėl laisvosios dalelės (elektrono arba neutrino) būsenų tankis impulsų erdvėje yra V / h^3.

$$\mathrm{d}n_e = \frac{4\pi p^2 \mathrm{d}pV}{h^3}, \qquad \mathrm{d}n_\nu = \frac{4\pi q^2 \mathrm{d}qV}{h^3}, \qquad \mathrm{d}^2 n = \mathrm{d}n_e \mathrm{d}n_\nu = \frac{(4\pi)^2 V^2 p^2 \mathrm{d}p q^2 \mathrm{d}q}{h^6}$$

Jeigu nepaisoma antrinio branduolio atatrankos energijos (kuri yra labai maža), tada

$$E_0 = E_{\mathrm{e}} + E_\nu = E_{\mathrm{e}} + qc$$

Todėl

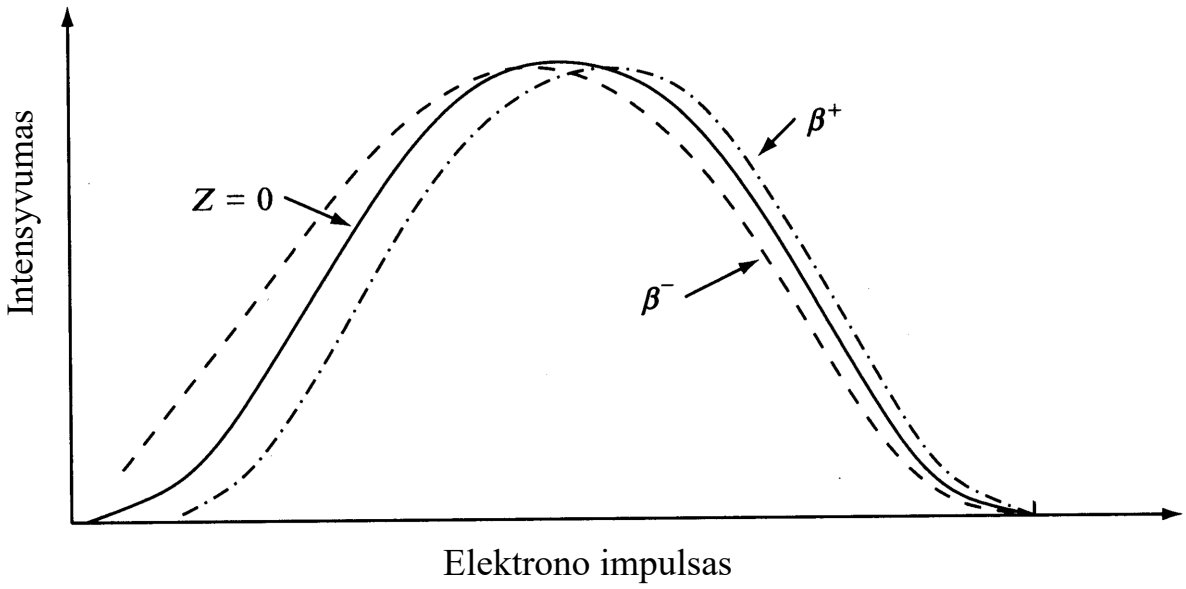
$$q = \frac{E_0 - E_{\mathrm{e}}}{\mathrm{c}}, \qquad \mathrm{d}q = \frac{\mathrm{d}E_0}{\mathrm{c}}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 n}{\mathrm{d}E_0} \sim p^2 (E_0 - E_{\mathrm{e}})^2 \mathrm{d}p \sim \mathrm{d}\lambda$$

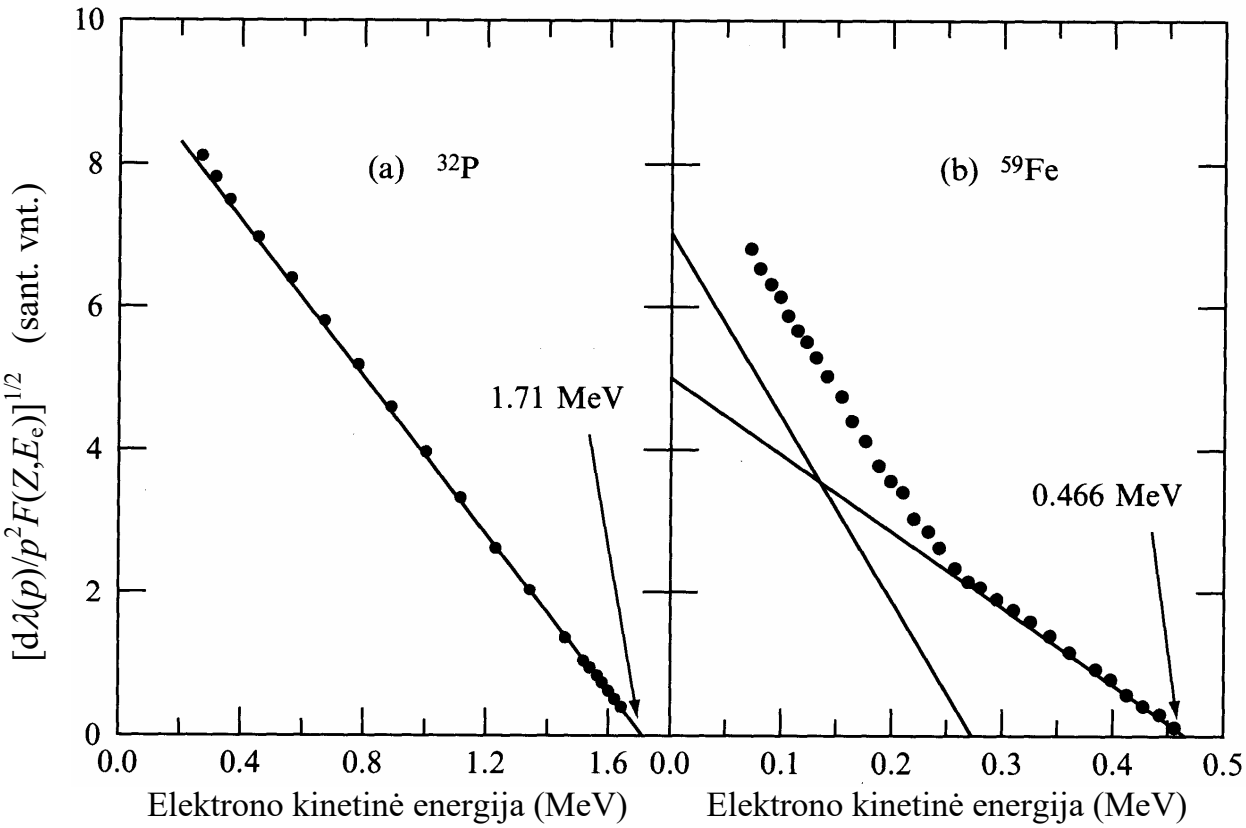
$\mathrm{d}\lambda$ yra skilimo konstanta, kuri atitinka ne visus galimus skilimus, o tik tuos, kurių metu išlekia elektronas, kurio impulsas priklauso intervalui nuo $p(E_{\mathrm{e}})$ iki $p(E_{\mathrm{e}}) + \mathrm{d}p$.

Kulono sąveikos įtaką spektrui atspindi papildomas daugiklis – ***Fermio funkcija*** $F(Z, E_{\mathrm{e}})$. Z yra *antrinio* branduolio krūvio skaičius. Galutinė $\mathrm{d}\lambda$ išraiška:

$$\mathrm{d}\lambda(p) = C\,|M|^2\, F(Z, E_{\mathrm{e}}) p^2 (E_0 - E_{\mathrm{e}})^2 \mathrm{d}p\,.$$



5.15 pav. Beta dalelių judesio kiekio (impulso) spektras



5.16 pav. Beta spektrų Kiuri kreivės

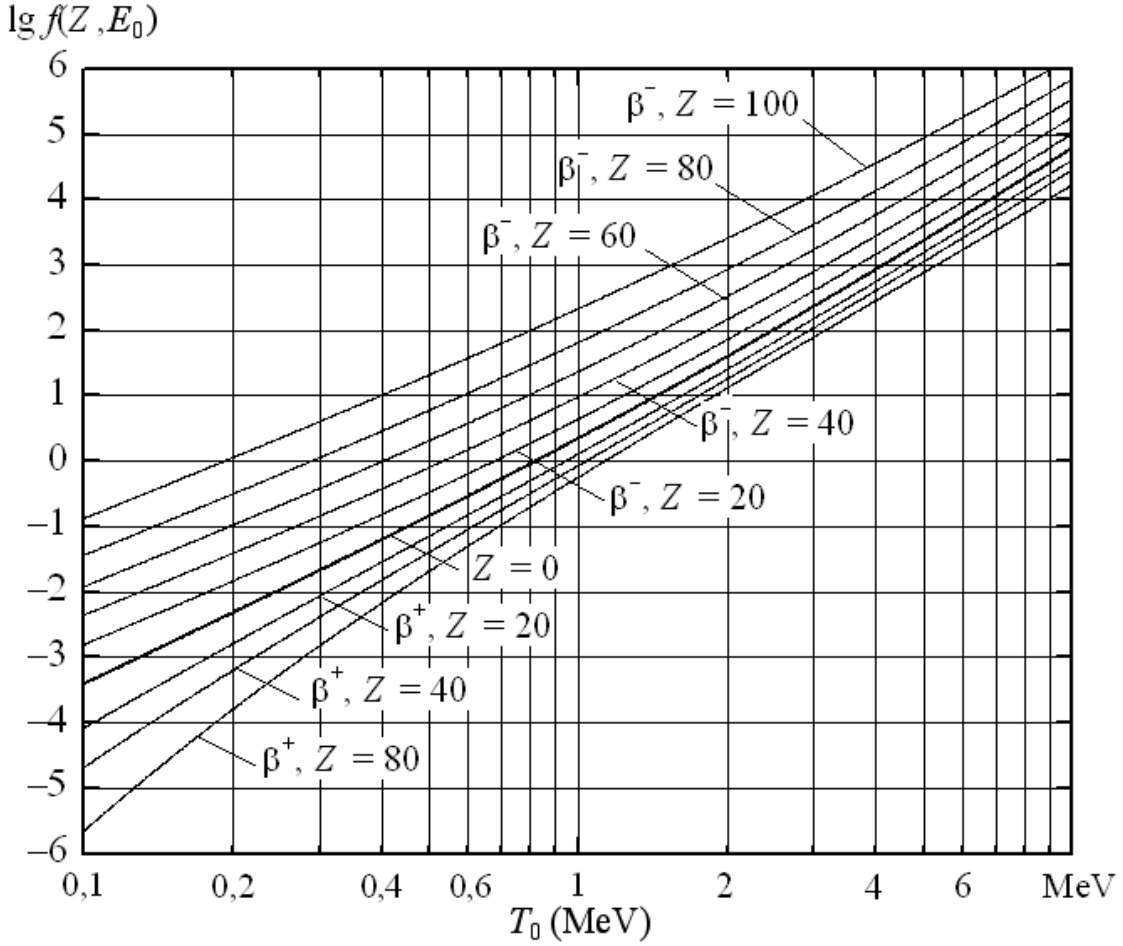
Pilnutinė skilimo konstanta

$$\lambda = C\,|M|^2 \int_0^{p_{\max}} F(Z,E_e)\,p^2(E_0-E_e)^2\,\mathrm{d}p \equiv C\,|M|^2\; f(Z,E_0)$$

Čia f – „integralinė“ Fermio funkcija.

$$\frac{1}{C\,|M|^2} = \frac{f(Z,E_0)}{\lambda} \equiv \frac{ft_{1/2}}{\ln 2}$$

Vadinasi, sandauga $ft_{1/2}$ priklauso tik nuo $|M|$, t. y. tik nuo vidinių branduolio savybių, kurios lemia β skilimą, ir nepriklauso nuo kitų veiksnių (t. y. nuo būsenų tankio ir Kulono pataisos). Dydis $ft_{1/2}$ vadinamas „santykiniu pusamžiu“.



5.17 pav. Integralinės Fermio funkcijos dešimtainio logaritmo priklausomybės nuo β^- arba β^+ dalelių didžiausios kinetinės energijos T_0 esant įvairiems antrinio branduolio krūvio skaičiams Z

5.4.3. Beta skilimo atrankos taisyklės

Leidžiamieji beta skilimai – tai skilimai, kuriems $M_{ba} \neq 0$.

Jeigu $M_{ba} = 0$, tada, apskaičiuojant H_{21}, negalima daugiklio $\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{r})\right]$ pakeisti vienetu, o reikia atsižvelgti ir į kitus Teiloro eilutės dėmenis. Pvz., pirmojo laipsnio dėmuo yra

$$\frac{\mathrm{i}(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{r})}{\hbar}$$

Šis reiškinys priklauso nuo kampo tarp $\boldsymbol{P}$ ir $\boldsymbol{r}$. Tai reiškia, kad šis dėmuo atitinka elektrono ir neutrino sistemos būseną su nenuliniu impulso momentu.

$$\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{r} = P\,r\cos\theta$$

Tokia pati yra ir pirmosios eilės sferinės harmonikos priklausomybė nuo θ:

$$Y_{1,0}(\theta,\phi) = (3/4\pi)^{1/2}\cos\theta$$

Todėl pirmojo laipsnio dėmuo funkcijos $\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{r})\right]$ skleidinyje Teiloro eilute atitinka elektrono ir neutrino pilnutinio orbitinio impulso momento kvantinį skaičių $L = 1$.

Antrojo laipsnio dėmuo $\sim(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{r})^2 \sim \cos^2\theta$. Kadangi

$$Y_{0,0}(\theta,\phi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}},$$

o

$$Y_{2,0}(\theta,\phi) = (5/16\pi)^{1/2}(3\cos^2\theta - 1),$$

tai

$$\cos^2\theta = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{\pi}{5}}Y_{2,0} + \frac{2}{3}\sqrt{\pi}Y_{0,0}.$$

Vadinasi, antrojo laipsnio dėmuo atitinka dviejų būsenų mišinį: su $L = 0$ ir $L = 2$.

Bendruoju atveju L-tojo laipsnio dėmuo, kuris proporcingas

$$\frac{(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{r})^L}{\hbar^L},$$

sąlygoja sferinės harmonikos Y_{LM} atsiradimą skleidinyje.

Šuoliai, kuriems $L = 0$ – tai ***leidžiamieji šuoliai***.

Šuoliai, kuriems $L = 1$ – ***pirmieji draudžiamieji šuoliai*** ir t. t.

Kadangi elektrono ir neutrino sukinio kvantiniai skaičiai yra lygūs 1/2, tai, nepriklausomai nuo L vertės, elektrono ir neutrino pilnutinis sukinys (S) gali būti 0 arba 1.

Šuoliai, kuriems $S = 0$ – tai ***Fermio tipo šuoliai***

Šuoliai, kuriems $S = 1$ – tai ***Gamovo ir Telerio tipo šuoliai***

Beta skilimo atrankos taisyklės apibrėžia beta skilimus, kurie neprieštarauja impulso tvermės dėsniui:

F tipo šuoliams $\boldsymbol{J}_a = \boldsymbol{J}_b + \boldsymbol{L}$

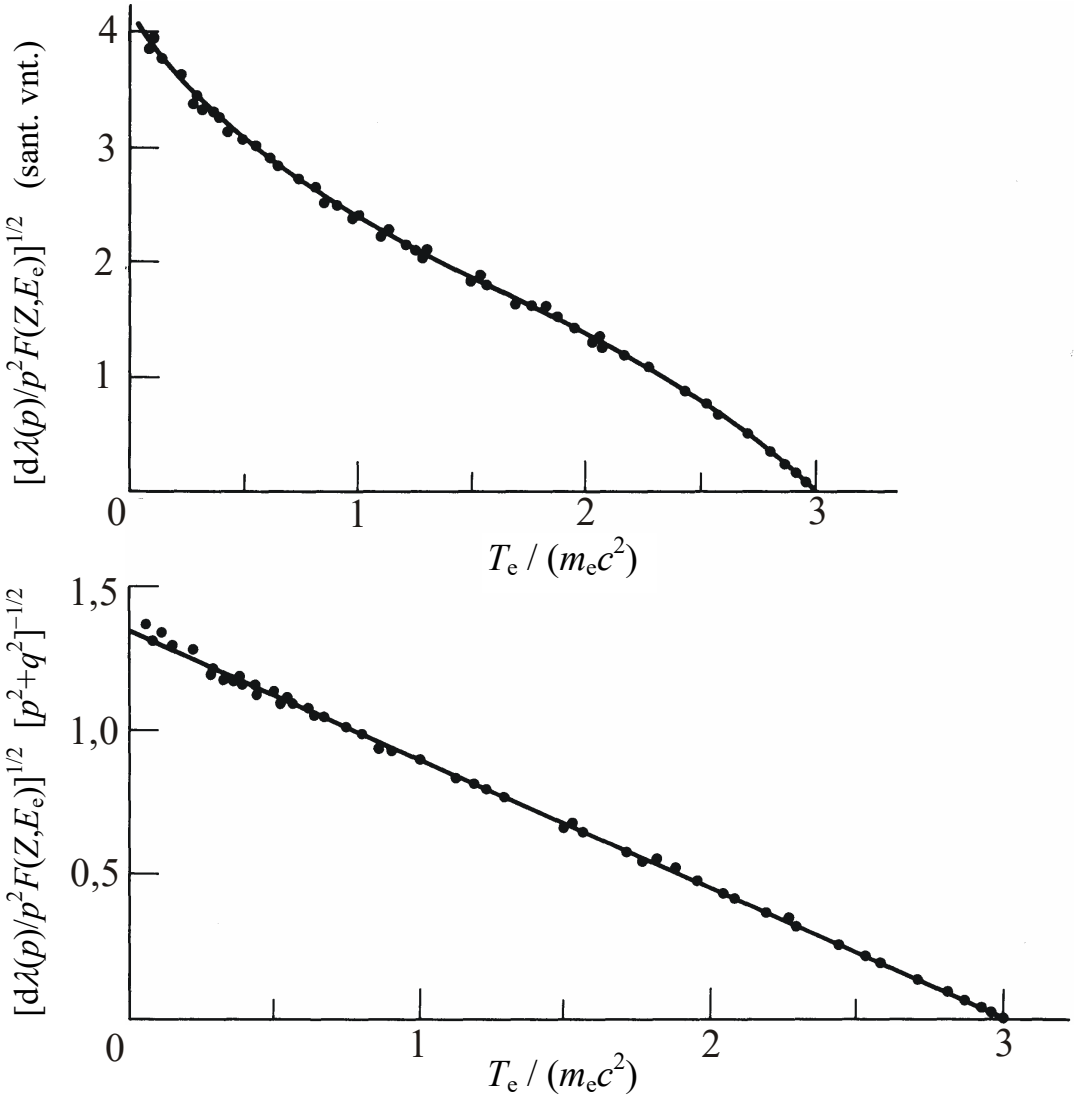
GT tipo šuoliams $\boldsymbol{J}_a = \boldsymbol{J}_b + \boldsymbol{L} + \boldsymbol{1}$

Praktikoje dažniausiai empiriškai nustatomas L, o paskui pagal L vertę sprendžiama apie branduolio sukinio pokytį ΔJ ir apie būsenos lyginumo pokytį $\Delta \Pi$. Jeigu L lyginis, tada lyginumas nepakinta, o jeigu ne, tada pakinta.

Beta skilimo atrankos taisyklės

Draudžiamumas	L	Fermio tipo		Gamovo ir Telerio tipo	
		$\lvert\Delta J\rvert$	$\Delta \Pi$	$\lvert\Delta J\rvert$	$\Delta \Pi$
Leidžiamasis	0	0	Ne	(0), 1	Ne
Pirmasis draudžiamasis	1	(0), 1	Taip	0, 1, 2	Taip
Antrasis draudžiamasis	2	(1), 2	Ne	2, 3	Ne
Trečiasis draudžiamasis	3	(2), 3	Taip	3, 4	Taip
Ketvirtasis draudžiamasis	4	(3), 4	Ne	4, 5	Ne

Vienas iš požymių, kurie rodo, kad duotasis šuolis yra draudžiamasis, yra Fermio ir Kiuri kreivės nuokrypis nuo tiesės.



5.18 pav. Viršutiniame grafike pavaizduota nepataisyta Kiuri kreivė nuklido ^{91}Y draudžiamajam skilimui (šuolis iš nuklido ^{91}Y lygmens $1/2^-$ į nuklido ^{91}Zr lygmenį $5/2^+$). Apatiniame grafike pavaizduota pataisyta Kiuri kreivė, kuri apskaičiuota padalijus viršuje pavaizduotą funkciją iš $\sqrt{p^2+q^2}$.

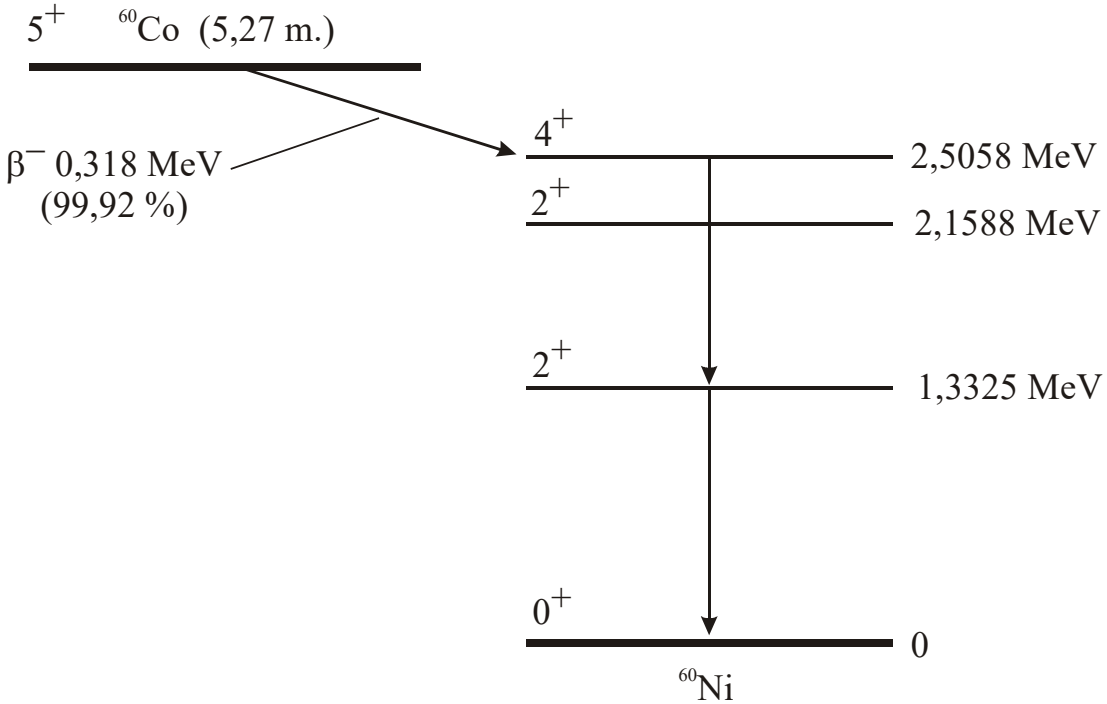
5.4.4. Įvairaus tipo beta skilimų spartų palyginimas

„Superleidžiamieji“ beta skilimai – tai tokie skilimai, kai pirminis ir antrinis branduoliai yra „veidrodiniai“, pvz.,

$n \rightarrow p$, $^{3}H \rightarrow {}^{3}He$, $^{17}F \rightarrow {}^{17}O$

Reiškinio lg ($ft_{1/2}$) apytikslės vertės įvairaus tipo β skilimams

Šuolio tipas	lg ($ft_{1/2}$)
Superleidžiamasis	~ 3,5
Leidžiamasis	5,5 ± 1,5
Pirmasis draudžiamasis	7,5 ± 1,5
Antrasis draudžiamasis	~ 12
Trečiasis draudžiamasis	~ 16
Ketvirtasis draudžiamasis	~ 21



5.19 pav. ^{60}Co skilimo schema. Schemoje parodyti pusamžis, didžiausia β dalelių energija, atitinkamo β skilimo tikimybė, ^{60}Ni branduolio mažiausios energijos vertės ir intensyviausi kvantiniai šuoliai tarp ^{60}Ni energijos lygmenų

6. Branduolinės reakcijos

6.1. Įvadas. Branduolinės reakcijos sąvoka

Branduolinė reakcija – tai yra bet koks branduolio virsmas dėl sąveikos su dalele.

$$a + X \rightarrow Y + b \quad \text{arba} \quad X\,(a, b)\,Y$$

Reakcijos energija (šiluma):

$$Q = (m_a + m_X - m_b - m_Y)c^2$$

Jeigu $Q > 0$, tada reakcija yra ***egzoterminė***, o jeigu $Q < 0$ – ***endoterminė***.

6.2. Sąveikos skerspjūvio ir diferencialinio sąveikos skerspjūvio sąvokos

Sąveikos skerspjūvis σ – tai plotas, kurio vertė parinkta taip, kad pataikymo į tą plotą tikimybė ($\mathrm{d}P$) sutaptų su sąveikos tikimybe.

$$\mathrm{d}P = \frac{\mathrm{d}S'}{S} = \sigma n \,\mathrm{d}x$$

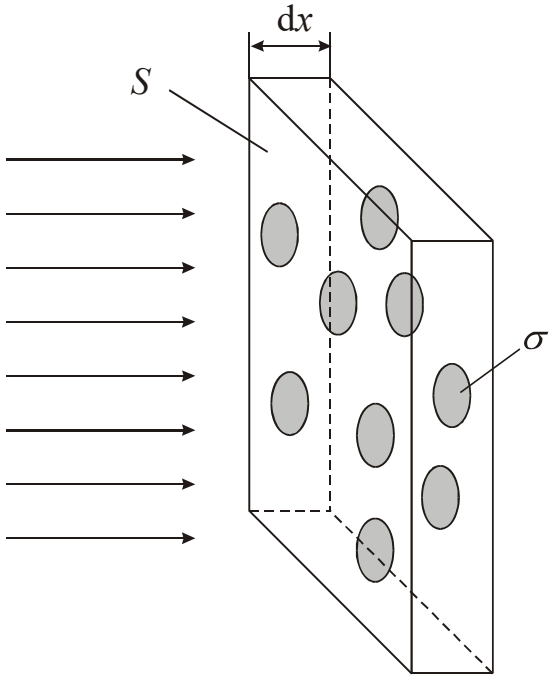
Kai yra kelios galimos susidūrimo pasekmės,

$$\sigma = \sum_i \sigma_i$$

Kai yra kelių rūšių taikiniai,

$$\sigma = \sum_i p_i \sigma_i$$

(čia p_i yra i-tosios rūšies taikinių santykinis kiekis).
Įprastinis matavimo vienetas – barnas. 1 b = 10^{-28} m^2.



6.1 pav. Sąveikos skerspjūvio σ aiškinimas

Vidutinis laisvasis kelias:

$$l = \frac{1}{\sigma n}$$

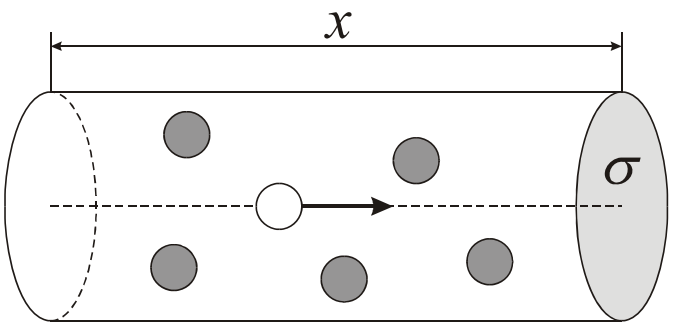
(čia n yra taikinių koncentracija). Vidutinio laisvojo kelio išraiškos išvedimas:

$$N = \sigma x n,$$

$$l = \frac{x}{N} = \frac{x}{\sigma x n} = \frac{1}{\sigma n}.$$

Jeigu yra keli sąveikos vyksmai,

$$\frac{1}{l} = \sum_i \frac{1}{l_i}$$



6.2 pav. Vidutinio laisvojo kelio apskaičiavimui

Makroskopinis skerspjūvis – tai taikinio tūrio vienetą atitinkantis skerspjūvis:

$$\Sigma = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = \sigma n = \frac{1}{l}$$

Reakcijos spartos R išraiškos išvedimas:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \sigma n \upsilon$$

$$R = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} n_{\mathrm{kr}} V = \sigma n \upsilon n_{\mathrm{kr}} V = \sigma N \upsilon n_{\mathrm{kr}} = \sigma N j = \Sigma V j$$

Tarkime, $\mathrm{d}\sigma(\theta, \phi)$ yra antrinės dalelės išlėkimo duotąja kryptimi (θ, ϕ) į erdvinio kampo elementą $\mathrm{d}\Omega$ skerspjūvio. Tada ***diferencialinis*** arba ***kampinis*** sąveikos skerspjūvis yra lygus

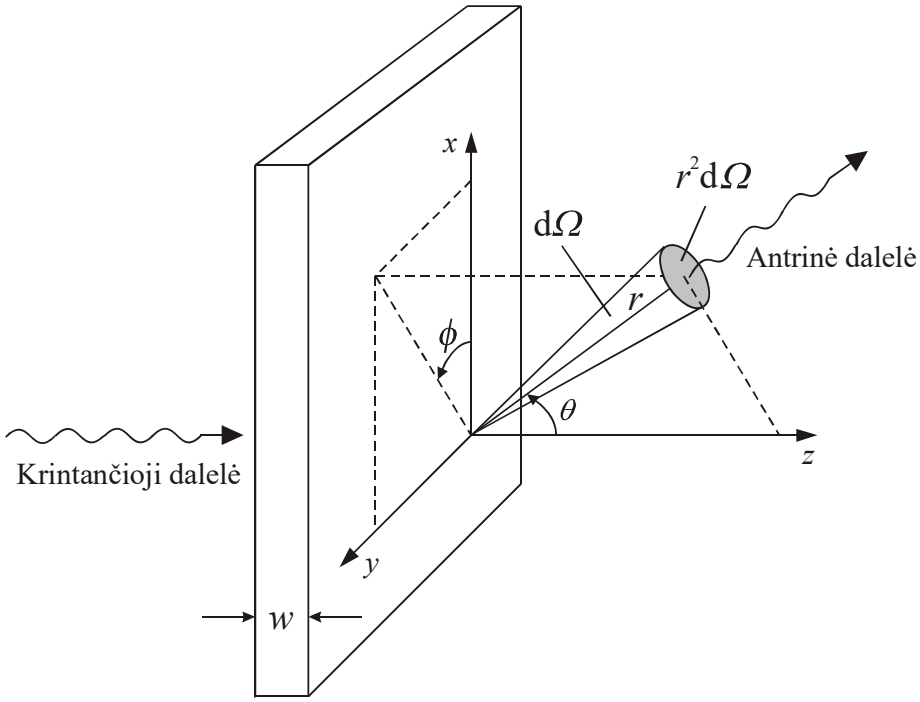
$$\sigma_\Omega = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}$$

Matavimo vienetas – b / sr.
Pilnutinis skerspjūvis:

$$\sigma = \int \sigma_\Omega \mathrm{d}\Omega \equiv \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi} \sigma_\Omega \sin\theta \mathrm{d}\theta$$

Jeigu σ_Ω nepriklauso nuo ϕ, tada

$$\sigma = 2\pi \int_0^{\pi} \sigma_\Omega \sin\theta \mathrm{d}\theta$$



6.3 pav. Diferencialinio sąveikos skerspjūvio apskaičiavimui

6.3. Branduolinių reakcijų pavyzdžiai

6.3.1. Tamprioji sklaida

$$\mathrm{a} + \mathrm{X} \to \mathrm{X} + \mathrm{a}$$

Atskiras tampriosios sklaidos atvejis – ***tamprioji Kulono sklaida*** (arba ***Rezerfordo sklaida***).

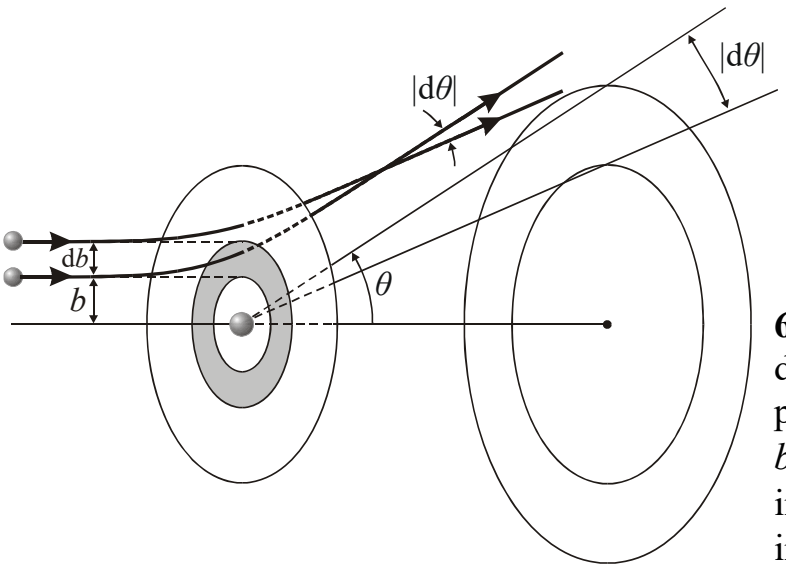
$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{zZe^2}{r^2}$$

Kulono sklaidos diferencialinis skerspjūvis, kai taikinio branduolys yra be galo masyvus:

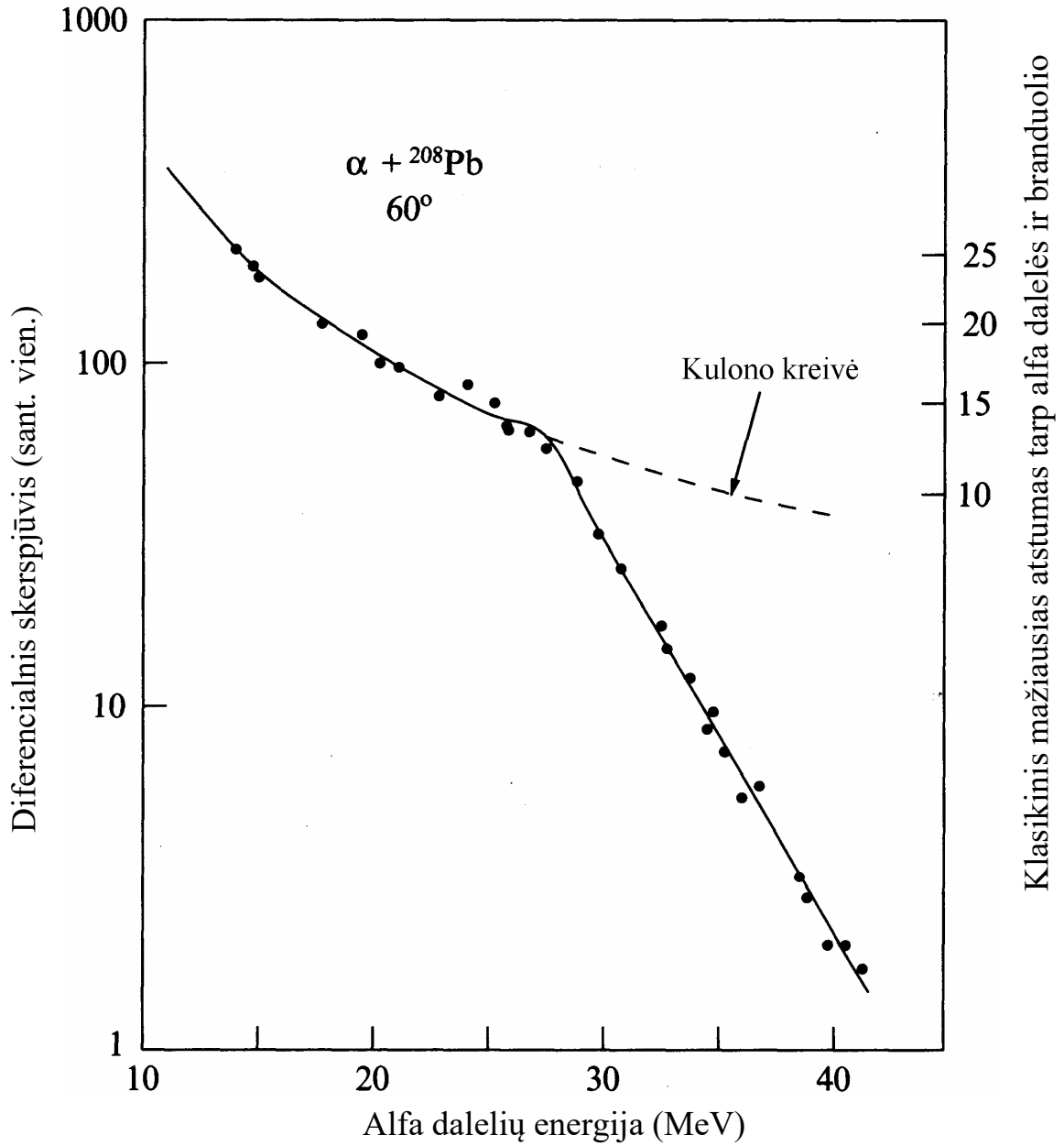
$$\sigma_\Omega = \frac{d^2}{16\sin^4(\theta/2)} = \left(\frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \left(\frac{1}{4E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$$

Čia d yra mažiausias atstumas, kuriuo suartėja branduolys ir teigiamo krūvio dalelė, kurios energija E, kai smūgis yra centrinis:

$$d = \frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0 E}$$



6.4 pav. Tamprioji Kulono sklaida: dalelių, kurių smūgio parametrai priklauso nykstamo pločio intervalui nuo b iki $b + \mathrm{d}b$, sklaidos kampai priklauso intervalui nuo θ iki $\theta + \mathrm{d}\theta$ (pokyčių $\mathrm{d}b$ ir $\mathrm{d}\theta$ ženklai yra priešingi)



6.5 pav. Alfa dalelių tampriosios sklaidos fiksuotu kampu (60°) diferencialinis skerspjūvis (santykiniais vienetais). Lūžio taškas atitinka tokią alfa dalelių energiją, kai tampa galima trumpasiekė stiprioji sąveika

Atlikus daug alfa dalelių tampriosios Kulono sklaidos matavimų su įvairiais taikiniais, pagal lūžio taško padėtį diferencialinio skerspjūvio priklausomybėje nuo alfa dalelių energijos nustatytas atstumas tarp alfa dalelės ir branduolio centrų, kuriam esant pradeda veikti branduolinė jėga:

$$R = 1,41A^{1/3} + 2,11 \text{ fm}$$

6.3.2. Tiesioginės reakcijos

Tiesioginė branduolinė reakcija – tai tokia reakcija, kai krintančioji dalelė sąveikauja tik su mažu skaičiumi paviršinių branduolio nukleonų. Ypatybės:

a) palyginti maži energijos, impulso ir masės pokyčiai,
b) labai maža reakcijos trukmė (~10^{-22} s).

Tiesioginių reakcijų pavyzdžiai:

Netamprioji sklaida:

$$a + X \rightarrow X^* + a$$

Pernašos reakcijos – ***atplėšimo reakcijos*** (pvz., (d,p), (α,d) ir (^{16}O, ^{12}C)) arba ***pagrobimo reakcijos*** (pvz., (p,d), (p,t) ir (^{16}O, ^{17}O)).

6.3.3. Tarpinio branduolio reakcijos

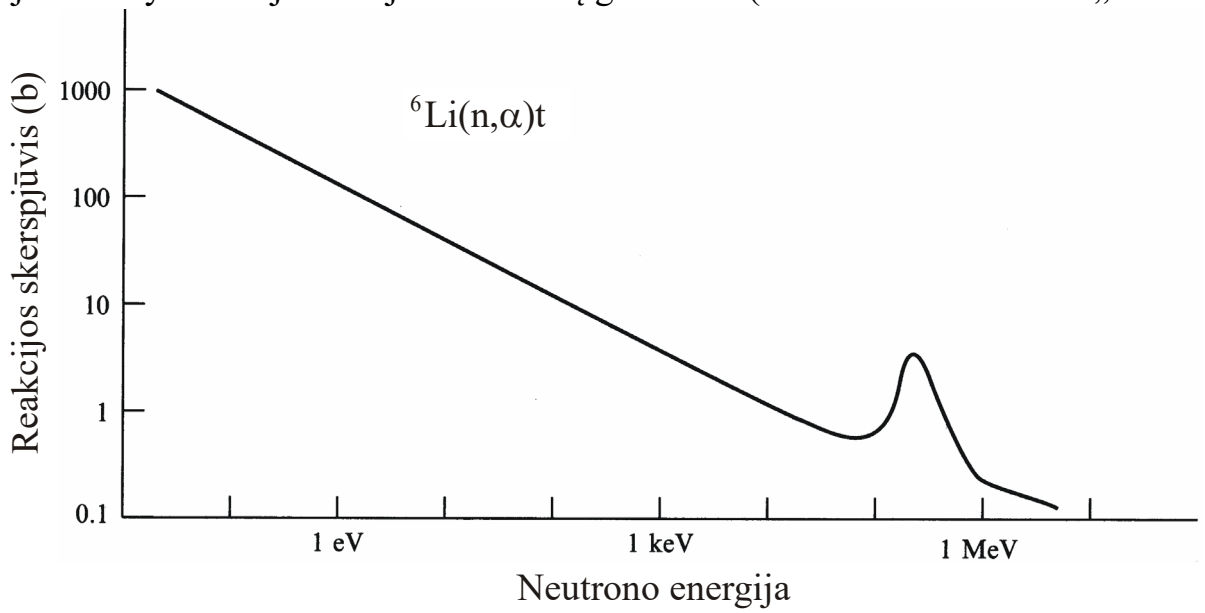
Kai susidūrimas yra centrinis arba beveik centrinis, yra galimos tarpinio branduolio reakcijos, kurios vyksta dviem etapais:

1) Abi reaguojančios dalelės susijungia į vieną (tarpinį) branduolį, kuris yra sužadintos būsenos;
2) Po 10^{-16} – 10^{-18} s branduolys pereina į pagrindinę būseną emituodamas vieną arba daugiau dalelių.

Emituotų dalelių savybės priklauso tik nuo tarpinio branduolio savybių ir nepriklauso nuo to, kaip tas branduolys susiformavo.

Emituotos dalelės gali būti nukleonai, branduoliai, gama kvantai arba vidinės konversijos elektronai. Nukleonų emisija yra analogiška karšto skysčio garavimui. Tačiau, jeigu tarpinio branduolio sužadinimo energija yra mažesnė už nukleono ryšio energiją arba tik nežymiai viršija pastarąją, tada labiau tikėtina gama kvantų arba konversijos elektronų emisija. Tada dalelė „pagaunama“ į taikinio branduolį, todėl tokia reakcija vadinama ***pagavimo reakcija***.

Jeigu krintančioji dalelė yra branduolys, tada tarpiniam branduoliui susiformuoti trukdo Kulono potencialo barjeras. Tačiau, jeigu krintančioji dalelė yra neutronas, tada Kulono barjero nėra, todėl tarpinis branduolys gali susiformuoti esant labai mažoms neutrono energijoms. Tada reakcijos tikimybė didėja mažėjant neutronų greičiui υ (šis efektas vadinamas „1 / υ“ dėsniu).



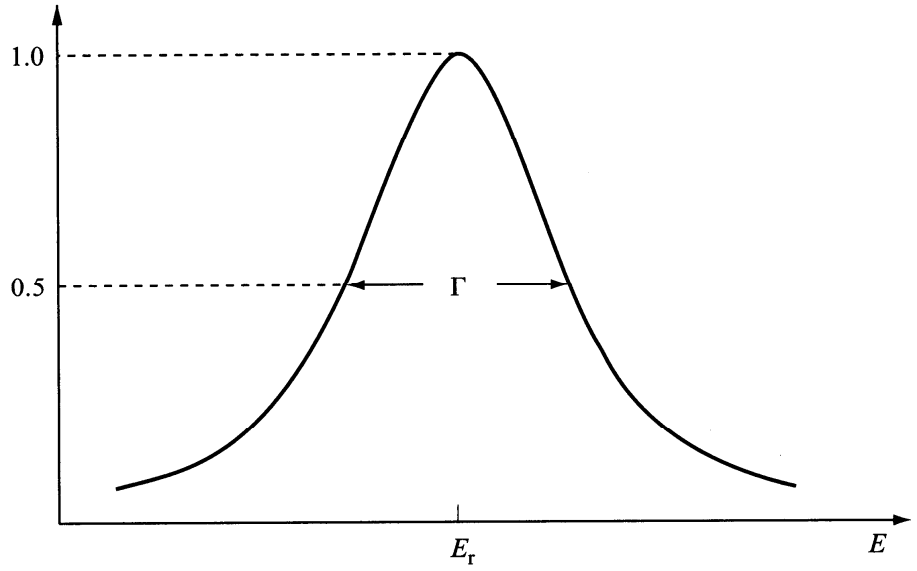
6.6 pav. Branduolinės reakcijos ^{6}Li(n,α)t skerspjūvio priklausomybė nuo neutrono energijos. Ties 250 keV matomas rezonansas

6.3.4. Rezonansai

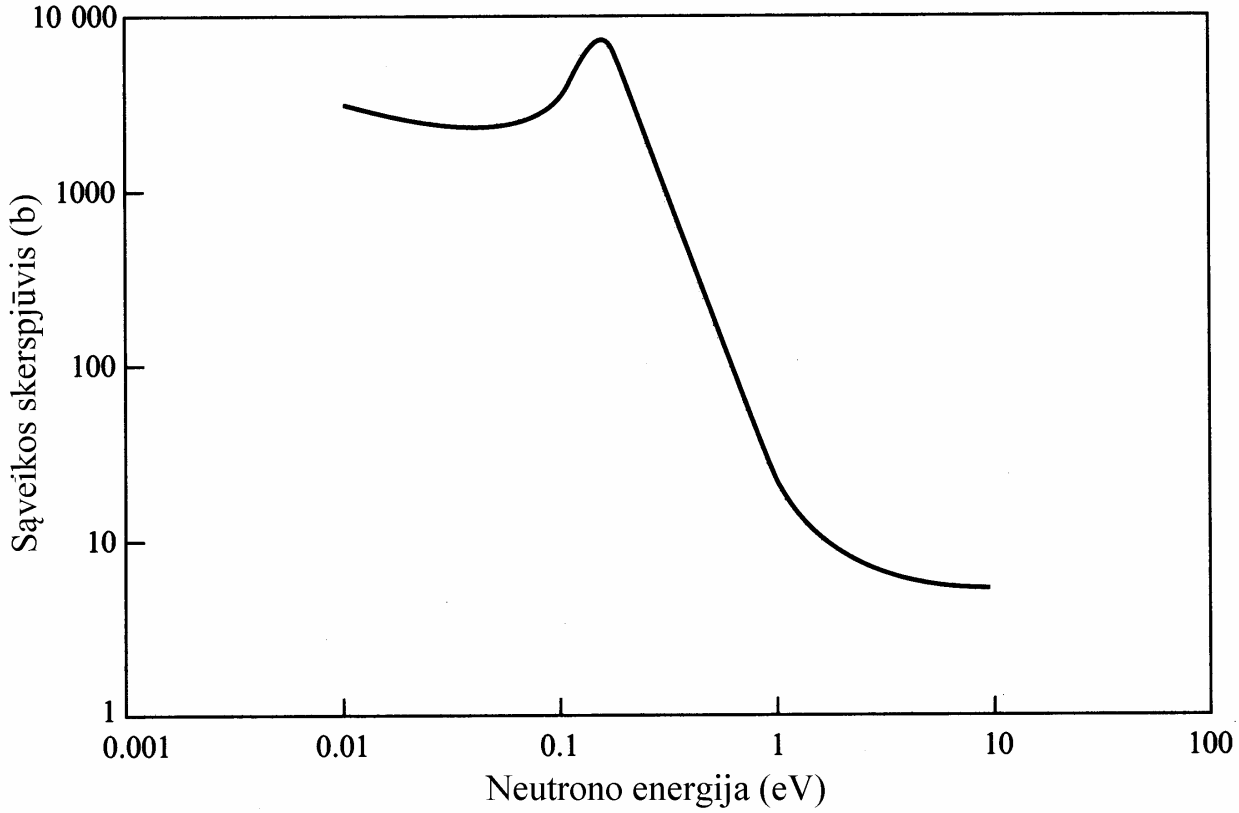
Tarpinio branduolio reakcijų skerspjūvio priklausomybėje nuo E dažnai būna maksimumai. Jie atsiranda tada, kai tarpinio branduolio sužadinimo energija tiksliai atitinka vieną iš jo sužadintųjų energijos lygmenų („savųjų virpesių dažnių“). Šis reiškinys vadinamas ***rezonansu***. Rezonanso srityje

$$\sigma(E) \sim \frac{1}{(E - E_r)^2 + (\Gamma / 2)^2}$$

(tai yra vadinamoji ***Lorenco*** arba ***Breito ir Vignerio*** funkcija).



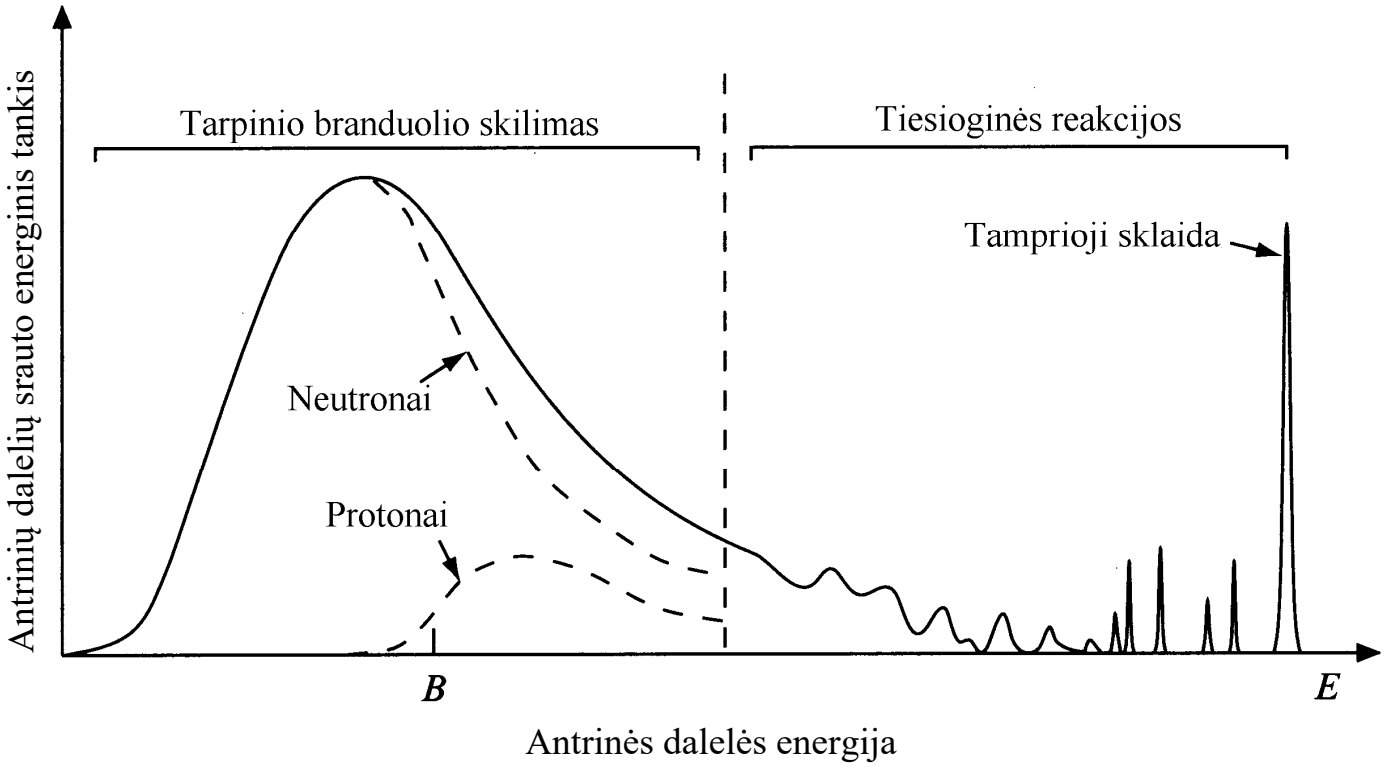
6.7 pav. Breito ir Vignerio rezonansinė kreivė



6.8 pav. Neutronų sąveikos su kadmio izotopu ^{113}Cd pilnutinis skerspjūvis. Matomas ryškus rezonansas ties neutrono energija 0,17 eV

6.4. Bendrosios branduolinių reakcijų savybės

6.4.1. Energijos spektrai



6.9 pav. Elektringųjų dalelių ir neutronų, išlekiančių po branduolinių reakcijų, energijos spektrų bendrasis pavidalas. Laikoma, kad branduolines reakcijas sukelia protonų susidūrimai su vidutinės masės branduoliais, o protonų energija yra kelis kartus didesnė už Kulono barjero aukštį *B*

Būdingosios spektro sritys:

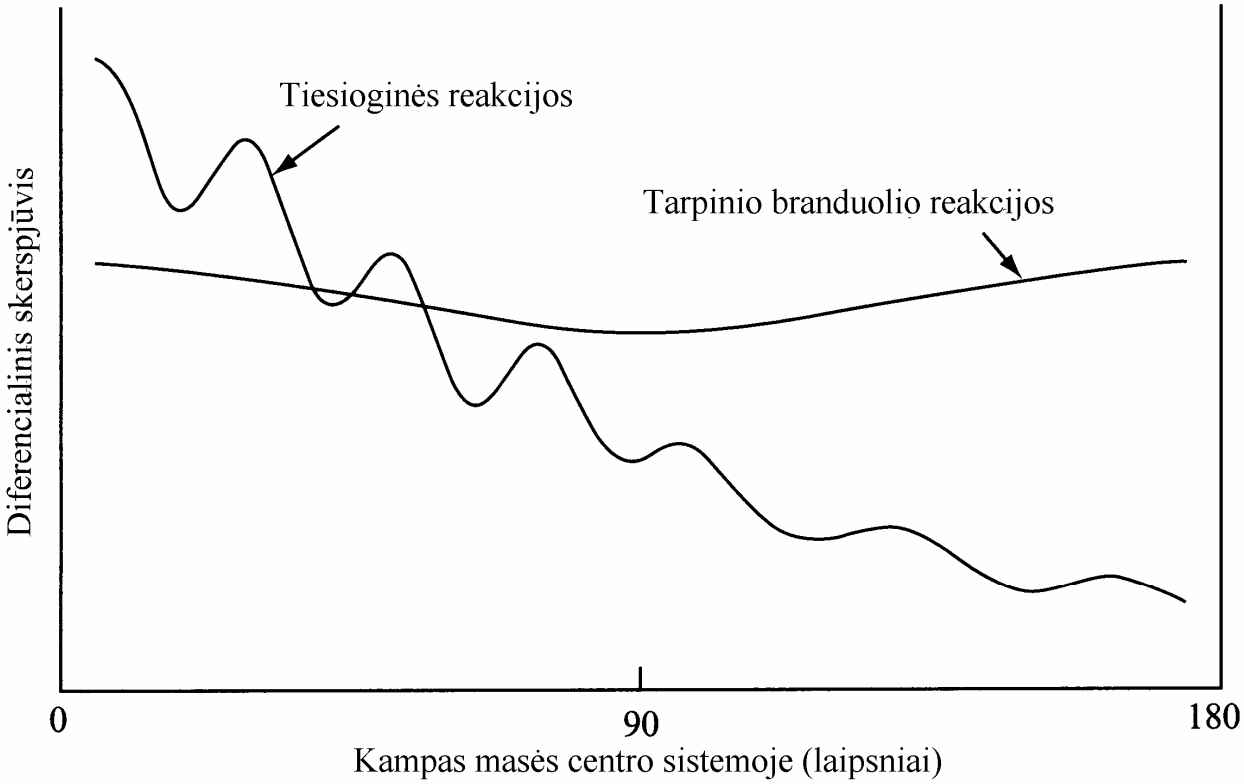
1) tampriosios sklaidos maksimumas yra dešiniajame spektro krašte (didžiausia išsklaidytojo protono energija);

2) mažesnių energijų maksimumai atitinka tiesiogines reakcijas – netampriąją sklaidą (kuo mažesnė antrinio protono energija, tuo į aukštesnį lygmenį sužadinamas antrinis branduolys);

3) kai antrinių dalelių energijos yra dar mažesnės, jų energijos spektras yra platus ir be jokių smailių. Ši sritis atitinka tarpinio branduolio reakcijos. Šioje srityje neutrono išlėkimo tikimybė yra didesnė negu protono, nes protonui išlėkti iš branduolio trukdo Kulono potencialo barjeras (jo aukštis *B*);

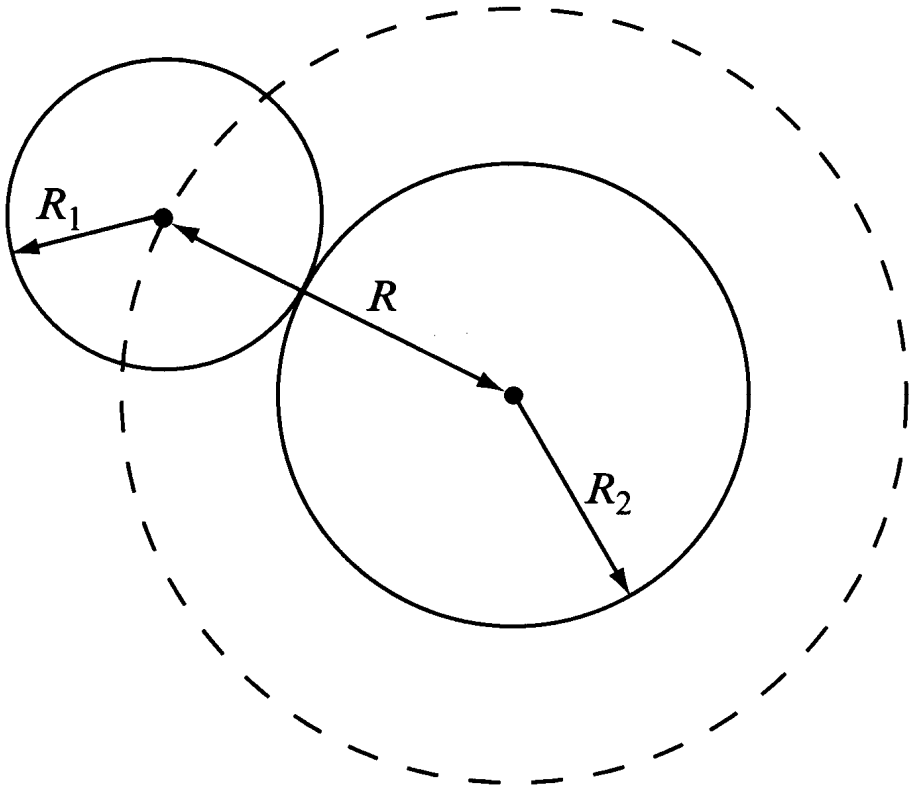
4) antrinių dalelių srauto mažėjimas mažėjant energijai atspindi galimų duotos energijos laisvojo neutrono būsenų tankio mažėjimą.

6.4.2. Antrinių dalelių išlėkimo krypčių pasiskirstymai



6.10 pav. Antrinių dalelių diferencialinių skerspjūvių priklausomybės nuo kampo bendrasis pavidalas (kampas atskaitomas nuo krintančiosios dalelės judėjimo krypties)

6.4.3. Branduolinių reakcijų skerspjūvių klasikinės išraiškos



6.11 pav. Dviejų branduolių, kurių spinduliai R_1 ir R_2, geometrinio sąveikos skerspjūvio apskaičiavimas

Pilnutinis sąveikos skerspjūvis – tai tampriosios sklaidos ir reakcijos skerspjūvių suma:

$$\sigma_{\mathrm{p}} = \sigma_{\mathrm{s}} + \sigma$$

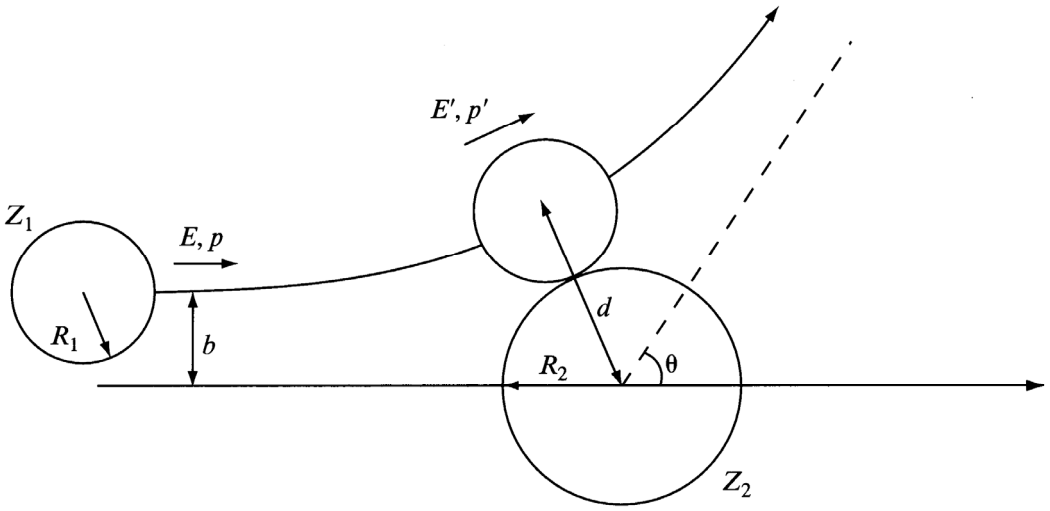
Didžiausias atstumas tarp branduolių centrų, kai dar yra galima branduolinė reakcija:

$$R = R_1 + R_2$$

Čia R_1 ir R_2 yra abiejų branduolių efektiniai spinduliai.
Jeigu krintančioji dalelė yra neutronas, tada reakcijos skerspjūvis

$$\sigma = \pi R^2$$

Jeigu krintančioji dalelė yra branduolys, tada Kulono stūma sumažina reakcijos skerspjūvį.



6.12 pav. Teigiamo elektros krūvio dalelės sąveikos su branduoliu skerspjūvio skaičiavimas

Reakcijos skerspjūvio, kai yra Kulono stūma, išvedimas:

$$\sigma = \pi b^2.$$

Čia b yra smūgio parametro vertė, kai krintantysis branduolys tik „prisiliečia“ prie taikinio branduolio paviršiaus (žr. pav.). Vadinasi, kai smūgio parametras lygus b, tada didžiausia Kulono stūmos (potencinė) energija yra lygi

$$B = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

Energijos tvermės dėsnis: $E = E' + B.$

Impulso momento tvermės dėsnis: $L = pb = p'R$

$$b^2 = R^2\left(\frac{p'}{p}\right)^2 = R^2\frac{E'}{E}$$

Įrašius į σ išraišką:

$$\sigma = \pi R^2\frac{E'}{E} = \pi R^2\left(1 - \frac{B}{E}\right), \quad \text{kai } E \geq B$$

Atsižvelgus į tai, kad taikinio masė M yra baigtinė, vietoj E reikia naudoti dalelės energiją masių centro sistemoje:

$$E_{\mathrm{mc}} = E\frac{M}{M+m}$$

Skerspjūvio išraiška krintančiosios dalelės bangos skaičiumi k ir orbitiniu kvantiniu skaičiumi l:

$$\sigma = \pi b^2 = \pi\left(\frac{L}{p}\right)^2 = \frac{\pi l(l+1)\hbar^2}{(\hbar k)^2} \approx \frac{\pi l^2}{k^2}$$

6.4.4. Dalinių sferinių bangų sąvoka

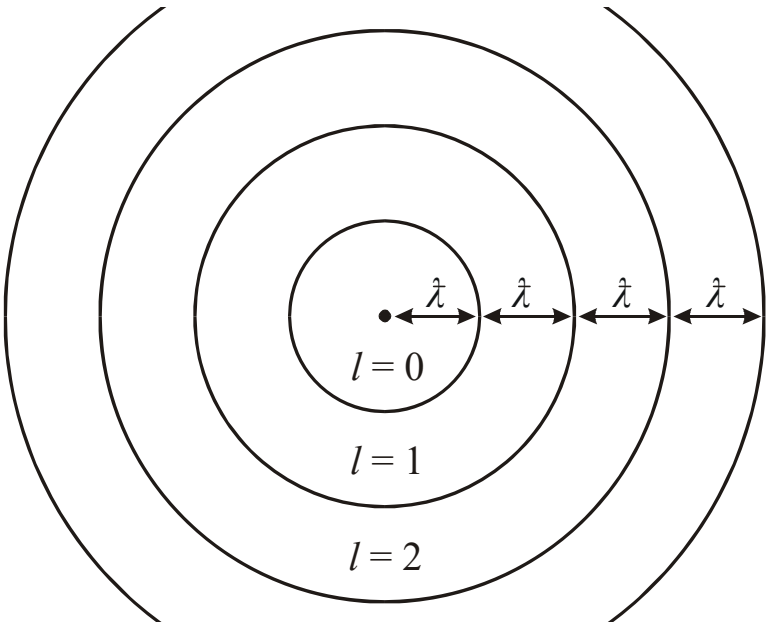
Plokščiąją bangą galima išreikšti dalinių sferinių bangų suma. Kiekviena iš jų atitinka tam tikrą orbitinio kvantinio skaičiaus l vertę ($l = 0, 1, 2, ...$). ***s bangos*** atitinka $l = 0$, ***p bangos*** atitinka $l = 1$ ir t. t.

Klasikinė judesio kiekio momento išraiška yra

$$L = bp$$

Vadinasi, kiekviena dalinė banga atitinka tam tikrą smūgio parametro b verčių intervalą (žiedą). To žiedo vidinis ir išorinis spinduliai yra

$$r_l = \frac{L_l}{\hbar k} \approx \frac{l}{k} = l\lambda\!\!\!^{-}, \qquad r_{l+1} = (l+1)\lambda\!\!\!^{-}$$



6.13 pav. Judesio kiekio momento sritys plokščiai krintančiajai bangai, kurios kryptis statmena brėžinio plokštumai. Dalelės, kurių orbitinis kvantinis skaičius l, pataiko į l-tąjį žiedą

Jeigu l-toji dalinė banga tikrai įvykdo branduolinę reakciją, tada atitinkamas skerspjūvis yra

$$\sigma_l = \pi r_{l+1}^2 - \pi r_l^2 = (2l+1)\pi\lambda\!\!\!^{-2}$$

Tai yra didžiausia galima skerspjūvio vertė. Bendruoju atveju

$$\sigma_{\mathrm{r},l} \le (2l+1)\pi\lambda\!\!\!^{-2}$$

Branduolinių reakcijų analizėje užtenka atsižvelgti tik tas dalines sferines bangas, kurių

$$l < \frac{R}{\lambda\!\!\!^{-}}$$

6.4.5. s bangų (l = 0) tampriosios sklaidos ir reakcijos skerspjūvių išraiškos

Tarkime, kad krintančiųjų dalelių būseną nusako plokščioji banga

$$\psi_{\mathrm{kr}} = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}$$

Plokščiosios bangos išraiška sferinėmis bangomis:

$$\psi_{\mathrm{kr}} \approx A\sum_{l=0}^{\infty} c_l(\theta)\left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kr-l\pi/2)}}{kr} - \frac{\mathrm{e}^{+\mathrm{i}(kr-l\pi/2)}}{kr}\right], \qquad \text{čia } c_l(\theta) = \mathrm{i}^{l+1}\left(l+\tfrac{1}{2}\right)P_l(\cos\theta)$$

(P_l yra l-tojo laipsnio Ležandro daugianaris)

Jeigu

$$\lambda\!\!\!^{-} >> R,$$

tada reakcijas vykdo tik s bangos.

s bangų išraiška, kai pilnutinė banginė funkcija yra plokščioji banga:

$$\phi_0(r) = \frac{A}{2\mathrm{i}kr}\left(-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\right)$$

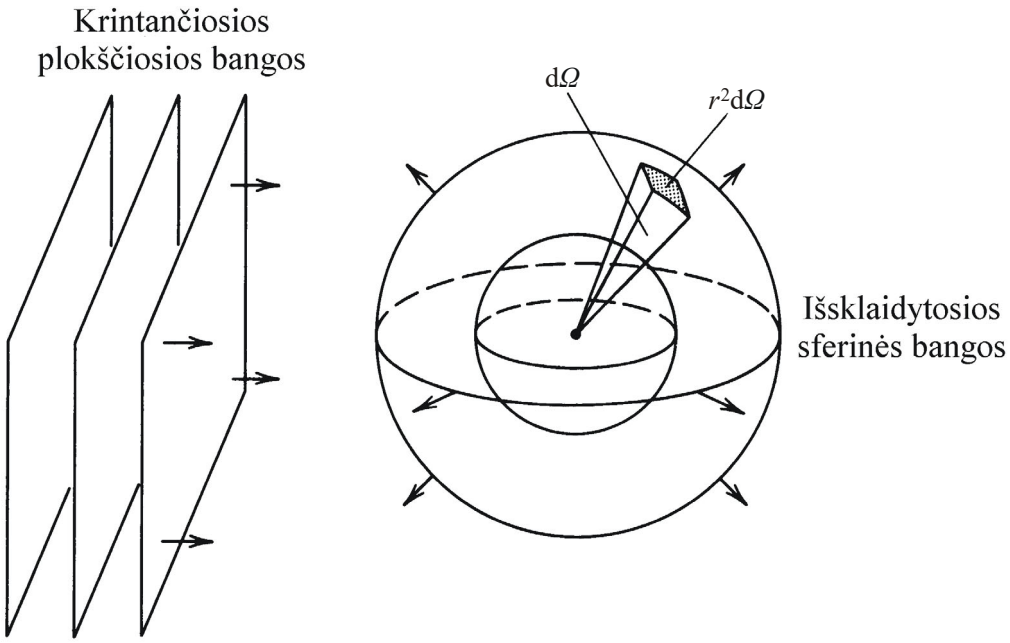
Pirmasis dėmuo – „įeinančioji banga“, o antrasis – „išeinančioji banga“.

Sąveika su branduoliu pakeičia banginę funkciją, todėl ji jau nėra plokščioji banga. Sąveika pakeičią tik išeinančiąją bangą:

$$\psi_0(r) = \frac{A}{2\mathrm{i}kr}\left(-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr} + \eta\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\right) = \phi_0(r) + \frac{A(\eta-1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{2\mathrm{i}kr}$$

Paskutinis dėmuo atitinka išsklaidytąsias bangas:

$$\psi_{\mathrm{skl}}(r) = \frac{A(\eta-1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{2\mathrm{i}kr}$$



6.14 pav. Plokščiųjų bangų sklaidos geometrija

Išvedant bendrąsias s bangų tampriosios sklaidos ir reakcijos skerspjūvių išraiškas, galima remtis bendrąja reakcijos spartos išraiška:

$$S = \sigma N j_{\mathrm{kr}}$$

Tarsime, kad S nusako įvykių skaičių, atitinkantį vieną taikinio branduolį. Tada $N = 1$ ir

$$\sigma = \frac{S}{j_{\mathrm{kr}}}$$

Bendroji vienos dalelės srauto tankio išraiška:

$$\boldsymbol{j} = \frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}(\psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi)$$

Įrašius krintančiosios plokščiosios bangos išraišką, gaunamas krintančiųjų dalelių srauto tankis:

$$j_{\mathrm{kr}} = \frac{\hbar k}{m}|A|^2$$

Pvz., tampriosios sklaidos skerspjūvis lygus

$$\sigma_{\text{skl}} = \frac{S_{\text{skl}}}{j_{\text{kr}}}$$

Čia S_{skl} yra tampriai išsklaidytų dalelių srautas (t. y. skaičius per laiko vienetą) per sferą, kurios centre yra taikinys, t. y.

$$S_{\text{skl}} = j_{\text{skl}} \cdot 4\pi r^2, \qquad j_{\text{skl}} = \frac{\hbar}{4mkr^2}|A|^2|1-\eta|^2, \qquad S_{\text{skl}} = \frac{\pi\hbar}{mk}|A|^2|1-\eta|^2 .$$

Todėl

$$\sigma_{\text{skl},0} = \frac{\pi|1-\eta|^2}{k^2} \equiv \pi\lambda\!\!\!^{-2}|1-\eta|^2$$

Analogiškai apskaičiuojamas reakcijos skerspjūvis:

$$\sigma_{\text{r}} = \frac{S_{\text{n}}}{j_{\text{kr}}} = \frac{S_{\text{in}} - S_{\text{out}}}{j_{\text{kr}}}$$

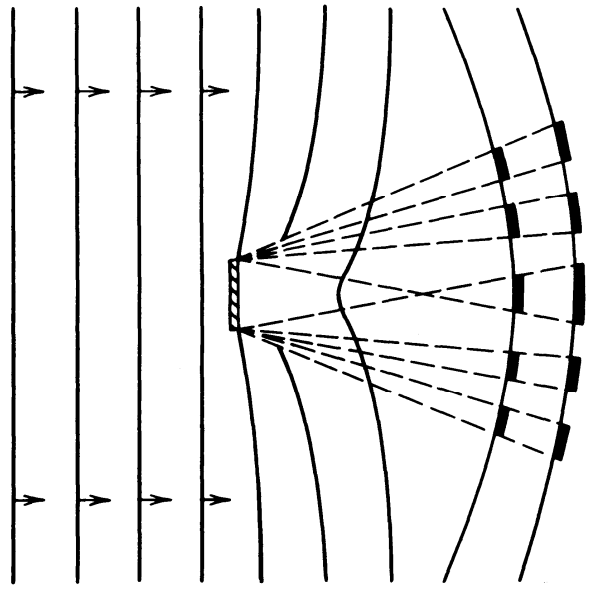
Čia S_{n} yra nuostolių srautas, o S_{in} ir S_{out} yra įeinančiųjų ir išeinančiųjų bangų srautai:

$$S_{\text{in}} = \frac{\pi\hbar}{mk}|A|^2, \qquad S_{\text{out}} = \frac{\pi\hbar}{mk}|A|^2|\eta|^2$$

Todėl

$$\sigma_{\text{r},0} = \frac{\pi(1-|\eta|^2)}{k^2} \equiv \pi\lambda\!\!\!^{-2}(1-|\eta|^2)$$

Iš šių išraiškų išplaukia, kad, jeigu reakcijos negalimos, tada $|\eta| = 1$. Vadinasi, tamprioji sklaida nekeičia išeinančiosios bangos amplitudės modulio, o keičia tik jos fazę. Be to, tamprioji sklaida egzistuoja visada, kai yra galimos reakcijos, t. y. kai $|\eta| < 1$. Tai galima suprasti remiantis optine analogija: difrakcija ant neskaidrios kliūties kraštų.



6.15 pav. Bangų sklaida neskaidria kliūtimi. Ištisinės linijos žymi paviršius, kurie statmeni bangų sklidimo krypčiai. Paryškintos sritys ant šių paviršių atitinka didesnį spinduliuotės intensyvumą

6.4.6. Banginės funkcijos tolydumas ant branduolio paviršiaus

Pažymėjus dalelės banginę funkciją branduolio išorėje ψ_{i}, o branduolio viduje ψ_{v}, tolydumo sąlygos yra:

$$\psi_{\text{i}}(R) = \psi_{\text{v}}(R), \qquad \left.\frac{\mathrm{d}\psi_{\text{i}}}{\mathrm{d}r}\right|_{r=R} = \left.\frac{\mathrm{d}\psi_{\text{v}}}{\mathrm{d}r}\right|_{r=R} .$$

Kad diferencijavimas būtų paprastesnis, patogiau vartoti funkciją

$$u(r) \equiv r\psi(r)$$

Tada

$$u_{\text{i}}(R) = u_{\text{v}}(R), \qquad \left.\frac{\mathrm{d}u_{\text{i}}}{\mathrm{d}r}\right|_{r=R} = \left.\frac{\mathrm{d}u_{\text{v}}}{\mathrm{d}r}\right|_{r=R} .$$

$$f \equiv \frac{R}{u_{\text{i}}(R)} \cdot \left.\frac{\mathrm{d}u_{\text{i}}}{\mathrm{d}r}\right|_{r=R} = \frac{R}{u_{\text{v}}(R)} \cdot \left.\frac{\mathrm{d}u_{\text{v}}}{\mathrm{d}r}\right|_{r=R}$$

(parametras f vadinamas „logaritmine išvestinė“)

Bendrasis metodas, kuriuo galima patikrinti dalelės ir branduolio sąveikos teorinį modelį:

1) Išmatavus sklaidos skerspjūvį nustatomas η.
2) Kadangi η pilnai nusako banginės funkcijos pavidalą branduolio išorėje (u_i), tai apskaičiuojama logaritminė išvestinė f.
3) Jeigu teorinis modelis numato $u_\mathrm{v}(r)$, tai f apskaičiuojamas pagal u_v.
4) Palyginamos abiem būdais gautos f vertės.

Bendrasis metodas, kuriuo galima numatyti sklaidos ir reakcijos skerspjūvius:

1) Jeigu teorinis modelis numato $u_\mathrm{v}(r)$, tai logaritminė išvestinė f apskaičiuojama pagal u_v.
2) Remiantis f apibrėžtimi (naudojant u_i) ir žinoma u_i išraiška, išreiškiamas η:

$$f \equiv \frac{R}{u_\mathrm{i}(R)} \cdot \frac{\mathrm{d}u_\mathrm{i}}{\mathrm{d}r}\bigg|_{r=R} = \mathrm{i}kR\left(\frac{\eta \mathrm{e}^{\mathrm{i}kR} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kR}}{\eta \mathrm{e}^{\mathrm{i}kR} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kR}}\right), \qquad \eta = \left(\frac{f + \mathrm{i}kR}{f - \mathrm{i}kR}\right)\exp(-2\mathrm{i}kR)$$

3) Gautoji η reikšmė įrašoma į skerspjūvių išraiškas ir apskaičiuojami skerspjūviai.

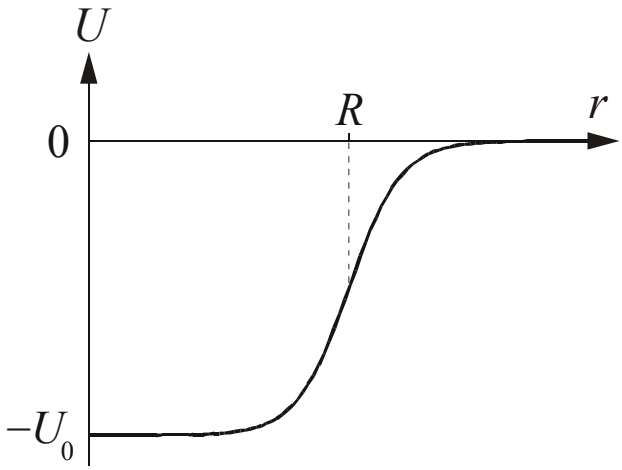
6.4.7. Mažos energijos neutronų pagavimo reakcijos skerspjūvis

Modelio prielaidos:

1) Kai krintantysis neutronas įsiskverbia į branduolį, jo potencinė energija yra tokia pati kaip branduolio nukleono, t. y. panaši į sferinę potencialo duobę su stačiais kraštais (žr. pav.).
2) Kadangi neutronas susilieja su taikinio branduoliu ir neišlekia iš jo, tai branduolio viduje neutrono banginė funkcija – tai „įeinančioji“ dalinė banga:

$$u_\mathrm{v}(r) \sim \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Kr} \qquad (r \le R)$$

$$K = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(E + U_0)}$$



Nukleono potencinė energija branduolyje

Čia $U_0 \approx 50$ MeV, o E yra neutrono kinetinė energija branduolio išorėje. Įrašę $u_\mathrm{v}(r)$ išraišką į parametro f išraišką, gauname

$$f = -\mathrm{i}KR, \qquad \eta = \left(\frac{K - k}{K + k}\right)\exp(-2\mathrm{i}kR)$$

Įrašę šią η išraišką į s bangų reakcijos skerspjūvio išraišką, gauname

$$\sigma_{\mathrm{r},0} \approx \pi \lambda\!\!\!^{-2} \frac{4Kk}{(K + k)^2} \equiv \frac{4\pi K}{k(K + k)^2}$$

Kadangi lėtųjų neutronų $E << U_0$, tai $k << K$ ir, be to, K beveik nepriklauso nuo E. Todėl

$$\sigma_{\mathrm{r},0} \approx \frac{4\pi}{kK} \approx \frac{const}{k}$$

Kadangi

$$k = \frac{m\upsilon}{\hbar},$$

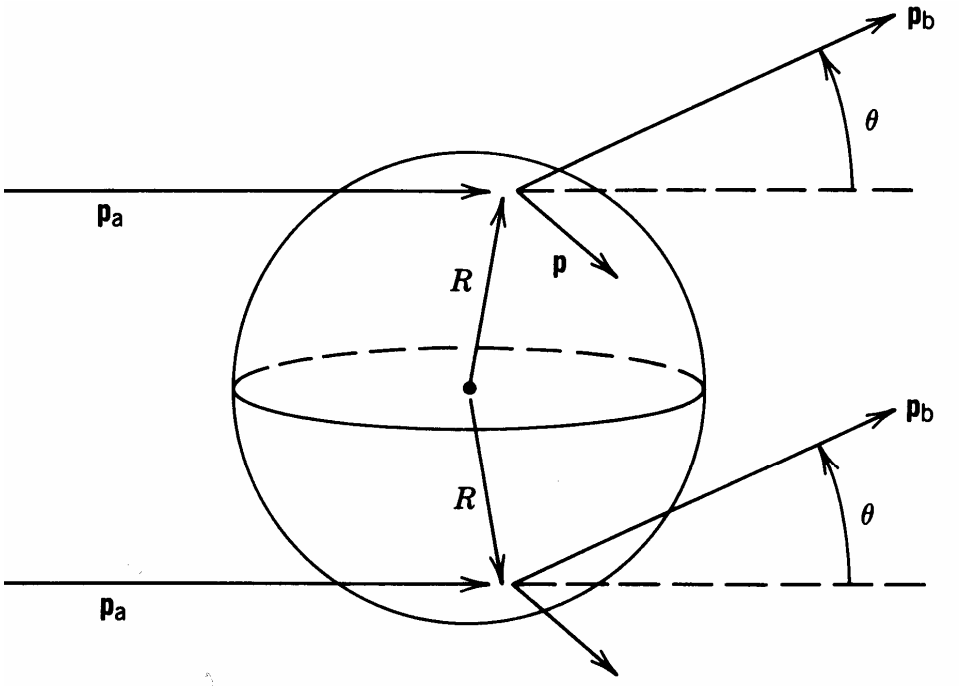
tai

$$\sigma_{\mathrm{r},0} \sim \frac{1}{\upsilon}$$

6.6. Tiesioginės reakcijos

Tiesioginėse reakcijose krintančiosios dalelės sąveika su branduoliu yra arti branduolio paviršiaus. Tiesioginė reakcija yra labiausiai tikėtina tada, kai bangos ilgis yra mažesnis už nukleono matmenis.

6.6.1. *Judesio kiekio momento pokytis tiesioginėse reakcijose*



6.18 pav. Tiesioginių branduolinių reakcijų geometrija (tiesioginės reakcijos dažniausiai vyksta ant branduolio paviršiaus)

Susidariusio branduolio judesio kiekis: $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_\mathrm{a} - \boldsymbol{p}_\mathrm{b}$. Pakėlus kvadratu:

$$p^2 = p_\mathrm{a}^2 + p_\mathrm{b}^2 - 2p_\mathrm{a}p_\mathrm{b}\cos\theta = (p_\mathrm{a} - p_\mathrm{b})^2 + 2p_\mathrm{a}p_\mathrm{b}(1-\cos\theta) = (p_\mathrm{a} - p_\mathrm{b})^2 + 4p_\mathrm{a}p_\mathrm{b}\sin^2\frac{\theta}{2};$$

Pvz., jeigu reakcija yra atplėšimo reakcija, tada p yra nukleono, kuris perduotas branduoliui, judesio kiekis. Kadangi reakcija yra branduolio paviršiuje, tai to nukleono orbitinis impulso momentas yra

$$|\boldsymbol{L}| = Rp$$

Čia R yra branduolio spindulys. Šį momentą galima išreikšti orbitiniu kvantiniu skaičiumi l:

$$|\boldsymbol{L}| = \hbar\sqrt{l(l+1)}$$

Vadinasi, išmatavus p ir žinant R, galima nustatyti duotosios viendalelės kvantinės būsenos orbitinį kvantinį skaičių l.

Supaprastinamas: teigiama, kad energijos ir impulso pernaša tarp krintančiosios dalelės ir taikinio yra maža, t. y.

$$p_\mathrm{b} \approx p_\mathrm{a}$$

Tada

$$p^2 \approx 4p_\mathrm{a}p_\mathrm{b}\sin^2\frac{\theta}{2} \approx 4p_\mathrm{a}^2\sin^2\frac{\theta}{2},$$

$$\sin\frac{\theta}{2} \approx \frac{p}{2p_a} = \frac{|\boldsymbol{L}|}{2Rp_a} = \frac{\hbar\sqrt{l(l+1)}}{2Rp_a} \approx \frac{\hbar l}{2Rp_a} \qquad (l = 0,1,2,...)$$

$$l = \frac{2Rp_a}{\hbar}\sin\frac{\theta}{2} \qquad (l = 0,1,2,...)$$

Pavyzdys: vyksta (d,n) arba (d,p) reakcija. T. y. $m_a = 2m_b$. Todėl, kad galiotų lygybė $p_b = p_a$, turi būti

$$E_b = 2E_a.$$

Kadangi branduolio sužadinimo energija yra maža, tai

$$E_b \approx E_a + Q,$$

čia Q yra reakcijos šiluma, kuri išsiskiria kinetinės energijos pavidalu. Vadinasi, kad galiotų paskutiniosios p ir l išraiškos, turi galioti lygybė

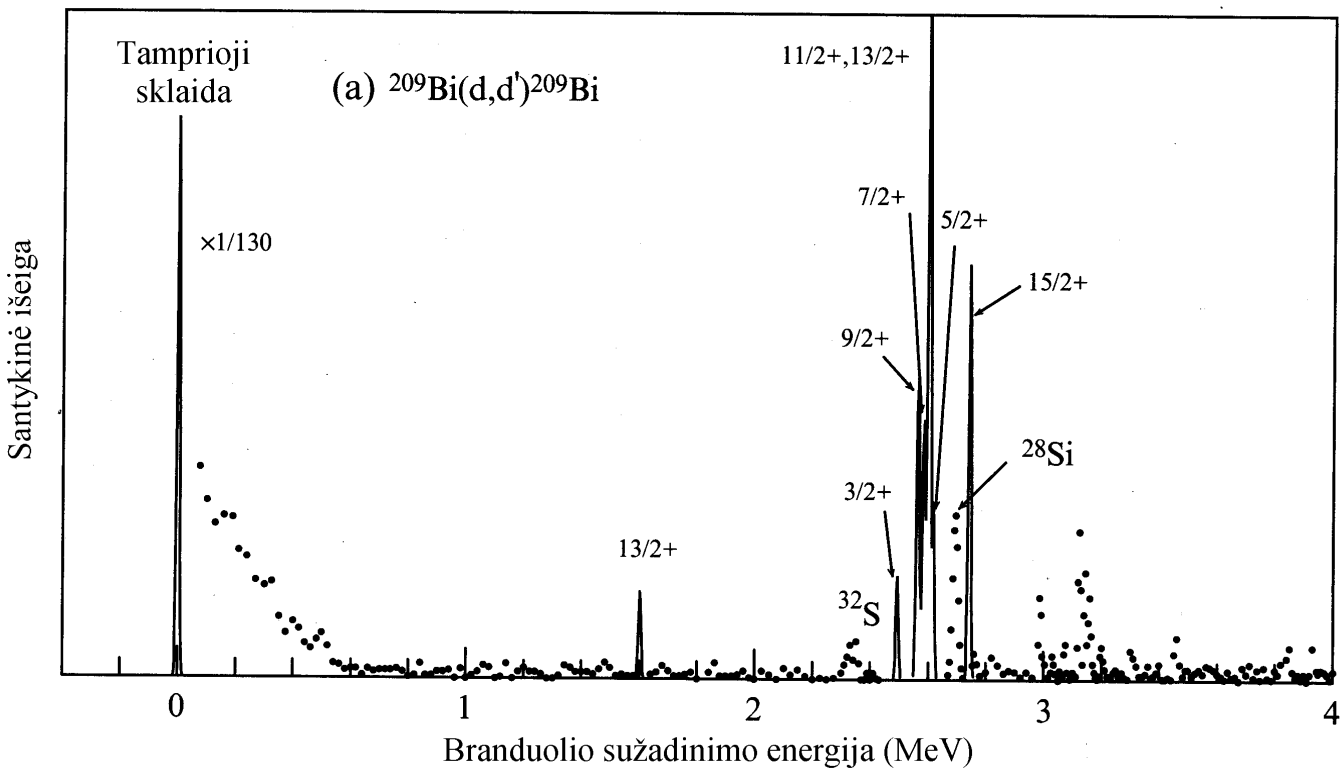
$$E_a = Q.$$

Pvz., reakcijos ^{90}Zr(d,p)^{91}Zr metu išsiskiria energija $Q = 5$ MeV. Vadinasi, jeigu krintančiojo deutono energija yra maždaug 5 MeV, tada išlekiančių protonų kampinis pasiskirstymas turės maksimumus ties kampais $\theta = 0^o$ ($l = 0$), $\theta = 14^o$ ($l = 1$), $\theta = 29^o$ ($l = 2$), $\theta = 44^o$ ($l = 3$).

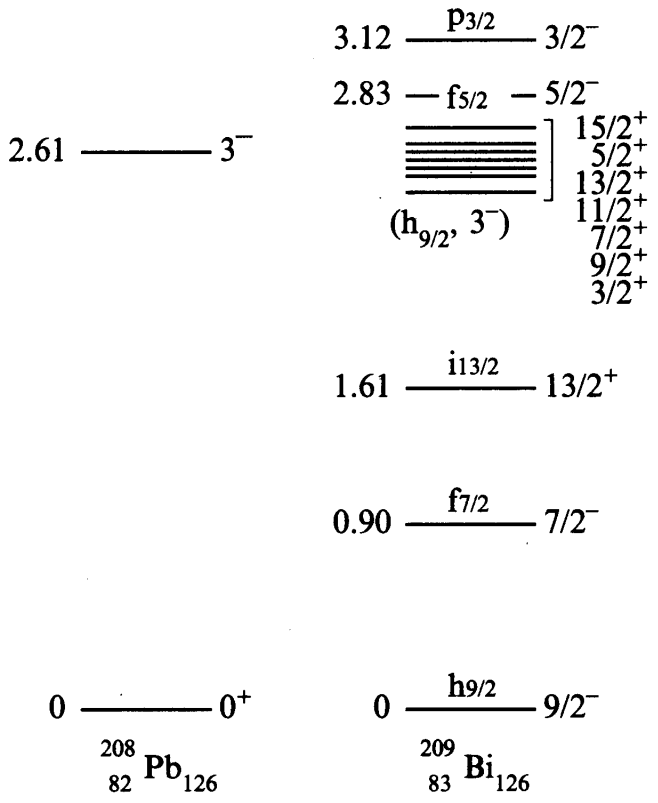
6.6.2. *Selektyvumas tiesioginėse reakcijose*

Netamprioji sklaida

Netampriosios sklaidos metu gali būti sužadinta bet kuri branduolio būsena, tačiau dažniausiai sužadinamos kolektyvinės branduolio būsenos.



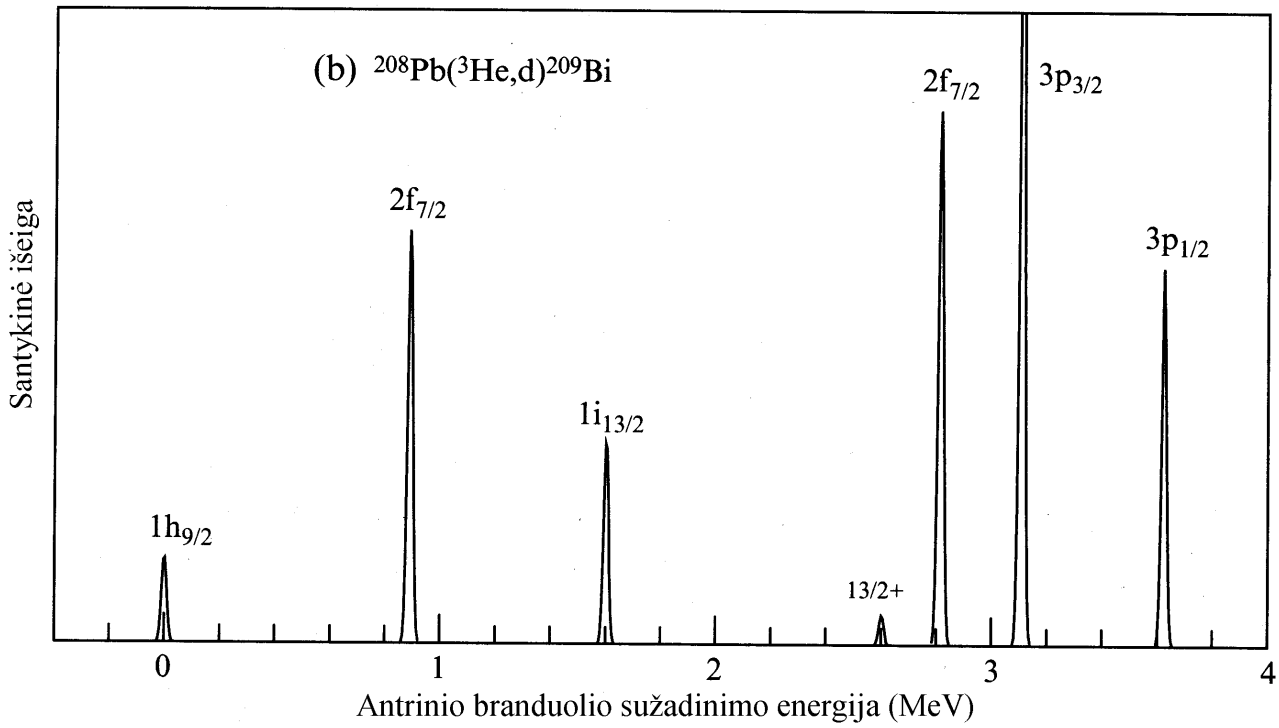
6.20a pav. Antrinių branduolių sužadinimo energijos spektras, kai 13 MeV energijos deuteronus 150° kampu netampriai sklaido bismuto-209 (^{209}Bi) branduoliai



6.19 pav. Švino-208 ir bismuto-209 žemiausieji energijos lygmenys. Kadangi ^{208}Pb neutronų ir protonų sluoksniai yra užpildyti, tai ^{209}Bi būseną galima modeliuoti kaip švino branduolio būsenos ir vieno valentinio protono būsenos darinį. Pvz., 7 artimi lygmenys ties 2,6 MeV atitinka $h_{9/2}$ būsenos protoną ir vieno oktupolinio fonono sužadinimą likusioje branduolio dalyje

Nukleono pernašos reakcijos

Nukleono atplėšimo reakcijos metu daug didesnė tikimybė sužadinti viendaleles būsenas, negu kolektyvines būsenas.



6.20b pav. Antrinių branduolių sužadinimo energijos spektras vykstant protono atplėšimo reakcijai $^{208}_{80}$Pb(^{3}He,d)$^{209}_{83}$Bi, kai krintančiųjų ^{3}He branduolių energija yra 20 MeV, o kampas tarp deutonų išlėkimo krypties ir ^{3}He branduolių kritimo krypties yra 110°

6.7. Tarpinio branduolio reakcijos

$$a + X \rightarrow C^* \rightarrow Y + b;$$

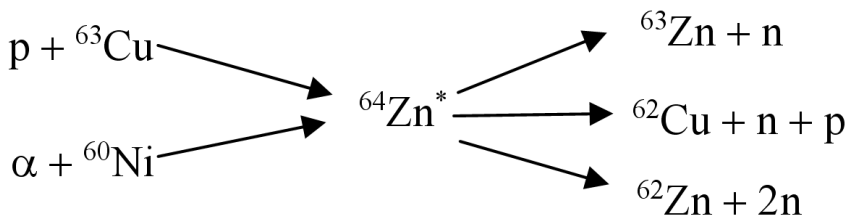
čia C^* žymi tarpinį branduolį („*“ nurodo, kad tarpinis branduolys yra sužadintosios būsenos). Šios reakcijos skerspjūvį žymėsime σ(a,b).

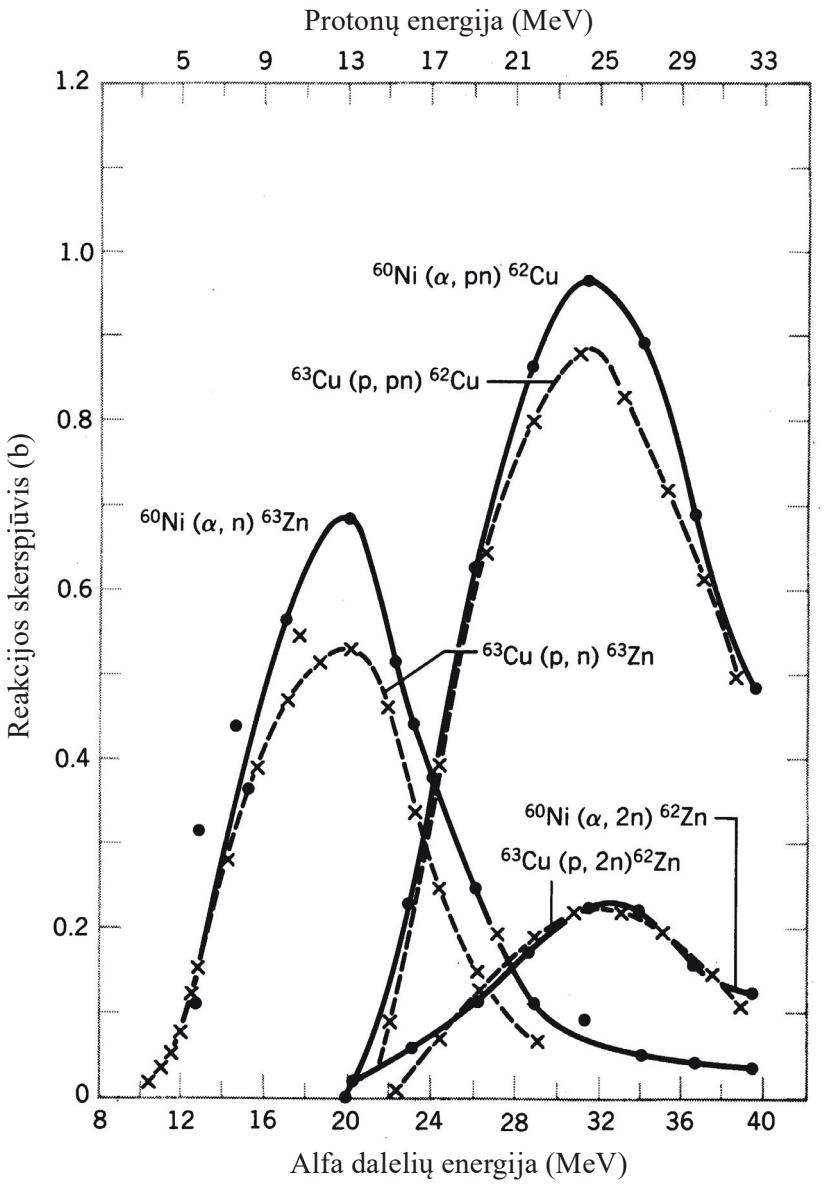
Tarpinio branduolio susiformavimas ir jo skilimas yra beveik nepriklausomi vyksmai. Todėl

$$\sigma(\mathrm{a},\mathrm{b}) = \sigma_{\mathrm{a}}(E) P_{\mathrm{b}}(E^*)$$

$$\frac{\sigma(\mathrm{a},\mathrm{b})}{\sigma(\mathrm{a},\mathrm{d})} = \frac{\sigma(\mathrm{a}',\mathrm{b})}{\sigma(\mathrm{a}',\mathrm{d})} = \frac{P_{\mathrm{b}}(E^*)}{P_{\mathrm{d}}(E^*)}$$

Pavyzdys:





6.21 pav. Šešių reakcijų, kurių metu susidaro tarpinis branduolys ^{64}Zn, skerspjūvių priklausomybės nuo krintančiosios dalelės kinetinės energijos. Visų kreivių formos ir pločiai yra labai panašūs. Tai atitinka tarpinio branduolio modelį

Viršutinės ir apatinės energijos ašių aiškinimas:

Tarpinio branduolio sužadinimo energija

$$E^* = E_{\mathrm{p}} + \Delta E_{\mathrm{R,p}} = E_{\alpha} + \Delta E_{\mathrm{R},\alpha}$$

Čia E_{p} ir E_{α} yra atitinkamai protono ir alfa dalelės energija, o ΔE_{R} yra tos dalelės ryšio energija tarpiniame branduolyje. Todėl, kad gauti tos pačios būsenos tarpinį branduolį naudojant protonus ir alfa daleles, jų energijų skirtumas turi būti lygus

$$E_{\alpha} - E_{\mathrm{p}} = \Delta E_{\mathrm{R,p}} - \Delta E_{\mathrm{R},\alpha}\,.$$

Tarpinio branduolio modelis geriausiai tinka tada, kai krintančiosios dalelės energija yra palyginti maža (< 10 MeV), o taikinio branduolys yra sunkusis.

Tarpinio branduolio reakcijose išlekiančiųjų dalelių krypčių pasiskirstymas yra apytiksliai izotropinis.

Kiekvieną iš galimų tarpinio branduolio susidarymo bei skilimo būdų yra įprasta vadinti „kanalu“: „įėjimo kanalai“ ir „skilimo kanalai“.

Tarpinio branduolio energijos neapibrėžtumas Γ yra susijęs su jo vidutine gyvavimo trukme τ:

$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau} \equiv \hbar\lambda$$

Čia λ yra tarpinio branduolio skilimo konstanta. Γ vadinamas „skilimo pločiu“. Pilnutinė skilimo konstanta yra lygi „dalinių“ skilimo konstantų, atitinkančių visus galimus skilimo kanalus, sumai:

$$\lambda = \sum_i \lambda_i$$

Todėl pilnutinis skilimo plotis yra lygus atskirų skilimo kanalų pločių ($\Gamma_i = \lambda_i \hbar$) sumai:

$$\Gamma = \sum_i \Gamma_i$$

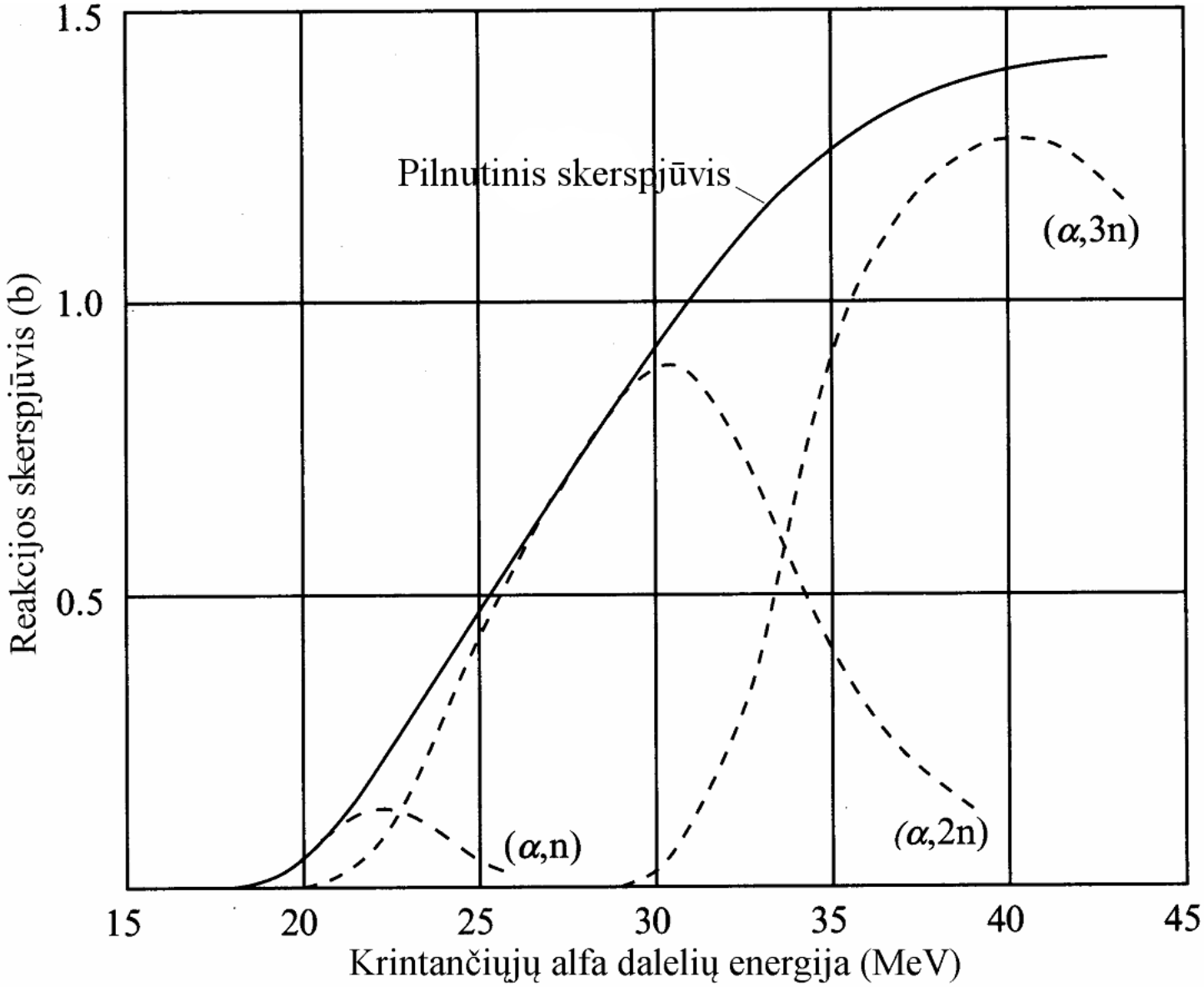
Duotosios reakcijos skerspjūvio $\sigma_{\alpha\beta}$ ir duotos būsenos tarpinio branduolio susiformavimo, kai įėjimo kanalas yra α, skerspjūvio σ_α sąryšis:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_\alpha \frac{\Gamma_\beta}{\Gamma} \qquad \sigma_\alpha(E) = \sigma_{\alpha\beta} \frac{\Gamma}{\Gamma_\beta}$$

$$\sigma_\alpha = \sum_\beta \sigma_{\alpha\beta}$$

Įvairių skilimo kanalų santykinės tikimybės priklauso nuo tarpinio branduolio sužadinimo energijos:

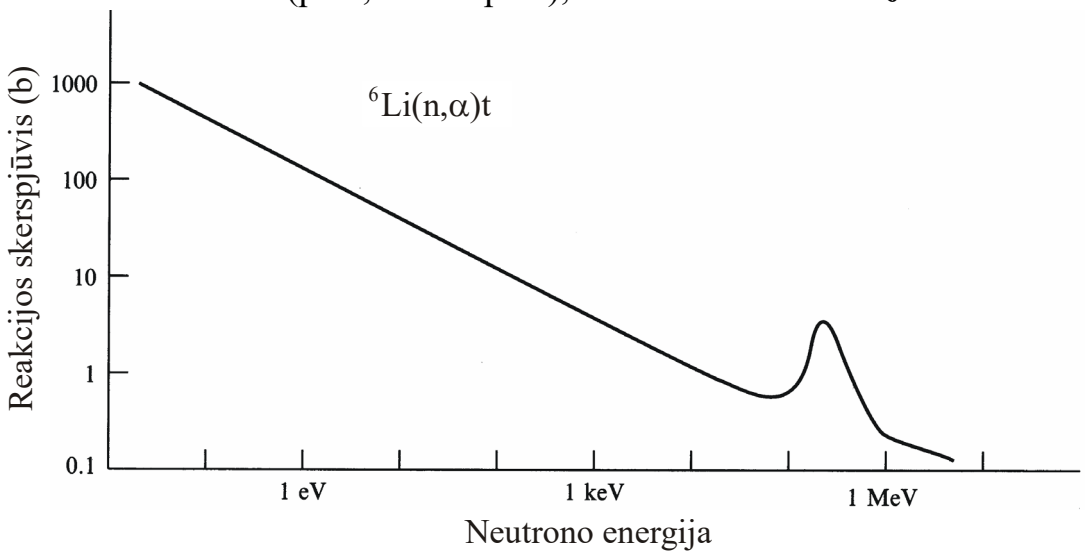
- esant mažiausioms energijoms, vyrauja fotonų ir neutronų emisija,
- esant didesnėms energijoms, tampa galima protonų emisija (dėl protonų tuneliavimo pro Kulono potencialo barjerą),
- esant dar didesnėms energijoms, tampa galima kelių dalelių emisija (žr. pav.).



6.22 pav. alfa dalelės pagavimo ir neutronų emisijos reakcijų ${}^{209}_{83}\mathrm{Bi}(\alpha,x\mathrm{n})\,{}^{213-x}_{85}\mathrm{At}$, kur x = 1, 2, 3, ... skerspjūvių priklausomybė nuo alfa dalelių energijos. Ištisinė linija atitinka visų skerspjūvių sumą

6.8. Rezonansinės reakcijos

Tarpinio branduolio reakcijos skerspjūvio priklausomybėje nuo krintančiosios dalelės energijos dažnai būna smailės (pvz., žr. 6.6 pav.), kurios vadinamos ***rezonansais***.



6.6 pav. Branduolinės reakcijos ^{6}Li(n,α)t skerspjūvio priklausomybė nuo neutrono energijos. Ties 250 keV matomas rezonansas

6.8.1. *„Kvazisurištosios“ būsenos*

Vykstant tarpinio branduolio reakcijoms, branduolys yra sužadinamas į ištisinio spektro sritį. Toje srityje (prie jos apatinio krašto) egzistuoja „kvazisurištosios“ sužadintosios būsenos. Jos panašios į surištąsias būsenas tuo, kad jas atitinka diskretūs energijos lygmenys, o skiriasi tuo, kad branduolys gali prarasti sužadinimo energiją ne vien emituodamas fotoną arba vidinės konversijos elektroną, bet ir emituodamas nukleonus.

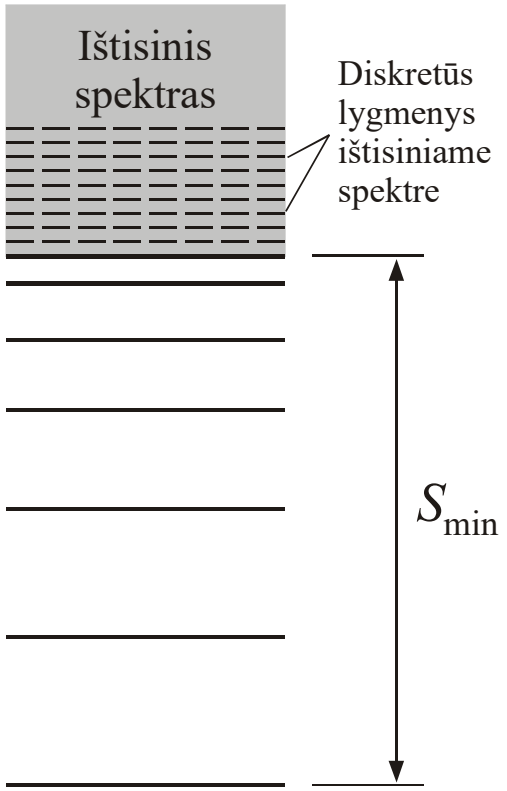
Kvazisturištosios būsenos susidaro dėl to, kad kai kurioms tarpinio branduolio būsenoms ištisinio spektro srityje yra būdingas nukleonų judėjimo periodiškumas. Jeigu vidutinis tokių periodų skaičius per laiko tarpą nuo dalelės įlėkimo į branduolį iki tarpinio branduolio skilimo yra didelis, tada tokia būsena yra kvazisurištoji, t. y. jos energijos neapibrėžtumas yra daug mažesnis už vidutinį intervalą tarp tarpinio branduolio gretimų energijos lygmenų. Šio teiginio įrodymas:

Nukleono judėjimą modeliuojame taip pat, kaip dalelės judėjimą stačiakampėje potencialo duobėje. Tada

$$E = E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mw^2} = n^2 \frac{h^2}{8mw^2} \qquad (n = 1, 2, 3, ...).$$

Jeigu n didelis, tada tinka klasikinė mechanika:

$$\upsilon = \sqrt{2E/m} = nh/(2mw).$$



6.23pav. Apytikslis branduolio energijos spektro pavidalas. Virš S_{min} spektras yra ištisinis. Tačiau šioje energijų srityje egzistuoja kvazisurištosios būsenos, kurių savybės panašios į surištųjų būsenų savybes (t. y. jų energija palyginti tiksliai apibrėžta). „Tikrųjų“ surištųjų būsenų energijos lygmenys parodyti ištisinėmis linijomis, o kvazisurištųjų būsenų energijos lygmenys – brūkšninėmis linijomis

Vadinasi, dalelės judėjimo periodas lygus

$$T \equiv (2w/\upsilon) = 4mw^2/(nh).$$

Kai $n >> 1$, intervalas tarp gretimų energijos lygmenų yra lygus

$$\Delta E = nh^2 / (4mw^2).$$

T. y.

$$T\,\Delta E = h \text{ arba } T = h / \Delta E.$$

Prielaida: tarpinio branduolio gyvavimo trukmė yra daug didesnė už T:

$$\tau >> T = \frac{h}{\Delta E}$$

Kadangi

$$\tau = \frac{\hbar}{\Gamma},$$

tai

$$\Gamma << \frac{\Delta E}{2\pi},$$

ką ir reikėjo įrodyti.

Jeigu branduoliui suteikta energija atitinka tarpinio branduolio sužadinimą į vieną iš diskrečių energijos lygmenų ištisinio spektro srityje (t. y. į vieną iš „kvazisurištųjų“ būsenų), tada labai padidėja pilnutinis dalelės sąveikos su branduoliu skerspjūvis. Tai yra rezonansas.

6.8.2. *Rezonansinių reakcijų skerspjūvio išraiška*

Nagrinėsime mažos energijos neutronų (s bangų) sąveiką su branduoliu. Tarkime, kad vienintelis galimas tarpinio branduolio skilimo vyksmas yra tos pačios energijos neutrono emisija (masių centro sistemoje), t. y. skilimo kanalas sutampa su „įėjimo“ kanalu (tamprioji sklaida). Vėl taikome bendrąjį reakcijos skerspjūvio apskaičiavimo metodą, t. y. apibrėžiame funkciją

$$u(r) \equiv r\psi(r)$$

ir jos logaritminę išvestinę f:

$$f \equiv \frac{R}{u_{\mathrm{i}}(R)} \cdot \frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{i}}}{\mathrm{d}r}\bigg|_{r=R} = \frac{R}{u_{\mathrm{v}}(R)} \cdot \frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{v}}}{\mathrm{d}r}\bigg|_{r=R}$$

Čia u_{i} ir u_{v} yra funkcija u atitinkamai branduolio išorėje ir viduje.

$$u_{\mathrm{i}}(r) = \frac{A}{2\mathrm{i}k}\left(-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr} + \eta\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\right)$$

Bendrasis skerspjūvio apskaičiavimo metodas:

1) Jeigu teorinis modelis numato $u_{\mathrm{v}}(r)$, tai logaritminė išvestinė f apskaičiuojama pagal u_{v}.
2) Remiantis f apibrėžtimi (naudojant u_{i}) ir žinoma u_{i} išraiška, išreiškiamas η:

$$f \equiv \frac{R}{u_{\mathrm{i}}(R)} \cdot \frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{i}}}{\mathrm{d}r}\bigg|_{r=R} = \mathrm{i}kR\left(\frac{\eta\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kR}}{\eta\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kR}}\right), \qquad \eta = \left(\frac{f + \mathrm{i}kR}{f - \mathrm{i}kR}\right)\exp(-2\mathrm{i}kR)$$

3) Gautoji η reikšmė įrašoma į bendrąją skerspjūvio išraišką.

Kadangi pagal prielaidą neutronas tikrai išlekia iš branduolio turėdamas tą patį bangos skaičių kaip ir prieš įlėkdamas į branduolį, tai

$$u_v(r) \sim \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Kr} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(Kr+2\xi)} \equiv 2e^{\mathrm{i}\xi}\cos(Kr+\xi) \equiv C\cos(Kr+\xi) \qquad (r \le R)$$

Remiantis šia išraiška galima paaiškinti, kodėl apskritai egzistuoja rezonansas:

$$u_i(r) \sim A\sin(kr+\delta)$$

Įrašius $u_\mathrm{v}(r)$ ir $u_\mathrm{i}(r)$ į tolydumo sąlygą

$$\left.\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{i}}{\mathrm{d}r}\right|_{r=R} = \left.\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{v}}{\mathrm{d}r}\right|_{r=R},$$

gaunama

$$-KC\sin(KR+\xi) = kA\cos(kR+\delta)$$

Kadangi

$$k = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE}, \quad K = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(E+U_0)}, \qquad \text{tai} \quad k << K$$

Todėl dažniausiai $|C| << |A|$, t. y. neutrono įsiskverbimo į branduolio vidų tikimybė yra maža. Tačiau $KR + \xi$ didėja didėjant neutrono energijai E. Vadinasi, esant tam tikroms E vertėms, $|\cos(Kr + \xi)| = 1$, o $\mathrm{d}u_\mathrm{v} / \mathrm{d}r\,|_{r=R} = 0$. Tada turi būti ir $\mathrm{d}u_\mathrm{i} / \mathrm{d}r\,|_{r=R} = 0$, t. y. $|\sin(kr + \delta)| = 1$. Kadangi $u_\mathrm{v}(R) = u_\mathrm{i}(R)$, tai šiuo atveju $|C| = |A|$, t. y. labai padidėja neutrono įsiskverbimo į branduolį tikimybė. Tai ir yra rezonansas.

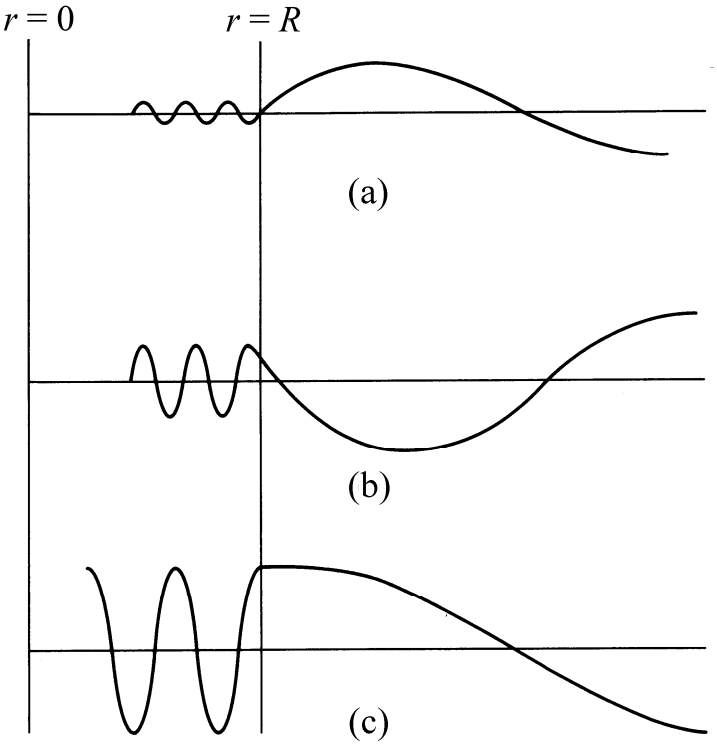
Ta pati išvada gaunama iš s bangų tampriosios sklaidos skerspjūvio bendrosios išraiškos:

$$\sigma_{\mathrm{skl},0} = \frac{\pi|1-\eta|^2}{k^2} \equiv \pi\lambda\!\!\!^{-2}|1-\eta|^2$$

Šis skerspjūvis yra maksimalus, kai $\eta = -1$. Kadangi $kR << 1$, tai

$$\eta \approx \frac{f+\mathrm{i}kR}{f-\mathrm{i}kR} \qquad \text{ir} \qquad \sigma_{\mathrm{skl},0} = \frac{\pi}{k^2}\left|\frac{2\mathrm{i}kR}{f-\mathrm{i}kR}\right|^2 = \frac{\pi}{k^2}\frac{4(kR)^2}{f^2+(kR)^2}$$

$\sigma_{\mathrm{skl},0}$ yra maksimalus tada, kai $f = 0$, t. y. kai $u_\mathrm{v}(r)$ ir $u_\mathrm{i}(r)$ turi maksimumą taške $r = R$.



6.24 pav. (a) Kol dalelės energija yra toli nuo rezonansinės vertės, dalelės įsiskverbimo į branduolio vidų ($r < R$) tikimybė yra maža, nes iš banginės funkcijos glodumo taške $r = R$ sąlygos išplaukia, kad banginės funkcijos amplitudė branduolio viduje turi būti daug mažesnė už amplitudę išorėje. (b) Artėjant prie rezonanso, dalelės įsiskverbimo į branduolį tikimybė didėja. (c) Rezonanso atveju banginės funkcijos amplitudės branduolio viduje ir išorėje tampa lygios viena kitai ir skerspjūvis pasiekia maksimumą

Kitas žingsnis – logaritminės išvestinės f apskaičiavimas:

$$f = -KR\,\mathrm{tg}(KR + \xi)$$

Rezonanso taške (kai $E = E_\mathrm{r}$) parametras f lygus nuliui:

$$KR\,\mathrm{tg}[K(E_\mathrm{r})R + \xi(E_\mathrm{r})] = 0$$

Išskleidus Teiloro eilute arti rezonanso ir palikus tik pirmojo laipsnio dėmenį,

$$f(E) = \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}E}\right|_{E=E_\mathrm{r}} (E - E_\mathrm{r})$$

Apibrėžimas:

$$\Gamma \equiv -\frac{2kR}{(\mathrm{d}f/\mathrm{d}E)|_{E=E_r}}$$

Tada

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}E}\right|_{E=E_\mathrm{r}} = -\frac{2kR}{\Gamma}$$

ir

$$f(E) = -\frac{2kR}{\Gamma}(E - E_\mathrm{r})$$

Įrašę į ankstesnę $\sigma_{\mathrm{skl},0}$ išraišką, gauname:

$$\sigma_{\mathrm{skl},0} = \frac{\pi}{k^2}\frac{\Gamma^2}{(E - E_\mathrm{r})^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2}$$

Dabar šį rezultatą reikia apibendrinti, t. y reikia atsižvelgti į tai, kad:

1) reakciją gali sukelti ir kitos dalinės bangos (kurių $l > 0$),
2) dalelės turi sukinius,
3) be tampriosios sklaidos, gali egzistuoti ir kiti tarpinio branduolio skilimo kanalai

Atsižvelgus į kitas dalines bangas ir į dalelių sukinius, atsiranda papildomas daugiklis – statistinis faktorius:

$$g(J) = \frac{2J + 1}{(2s_\mathrm{a} + 1)(2s_\mathrm{X} + 1)}$$

Čia J yra visos sistemos pilnutinio judesio kiekio momento kvantinis skaičius.

$$\boldsymbol{L}_J = \boldsymbol{L}_{s\mathrm{a}} + \boldsymbol{L}_{s\mathrm{X}} + \boldsymbol{L}_l$$

Jeigu $s_\mathrm{a} = s_\mathrm{X} = 0$, tada $J = l$ ir $g = 2l + 1$.

Atsižvelgus į kitus skilimo kanalus, skaitiklyje vietoj Γ^2 reikia naudoti įėjimo ir išėjimo kanalų pločių sandaugą $\Gamma_\alpha\Gamma_\beta$, t. y.

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{\pi}{k_\alpha^2} g(J)\frac{\Gamma_\alpha\Gamma_\beta}{(E - E_\mathrm{r})^2 + \Gamma^2/4}$$

Tai yra ***Breito ir Vignerio formulė***.

Didžiausias tampriosios sklaidos skerspjūvis būna tada, kai tamprioji sklaida yra vienintelis galimas vyksmas. Tada $\Gamma_\alpha = \Gamma_\beta = \Gamma$. Įrašę šias vertes į $\sigma_{\alpha\beta}$ išraišką ir tarę, kad $E = E_r$, o $g = 2l + 1$, gauname

$$\sigma_{\alpha\alpha}(\max) = (2l+1)\frac{4\pi}{k_\alpha^2}$$

Apskaičiuojant pilnutinį reakcijų (t. y. visų vyksmų išskyrus tampriąją sklaidą) skerspjūvį, reikia vietoj $\Gamma_\alpha\Gamma_\beta$ naudoti

$$\Gamma_\alpha \sum_{\beta\neq\alpha} \Gamma_\beta \equiv \Gamma_\alpha(\Gamma - \Gamma_\alpha).$$

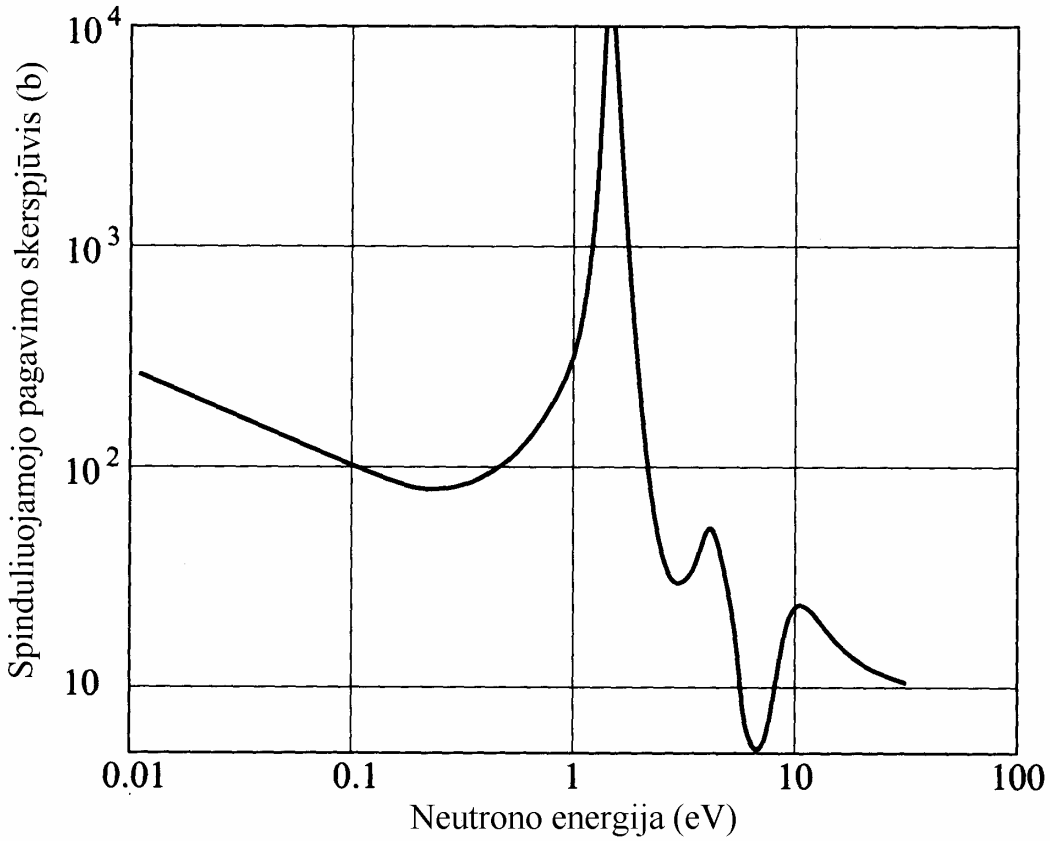
Šis reiškinys yra didžiausias, kai $\Gamma_\alpha = \Gamma / 2$. Tada $\Gamma_\alpha(\Gamma - \Gamma_\alpha) = \Gamma^2 / 4$ Įrašę šią vertę į $\sigma_{\alpha\beta}$ išraišką (skaitiklyje) ir tarę, kad $E = E_r$, o $g = 2l + 1$, gauname

$$\sigma_l^{\text{abs}}(\max) = (2l+1)\frac{\pi}{k_\alpha^2}$$

Pavyzdys – rezonansinė reakcija, kurią sukelia s būsenos neutronai ($l = 0$). Tada pagrindiniai du tarpinio branduolio skilimo kanalai yra neutrono emisija ir gama kvanto emisija (atitinkami pločiai Γ_n ir Γ_γ). Išsiaiškinsime, kaip nustatyti Γ_n ir Γ_γ vertes išmatavus spinduliuojamojo neutrono pagavimo skerspjūvį. Kai $E = E_r$,

$$\sigma_{n\gamma} = \frac{\pi}{k_n^2} g(J) \frac{\Gamma_n \Gamma_\gamma}{\Gamma^2 / 4}.$$

Nagrinėjame reakciją ^{115}In(n,γ)^{116}In. Neutrono sukinys yra 1/2, o ^{115}In branduolio pagrindinės būsenos sukinys yra 9/2. Kadangi $l = 0$, tai $J = 9/2 \pm 1/2$. Yra žinoma, kad rezonansas, kuris matomas pav., atitinka $J = 5$. Atitinkamas statistinis faktorius $g = 11 / (2 \cdot 10) = 11 / 20$.



6.25 pav. ^{115}In branduolių neutronų spinduliuojamojo pagavimo skerspjūvio priklausomybė nuo neutrono energijos. Matomas rezonansas ties 1,46 eV

1,46 MeV energijos neutrono bangos skaičius yra maždaug $2{,}7 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{fm}^{-1}$, todėl $\pi/k_{\mathrm{n}}^2 = 4{,}4 \cdot 10^5\ \mathrm{b}$. Įrašius šias vertes į $\sigma_{\mathrm{n}\gamma}$ išraišką ir išreiškus $\Gamma_{\mathrm{n}}\Gamma_{\gamma}/\Gamma^2$, gaunama vertė 0,039. Kadangi yra žinoma, kad pilnutinis šio rezonanso plotis yra $\Gamma = 0{,}075$ eV, o $\Gamma_{\gamma} = \Gamma - \Gamma_{\mathrm{n}}$, tai

$$\Gamma_{\mathrm{n}}(0{,}075\,\mathrm{eV} - \Gamma_{\mathrm{n}}) = 0{,}039 \cdot (0{,}075\,\mathrm{eV})^2 = 0{,}000219\,\mathrm{eV}^2$$

arba

$$\Gamma_{\mathrm{n}}^2 - 0{,}075\Gamma_{\mathrm{n}} + 0{,}000219 = 0$$

Tai yra kvadratinė lygtis, kurios sprendinys yra

$$\Gamma_n = \frac{0{,}075}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0{,}075}{2}\right)^2 - 0{,}000219},$$

t. y. 0,072 eV arba 0,003 eV. Kadangi $\Gamma_{\gamma} > \Gamma_{\mathrm{n}}$, tai

$$\Gamma_{\mathrm{n}} = 0{,}003\ \mathrm{eV},\ \Gamma_{\gamma} = 0{,}072\ \mathrm{eV}.$$

6.9. Mažos energijos neutronų sukeltos dalijimosi reakcijos

Kai branduolys sugeria mažos energijos neutroną, branduolio sužadinimo energija E^* yra labai artima neutrono ryšio energijai. Kad branduolys dalytųsi, ši energija turi būti didesnė už dalijimosi aktyvacijos energiją.

6.1 lentelė. Kelių sunkiųjų nuklidų papildomojo neutrono ryšio energijos, dalijimosi aktyvacijos energijos ir dalijimosi reakcijos pagaunant šiluminius neutronus skerspjūvio vertės (antrasis ir trečiasis stulpeliai atitinka tarpinį branduolį)

Branduolys	Ryšio energija (MeV)	Aktyvacijos energija (MeV)	Dalijimosi skerspjūvis (b)
$^{232}_{90}\mathrm{Th}$	4,8	6,7	$< 10^{-6}$
$^{233}_{92}\mathrm{U}$	6,8	5,85	530
$^{235}_{92}\mathrm{U}$	6,5	5,9	579
$^{238}_{92}\mathrm{U}$	4,8	5,8	$2{,}7 \cdot 10^{-6}$
$^{239}_{94}\mathrm{Pu}$	6,5	6,3	742

Nors visų šių branduolių aktyvacijos energijos yra panašios, tačiau trys iš jų dalijasi pagavę šiluminį neutroną, o kiti du – ne. Taip yra dėl porų dėmens Veiczekerio formulėje, kuri išreiškia branduolio ryšio energiją. Tas dėmuo yra tokio pavidalo:

$$C = \begin{cases} +\Delta & \text{jeigu } Z \text{ ir } N \text{ lyginiai,} \\ 0 & \text{jeigu } A \text{ nelyginis,} \\ -\Delta & \text{jeigu } Z \text{ ir } N \text{ nelyginiai.} \end{cases}$$

Du minėtieji branduoliai, kurie nesidalija ($^{232}_{90}\mathrm{Th}$ ir $^{238}_{92}\mathrm{U}$) yra lyginiai-lyginiai. Kai jie pagauna neutroną, jų A tampa nelyginis, todėl neutrono ryšio energija sumažėja. Todėl ir branduolio sužadinimo energija tampa mažesnė už dalijimosi aktyvacijos energiją.

7. Jonizuojančiosios spinduliuotės sąveika su medžiaga

7.1. Įvadas

Branduolių spinduliuotė yra *jonizuojančioji*, t. y. dėl jos poveikio medžiagai medžiagos atomai yra jonizuojami (iš jų išlaisvinami elektronai). Todėl ši spinduliuotė gali nutraukti cheminius ryšius tarp medžiagos atomų.

Iš vienos pusės, stiprus spinduliuotės poveikis medžiagoms reiškia, kad ši spinduliuotė yra pavojinga sveikatai, o iš kitos pusės, jis palengvina spinduliuotės detektavimą ir tuo pačiu – jos kontroliavimą.

Nepriklausomai nuo jonizuojančiosios spinduliuotės prigimties, jonizavimo procese visada dalyvauja *elektringosios* dalelės. Jos gali sudaryti krintančiąją spinduliuotę (pvz., β dalelės, α dalelės, kiti branduoliai arba jonai) arba atsirasti dėl krintančiųjų dalelių, kurios neturi krūvio (gama fotonai, neutronai), poveikio medžiagai.

7.2. Sunkiųjų elektringųjų dalelių sąveika su medžiaga

Elektringosios dalelės sąveikauja su medžiagos atomų elektronais ir branduoliais dėl Kulono jėgos. Sąveika su elektronais yra daug labiau tikėtina, negu sąveika su branduoliais.

Sunkiosios dalelės – tai dalelės, kurių masė yra daug didesnė už elektrono masę. Pvz., protonai ir sunkesnės dalelės.

Elektringosios dalelės sąveikauja su medžiagos atomų elektronais ir branduoliais dėl Kulono jėgos. Sąveika su elektronais yra daug labiau tikėtina, negu sąveika su branduoliais.

Didžiausia galima medžiagos elektrono įgyta energija:

$$\Delta E_{\max} = E\frac{4m_{\mathrm{e}}}{M} = 2m_{\mathrm{e}}\upsilon^2$$

Čia E yra krintančiosios dalelės kinetinė energija, M yra jos masė, m_{e} yra elektrono energija, υ yra krintančiosios dalelės greitis.

Kadangi sąveikos įvykių daug, o po kiekvieno sąveikos įvykio energija sumažėja labai nežymiai, tai sunkioji dalelė turi palyginti tiksliai apibrėžtą ***siekį***, t. y. nueitą kelią, kuriame ji praranda visą kinetinę energiją.

„Delta spinduliai“ – tai didelės energijos antriniai elektronai, kurie taip pat gali jonizuoti medžiagos atomus.

7.2.1. *Betės formulė*

Medžiagos ***ilginė stabdymo geba*** – tai vidutinis dalelės energijos sumažėjimas vienetiniame kelyje ($-\mathrm{d}E$ / $\mathrm{d}x$).

Klasikinis sąveikos modelis remiasi šiomis prielaidomis:

1. Krintančiosios dalelės ir medžiagos elektrono sąveiką galima aprašyti klasikinės mechanikos metodais. Klasikiniai metodai tinka, jeigu dalelės kinetinė energija yra pakankamai didelė.
2. Skaičiavimuose medžiagos elektronus galima laikyti laisvais (nors iš tikrųjų jie priklauso atomams).
3. Sąveikos trukmė yra tokia maža, kad jos metu medžiagos elektronas praktiškai nepasislenka iš vietos.

Kulono jėgos modulis:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{ze^2}{x^2 + b^2}$$

b yra ***smūgio parametras***, ze yra krintančiosios dalelės krūvis. Sąveikos metu elektronui perduotas pilnutinis judesio kiekis:

$$\boldsymbol{p} = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{F}\mathrm{d}t$$

$$p = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\perp}\mathrm{d}t$$

Kadangi krintančiosios dalelės greitis vienos sąveikos metu beveik nepakinta, tai $t = x/\upsilon$:

$$p = \frac{1}{\upsilon}\int_{-\infty}^{\infty} F_{\perp}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{ze^2}{b\upsilon}$$

Energija, kurią gavo elektronas (t. y. krintančiosios dalelės energijos nuostoliai sąveikos metu):

$$\Delta E = \frac{p^2}{2m_\mathrm{e}} = \frac{1}{8\pi^2\varepsilon_0^2}\frac{z^2e^4}{m_\mathrm{e}\upsilon^2 b^2}$$

Kadangi Kulono jėga yra toliasiekė, tai dalelė vienu metu sąveikauja su visais arti jos esančiais medžiagos elektronais. Elektronų skaičius žiediniame b spindulio, db pločio ir dx storio sluoksnyje yra

$$n \cdot 2\pi b \cdot \mathrm{d}b \cdot \mathrm{d}x,$$

čia n yra medžiagos elektronų koncentracija. Todėl

$$-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} \frac{p_\mathrm{e}^2}{2m_\mathrm{e}} n 2\pi b \mathrm{d}b = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0^2}\frac{z^2e^4n}{m_\mathrm{e}\upsilon^2}\ln\frac{b_{\max}}{b_{\min}}$$

Kadangi

$$b \sim \frac{1}{\sqrt{\Delta E}},$$

tai

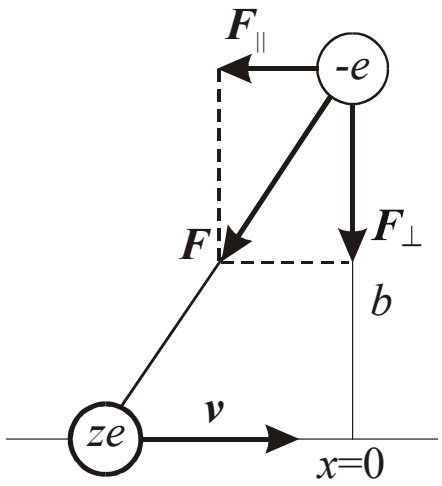
$$\ln\frac{b_{\max}}{b_{\min}} = \ln\frac{\sqrt{\Delta E_{\max}}}{\sqrt{\Delta E_{\min}}} = \frac{1}{2}\ln\frac{\Delta E_{\max}}{\Delta E_{\min}} = \frac{1}{2}\ln\frac{2m_\mathrm{e}\upsilon^2}{\bar{I}},$$

čia $\bar{I}$ yra atomo elektrono vidutinė sužadinimo energija.

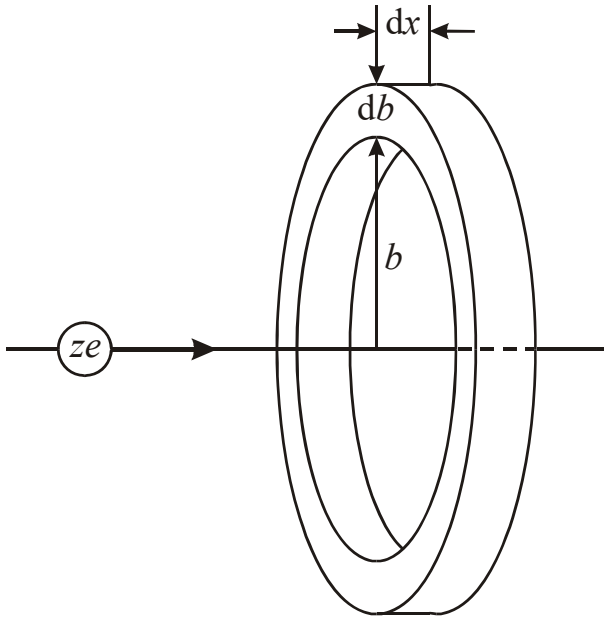
$$-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0^2}\frac{z^2e^4n}{m_\mathrm{e}\upsilon^2}\ln\frac{2m_\mathrm{e}\upsilon^2}{\bar{I}}$$

Tikslesnė formulė – tai ***Betės formulė*** (*H. Bethe*, 1930 m.):

$$-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0^2}\frac{z^2e^4n}{m_\mathrm{e}\upsilon^2}\left[\ln\frac{2m_\mathrm{e}\upsilon^2}{I(1-\beta^2)} - \beta^2\right],$$



7.1 pav. Atomo jonizavimo sunkiosios elektringosios dalelės elektriniu lauku klasikinis modelis. ze – krintančiosios dalelės krūvis, $-e$ – atomo elektrono krūvis



7.2 pav. Tūrio elementas integruojant dalelės energijos nuostolius sluoksnio tūriu

čia $\beta = \upsilon / c$. Kai $\beta << 1$, Betės formulė gali būti išvesta modifikavus $\Delta E_{\min}$ išraišką:

$$\Delta E_{\min} = \frac{\overline{I}^2}{2m_e\upsilon^2} = \overline{I}\left(\frac{\overline{I}}{2m_e\upsilon^2}\right)$$

Tai reiškia, kad $b_{\max} \sim \upsilon$. Šį teiginį galima pagrįsti pagal Boro atomo teoriją. Kad išorinis elektrinis laukas, atsiradęs dėl pralekiančios dalelės elektros krūvio, galėtų padidinti elektrono energiją, sąveikos trukmė τ turi būti daug mažesnė už vidutinį elektrono sukimosi aplink branduolį periodą:

$$\tau << 1/\overline{\nu} = h/\overline{I},$$

čia $\overline{\nu}$ yra vidutinis apsisukimų dažnis. Didžiausia τ reikšmė, atitinkanti pastarąją nelygybę:

$$\tau_{\max} \approx \hbar/\overline{I}.$$

Antra vertus, kai krintančiosios dalelės greitis nėra reliatyvistinis,

$$\tau \approx b/\upsilon.$$

$$b_{\max} = \tau_{\max}\upsilon = \frac{\hbar\upsilon}{\overline{I}},$$

t. y. $b_{\max} \sim \upsilon$, ką ir reikėjo įrodyti.

Remiantis kvantinės mechanikos dėsniais, galima gauti ir $b_{\min}$ vertę. Heizenbergo neapibrėžtumų sąryšis:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

Iš šios nelygybės išplaukia:

$$b_{\min} = \frac{\hbar}{2p_{\mathrm{mc}}},$$

čia p_{mc} yra krintančiosios dalelės ir elektrono pilnutinis judesio kiekis jų masės centro atskaitos sistemoje. Kadangi laboratorinėje atskaitos sistemoje elektronas nejuda, o $m_{\mathrm{e}} << M$, tai $p_{\mathrm{mc}} \approx m_{\mathrm{e}}\upsilon$ ir

$$b_{\min} = \frac{\hbar}{2m_{\mathrm{e}}\upsilon}, \qquad \ln\frac{b_{\max}}{b_{\min}} = \ln\frac{2m_e\upsilon^2}{\overline{I}}, \qquad -\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0^2}\frac{z^2e^4n}{m_{\mathrm{e}}\upsilon^2}\ln\frac{2m_{\mathrm{e}}\upsilon^2}{\overline{I}}.$$

Šis reiškinys – tai Betės formulės atskiras atvejis, atitinkantis sąlygą $\beta << 1$.

Medžiagos elektronų koncentracija:

$$n = \frac{Z\rho N_A}{A}$$

Čia ρ yra medžiagos tankis, Z yra medžiagos krūvio skaičius, A yra medžiagos molinė masė (atominis masės skaičius).

Empirinė vidutinės jonizavimo energijos išraiška:

$$\overline{I} \approx 11 \cdot Z \text{ eV}$$

Masinė stabdymo geba: $-\mathrm{d}E/(\rho\,\mathrm{d}x)$.
Masinis siekis:

$$R' \equiv \rho R$$

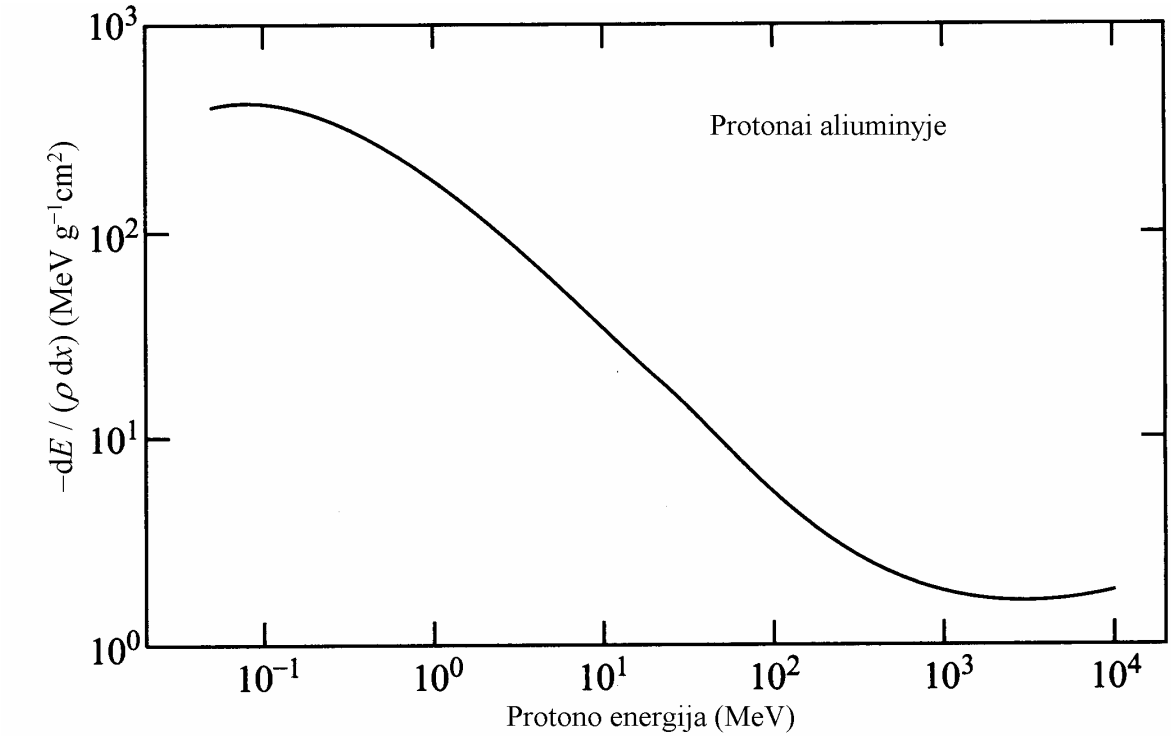
7.2.2. *Stabdymo gebos priklausomybė nuo dalelės kinetinės energijos*

Apytikslis empirinis sąryšis (tinka kai 100 keV < E < 1 GeV):

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = const \cdot E^{-k},$$

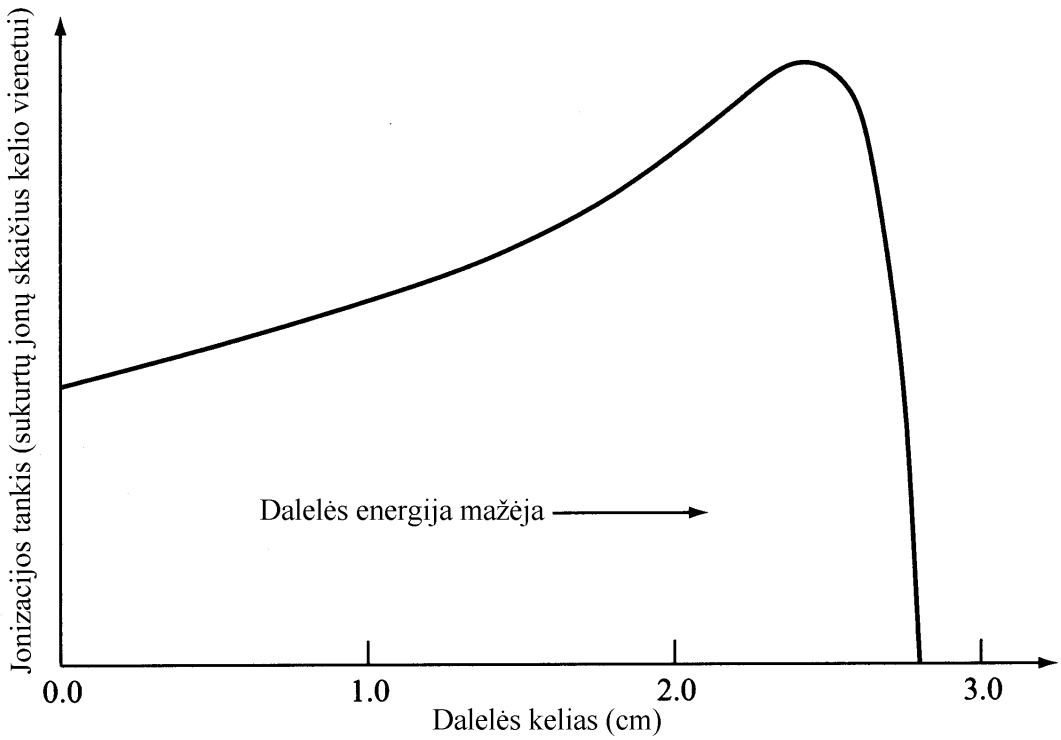
čia $k \approx 0{,}8$. Jono siekis:

$$R \equiv \int \mathrm{d}x \equiv \int_E^0 \frac{\mathrm{d}E}{(\mathrm{d}E/\mathrm{d}x)} \sim E^{1+k}$$



7.3 pav. Protonų masinės stabdymo gebos priklausomybė nuo energijos aliuminyje

7.2.3. *Brego kreivė*



7.4 pav. Jonizacijos tankio priklausomybė nuo atstumo, kurį α dalelė nueina ore (Brego kreivė)

7.2.4. *Stabdymo gebos ir siekio priklausomybė nuo dalelės masės ir krūvio*

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} \sim z^2 f(\upsilon) \qquad R \equiv \int_E^0 \frac{\mathrm{d}E}{(\mathrm{d}E/\mathrm{d}x)} = \int_\upsilon^0 \frac{M\upsilon'\mathrm{d}\upsilon'}{(\mathrm{d}E/\mathrm{d}x)} \sim \int_\upsilon^0 \frac{M\upsilon'\mathrm{d}\upsilon'}{z^2 f(\upsilon')} \sim \frac{M}{z^2} F(\upsilon)$$

7.2.5. *Stabdymo gebos ir siekio priklausomybė nuo stabdančiosios medžiagos*

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} \sim \frac{Z}{A}\ln\left(\frac{2m_\mathrm{e}\upsilon^2}{\bar{I}}\right)$$

Daugiklis Z/A ir logaritminė funkcija silpnai priklauso nuo A ir Z. Atsižvelgus į šią silpną priklausomybę, gaunama, kad vienodų dalelių masiniai siekiai skirtingose medžiagose nėra vienodi ir yra tiesiog proporcingi kvadratinei šakniai iš A:

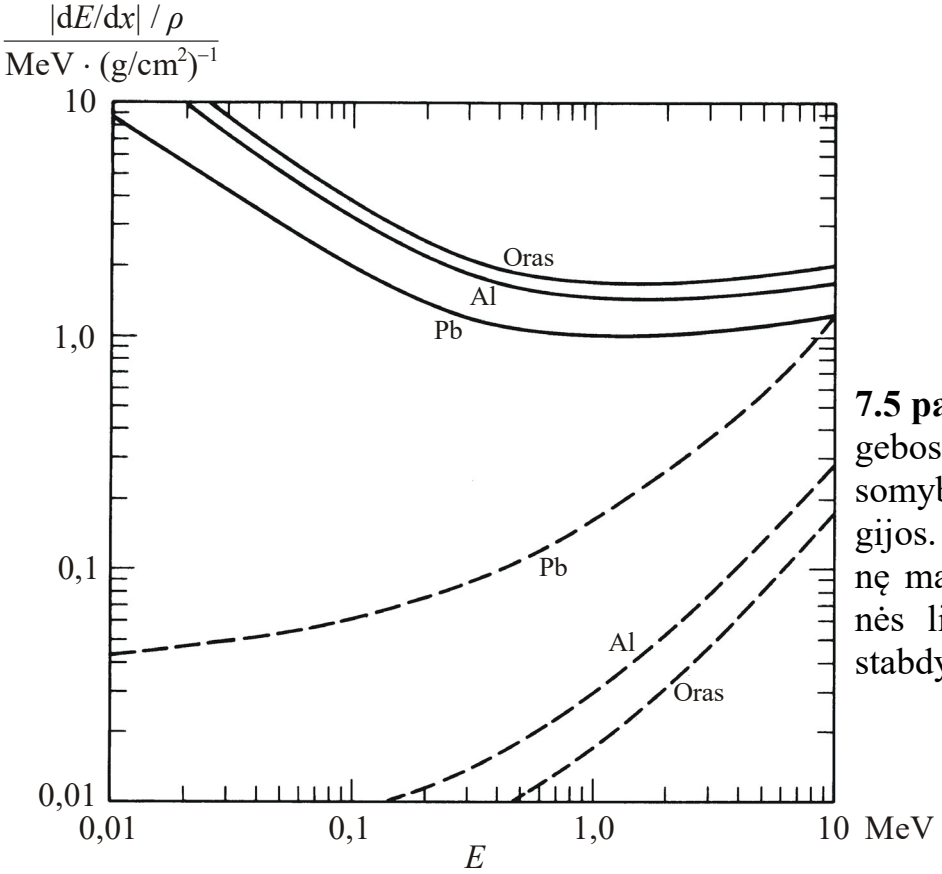
$$\frac{R_1'}{R_2'} \approx \frac{\sqrt{A_1}}{\sqrt{A_2}} \qquad \text{arba} \qquad \frac{R_1}{R_2} \approx \frac{\rho_2\sqrt{A_1}}{\rho_1\sqrt{A_2}}$$

7.3. Elektronų sąveika su medžiaga

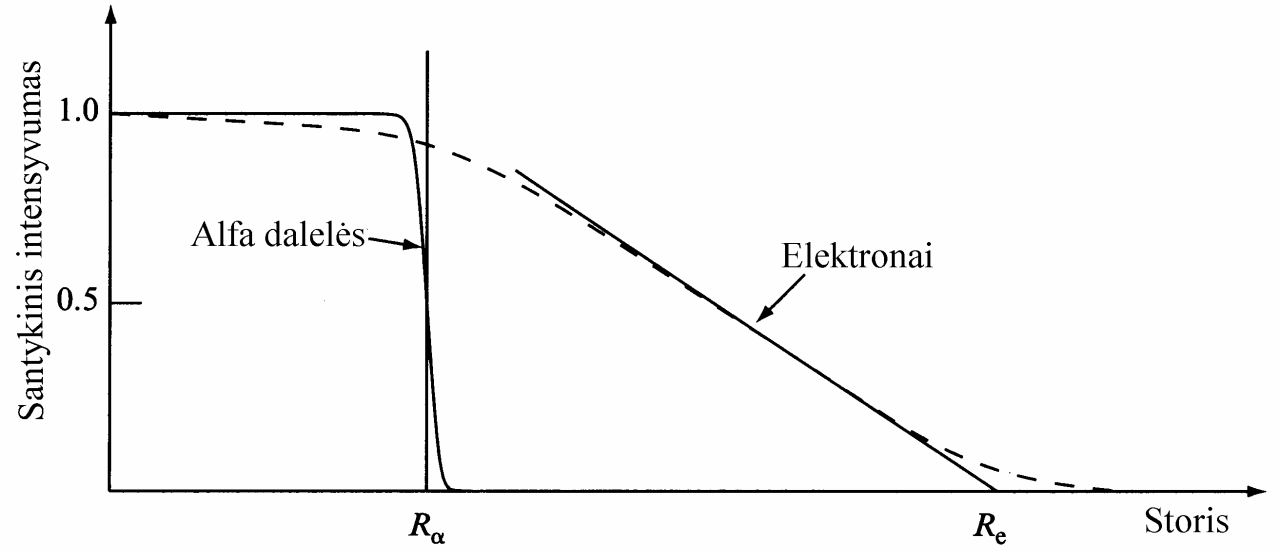
Elektronų sąveikos su medžiaga fizikinis mechanizmas yra toks pats, kaip sunkiųjų elektringųjų dalelių (Kulono jėga).

Visos elektringosios dalelės, judėdamos su pagreičiu, spinduliuoja elektromagnetines bangas. Elektronų atveju ši spinduliuotė yra ypač intensyvi, nes jų masė palyginti maža, todėl pagreitis didelis. Taigi, elektronų energijos nuostoliai yra sudaryti iš dviejų dėmenų: ***jonizaciniai*** ir ***radiaciniai***. Kiekvieną iš jų nusako atitinkamai jonizacinė arba radiacinė ilginė stabdymo geba. Kai energija maža, vyrauja jonizaciniai nuostoliai, tačiau didėjant energijai radiaciniai nuostoliai sparčiai didėja ir galų gale pranoksta jonizacinius. „Kritinė“ energija, kai jonizaciniai ir radiaciniai nuostoliai tampa vienodi, yra

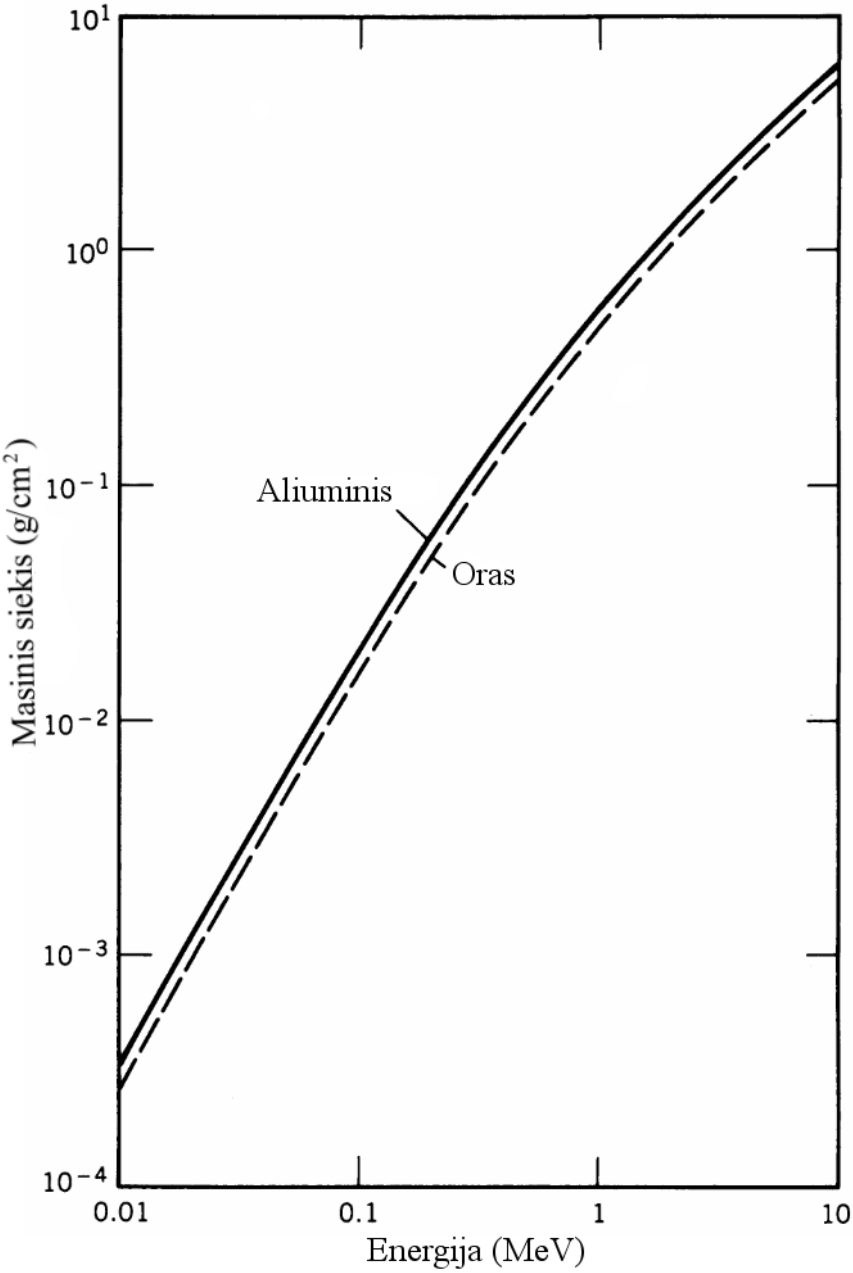
$$E_\mathrm{kr} \approx \frac{1600 m_\mathrm{e} c^2}{Z} \approx \frac{800}{Z}\,\mathrm{MeV}$$



7.5 pav. Elektronų masinės stabdymo gebos ore, aliuminyje ir švine priklausomybės nuo elektronų kinetinės energijos. Ištisinės linijos nusako jonizacinę masinę stabdymo gebą, o brūkšninės linijos nusako radiacinę masinę stabdymo gebą

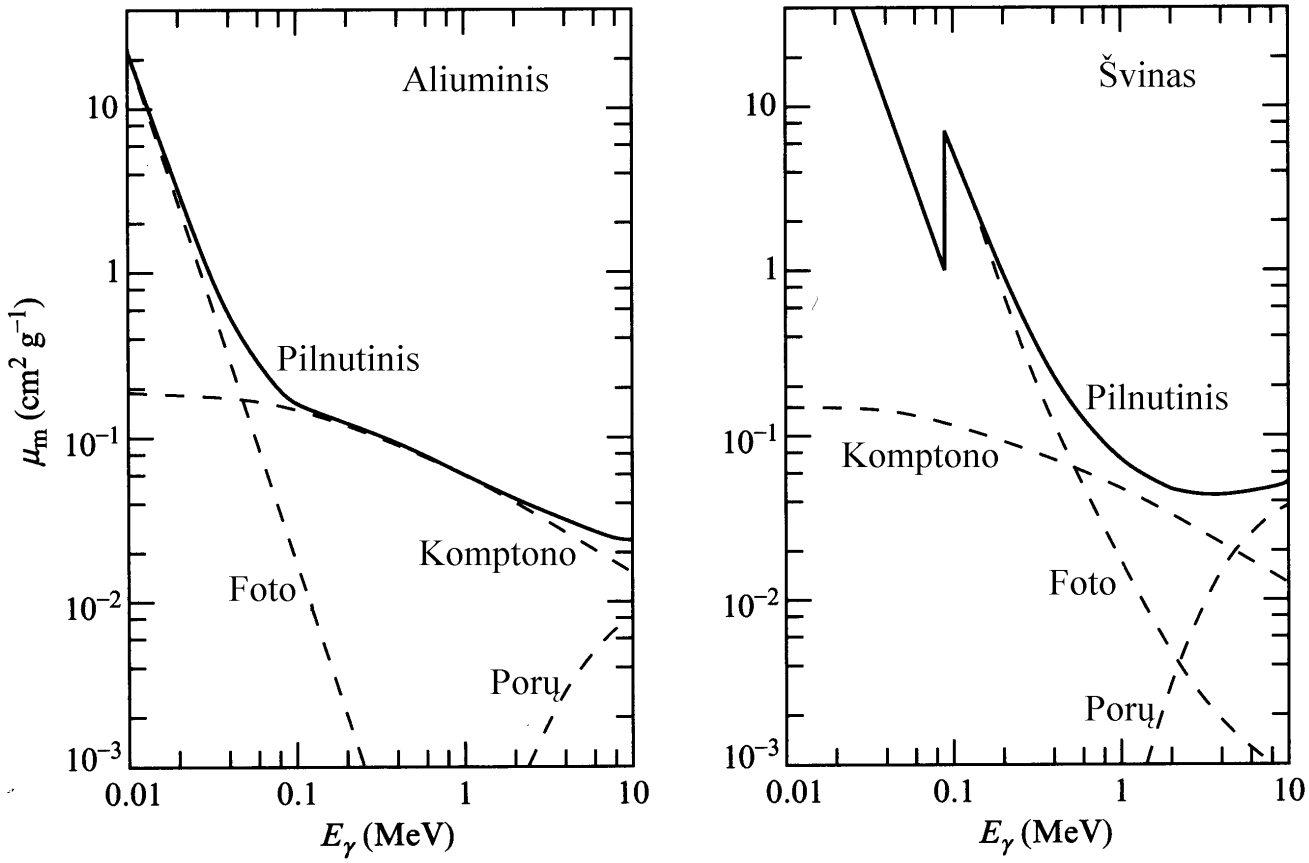


7.6 pav. α dalelių ir elektronų lygiagretaus pluošto santykinio intensyvumo priklausomybė nuo sugėriklio sluoksnio storio. α dalelių vidutinis siekis R_α atitinka tokį sugėriklio storį, kai intensyvumas sumažėja du kartus lyginant su pradine verte. Elektronų ekstrapoliuotasis siekis yra R_e (horizontalioji skalė nėra vienoda abiejų rūšių spinduliuotei)



7.7 pav. Išmatuota elektronų ekstrapoliuotojo masinio siekio aliuminyje ir ore priklausomybė nuo elektronų energijos. Ši kreivė lieka apytiksliai tokia pati ir bet kuriam kitam sugėrikliui, nes šiame energijos intervale masinis siekis silpnai priklauso nuo sugėriklio medžiagos atominio numerio Z

7.4. Gama spinduliuotės sąveika su medžiaga



7.8 pav. Fotonų masinio sugerties koeficiento aliuminyje ir švine priklausomybė nuo fotono energijos. Brūkšninės linijos rodo masinio sugerties koeficiento dėmenis, atitinkančius fotoelektrinę sugertį, Komptono sklaidą ir porų kūrimą

7.4.1. *Fotoelektrinis efektas*

Fotoelektrinio efekto (trumpiau – fotoefekto) atveju visa fotono energija išeikvojama tam, kad išlaisvinti elektroną iš atomo vidinio elektronų sluoksnio. Fotoelektrono kinetinė energija:

$$T = E_\gamma - E_\mathrm{r}$$

Čia E_r yra elektrono ryšio energija atome.

Atomas, turintis vakansiją vidiniame sluoksnyje, yra sužadintos būsenos. Energijos perteklių jis gali atiduoti vienam iš savo išorinių elektronų, kuris išlėks iš atomo. Tai yra vadinamieji Ožė (*Auger*) elektronai. Be to, vienas iš aukštesnio sluoksnio elektronų gali pereiti į tą vakansiją. Tada energijos perteklius išspinduliuojamas rentgeno fotono pavidalu (rentgeno fluorescencija).

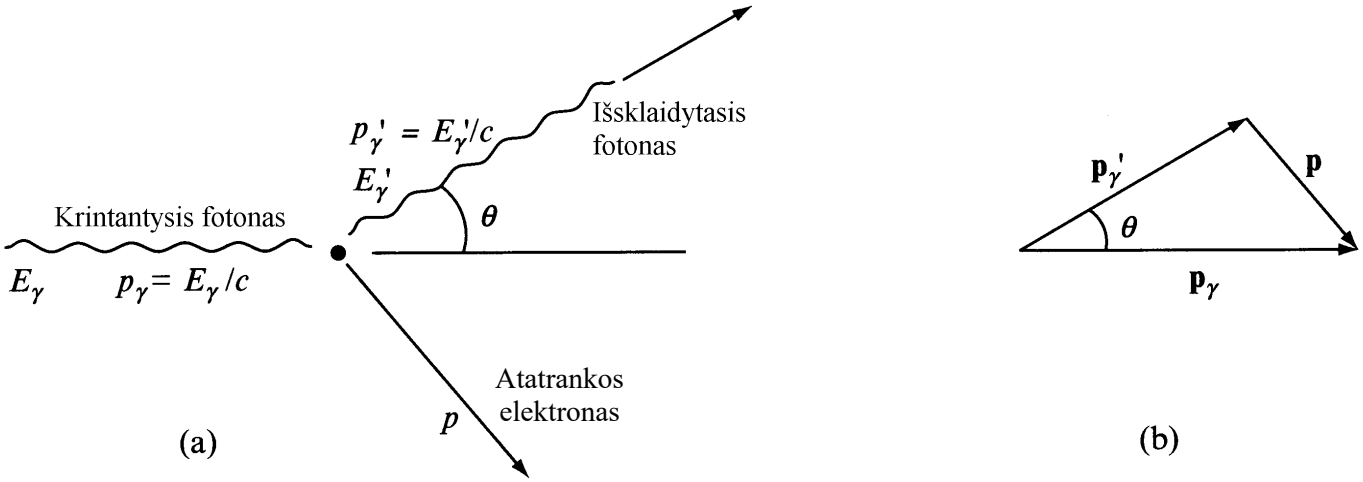
K kraštas atitinka gama fotono energiją, kuri lygi K sluoksnio elektronų ryšio energijai.

Fotoelektrinės sugerties skerspjūvis:

$$\sigma_{fe} \sim \frac{Z^5}{E_\gamma^{3,5}},$$

kai fotono energija yra kelių šimtų keV eilės.

7.4.2. *Komptono sklaida*



7.9 pav. (a) Komptono sklaidos geometrija; (b) vektorinis sąryšis tarp trijų impulso vektorių

Komptono sklaidos metu fotonas tampriai susiduria su elektronu (kurį dažniausiai galima laikyti laisvu). Elektrono kinetinės energija po sklaidos:

$$T = E_\gamma - E_\gamma' = E - mc^2$$

Impulso tvermės dėsnis:

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_\gamma - \boldsymbol{p}_\gamma'$$

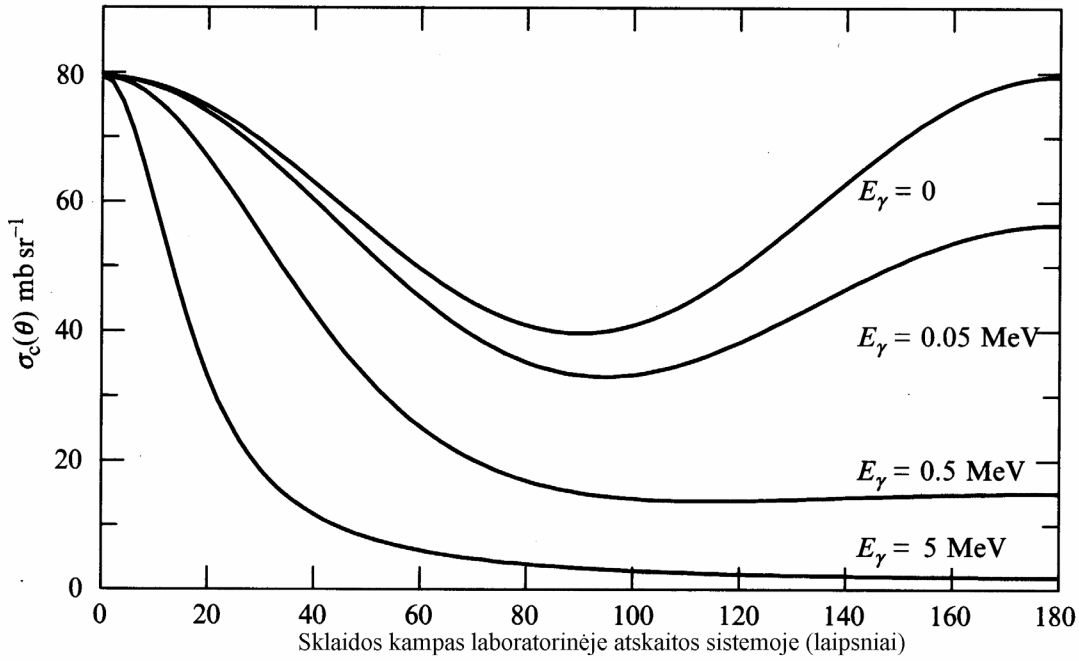
Pakėlus šį vektorinį sąryšį kvadratu ir atsižvelgus į tai, kad $p_\gamma = E_\gamma / c$,

$$(pc)^2 = E_\gamma^2 + (E_\gamma')^2 - E_\gamma E_\gamma' \cos\theta = E^2 - m^2c^4$$

Eliminavus E iš šių dviejų lygčių, gaunama išsklaidyto fotono energija:

$$E_\gamma' = \frac{E_\gamma}{1 + (E_\gamma / mc^2)(1 - \cos\theta)}$$

Komptono sklaidos tikimybė yra tiesiog proporcinga elektronų koncentracijai, t. y. reiškiniui $\rho Z / A$.



7.10 pav. Komptono sklaidos laisvaisiais elektronais diferencialinis skerspjūvis $\sigma_C(\theta)$, apskaičiuotas pagal Kleino ir Nišinos formulę, kai E_γ kinta nuo 0 iki 5 MeV

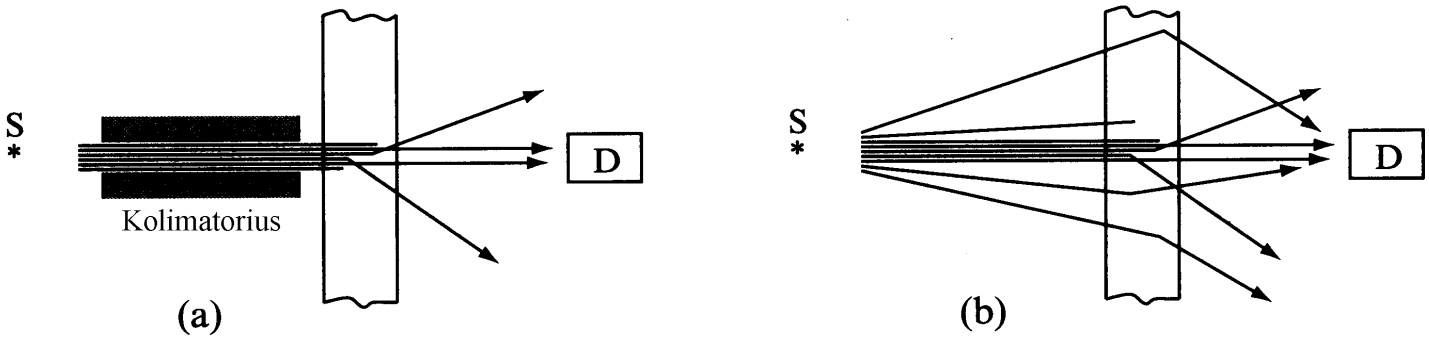
7.4.3. *Porų kūrimas*

Porų kūrimo metu visa fotono energija išeikvojama kuriant elektrono ir pozitrono porą atomo elektriniame lauke. Elektrono ir pozitrono kinetinių energijų suma:

$$T_- + T_+ = E_\gamma - 2mc^2$$

Kai pozitronas sulėtėja medžiagoje, jį pritraukia kuris nors tos medžiagos elektronas ir įvyksta vadinamoji anihiliacijos reakcija, kurios metu pozitronas ir medžiagos elektronas nustoja egzistuoti, o jų rimties energija išspinduliuojama dviejų γ kvantų pavidalu (anihiliacinė spinduliuotė). Du anihiliaciniai fotonai išlekia priešingomis kryptimis, o kiekvieno jų energija lygi $m_e c^2$ = 0,511 MeV.

7.4.4. *Silpimo koeficientas*



7.11 pav. Gama spinduliuotės pluošto silpimo koeficiento matavimo metodika, kai pluoštas yra lygiagretus, t. y. kolimuotas (a), ir kai pluoštas yra nekolimuotas (b). S yra šaltinis, kurio skleidžiama spinduliuotė pereina per medžiagos sluoksnį ir pasiekia detektorių D. (a) atveju sklaida ir sugertis pasireiškia vienodai, nes mažina fotonų, kurie pataiko į detektorių D, skaičių. (b) atveju detektuojama daugiau fotonų, nes kai kurie fotonai išsklaidomi į detektorių. Todėl šiuo atveju eksperimentinė silpimo koeficiento vertė yra mažesnė už tikrąją

Pluošto intensyvumo (fotonų skaičiaus per sekundę) sumažėjimas perėjus storio dx medžiagos sluoksnį:

$$\mathrm{d}I = -N\sigma I \mathrm{d}x$$

Čia N yra atomų koncentracija, o σ yra pilnutinis sąveikos skerspjūvis:

$$\sigma = \sigma_{\mathrm{fe}} + Z\sigma_{\mathrm{C}} + \sigma_{\mathrm{p}}$$

Suintegravus:

$$I = I_0 \exp(-N\sigma x) = I_0 \exp(-\mu x)$$

Čia μ yra (ilginis) ***silpimo koeficientas***:

$$\mu = N\sigma$$

Masinis silpimo koeficientas:

$$\mu_{\mathrm{m}} = \frac{\mu}{\rho}$$

Pusėjimo storis: ln 2 / μ.

7.5. Neutronų sąveika su medžiaga

Neutronai gali būti sugeriami dėl branduolinių reakcijų arba gali būti išsklaidomi.

7.5.1. *Neutronų pluošto intensyvumo mažėjimas medžiagoje*

$$I = I_0 \exp(-N\sigma x)$$

Čia σ yra pilnutinis neutrono sąveikos su branduoliu skerspjūvis:

$$\sigma = \sigma_\mathrm{s} + \sigma_\mathrm{a}$$

σ_s yra neutrono sklaidos skerspjūvis, o σ_a yra neutrono sugerties (absorbcijos) skerspjūvis. Kitoks to paties sąryšio pavidalas:

$$I = I_0 \exp(-\Sigma x) = I_0 \exp(-x/\lambda)$$

Σ yra pilnutinis makroskopinis skerspjūvis, o λ yra ***vidutinis silpimo atstumas***

$$\Sigma = N\sigma$$

$$\lambda = \frac{1}{\Sigma}$$

Vidutinis laisvasis kelias – tai vidutinis atstumas, kurį neutronas nueina iki sąveikos įvykio:

$$l = \int_0^\infty x f(x)\mathrm{d}x$$

$f(x)$ yra nueito atstumo iki sąveikos įvyko tikimybės tankis.

$$f(x) \sim \exp\left(-\frac{x}{l}\right)$$

Todėl

$$l = \frac{\int_0^\infty x \exp(-x/\lambda)\mathrm{d}x}{\int_0^\infty \exp(-x/\lambda)\mathrm{d}x} = \lambda$$

Vidutinis laisvasis kelias sklaidos atžvilgiu:

$$l_\mathrm{s} = \frac{1}{\Sigma_\mathrm{s}}$$

vidutinis laisvasis kelias sugerties atžvilgiu:

$$l_\mathrm{a} = \frac{1}{\Sigma_\mathrm{a}}$$

Kadangi

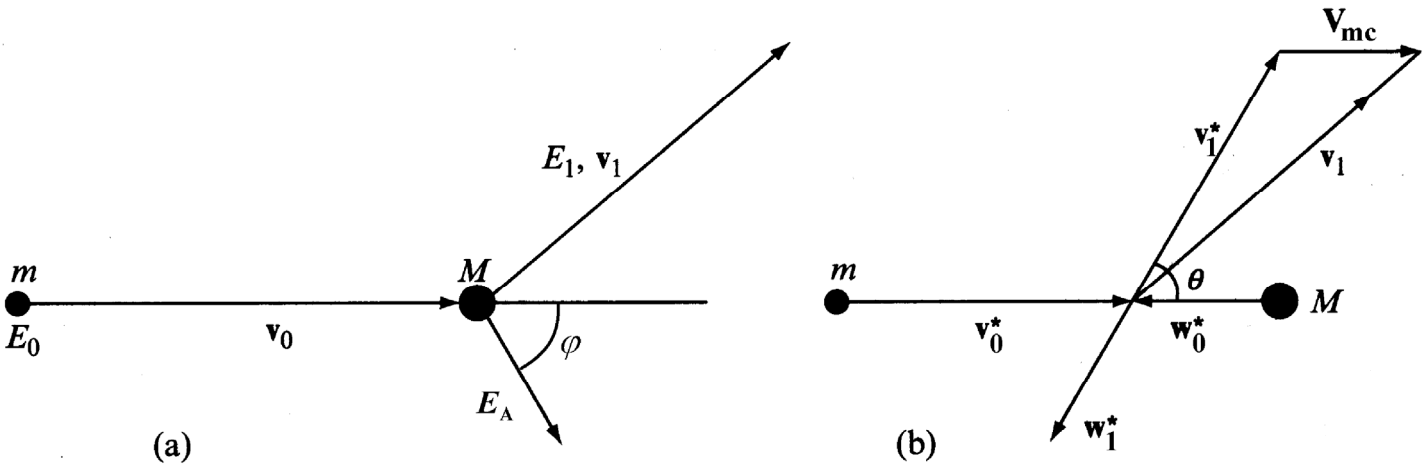
$$\Sigma = N(\sigma_\mathrm{s} + \sigma_\mathrm{a}) = \Sigma_\mathrm{s} + \Sigma_\mathrm{a},$$

tai

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{l_\mathrm{s}} + \frac{1}{l_\mathrm{a}}$$

7.5.2. *Neutronų lėtinimas*

Medžiagoje neutronai lėtėja dėl tampriųjų susidūrimų su branduoliais.



7.12 pav. Tampriosios sklaidos kinematika, kai krintančioji dalelė, kurios masė m, pradinė energija E_0 ir greitis υ_0, susiduria su nejudančia dalele, kurios masė M. (a) – laboratorinėje atskaitos sistemoje, (b) – masės centro sistemoje

Masių centro greitis:

$$V_{\text{mc}} = \frac{m}{m+M}\upsilon_0$$

Greičiai masių centro sistemoje žymimi su žvaigždute.

Neutrono greičio modulis MC sistemoje nesikeičia susidūrimo metu, t. y. $|\boldsymbol{v}_0^*| = |\boldsymbol{v}_1^*| = \upsilon^*$.

Pradinis neutrono greitis:

$$\upsilon_0 = \upsilon^* + V_{\text{mc}}$$

Įrašius V_{mc} ir išreiškus υ^*:

$$\upsilon^* = \frac{M}{m+M}\upsilon_0$$

Neutrono greitis po sklaidos:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1^* + \mathbf{V}_{\text{mc}}$$

Pakėlus kvadratu:

$$\upsilon_1^2 = (\upsilon^*)^2 + (V_{\text{mc}})^2 + 2\upsilon^* V_{\text{mc}}\cos\theta$$

Čia θ yra sklaidos kampas masių centro sistemoje. Įrašius V_{mc} ir υ^* ir atsižvelgus į tai, kad $E_1 / E_0 = (\upsilon_1 / \upsilon_0)^2$,

$$E_1 = E_0\frac{M^2 + m^2 + 2Mm\cos\theta}{(M+m)^2} \approx E_0\frac{A^2 + 1 + 2A\cos\theta}{(A+1)^2}$$

$$E_1(\text{min}) = E_0\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 \approx E_0\left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2 = \alpha E_0$$

Kad apskaičiuoti vidutinę neutrono energiją po sklaidos, reikia žinoti jo energijos tikimybės tankį $P(E)$, kuris priklauso nuo sklaidos kampo tikimybės tankio $p(\theta)$:

$$-p(\theta)\mathrm{d}\theta = P(E_1)\mathrm{d}E_1 \qquad \text{arba} \qquad P(E_1) = -\frac{p(\theta)}{\mathrm{d}E_1/\mathrm{d}\theta}$$

Kai neutrono energija yra maža, tada sklaidomos tik s bangos, kurios yra izotropinės. Tai reiškia, kad sklaidos į sferos paviršiaus elementą tikimybė lygi to elemento ploto ir visos sferos ploto santykiui:

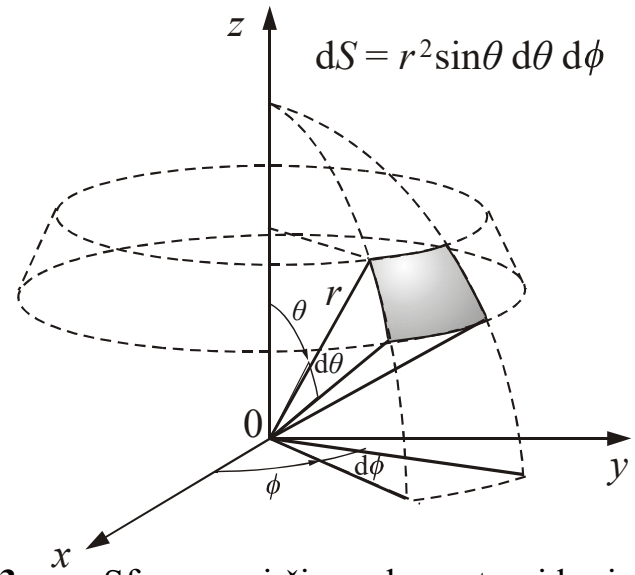
$$\frac{\mathrm{d}S}{4\pi r^2} = \frac{r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi}{4\pi r^2} = \frac{\sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi}{4\pi}$$

Suintegravus azimutinio kampo ϕ atžvilgiu:

$$p(\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{2\pi \sin\theta \mathrm{d}\theta}{4\pi} = \frac{1}{2}\sin\theta \mathrm{d}\theta,$$

t. y.

$$p(\theta) = \frac{1}{2}\sin\theta$$



7.13 pav. Sferos paviršiaus elementas, į kurį yra išsklaidomas neutronas

Remiantis anksčiau išvesta E_1 išraiška,

$$\frac{\mathrm{d}E_1}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{2AE_0 \sin\theta}{(A+1)^2}$$

Įrašius šiuos reiškinius į $P(E_1)$ išraišką,

$$P(E_1) = \frac{1}{(1-\alpha)E_0}$$

Kadangi tai yra konstanta, tai vidutinė neutrono energija po sklaidos yra

$$\overline{E}_1 = \tfrac{1}{2}(E_1(\min) + E_0) = \tfrac{1}{2}(1+\alpha)E_0$$

Vidutinis energijos sumažėjimas:

$$\Delta\overline{E} = E_0 - \overline{E}_1 = \tfrac{1}{2}(1-\alpha)E_0$$

Vidutinis santykinis energijos sumažėjimas:

$$\Delta\overline{E}/E_0 = \tfrac{1}{2}(1-\alpha)$$

Po n tampriųjų susidūrimų neutrono vidutinė energija lygi

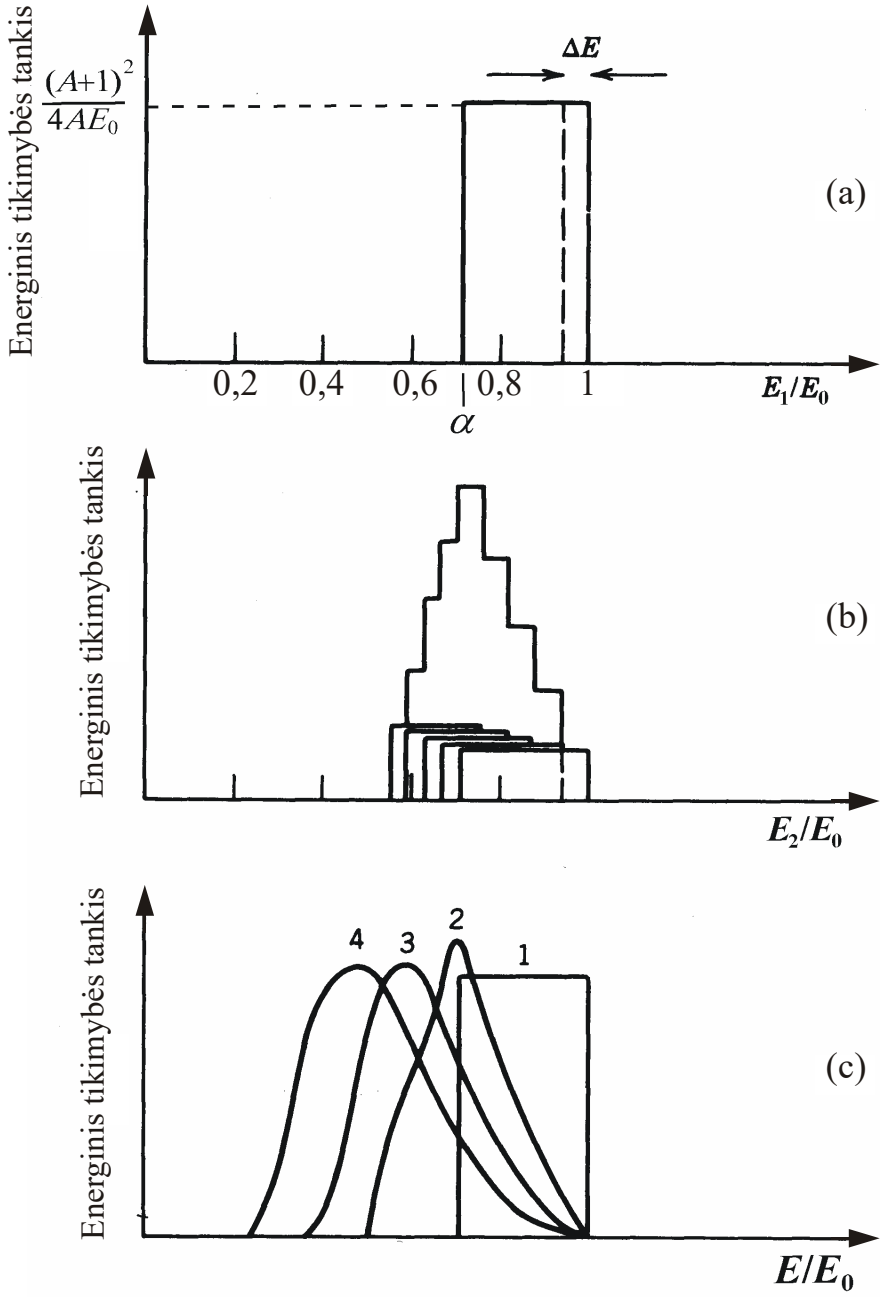
$$\overline{E}_n = E_0\left(\frac{\overline{E}_1}{E_0}\right)^n = E_0\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^n$$

7.14 pav. Neutrono energijos skirstinys po vieno arba kelių tampriųjų susidūrimų.

(a) Neutrono, kurio pradinė energija E_0, energijos skirstinys po pirmojo tampriojo susidūrimo su ^{12}C branduoliu.

(b) Padalijus išsklaidytojo neutrono energijos skirstinį į 5 vienodus siaurus skirstinius, po antrojo tampriojo susidūrimo gaunami 5 tolydieji skirstiniai, kurių suma yra skirstinys su maksimumu.

(c) Tiksliai apskaičiuotieji energijos skirstiniai po 1, 2, 3 ir 4 tampriųjų susidūrimų



Vietoj vidutinės neutrono energijos patogiau vartoti ***vidutinę logaritminę neutrono energiją*** E'_n:

$$E'_n \equiv \exp(\overline{\ln E_n})$$

Neutrono energijos natūraliojo logaritmo vidutinį sumažėjimas po vieno sklaidos įvykio vadinamas ***vidutiniu logaritminiu energijos dekrementu*** ir žymimas ξ:

$$\xi = \overline{\ln(E_0/E_1)} = \int_{\alpha E_0}^{E_0} \ln(E_0/E_1)P(E_1)\,\mathrm{d}E_1 = \ln E_0 - \overline{\ln E_1}$$

Įrašius $P(E_1)$ išraišką ir suintegravus,

$$\xi = \frac{1}{1-\alpha}\int_1^{\alpha} \ln x\,\mathrm{d}x = 1 + \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln\alpha = 1 + \frac{(A-1)^2}{2A}\ln\left(\frac{A-1}{A+1}\right)$$

Matome, kad ξ nepriklauso nuo pradinės energijos E_0. Todėl po n susidūrimų vidutinė $\ln E_n$ vertė yra lygi

$$\overline{\ln E_n} = \ln E_0 - n\xi \qquad \text{arba} \qquad \ln E'_n = \ln E_0 - n\xi$$

Todėl vidutinis sklaidos įvykių skaičius, kuris reikalingas, kad neutrono energija sumažėtų nuo E_0 iki E'_n, yra

$$n = \frac{1}{\xi} \ln \frac{E_0}{E'_n}$$

Susidūrimų skaičius, kuris reikalingas greitųjų neutronų pavertimui šiluminiais neutronais, yra apskaičiuojamas pagal tą pačią formulę, kai $E'_n = kT$.

Kai kurių nuklidų neutronų sklaidos parametrai (pradinė neutrono energija yra 2 MeV)

Nuklidas	α	ξ	n (iki termalizacijos)
^{1}H	0	1,000	18
^{2}H	0,111	0,725	25
^{4}He	0,360	0,425	43
^{12}C	0,716	0,158	115
^{238}U	0,983	0,0084	2200

7.5.3. *Neutronų sukeltas radioaktyvumas*

Vienas iš (n, γ) reakcijų taikymų yra radioaktyvių nuklidų gaminimas. Reakcijos įvykių skaičius per sekundę (reakcijos sparta):

$$R = Nj\sigma$$

N mažėjimas dėl neutronų pagavimo yra palyginti lėtas. Todėl R yra beveik pastovi. Branduolių, kurie atsiranda dėl neutronų pagavimo skaičiaus pokytis per nykstamąjį laiką dt:

$$\mathrm{d}N_1 = R\mathrm{d}t - \lambda_1 N_1 \mathrm{d}t$$

Sprendinys:

$$N_1(t) = \frac{R}{\lambda_1}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda_1 t})$$

Aktyvumas:

$$\Phi(t) = \lambda_1 N_1(t) = R(1 - \mathrm{e}^{-\lambda_1 t})$$

Jeigu $\lambda_1 t << 1$,

$$\Phi(t) \approx R\lambda_1 t$$

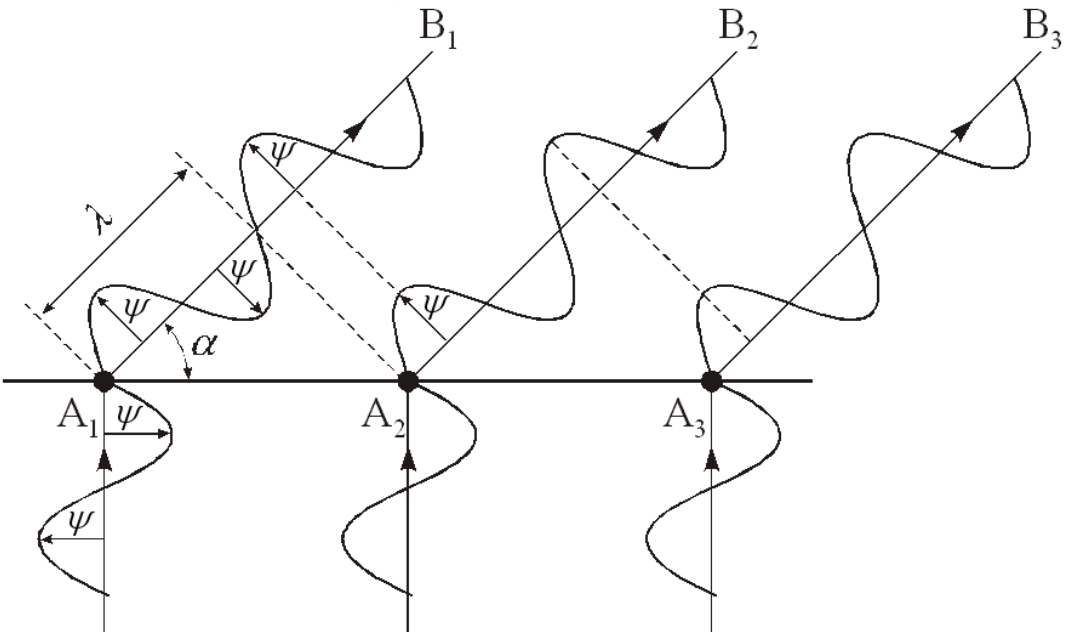
Jeigu $\lambda_1 t >> 1$,

$$\Phi(t) \approx R$$

7.5.4. *Neutronų difrakcija kristaluose*

Difrakcijos priežastis – bangų koherentinė sklaida. Išsklaidytos bangos yra koherentinės, todėl interferuoja. ***Interferencija*** reiškia, kad, susidedant dviem koherentinėms bangoms suminis intensyvumas gali skirtis nuo tų bangų intensyvumų sumos (priklausomai nuo jų fazių skirtumo). Taigi, ***difrakcija*** yra išsklaidytų (antrinių) bangų interferencija.

Kad pasireikštų difrakcija, reikia, kad atstumas tarp gretimų lygiaverčių sklaidos taškų (pvz., tarp gretimų difrakcinės gardelės rėžių) būtų tos pačios eilės kaip bangos ilgis. Šiluminių neutronų bangos ilgis yra ~0,1 nm = 1 Å eilės. Todėl jų difrakcijai tirti tinka kristalai (atstumas tarp kristalo gardelės mazgų taip pat yra ~0,1 nm eilės).

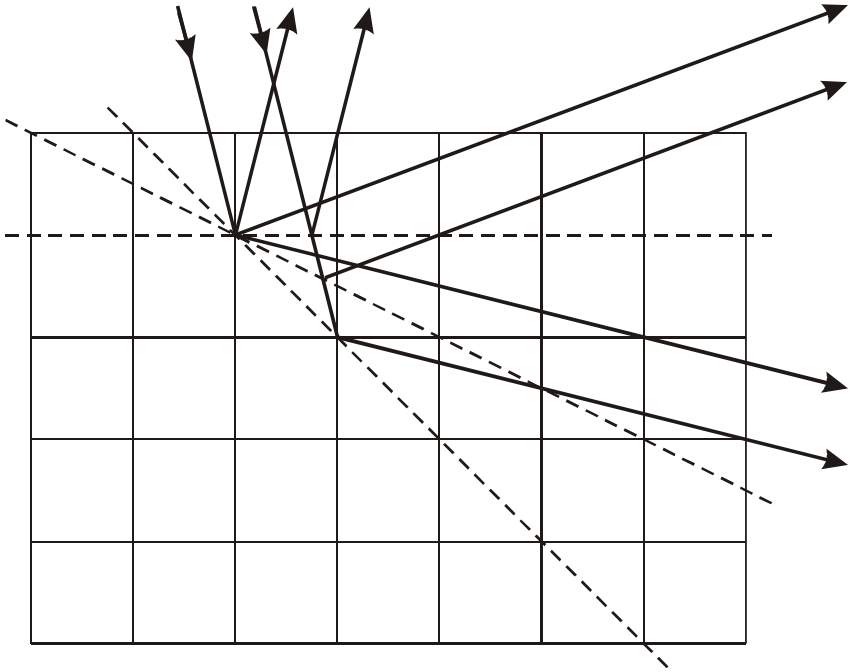


7.15 pav. Difrakcinio maksimumo susidarymas

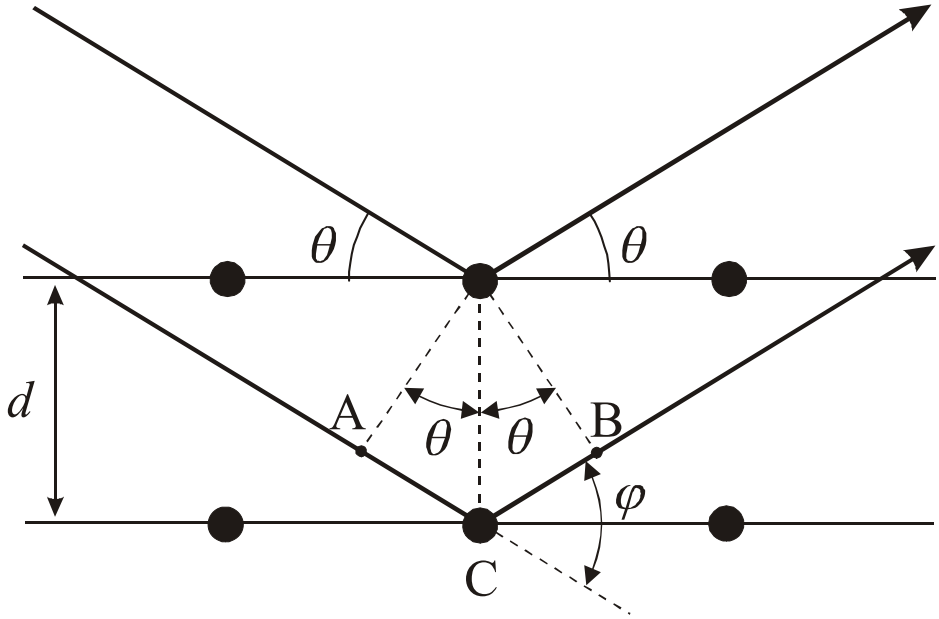
Difrakcinis vaizdas (išsklaidytų neutronų intensyvumo maksimumai ir minimumai), kuris susidaro dėl bangų difrakcijos kristale, yra išsklaidytųjų sferinių bangų, kurių centrai sutampa su gardelės mazgais, interferencijos pasekmė. Tačiau lygiai tą patį vaizdą gautume, jeigu tartume, kad krintančioji banga atsispindi nuo kristalografinių plokštumų (taip yra vadinamos plokštumos, kuriose išsidėstę kristalo gardelės mazgai). Difrakcinių maksimumų kryptys – tai tokios kryptys, kuriomis nuo gretimų plokštumų atsispindėjusių bangų eigos skirtumas yra lygus sveikam bangos ilgių skaičiui. Šią sąlygą išreiškia Brego lygtis:

$$2d\sin\theta = n\lambda \qquad (n = 0,1,2,...)$$

Kristalo ***elementarusis narvelis*** arba ***Bravė narvelis*** – tai mažiausias struktūros elementas, kuris turi visą informaciją apie kristalo atomų išsidėstymą. Jis yra stačiakampio gretasienio (atskirais atvejais –kubo) formos. Jo briaunų ilgiai – tai kristalo ***gardelės periodai***. Trys tiesės, kurios lygiagrečios elementariojo narvelio briaunos, vadinamos ***kristalografinėmis ašimis***. Kristalografinės plokštumos ***Milerio indeksai*** – tai trys neturintys bendro daliklio sveikieji skaičiai, kurie proporcingi atvirkštinėms koordinatėms taškų, kuriuose kristalografinė plokštuma kerta kristalografines ašis.

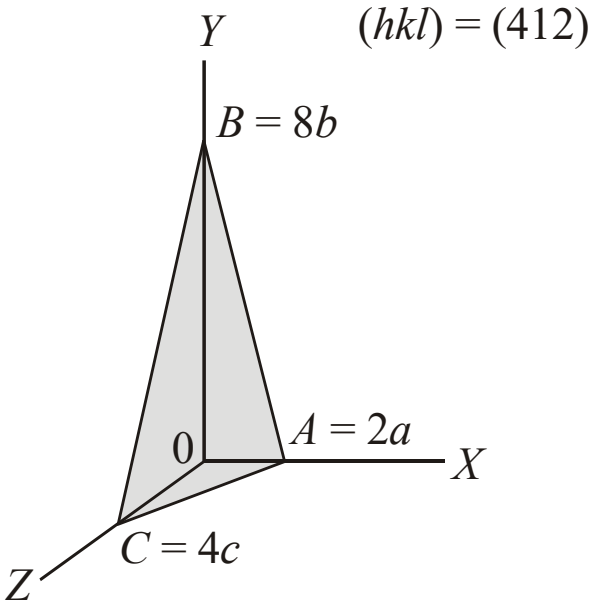


7.16 pav. Bangos atspindys nuo plokštumų, kuriose išsidėstę kristalo gardelės mazgai (kristalografinių plokštumų). Gardelės mazgus vaizduoja tinklo mazgai, o kristalografines plokštumas – brūkšninės linijos

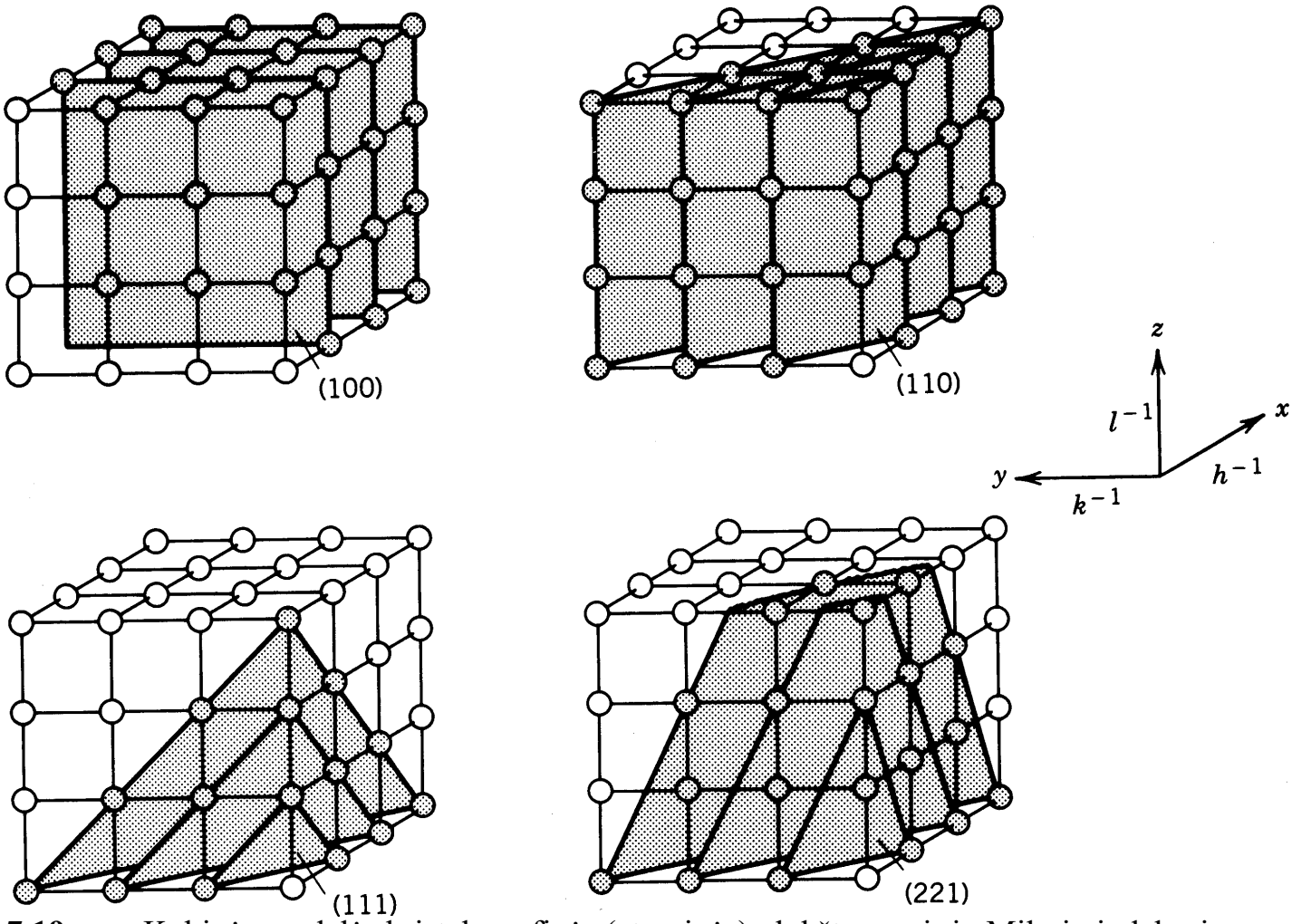


$$\Delta l = |AC| + |CB| = 2d \sin\theta$$

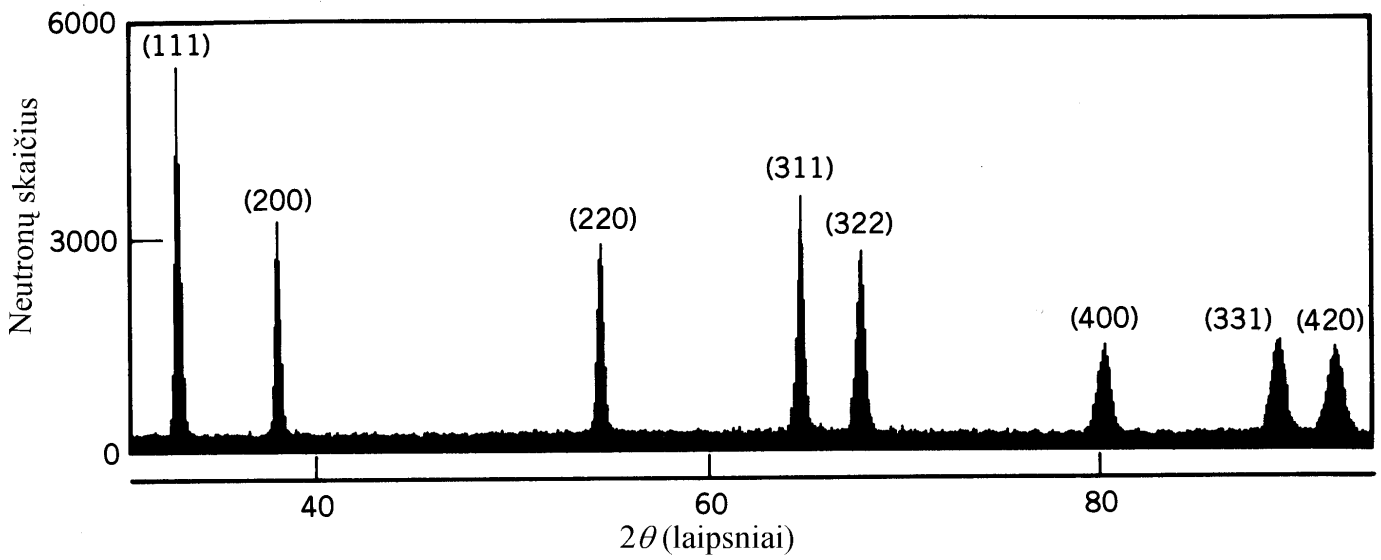
7.17 pav. Bangų, kurios atsispindėjo nuo lygiagrečių kristalografinių plokštumų, eigos skirtumo Δl skaičiavimas. θ – spindesio kampas, φ – sklaidos kampas ($\varphi = 2\theta$)



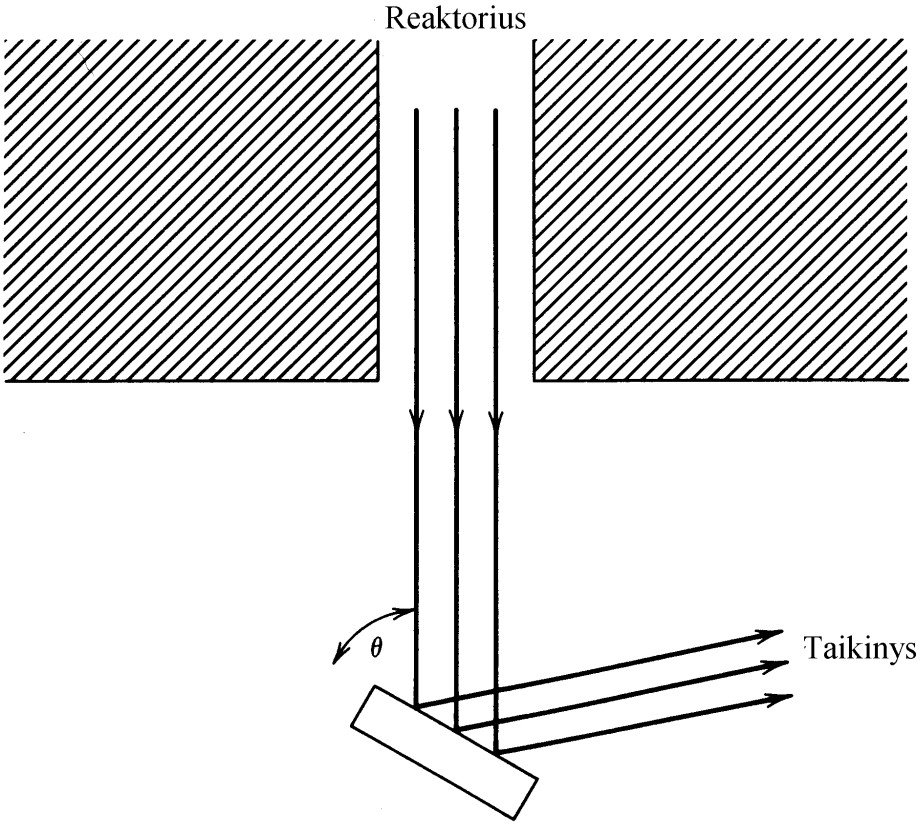
7.18 pav. Plokštumos Milerio indeksų skaičiavimo pavyzdys



7.19 pav. Kubinės gardelės kristalografinės (atominės) plokštumos ir jų Milerio indeksai. Pirmajame brėžinyje taškų, kuriuose plokštuma kerta koordinačių ašis, koordinatės yra $x = 1$, $y = \infty$, $z = \infty$, todėl atitinkami Milerio indeksai yra (100). Paskutiniajame brėžinyje sankirtos kraštų koordinatės yra $x = 1$, $y = 1$, $z = 2$, todėl plokštumos krypties indeksai yra $(11\frac{1}{2})$, t. y. (221)



7.20 pav. Neutronų, kurių bangos ilgis 0,114 nm, difrakcijos spektras nikelio milteliuose. Ant x ašies atidėtas sklaidos kampas 2θ, o virš maksimumų nurodyti kristalografinių plokštumų, nuo kurių atsispindi neutronai, Milerio indeksai



7.21 pav. Mažos energijos neutronų monochromatorius. Siauras lygiagretus neutronų pluoštas, kurį sudaro įvairių energijų neutronai, atsispindi nuo kristalo. Kiekvieną spindesio kampą θ atitinka tam tikras bangos ilgis, kuriam tas kampas atitiks difrakcijos maksimumą. Todėl, keičiant kampą θ, galima pasirinkti reikalingą bangos ilgį (neutrono energiją)

8. Branduolinių ir termobranduolinių reaktorių fizikos pradmenys

8.1. Branduolių dalijimosi reakcija ir jos energija

8.1.1. *Branduolio dalijimosi metu išsiskirianti energija*

Energija Q, kuri išsiskiria dalijantis branduoliui, kurio masės skaičius A, į dvi skeveldras, kurių masės skaičiai A_1 ir A_2:

$$Q = E_{R1} + E_{R2} - E_R$$

$$Q = A_1\delta E_{R1} + A_2\delta E_{R2} - A\delta E_R = A_1\delta E_{R1} + (A - A_1)\delta E_{R2} - A\delta E_R =$$
$$= A_1(\delta E_{R1} - \delta E_{R2}) + A(\delta E_{R2} - \delta E_R)$$

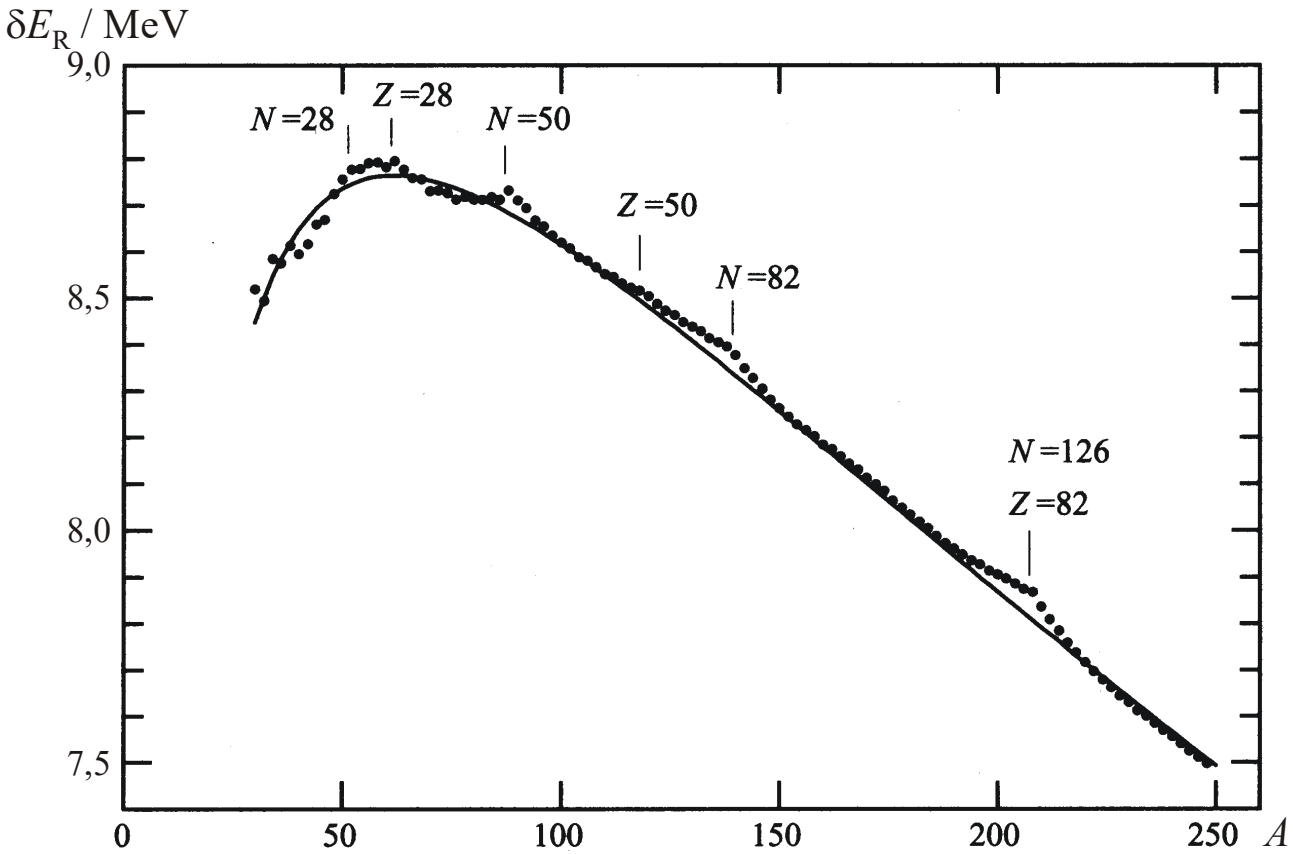
Jeigu abi skeveldros yra vienodos,

$$Q = A(\delta E_{R2} - \delta E_R) = 238 \cdot (8{,}5 - 7{,}6)\ \text{MeV} = 214\ \text{MeV}$$

Toks skaičiavimas neatsižvelgia į tai, kad dalijimosi metu atsiranda ir keli neutronai. Tipiška ^{235}U dalijimosi lygtis:

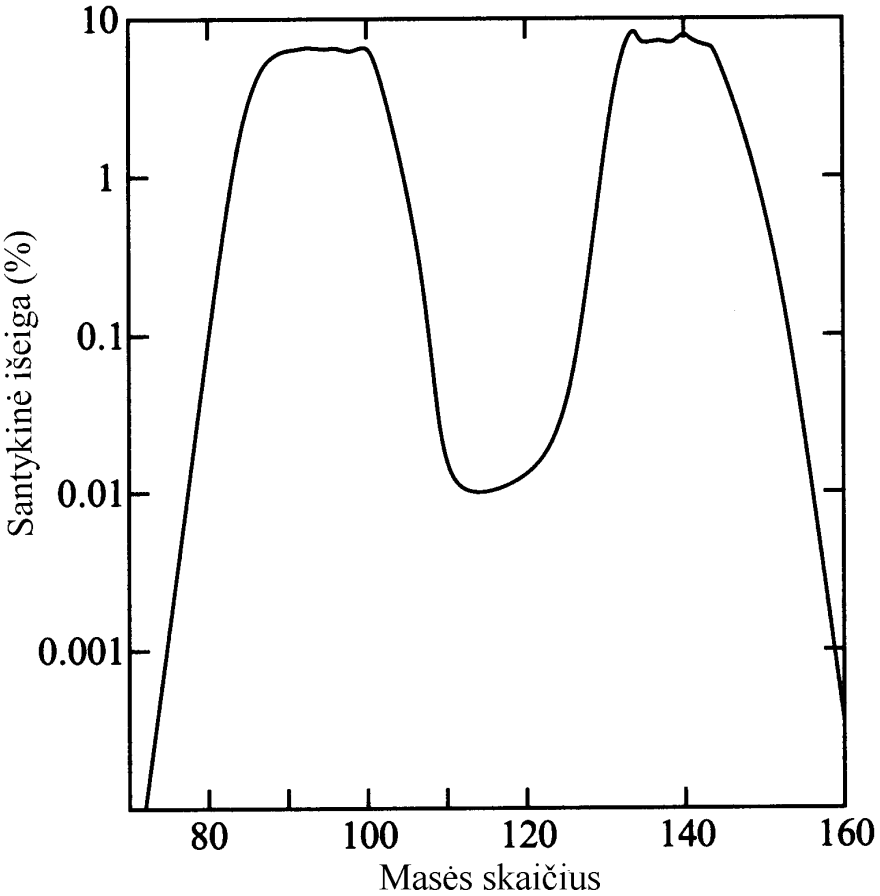
$$^{235}\text{U} + \text{n} \rightarrow {}^{236}\text{U}^* \rightarrow {}^{93}\text{Rb} + {}^{141}\text{Cs} + 2\text{n}$$

Tačiau ir tikslesnis skaičiavimas rodo, kad vidutinė išsiskyrusi energija yra maždaug 200 MeV. Didžioji jos dalis (maždaug 170 MeV) – tai skeveldrų kinetinė energija. Likusioji energija – tai neutronų ir gama spinduliuotės energija.



(b)

3.9 pav. Savitosios ryšio energijos priklausomybė nuo branduolio masės skaičiaus A, kai $A > 30$. Glodžioji kreivė apskaičiuota pagal Veiczekerio formulę, o taškai atitinka matavimų duomenis. Kai A vertė yra lyginė, atidėtas branduolių su masės skaičiais $A - 1$ ir $A + 1$ savitųjų ryšio energijų verčių vidurkis, kad Veiczekerio formulės porų dėmuo neturėtų įtakos

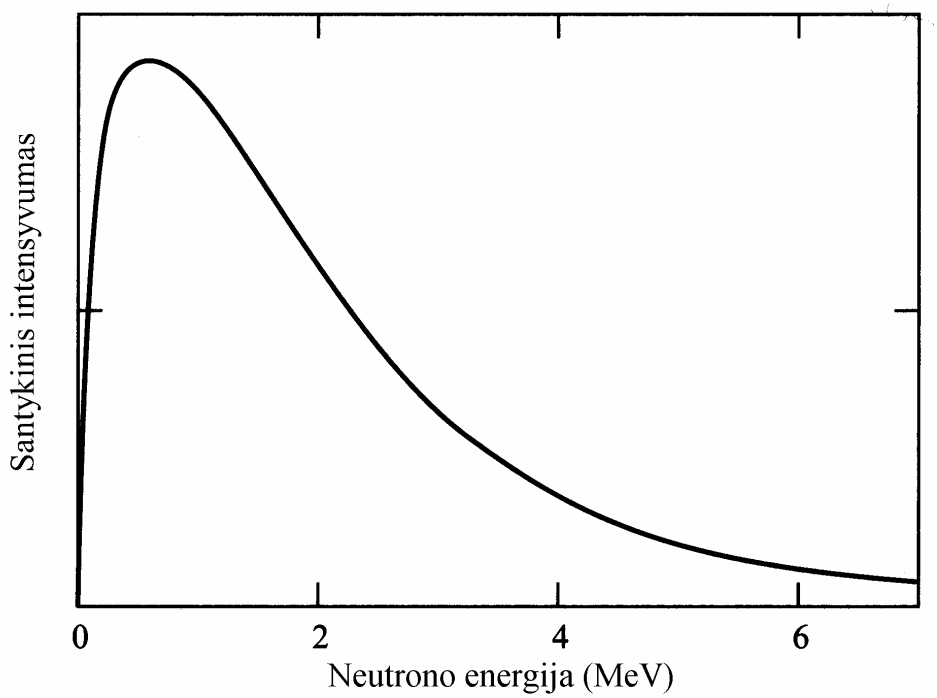


8.1 pav. Dalijimosi skeveldrų masių pasiskirstymas

Energija, kuri išsiskiria branduolio dalijimosi momentu, yra vadinama „greitąja“ (momentine) energija. Tačiau energija išsiskiria ir vėliau – dėl skilimo produktų β^- skilimo.

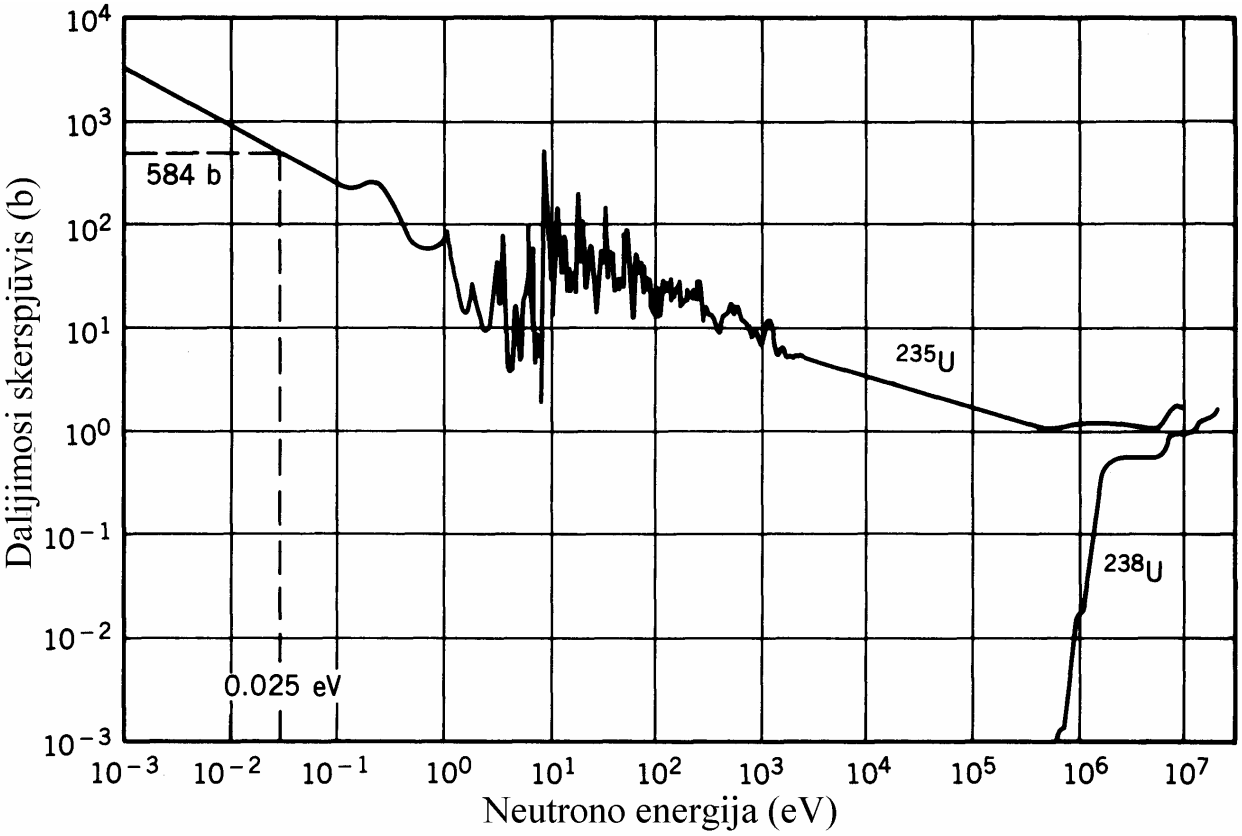
8.1 lentelė. Vieno ^{235}U branduolio dalijimosi energijos pasiskirstymas

Šaltinis	Emituota energija (MeV)
Momentinė energija:	
Dalijimosi skeveldros	168
Momentiniai neutronai	5
Gama spinduliavimas ir vidinės konversijos elektronai	7
Skeveldrų radioaktyvumas:	
β^- skilimas (elektronai)	8
β^- skilimas (antineutrinai)	12
Gama spinduliavimas ir vidinės konversijos elektronai	7
Iš viso	207



8.2 pav. Neutronų, emituojamų dalijantis ^{235}U branduoliams, energijos spektras

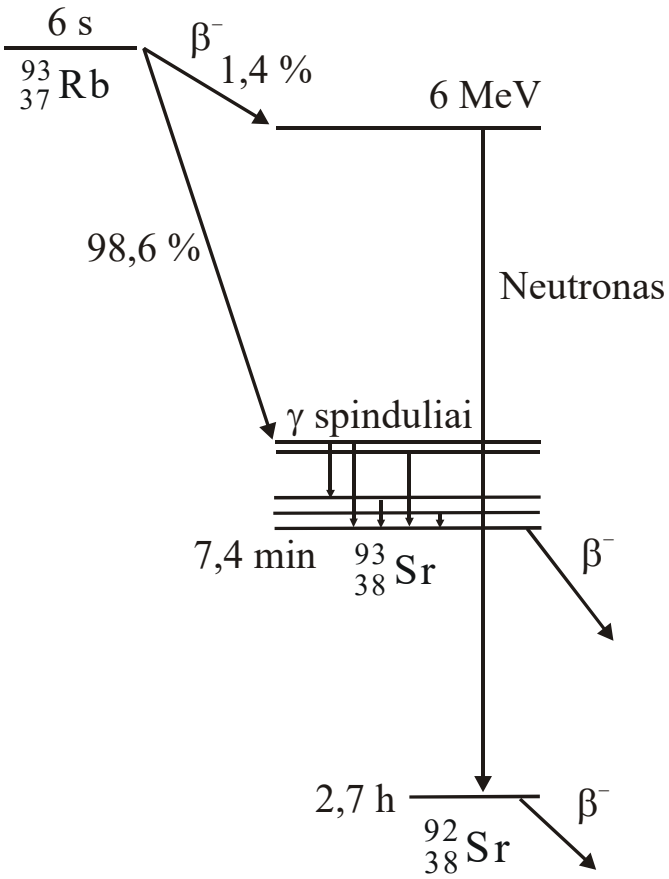
8.1.2. *Dalijimosi reakcijos skerspjūvis*



8.3 pav. Neutronų sukelto dalijimosi skerspjūvio priklausomybė nuo neutrono energijos

8.1.3. *Neutronų emisija dalijantis sunkiesiems branduoliams*

Momentiniai neutronai išlekia iš branduolio kartu su dviem dalijimosi skeveldromis. Vidutinis momentinių neutronų skaičius, dalijantis vienam ^{235}U branduoliui, yra 2,42. Neutronai, kuriuos emituoja dalijimosi skeveldros, vadinami ***vėluojančiaisiais neutronais***. Iš 100 dalijimosi įvykių vidutiniškai tik po vieno atsiranda vėluojantysis neutronas. Tačiau vėluojantieji neutronai vaidina esminį vaidmenį valdant grandininės reakcijos spartą.



8.4 pav. Vėluojančiųjų neutronų emisija, skylant ^{93}Rb

8.2. Valdoma branduolių dalijimosi reakcija šiluminių neutronų reaktoriuje

8.2.1. *Grandininė branduolių dalijimosi reakcija*

Grandininės reakcijos procesą apibūdina ***neutronų daugėjimo faktorius***:

$k = N_1/N$

Čia N_1 yra laisvųjų neutronų skaičius duotojoje grandininės reakcijos kartoje, o N yra neutronų skaičius ankstesniojoje kartoje. Jeigu $k < 1$, grandininė reakcija nevyksta. Jeigu $k = 1$, laisvųjų neutronų skaičius yra pastovus, todėl per laiko vienetą skylančių branduolių skaičius taip pat yra pastovus (tokia reakcija vyksta branduoliniuose reaktoriuose). Jeigu $k > 1$, tada laisvųjų neutronų skaičius ir skylančių per laiko vienetą branduolių skaičius nuolat didėja.

Gamtinis uranas yra dviejų izotopų mišinys: ^{238}U (99,3 %) ir ^{235}U (0,7 %)

Daugumą neutronų absorbuoja ^{238}U branduoliai, kurie nesidalija. ^{235}U dalijasi, sugėręs bet kokios energijos neutroną.

Sodrinimas – tai ^{235}U kiekio padidinimas branduoliniame kure.

8.2.2. *Neutronų lėtikliai*

Neutronų lėtiklis – tai medžiaga, kuri naudojama greitųjų neutronų energijos sumažinimui iki verčių, kurios artimos šiluminei energijai kT.

8.2 lentelė. Neutronų lėtiklių parametrai

Medžiaga	Tankis, g/cm^3	σ_s, b	σ_a, b	ξ
H_2O	1,0	49,2	0,66	0,920
D_2O	1,1	10,6	0,001	0,509
Grafitas	1,6	4,7	0,0045	0,158

8.2.3. *Neutronų ciklas šiluminių neutronų reaktoriuje*

Šiluminių neutronų sąveikos su urano branduoliais skerspjūviai

Medžiaga	Tankis, g/cm^3	σ_d (b)	σ_p, b	σ_a, b	σ_s
^{235}U	18,7	579	101	680	10
^{238}U	18,9	0	2,72	2,72	8,3
Natūralus U	18,9	4,17	3,43	7,60	8,3

Reaktoriaus pagrindinės komponentės: 1) branduolinis kuras (^{235}U ir ^{238}U mišinys), 2) lėtiklis.
Neutrono saveikos vyksmai: 1) neutronų absorbcija, 2) neutronų sklaida.
Neutrono absorbcija yra dviejų rūšių:

1) absorbcija dalijantis branduoliui (taip absorbuoti šiluminius neutronus gali tik ^{235}U)
2) spinduliuojamasis neutrono pagavimas (taip absorbuoti neutronus gali ir ^{235}U, ir ^{238}U).

Neutronų skaičius kinta šiuose neutrono gyvavimo etapuose:

1) šiluminių neutronų absorbcija branduoliniame kure (atsirandant antriniams neutronams);
2) neutronų sąveika su branduoliniu kuru, kol jų energija dar yra didelė (1 MeV eilės);
3) neutronų sąveika su branduoliniu kuru, kai jų energija yra (1 – 130) eV;
4) šiluminių neutronų sąveika su lėtiklio branduoliais iki absorbcijos branduoliniame kure;

Kiekvieną iš jų atitinka tam tikras daugiklis neutronų daugėjimo faktoriaus išraiškoje.

1. Vidutinis neutronų skaičius, kuris lieka, kai branduolinis kuras absorbuoja neutroną:

$$\eta = \nu \frac{\sigma_d}{\sigma_d + \sigma_p}$$

Natūralaus urano dalijimosi ir pagavimo skerspjūviai:

$$\sigma_d = 0{,}0072\,\sigma_d(^{235}\mathrm{U}) + 0{,}9928\,\sigma_d(^{238}\mathrm{U}) = 4{,}17 \text{ b}$$

$$\sigma_p = 0{,}0072\,\sigma_p(^{235}\mathrm{U}) + 0{,}9928\,\sigma_p(^{238}\mathrm{U}) = 3{,}43 \text{ b}$$

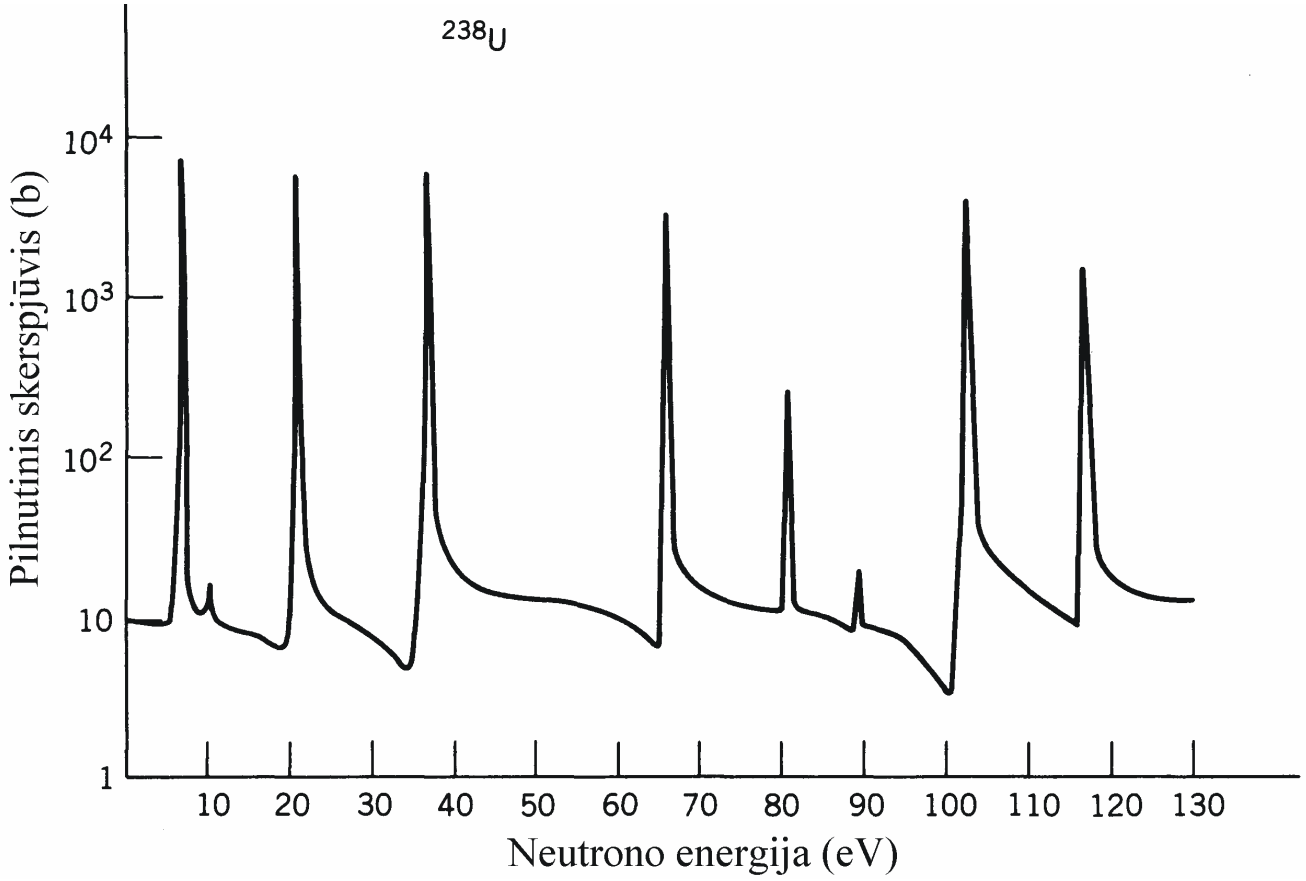
Todėl natūralaus urano $\eta = 1.33$. Jeigu uranas prisodrintas iki 1,6 % ^{235}U, tada η = **1,654**.

2. ***Sparčiojo dalijimosi koeficientas*** $\varepsilon > 1$. Gali siekti 1,03. Dažniausiai $\varepsilon \approx$ **1**.

3. Rezonansinis pagavimas. ***Tikimybė išvengti rezonansinio pagavimo*** p. Apytikslė p išraiška homogeniniam reaktoriui:

$$p = \exp\left[-\frac{2{,}73}{\langle\xi\rangle}\left(\frac{N_{238}}{N_L \Sigma_s}\right)^{0{,}514}\right]; \quad \text{čia } \Sigma_s \equiv N\sigma_s \quad \text{(makroskopinis sklaidos skerspjūvis).}$$

Grafito-urano reaktoriui, kuriame uranas prisodrintas iki 1,6 % , o N_{238} / N_L = 1 / 600, p = **0,749**.



8.5 pav. Neutronų sąveikos su ^{238}U branduoliais pilnutinio skerspjūvio priklausomybė nuo neutrono energijos rezonansinio neutronų pagavimo srityje. Smailės atitinka rezonansinį neutronų pagavimą

4. ***Šiluminio panaudojimo koeficientas***:

$$f = \frac{\Sigma_a(\mathrm{K})}{\Sigma_a(\mathrm{K}) + \Sigma_a(\mathrm{L}) + \Sigma_a(\mathrm{S})} \equiv \frac{N_\mathrm{K}\sigma_a(\mathrm{K})}{N_\mathrm{K}\sigma_a(\mathrm{K}) + N_\mathrm{L}\sigma_a(\mathrm{L}) + N_\mathrm{S}\sigma_a(\mathrm{S})};$$

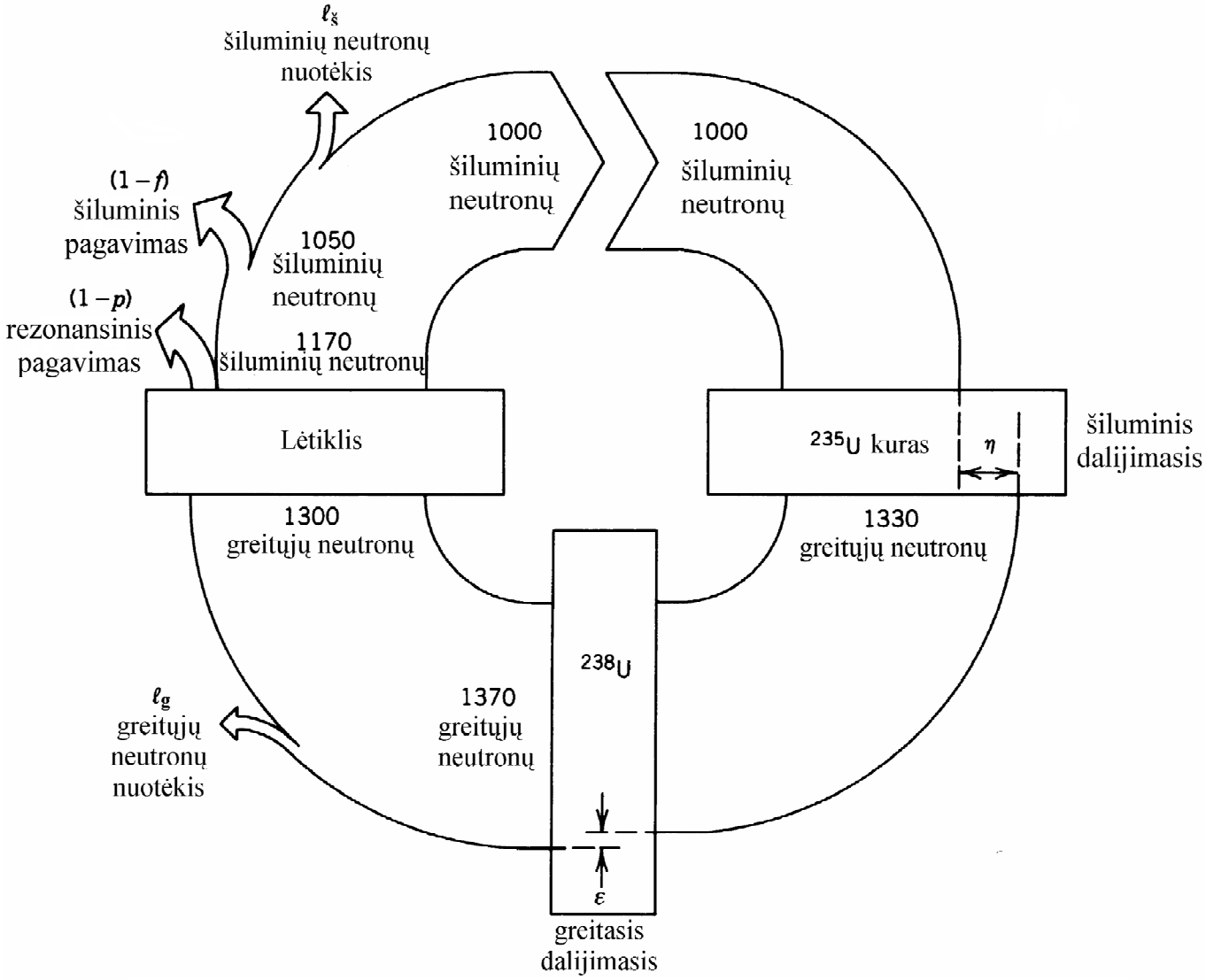
Grafito-urano reaktoriui, kuriame uranas prisodrintas iki 1,6 % , o $N_\mathrm{L} / N_\mathrm{K} = 600$, $f =$ **0,834**.

Kai nėra neutronų nuotėkio (t. y. begalinių matmenų reaktoriaus atvejis),

$$k_\infty = \eta \varepsilon p f$$

Pvz.,

$$\boldsymbol{k_\infty = 1{,}654 \times 1 \times 0{,}749 \times 0{,}834 = 1{,}033.}$$



8.6 pav. Neutronų skaičiaus kitimas viename branduolinio reaktoriaus cikle

8.2.4. *Reaktoriaus optimizavimas*

Homogeninio grafito-urano reaktoriaus neutronų daugėjimo faktoriaus k_∞ ir daugiklių η, f, p vertės

	^{235}U: 0.72%; $\eta = 1.328$			^{235}U: 1.600%; $\eta = 1.654$		
N_L / N_K	f	p	k_∞	f	p	k_∞
100.0	0.944	0.480	0.602	0.968	0.482	0.771
200.0	0.894	0.599	0.712	0.938	0.601	0.931
300.0	0.849	0.660	0.744	0.909	0.661	0.995
400.0	0.808	0.699	0.751	0.883	0.700	1.022
500.0	0.771	0.727	0.745	0.858	0.728	1.032
600.0	0.738	0.748	0.733	0.834	0.749	1.033
700.0	0.707	0.765	0.718	0.811	0.766	1.027
800.0	0.678	0.778	0.701	0.790	0.779	1.018
900.0	0.652	0.790	0.684	0.770	0.791	1.007
1000.0	0.628	0.800	0.667	0.751	0.801	0.994

8.2.5. *Neutronų skaičiaus priklausomybė nuo laiko*

Neutronų skaičiaus kitimo spartą lemia neutrono ***vidutinė gyvavimo trukmė*** τ. Ją sudaro lėtinimo trukmė (~10^{-6} s) ir difuzijos trukmė (~10^{-3} s).

Jeigu laiko momentu t yra N neutronų, tada laiko momentu $t + \tau$ bus kN neutronų, laiko momentu $t + 2\tau$ bus k^2N neutronų ir t. t. Tiksliau: neutronų skaičiaus padidėjimas per nykstamąjį laiko tarpą dt yra lygus

$$\mathrm{d}N = (k-1)N\frac{\mathrm{d}t}{\tau}$$

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \frac{(k-1)N}{\tau}$$

$$N(t) = N_0 e^{(k-1)t/\tau}$$

Jeigu $k > 1$, neutronų skaičius eksponentiškai auga su laiko konstanta, kuri lygi $\tau / (k - 1)$. Pvz., jeigu $k = 1{,}001$, trukmės konstanta yra 1 s eilės, o jeigu $k = 1{,}005$, trukmės konstanta yra maždaug 0,2 s.

Į *vėluojančiųjų* neutronų „gyvavimo trukmę“ įeina ir laikas nuo pirminio branduolio dalijimosi iki vėluojančiojo neutrono emisijos. ^{235}U atveju vėluojančiųjų neutronų vidutinė gyvavimo trukmė yra maždaug 12 s, o jų santykinė dalis pilnutiniame neutronų skaičiuje yra 0,0075 = 0,75%. T. t. momentinių neutronų dalis yra $g = 1 - 0{,}0075 = 0{,}9925$. Todėl *momentinių* neutronų skaičiaus pokyčio išraiškoje vietoj k reikia naudoti gk:

$$\mathrm{d}N_\mathrm{m} = (gk-1)N\frac{\mathrm{d}t}{\tau}$$

Jeigu $gk < 1$, t. y. $k < 1 / g$, tada mometinių neutronų neužtenka reakcijai palaikyti. Jeigu

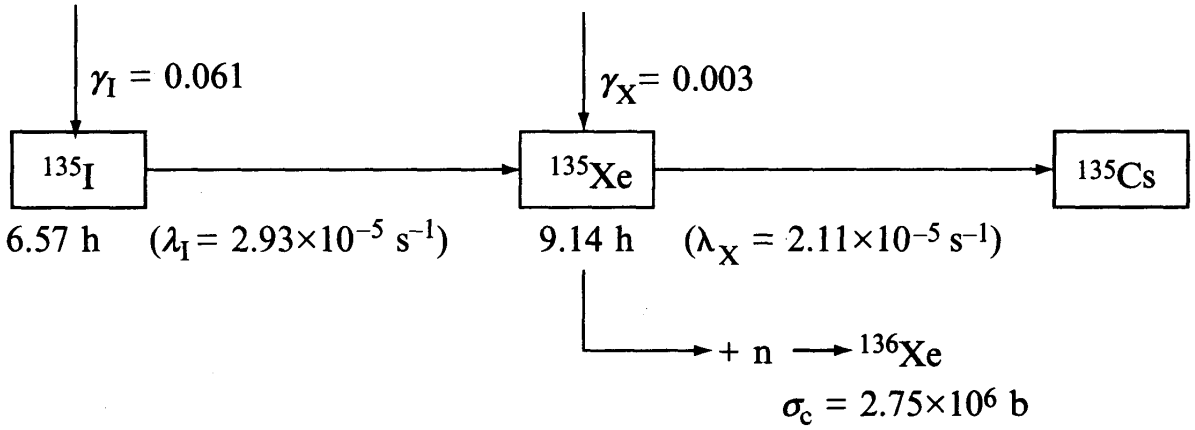
$$1 < k < \frac{1}{g},$$

tada neutronų skaičius didėja tik dėl vėluojančiųjų neutronų, t. y. palyginti lėtai. Jeigu $k > 1 / g$, tada reaktoriaus galios didėjimo sparta labai padidėja ir avarinė apsauga gali nespėti suveikti. Todėl k visada turi būti mažesnis už $1 / g$. Reaktoriaus veika, kai $k = 1 / g$, vadinama ***momentine krizine veika***.

8.2.6. *Reaktoriaus apsinuodijimo reiškinys*

Dalijimosi produktai, kurie turi didelį neutronų pagavimo skerspjūvį (> 10^4 b), yra vadinami „reaktoriaus nuodais“, nes jie didina neutronų nuostolius dėl pagavimo ir tuo pačiu mažina neutronų daugėjimo faktorių.

Pagrindiniai „reaktoriaus nuodai“ yra ksenonas-135 (^{135}Xe) ir samaris-149 (^{149}Sm). Iš jų svarbiausias yra ^{135}Xe, nes jo šiluminių neutronų pagavimo skerspjūvis didžiausias ($2{,}75 \cdot 10^6$ b).



8.7 pav. „Reaktoriaus nuodų“ ^{135}Xe susidarymo ir skilimo spartų parametrai

Dalijimosi reakcijos įvykių skaičius per laiko vienetą reaktoriaus tūrio vienete

$$R' = \Sigma_{\mathrm{d}} j$$

Esant dinaminei pusiausvyrai tarp ^{135}I kūrimo ir pašalinimo,

$$\gamma_{\mathrm{I}} \Sigma_{\mathrm{d}} j = \lambda_{\mathrm{I}} N_{\mathrm{I}}$$

Čia γ_{I} yra jodo-135 santykinė išeiga, λ_{I} yra jo skilimo konstanta, o N_{I} yra jo branduolių koncentracija. Kadangi ^{135}Xe gali skilti dviem būdais ir yra pašalinamas taip pat dviem būdais, tai ^{135}Xe dinaminės pusiausvyros sąlyga yra

$$\lambda_{\mathrm{I}} N_{\mathrm{I}} + \gamma_{\mathrm{X}} \Sigma_{\mathrm{d}} j = \lambda_{\mathrm{X}} N_{\mathrm{X}} + N_{\mathrm{X}} \sigma_{\mathrm{c}} j$$

$$N_{\mathrm{X}} = \frac{(\gamma_{\mathrm{I}} + \gamma_{\mathrm{X}}) \Sigma_{\mathrm{d}} j}{(\lambda_{\mathrm{X}} + \sigma_{\mathrm{c}} j)}$$

Padidėjus ^{135}Xe kiekiui, neutronų daugėjimo faktorius sumažėja nuo k iki k', nes sumažėja šiluminio panaudojimo koeficientas (nuo f iki f').

$$f = \frac{\Sigma_{\mathrm{a}}(\mathrm{K})}{\Sigma_{\mathrm{a}}(\mathrm{A})}$$

$$f' = \frac{\Sigma_{\mathrm{a}}(\mathrm{K})}{\Sigma_{\mathrm{a}}(\mathrm{A}) + N_{\mathrm{X}} \sigma_{\mathrm{c}}}$$

Santykinis neutronų daugėjimo faktoriaus pokytis:

$$q_{\mathrm{X}} = \frac{k' - k}{k'} = \frac{f' - f}{f'}$$

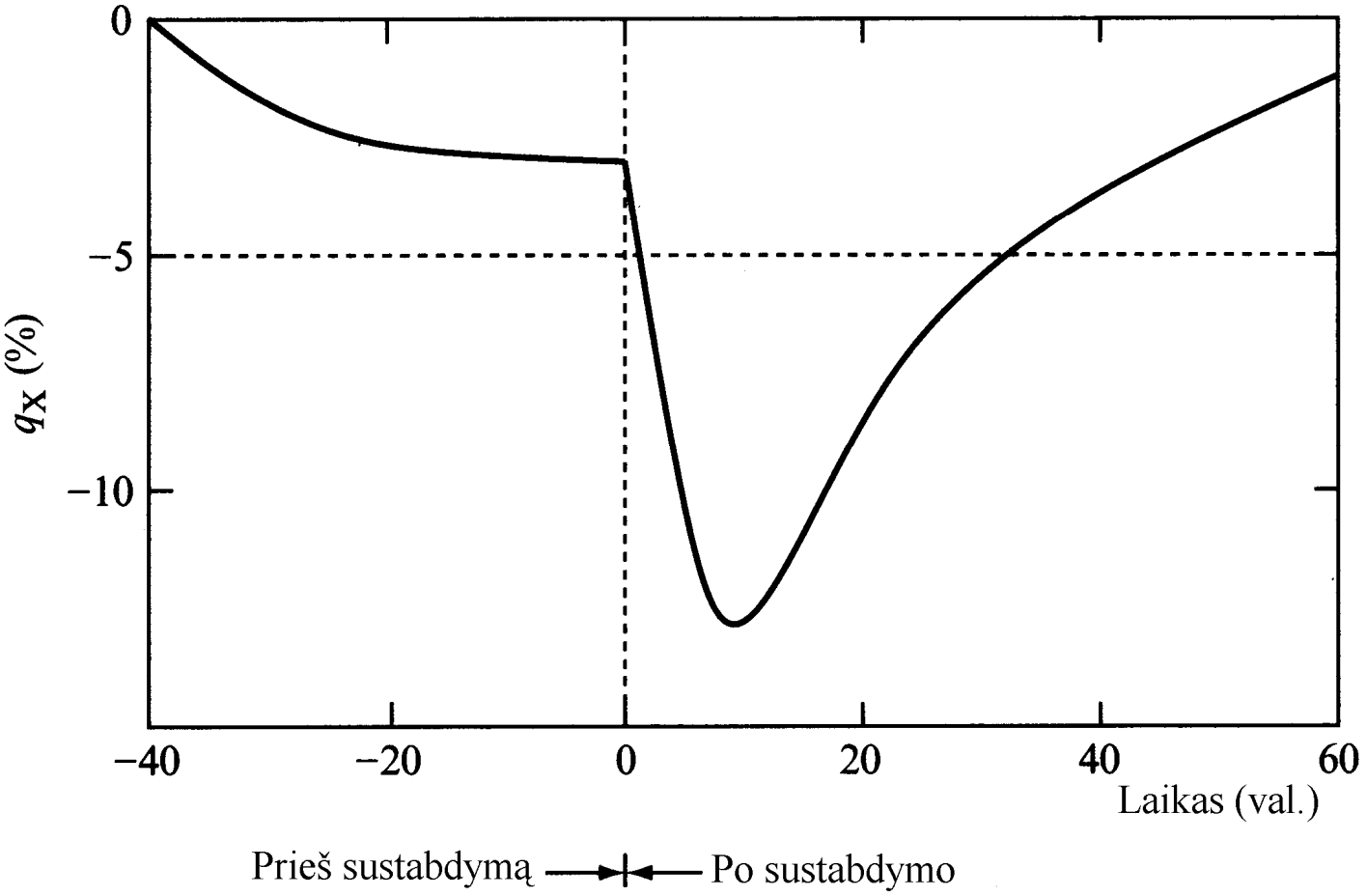
$$\frac{q_{\mathrm{X}}}{f} = \frac{1}{f} - \frac{1}{f'} = -\frac{N_{\mathrm{X}} \sigma_{\mathrm{c}}}{\Sigma_{\mathrm{a}}(\mathrm{K})} = -\frac{(\gamma_{\mathrm{I}} + \gamma_{\mathrm{X}}) \Sigma_{\mathrm{d}} j \sigma_{\mathrm{c}}}{(\lambda_{\mathrm{X}} + \sigma_{\mathrm{c}} j) \Sigma_{\mathrm{a}}(\mathrm{K})}$$

$$\frac{\Sigma_{\mathrm{d}}}{\Sigma_{\mathrm{a}}(\mathrm{K})} = \frac{\eta}{\nu}.$$

$$\frac{q_{\mathrm{X}}}{f} = -\frac{(\gamma_{\mathrm{I}} + \gamma_{\mathrm{X}}) \eta}{(1 + \lambda_{\mathrm{X}} / (\sigma_{\mathrm{c}} j)) \nu}$$

Pvz., naudojantis parametrų vertėmis, kurios pateiktos 8.7 pav., ir įrašius tipiškas kitų parametrų vertes: $\eta = 1{,}33$, $\nu = 2{,}42$, $j = 10^{14}$ cm^{-2} s^{-1} ir $f = 0{,}9$, gauname $\lambda_{\mathrm{X}} / (\sigma_{\mathrm{c}} j) = 0{,}077$ ir

$$\frac{q_{\mathrm{X}}}{f} = -\frac{0{,}064 \cdot 1{,}33}{1{,}077 \cdot 2{,}42} = -0{,}033 \qquad \text{arba} \qquad q_{\mathrm{X}} \approx\sim -0{,}03$$



8.8 pav. ^{135}Xe kaupimosi reaktoriaus aktyviojoje zonoje įtaka neutronų daugėjimo faktoriaus santykiniam pokyčiui prieš sustabdant reaktorių ir jį sustabdžius, kai neutronų srauto tankis yra 10^{14} cm^{-2} s^{-1}. Horizontalioji punktyrinė linija nurodo didžiausią santykinį sumažėjimą, kurį galima kompensuoti ištraukiant valdymo strypus

8.3. Branduolinio reaktoriaus matmenų apskaičiavimas

8.3.1. *Difuzija*

Dėl betvarkio dalelių (pvz., neutronų) judėjimo atsiranda dalelių srautas jų koncentracijos (n) mažėjimo kryptimi:

$$J_z = -D\frac{\partial n}{\partial z}$$

Čia J_z yra dalelių vektorinio srauto tankio z komponentė, o D yra difuzijos koeficientas. Pilnutinis vektorinis srauto tankis:

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{i}J_x + \boldsymbol{j}J_y + \boldsymbol{k}J_z \equiv -D\nabla n \qquad (\text{čia } \nabla \equiv \boldsymbol{i}(\partial/\partial x) + \boldsymbol{j}(\partial/\partial y) + \boldsymbol{k}(\partial/\partial z))$$

Apytikslė difuzijos koeficiento išraiška, kai sklaida yra izotropinė:

$$D = \frac{1}{3}\upsilon l_\mathrm{s}$$

Čia υ yra dalelių greičio modulio vidurkis, o l_a yra vidutinis laisvasis kelias.

$$J_z = -\frac{\upsilon l_\mathrm{s}}{3}\frac{\partial n}{\partial z}$$

8.3.2. *Tolydumo lygtis*

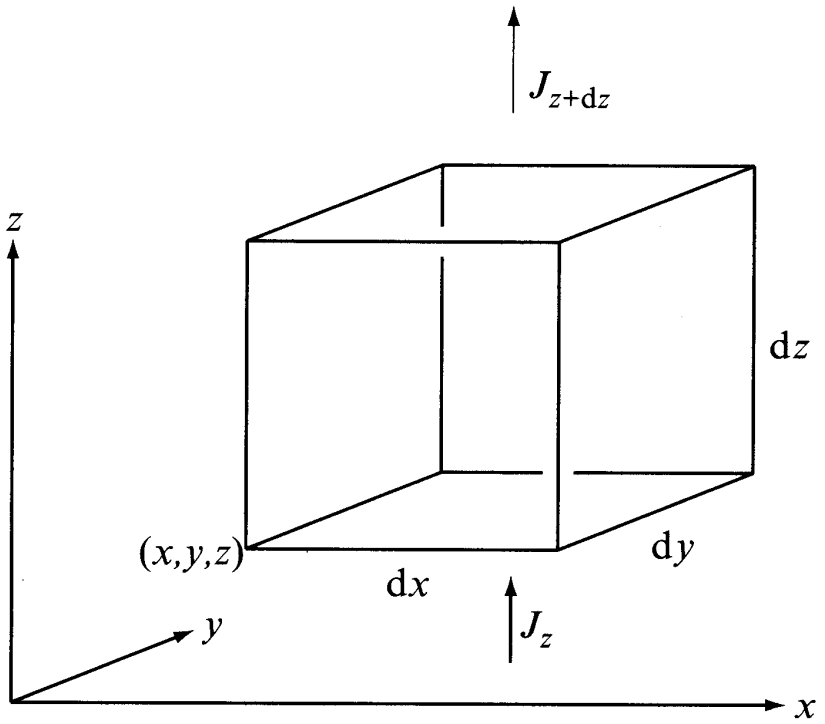
Tūryje dV esančių dalelių skaičiaus pokytis per laiko vienetą dėl dalelių srauto išilgai z ašies yra lygus

$$J_z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - (J_z + \mathrm{d}J_z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\mathrm{d}J_z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\frac{\partial J_z}{\partial z}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\frac{\partial J_z}{\partial z}\,\mathrm{d}V$$

Analogiškai apskaičiuojami ir dalelių skaičiaus pokyčiai dėl srauto x ir y kryptimis. Todėl pilnutinis pokytis per laiko vienetą yra

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\left(\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z}\right) \equiv -\nabla\cdot\boldsymbol{J} \equiv -\mathrm{div}\,\boldsymbol{J}$$

Tai yra ***tolydumo lygtis***.



8.9 pav. Stačiakampio gretasienio formos tūrio elementas ir vektorinio dalelių srauto tankio z komponentė

Įrašius $\boldsymbol{J}$ išraišką į tolydumo lygtį:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\nabla^2 n(\boldsymbol{r},t) \qquad \left(\text{čia } \nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

Ši lygtis tinka tik tada, kai nėra dalelių atsiradimo (generacijos) ir išnykimo (sugerties) vyksmų.

Tūrio vienete per laiko vienetą sugeriamų neutronų skaičius:

$$\Sigma_{\mathrm{a}} j(\boldsymbol{r},t)$$

Čia j yra *skaliarinis* neutronų srauto tankis (dar vadinamas *krintančiųjų* neutronų srauto tankiu). Nuo anksčiau minėto vektorinio srauto tankio ($\boldsymbol{J}$) jis skiriasi tuo, kad nusako į sferinio paviršiaus vidų iš aplinkos patenkančių neutronų skaičių per laiko vienetą, padalytą iš tos sferos ploto. $j(\boldsymbol{r}, t)$ yra to santykio riba, kai sferos spindulys artėja į nulį, o sferos centre yra taškas $\boldsymbol{r}$.

Tolydumo lygtis įskaičius neutronų sugertį ir atsiradimą (generaciją):

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\nabla^2 n(\boldsymbol{r},t) - \Sigma_{\mathrm{a}} j(\boldsymbol{r},t) + S(\boldsymbol{r},t)$$

Dinaminėje pusiausvyroje

$$D\nabla^2 n(\boldsymbol{r}) - \Sigma_{\mathrm{a}} j(\boldsymbol{r}) + S(\boldsymbol{r}) = 0$$

Kadangi

$$j(\boldsymbol{r}) = \upsilon n(\boldsymbol{r}),$$

tai

$$\frac{D}{\upsilon}\nabla^2 j(\boldsymbol{r}) - \Sigma_{\mathrm{a}} j(\boldsymbol{r}) + S(\boldsymbol{r}) = 0$$

Tai yra bendroji neutronų difuzijos lygtis, kai reaktoriaus veika yra stacionari.

8.3.3. *Difuzijos nuotolis*

Jeigu neutronų šaltinis yra viename taške $\boldsymbol{r} = 0$, tada visuose kituose taškuose $S(r) = 0$, todėl, kai $r > 0$,

$$\nabla^2 j(\boldsymbol{r}) = \frac{\upsilon \Sigma_{\mathrm{a}}(\mathrm{L})}{D} j(\boldsymbol{r})$$

Apibrėžus

$$L^2 \equiv \frac{D}{\upsilon \Sigma_{\mathrm{a}}(\mathrm{L})},$$

neutronų difuzijos lygtį galima užrašyti šitaip:

$$\nabla^2 j(\boldsymbol{r}) = \frac{j(\boldsymbol{r})}{L^2}$$

L yra difuzijos nuotolis.

<u>Lygties sprendimas</u>:

Dėl sferinės simetrijos nėra priklausomybės nuo kampinių koordinačių (θ ir ϕ), todėl

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 \frac{\mathrm{d}...}{\mathrm{d}r}\right) = \frac{\mathrm{d}^2...}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}...}{\mathrm{d}r}$$

Atitinkamai

$$\frac{\mathrm{d}^2 j}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}r} = \frac{j(r)}{L^2}$$

$$u(r) \equiv rj(r)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 u(r)}{\mathrm{d}r^2} - \frac{u(r)}{L^2} = 0$$

$$u(r) = a\mathrm{e}^{-r/L} + b\mathrm{e}^{+r/L}$$

$$j(r) = a\frac{\mathrm{e}^{-r/L}}{r} + b\frac{\mathrm{e}^{+r/L}}{r}$$

Srauto tankis turi artėti į nulį, kai $r \to \infty$. Vadinasi, $b = 0$:

$$j(r) = a\frac{\mathrm{e}^{-r/L}}{r}$$

$$\langle r^2 \rangle = \frac{\int_0^\infty r^2 j(r)\mathrm{d}V}{\int_0^\infty j(r)\mathrm{d}V} = \frac{\int_0^\infty r^3 \mathrm{e}^{-r/L}\mathrm{d}r}{\int_0^\infty r\mathrm{e}^{-r/L}\mathrm{d}r} = 6L^2$$

8.3.4. *Reaktoriaus lygtis*

$$\frac{D}{\upsilon}\nabla^2 j(\boldsymbol{r}) - \Sigma_\mathrm{a}(\mathrm{A})j(\boldsymbol{r}) + S(\boldsymbol{r}) = 0$$

Kitaip, negu ankstesniuoju atveju, $S(\boldsymbol{r})$ yra nelygus nuliui visame reaktoriaus tūryje.

$$\frac{(k_\infty - 1)n(t)}{\tau} = -\Sigma_\mathrm{a}(\mathrm{A})j(t) + S(t)$$

Kadangi

$$S(\boldsymbol{r}) = Cj(\boldsymbol{r}) = C\upsilon n(\boldsymbol{r}),$$

tai

$$k_\infty - 1 = \upsilon\tau(C - \Sigma_\mathrm{a}(\mathrm{A}))$$

$\upsilon\tau = l_\mathrm{a} = 1 / \Sigma_\mathrm{a}$. Todėl $\upsilon\tau\Sigma_\mathrm{a} = 1$, t. y. $\upsilon\tau = 1 / \Sigma_\mathrm{a}$ ir $C = k_\infty \Sigma_\mathrm{a}$. Iš čia

$$S(\boldsymbol{r}) = k_\infty \Sigma_\mathrm{a}(\mathrm{A})j(\boldsymbol{r})$$

Įrašome į difuzijos lygtį:

$$\frac{D}{\upsilon}\nabla^2 j(\boldsymbol{r}) + (k_\infty - 1)\Sigma_\mathrm{a}(\mathrm{A})j(\boldsymbol{r}) = 0$$

Apibrėžus

$$L_\mathrm{A}^2 \equiv \frac{D}{\upsilon\Sigma_\mathrm{a}(\mathrm{A})} \quad \text{ir} \quad B^2 \equiv \frac{k_\infty - 1}{L_\mathrm{A}^2},$$

gauname ***vienos grupės reaktoriaus lygtį***:

$$\nabla^2 j(\boldsymbol{r}) + \frac{k_\infty - 1}{L_\mathrm{A}^2} j(\boldsymbol{r}) = \nabla^2 j(\boldsymbol{r}) + B^2 j(\boldsymbol{r}) = 0$$

$$\Sigma_\mathrm{a}(\mathrm{A}) = \Sigma_\mathrm{a}(\mathrm{K}) + \Sigma_\mathrm{a}(\mathrm{L})$$

$$f \equiv \frac{\Sigma_\mathrm{a}(\mathrm{K})}{\Sigma_\mathrm{a}(\mathrm{K}) + \Sigma_\mathrm{a}(\mathrm{L})} \equiv \frac{\Sigma_\mathrm{a}(\mathrm{K})}{\Sigma_\mathrm{a}(\mathrm{A})}, \qquad 1 - f = \frac{\Sigma_\mathrm{a}(\mathrm{A}) - \Sigma_\mathrm{a}(\mathrm{K})}{\Sigma_\mathrm{a}(\mathrm{A})} = \frac{\Sigma_\mathrm{a}(\mathrm{L})}{\Sigma_\mathrm{a}(\mathrm{A})} = \frac{L_\mathrm{A}^2}{L^2}$$

T. y.

$$L_{\mathrm{A}}^2 = (1-f)L^2$$

Atsižvelgus į tai, kad neutronai tam tikrą atstumą nueina ne tik difuzijos metu, bet ir lėtinimo metu, reaktoriaus lygtyje prie difuzijos nuotolio kvadrato reikia pridėti vidutinio ***lėtinimo nuotolio*** kvadratą:

$$B^2 \equiv \frac{k_\infty - 1}{L_{\mathrm{A}}^2 + L_{\mathrm{L}}^2}$$

8.5 lentelė. Neutronų lėtiklių difuzijos ir lėtinimo konstantos

Lėtiklis	D/υ (cm)	L^2 (cm^2)	L_{L}^2 (cm^2)
H_2O	0,16	8,1	27
D_2O	0,87	30 000	131
Grafitas	0,84	2650	368

8.3.5. *Reaktoriaus lygties sprendimas*

<u>Kubinis reaktorius</u>

$$\nabla^2 j(\boldsymbol{r}) = \frac{\partial^2 j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 j}{\partial z^2} = -B^2 j$$

Kintamųjų atskyrimo metodas:

$$j(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -B^2$$

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = const = -\alpha^2, \quad \frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -\beta^2, \quad \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -\gamma^2$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = B^2$$

$$X(x) = a\sin(\alpha x) + b\cos(\alpha x)$$

Kraštinė sąlyga – neutronų srauto tankis ant reaktoriaus paviršiaus lygus nuliui:

$$j(x,y,z) = 0, \quad \text{kai} \quad x = 0 \quad \text{ir} \quad x = w,$$

čia w yra kubo briaunos ilgis. Iš šios sąlygos išplaukia:

$$b = 0 \text{ ir } \alpha w = \pi$$

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{w}$$

$$w = \frac{\pi\sqrt{3}}{B}$$

Reaktoriaus tūris:

$$V = w^3 \approx \frac{161}{B^3}$$

Sferinis reaktorius

$$j = j(r)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 j}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}r} = -B^2 j(r)$$

$$u(r) \equiv rj(r)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 u(r)}{\mathrm{d}r^2} + B^2 u(r) = 0$$

$$u(r) = a\sin(Br) + b\cos(Br)$$

$$j(r) = a\frac{\sin(Br)}{r} + b\frac{\cos(Br)}{r}$$

Kadangi neutronų srautas turi likti baigtinis taške $r = 0$, tai $b = 0$. Kraštinė sąlyga:

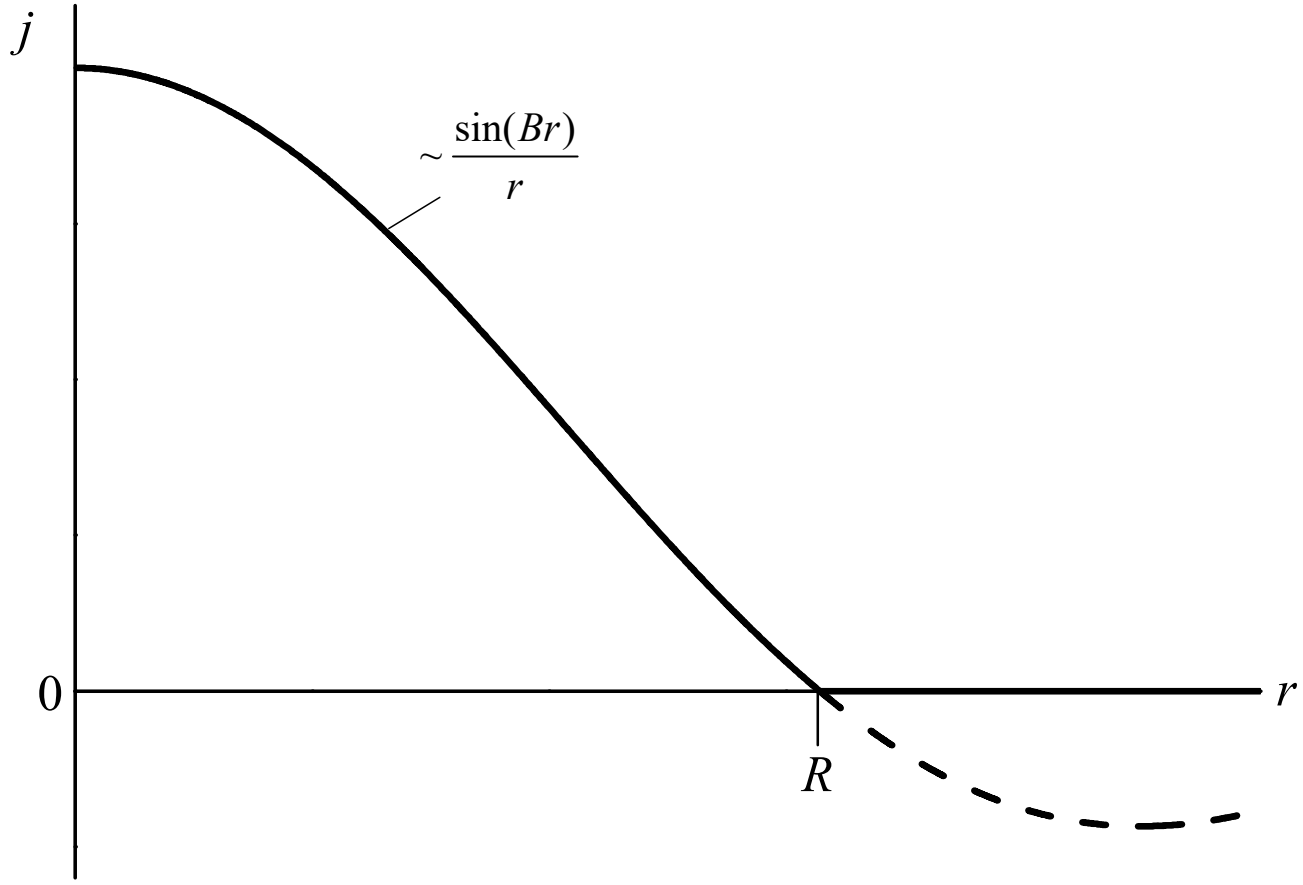
$$j(R) = 0,$$

čia R yra reaktoriaus aktyviosios zonos spindulys. Todėl

$$R = \frac{\pi}{B}$$

Reaktoriaus tūris:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \approx \frac{130}{B^3}$$



8.10 pav. Skaliarinio neutronų srauto tankio priklausomybė nuo atstumo iki sferinio homogeninio reaktoriaus centro, kai kraštinės sąlygos teigia, kad neutronų srautas būti lygus nuliui ant reaktoriaus paviršiaus. Šiuo atveju reaktoriaus spindulys yra $R = \pi / B$. Punktyrinė linija atitinka funkcijos $\sin(Br) / r$ tęsinį į reaktoriaus išorę

Pavyzdys: sferinis homogeninis urano-grafito reaktorius, kurio lėtiklio ir kuro atomų skaičių santykis yra 600, o sodrinimo laipsnis 1,6 %. To reaktoriaus $k_\infty = 1{,}033$, $f = 0{,}834$, $L^2 = 2650\ \text{cm}^2$. Tada

$$B^2 \equiv \frac{k_\infty - 1}{L_\text{A}^2 + L_\text{L}^2} = \frac{k_\infty - 1}{(1-f)L^2 + L_\text{L}^2} = \frac{0{,}033}{0{,}166 \cdot 2650 + 368} = 4{,}08 \cdot 10^{-5}\ \text{cm}^2$$

Vadinasi, reaktoriaus spindulys yra $R = \pi / B = 492\ \text{cm} \approx 5\ \text{m}$.

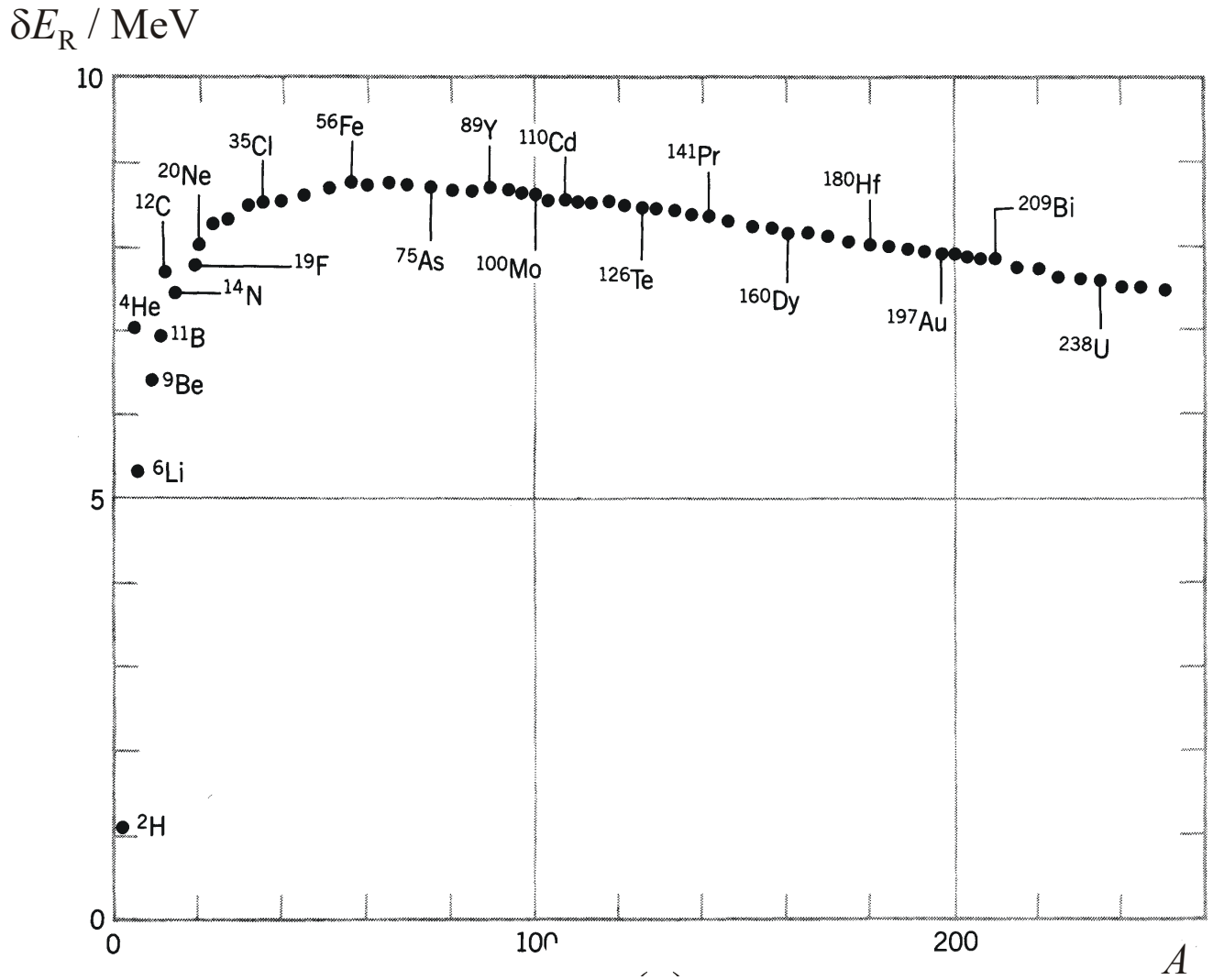
8.4. Branduolių sintezė

Energija Q, kuri išsiskiria susijungiant dviem branduoliams, kurių masės skaičiai A_1 ir A_2, į vieną branduolį, kurio masės skaičius A:

$$Q = E_\text{R} - E_\text{R1} - E_\text{R2}$$

$$Q = A\delta E_\text{R} - A_1\delta E_\text{R1} - A_2\delta E_\text{R2} = A\delta E_\text{R} - A_1\delta E_\text{R1} - (A - A_1)\delta E_\text{R2} =$$
$$= A_1(\delta E_\text{R2} - \delta E_\text{R1}) + A(\delta E_\text{R} - \delta E_\text{R2})$$

Q ženklą lemia antrojo skirtumo ženklas. Todėl, kad Q būtų teigiamas, A_1 ir A_2 vertės turi būti toje priklausomybės $\delta E_\text{R}(A)$ srityje, kurioje δE_R didėja didėjant A. Tai atitinka lengvuosius branduolius



2.2 pav. Savitosios ryšio energijos priklausomybė nuo branduolio masės skaičiaus A

Lengviausia realizuoti mažiausio krūvio branduolių (vandenilio arba helio izotopų) sintezę. Reakcijų pavyzdžiai:

deuterio-deuterio (D-D) reakcijos (žymuo „d“ reiškia ^{2}H, o „t“ reiškia ^{3}H):

$d + d \rightarrow {}^4He + \gamma$ arba $d(d,\gamma)^4He$ (Q = 23,8 MeV)

$d + d \rightarrow {}^3He + n$ arba $d(d,n)^3He$ (Q = 3,3 MeV)

$d + d \rightarrow t + p$ arba $d(d,p)t$ (Q = 4,0 MeV)

deuterio-tričio (D-T) reakcija:

$d + t \rightarrow {}^4He + n$ arba $t(d,n)^4He$ (Q = 17,6 MeV)

deuterio-helio reakcija:

$d + {}^3He \rightarrow {}^4He + p$ arba ${}^3He(d,p)^4He$ (Q = 18,35 MeV)

8.4.1. *Branduolių sintezės reakcijos produktų kinetinė energija*

Jeigu reakcijos metu atsiranda dvi nereliatyvistinės dalelės x ir Y (x – lengvoji dalelė, o Y – branduolys), tada

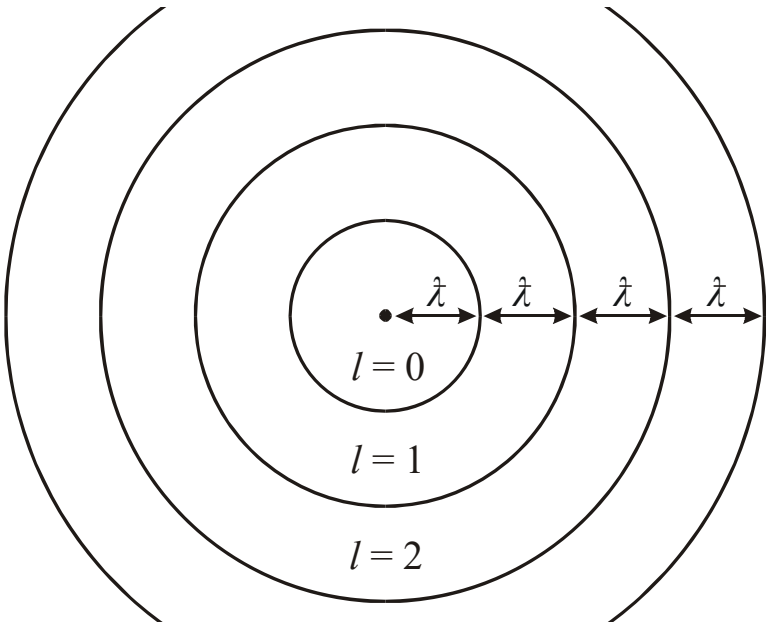
$$\frac{m_x \upsilon_x^2}{2} + \frac{m_Y \upsilon_Y^2}{2} \approx Q, \qquad m_x \upsilon_x = m_Y \upsilon_Y .$$

$$\frac{1}{2} m_x \upsilon_x^2 = \frac{Q}{1 + m_x / m_Y}, \qquad \frac{1}{2} m_Y \upsilon_Y^2 = \frac{Q}{1 + m_Y / m_x}.$$

$$\frac{\frac{1}{2} m_x \upsilon_x^2}{\frac{1}{2} m_Y \upsilon_Y^2} = \frac{m_Y}{m_x}$$

Pvz., D-T reakcijoje 80 % visos išsiskyrusios energijos nusineša neutronas

8.4.2. *Branduolių sintezės reakcijos skerspjūvis*



6.13 pav. Judesio kiekio momento sritys plokščiai krintančiajai bangai, kurios kryptis statmena brėžinio plokštumai. Dalelės, kurių orbitinis kvantinis skaičius l, pataiko į l-tąjį žiedą

Užtenka atsižvelgti tik tas dalines sferines bangas, kurių

$$l < \frac{R}{\lambda\!\!\!^{-}} = l_{max},$$

čia R yra reaguojančių branduolių spindulių suma. Didžiausias reakcijos skerspjūvis – tai skritulio, kurio spindulys lygus didžiausios žiedinės zonos zonų išoriniam spinduliui, plotas, t. y.

$$\sigma = \pi(l_{\max} + 1)^2 \lambda\!\!\!^{-2} = \pi(R + \lambda\!\!\!^{-})^2$$

Kai reaguoja vandenilio izotopų branduoliai, kurių energija yra ~10 keV, tada

$$R << \lambda\!\!\!^{-},$$

Todėl

$$\sigma \approx \pi \lambda\!\!\!^{-2} = \frac{\pi}{k^2} = \frac{\pi\hbar^2}{p^2} = \frac{h^2}{4\pi m^2 \upsilon^2}$$

Tikrasis sintezės reakcijos skerspjūvis yra mažesnis dėl reaguojančių branduolių Kulono stūmos, kurios energija lygi

$$U(r) = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Z_1 Z_2}{r}$$

Kulono potencialo barjero aukštis:

$$U_c = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Z_1 Z_2}{R_1 + R_2}$$

Branduoliai susijungia tik po tuneliavimo pro šį barjerą. Todėl skerspjūvio išraiškoje atsiranda papildomas daugiklis – barjero skaidris D:

$$\sigma \approx \frac{h^2}{4\pi m^2 \upsilon^2} D, \qquad D = \mathrm{e}^{-2G}, \qquad G \equiv \frac{1}{\hbar}\int_R^{R'} \sqrt{2m(U(r) - E)}\,dr$$

čia G yra ***Gamovo faktorius***. R' yra atstumas, kur krintančiojo branduolio energija tampa lygi Kulono stūmos energijai, t. y. lygties $U(r) = E$ sprendinys:

$$R' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Z_1 Z_2 e^2}{E}$$

Įrašius šią R' išraišką į G išraišką ir apskaičiavus integralą, gaunama

$$G = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2 E}} \cdot \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0}[\arccos\sqrt{x} - \sqrt{x(1-x)}],$$

čia $x = R / R' = E / U_c$. Kadangi $x << 1$, tai reiškinys laužtiniuose skliaustuose yra apytiksliai lygus $\pi / 2$. Kadangi $m / E = 2 / \upsilon^2$, tai

$$G \approx \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\pi Z_1 Z_2}{\hbar\upsilon} = \frac{e^2}{4\varepsilon_0}\frac{Z_1 Z_2}{\hbar\upsilon};$$

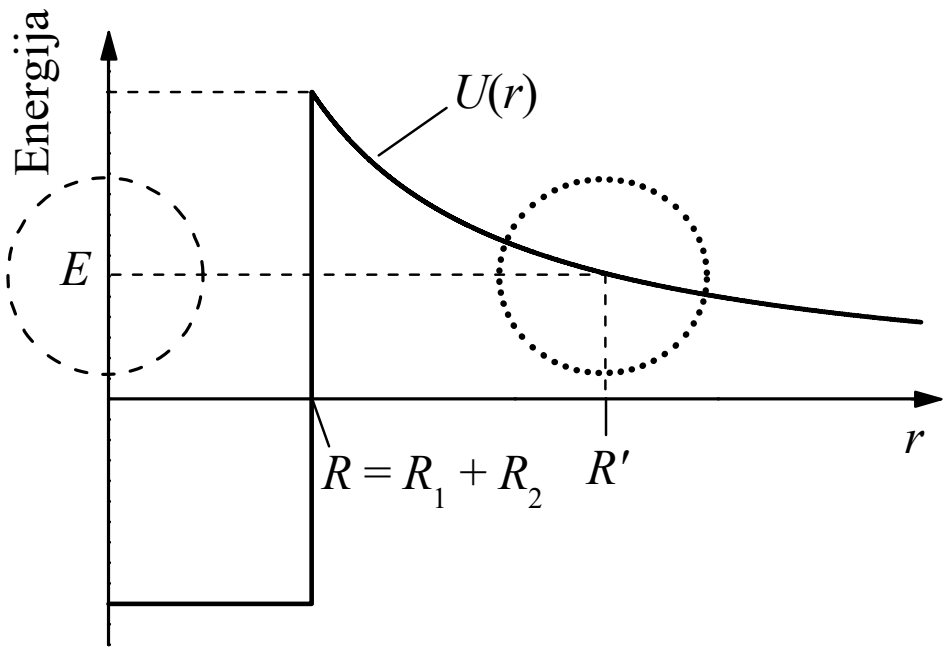
čia υ yra reaguojančių branduolių reliatyvusis greitis. Galutinė reakcijos skerspjūvio išraiška:

$$\sigma \approx \frac{h^2}{4\pi m^2} \cdot \frac{1}{\upsilon^2}\exp\left(-\frac{e^2}{2\varepsilon_0}\frac{Z_1 Z_2}{\hbar\upsilon}\right)$$

T. y.

$$\sigma \sim \frac{1}{\upsilon^2}\mathrm{e}^{-2G}; \quad G \sim \frac{1}{\upsilon}$$

Todėl, didėjant greičiui υ, skerspjūvis σ didėja. Taip yra todėl, kad mažėja potencialo barjero plotis $R' - R$.



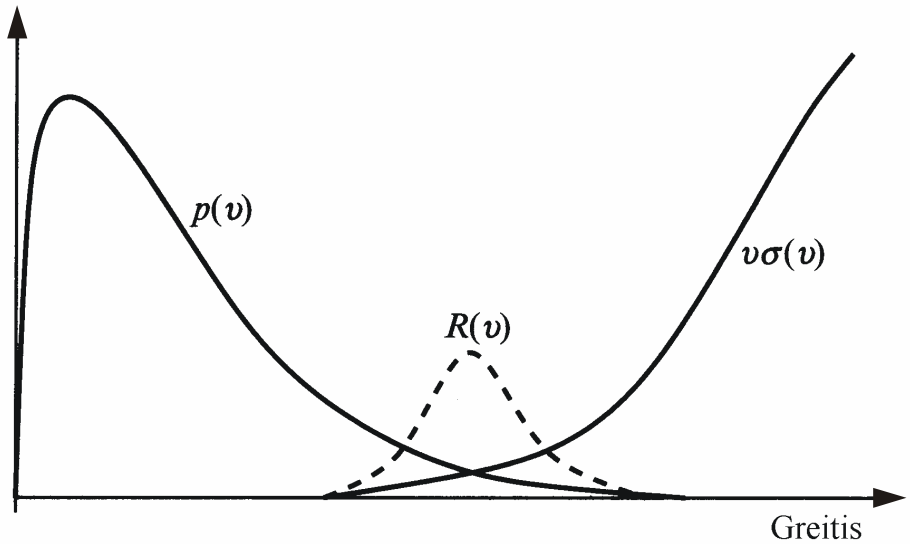
8.11 pav. Kulono potencialo barjeras branduolių sintezei

8.4.3. *Reakcijos sparta*

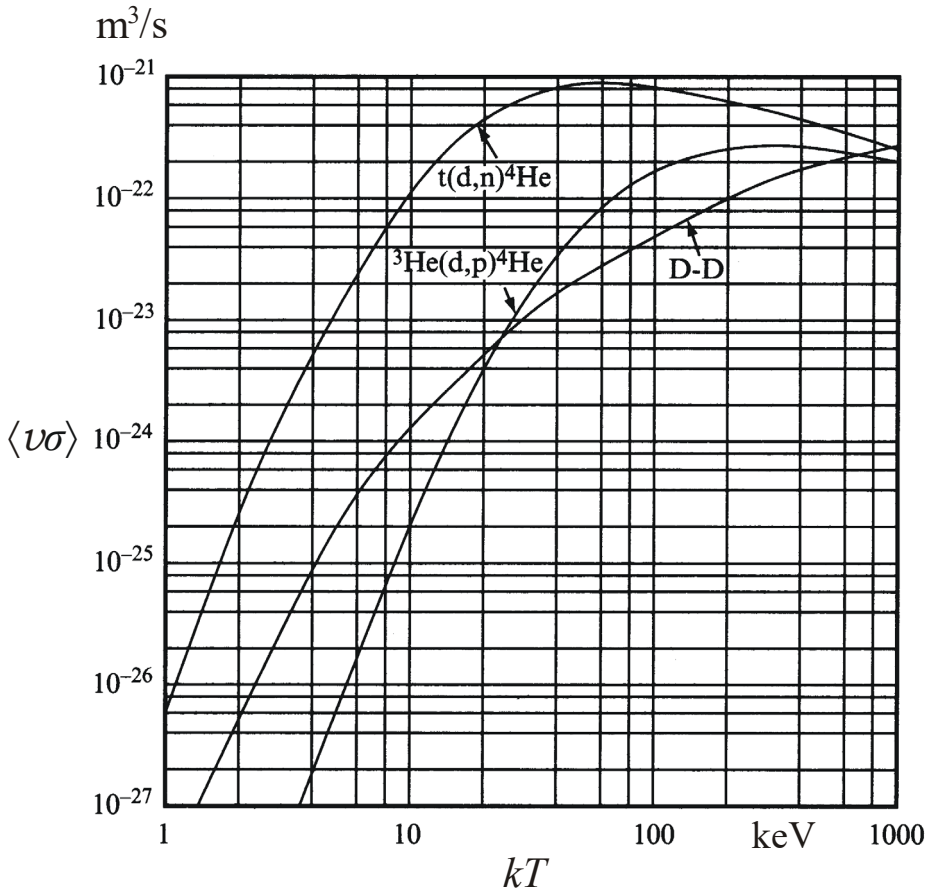
Maksvelo skirstinys: $p(\upsilon) \sim \upsilon^2 \exp\left(-\frac{m\upsilon^2}{2kT}\right)$

Kad realizuoti termobranduolinę reakciją, branduolių mišinį reikia įkaitinti iki temperatūros, kurioje kT yra 10 keV eilės. Tai atitinka 10^8 K eilės temperatūrą.

Reakcijos sparta R – tai sintezuojamų branduolių skaičius tūrio vienete per laiko vienetą. Jeigu reaguoja skirtingi branduoliai, kurių koncentracijos n_1 ir n_2, tada $R = n_1 n_2 \sigma\upsilon$. Atsižvelgus į greičio υ pasiskirstymą, $R = n_1 n_2 \langle\sigma\upsilon\rangle$, $\langle\sigma\upsilon\rangle = \int_0^\infty p(\upsilon)\sigma(\upsilon)\upsilon \mathrm{d}\upsilon$



8.12 pav. Maksvelo skirstinio tikimybės tankio p ir reliatyviojo greičio υ bei reakcijos skerspjūvio σ sandaugos $\upsilon\sigma$ priklausomybė nuo υ



8.13 pav. Vidurkio $\langle \upsilon\sigma \rangle$ vertės kelioms sintezės reakcijoms

8.4.4. *Valdomos termobranduolinės reakcijos sąlygos*

Termobranduolinės sintezės sąlygomis branduolinis kuras yra plazmos būsenos, t. y. elektriškai neutralus branduolių ir elektronų mišinys.

Tarpinė stadija prieš realizuojant valdomą branduolių sintezę – ***lygybės taškas*** (angl. *break-even point*). Tai yra tokia būsena, kai dėl branduolių sintezės per laiko vienetą išsiskiriantis energijos kiekis yra lygus galiai, kurią reikia išeikvoti tam, kad būtų palaikomi plazmos temperatūra bei slėgis. Plazmą kaitina tik stipriai sugeriamos dalelės, kurios lieka plazmoje (pvz., α dalelės). Neutronai išeina iš reakcijos srities, nusinešdami dalį energijos. Todėl lygybės taško sąlygomis dar yra reikalingi išoriniai energijos šaltiniai. Kita stadija – ***uždegimo taškas***, t. y. tokia būsena, kai α dalelių energijos pakanka tam, kad palaikyti reakcijos sąlygas. Tada išoriniai energijos šaltiniai tampa nereikalingi.

Lousono (*Lawson*) kriterijus atitinka dar vieną tarpinę stadiją, kurią būtina realizuoti prieš pasiekiant lygybės tašką: kai sistemos būsena atitinka ***Lousono kriterijų***, tada branduolių sintezės metu išsiskyrusi energija viršija energiją, kuri buvo išeikvota sukuriant tą plazmą. T. y. šiuo atveju yra lyginami ne energijos kiekiai per laiko vienetą, o *pilnutinė* išsiskyrusioji energija ir *pilnutinė* plazmos energija.

Per laiką τ tūrio vienete dėl branduolių sintezės reakcijos išsiskyręs energijos kiekis yra lygus

$$E_{\mathrm{r}} = RQ\tau = n_1 n_2 \langle \sigma\upsilon \rangle Q\tau$$

Jeigu $n_1 = n_2 = n/2$,

$$E_{\mathrm{r}} = RQ\tau = \frac{n^2}{4}\langle \sigma\upsilon \rangle Q\tau$$

Vienos dalelės (elektrono arba branduolio) vidutinė kinetinė energija yra lygi $3kT/2$. Kadangi pilnutinė dalelių (elektronų ir branduolių) koncentracija yra $2n$, tai plazmos tūrio vieneto energija yra

$$E_{\mathrm{p}} = 3nkT$$

Lousono kriterijus yra

$$E_{\mathrm{r}} > E_{\mathrm{p}}$$

$$n\tau > \frac{12kT}{\langle \sigma \upsilon \rangle Q}$$

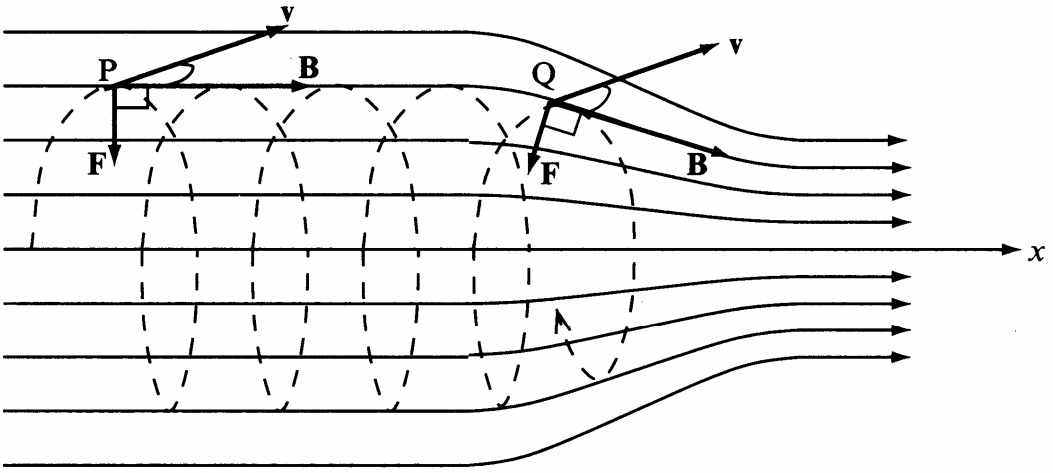
Pvz., jeigu D-T plazmos temperatūra yra $kT = 20$ keV, tada iš 8.13 pav. gauname, kad $\langle \sigma \upsilon \rangle = 4{,}5 \cdot 10^{-22}$ m^3/s. Įrašę šią vertę į paskutiniąją nelygybę, gauname $n\tau > 3 \cdot 10^{19}$ m^{-3}/s. Pvz., jeigu $n = 10^{20}$ m^{-3}, tada plazmos išlaikymo trukmė turi būti ilgesnė už 0,3 s.

8.4.5. *Magnetinis plazmos išlaikymas*

Magnetiniame lauke elektringąją dalelę, kurios krūvis q, veikia Lorenco jėga

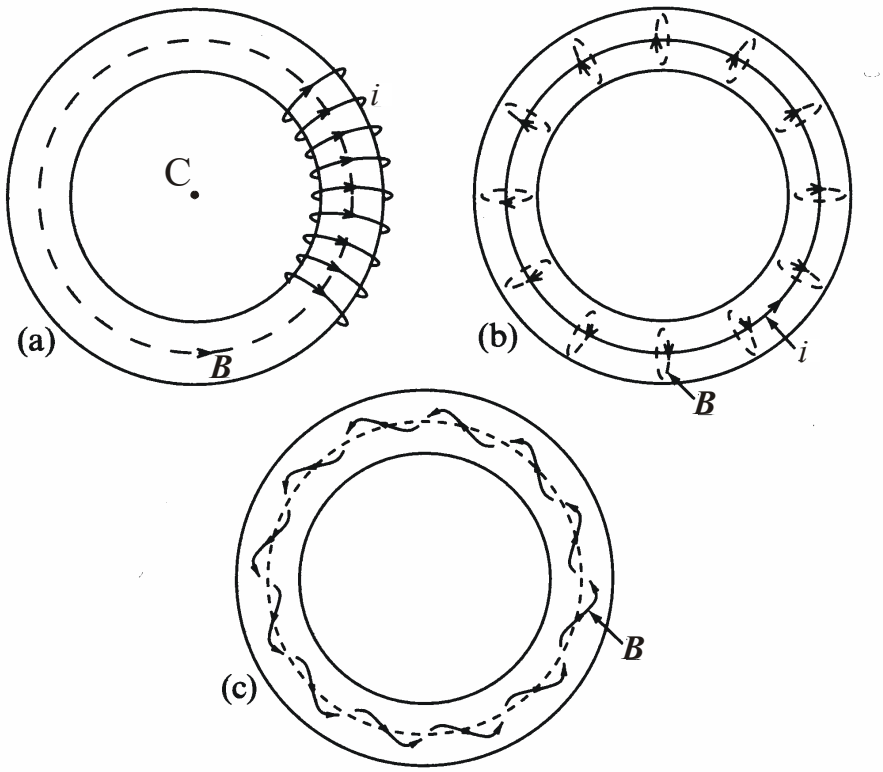
$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\,.$$

Dalelė juda spirale apie magnetinio lauko linijas. Taigi, yra apribotas dalelės judėjimas statmena laukui kryptimi. Judėjimą išilgai lauko linijų galima apriboti naudojant ***magnetinius veidrodžius***, kuriuose silpno lauko sritis yra tarp dviejų stipraus lauko sričių.

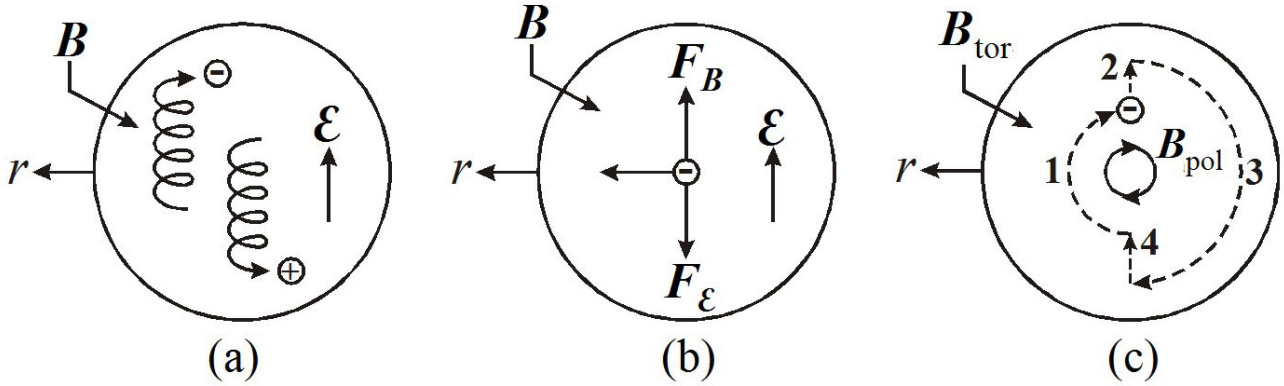


8.14 pav. Teigiamojo elektros krūvio (Q) dalelės judėjimas magnetiniame veidrodyje. Dalelė juda iš vienalyčio magnetinio lauko srities (kairėje) į stiprėjančio lauko sritį (dešinėje)

Kitas būdas remiasi tuo, kad yra naudojamos *uždaros* lauko linijos. Paprasčiausias tokio tipo laukas – ***toroidinis laukas***, t. y. laukas, kurio linijos yra apskritimai. Tokį lauką galima gauti naudojant toro formos ritę. Tačiau toks laukas yra nevienalytis – stipresnis prie toro vidinio krašto, negu prie išorinio. Todėl atsiranda elektronų ir branduolių dreifas vertikalia kryptimi, priešingomis kryptimis (žr. pav.). Dėl šio krūvininkų atskyrimo atsiranda elektrinis laukas, kuris iš dalies kompensuoja magnetinio lauko poveikį, jeigu dalelės (elektrono arba branduolio) greitis nukreiptas į toro išorę. Kad to išvengti, įjungiamas ***poloidinis laukas***, t. y. laukas, kurio linijos yra apskritimai, kurių centrai guli ant toro ašies. Tam plazmą sudarantys branduoliai ir elektronai yra įgreitinami išilgai toro ašies. Tokie įrenginiai vadinami ***tokamakais*** (šis žodis yra kilęs iš rusiškos santrumpos „**то**роидальная **ка**мера в **ма**гнитных **к**атушках“).



8.15 pav. (a) Toroidinis magnetinis laukas ***B***, kurį sukuria srovė *i*, tekanti aplink torą apsivijusia rite (paveiksle pavaizduotos kelios tos ritės vijos). (b) Poloidinis laukas, kurį sukuria srovė, tekanti išilgai toro ašies. (c) Toroidinio ir poloidinio laukų suma



8.16 pav. Toro pjūvis išilgai plokštumos, kuri statmena toroidinio magnetinio lauko linijoms. Magnetinio lauko indukcija ***B*** (ji nukreipta į brėžinio plokštumą) mažėja, didėjant atstumui *r* nuo toro centro (jį atitinka taškas *C* 8.15a pav.). (a) Dalelių judėjimas brėžinio plokštumoje (judėjimas ***B*** kryptimi neparodytas). (b) Magnetinė ($\boldsymbol{F_B}$) ir elektrostatinė ($\boldsymbol{F}\varepsilon$) jėgos, kurios veikia elektroną, kuris juda *r* didėjimo kryptimi. (c) Supaprastintas elektrono judėjimas brėžinio plokštumoje, kai vienu metu yra toroidinis ($\boldsymbol{B}_{\text{tor}}$) ir poloidinis ($\boldsymbol{B}_{\text{pol}}$) laukai, laikant, kad elektrono dreifas dėl toroidinio lauko nevienalytiškumo ir jo judėjimas išilgai poloidinio lauko linijų yra atskirti laike

9. Jonizuojančiosios spinduliuotės biologinis poveikis

9.1. Įvadas

Spinduliuotės energijos perdavimas audiniui atitinka ***tiesioginę pažaidą*** (10^{-12} – 10^{-8} s). Biologinio audinio pažeidimai, kuriuos sukelia atsiradusios chemiškai aktyvios molekulės, yra vadinami ***netiesiogine pažaida*** (nuo 10^{-7} s iki kelių valandų arba ilgiau).

9.2. Netiesioginė cheminė pažaida

$$H_2O + \text{spinduliuotė} \rightarrow H_2O^+ + e^- .$$

$$e^- + H_2O \rightarrow H_2O^- .$$

$$H_2O^+ \rightarrow H^+ + OH^\bullet ,$$

$$H_2O^- \rightarrow H^\bullet + OH^- .$$

$$RH + OH^\bullet \rightarrow R^\bullet + H_2O ,$$

$$RH + H^\bullet \rightarrow R^\bullet + H_2 .$$

Deguonies vaidmuo:

$$R^\bullet + O_2 \rightarrow RO_2^\bullet .$$

Laisvasis radikalas $RO_2^\bullet$ vadinamas ***organiniu peroksido radikalu***.

$$RO_2 + RH \rightarrow RO_2H + R^\bullet .$$

9.3. Jonizuojančiosios spinduliuotės dozės sąvoka

Sugertoji dozė arba spinduliuotės dozė:

$$D_\mathrm{s} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}m}$$

Vidutinė sugertoji dozė:

$$D_\mathrm{s,vid} = \frac{E}{m}$$

Matavimo vienetas – grėjus (Gy):

$$1\ \mathrm{Gy} = 1\ \mathrm{J/kg}$$

Nesisteminis vienetas – radas: 1 rad = 0,01 Gy

Sugertosios dozės galia – tai sugertoji dozė per laiko vienetą

Dozės išskaidymas į mažesnes dozes vadinamas ***frakcionavimu*** (iš lot. žodžio „fractus“ – „padalytas“).

Ilginė energijos perdava („IEP“; angl. „*linear energy transfer*“) – energijos kiekis, kurį dalelė perdavė *artimiems* atomams ir molekulėms vienetinio ilgio kelyje.

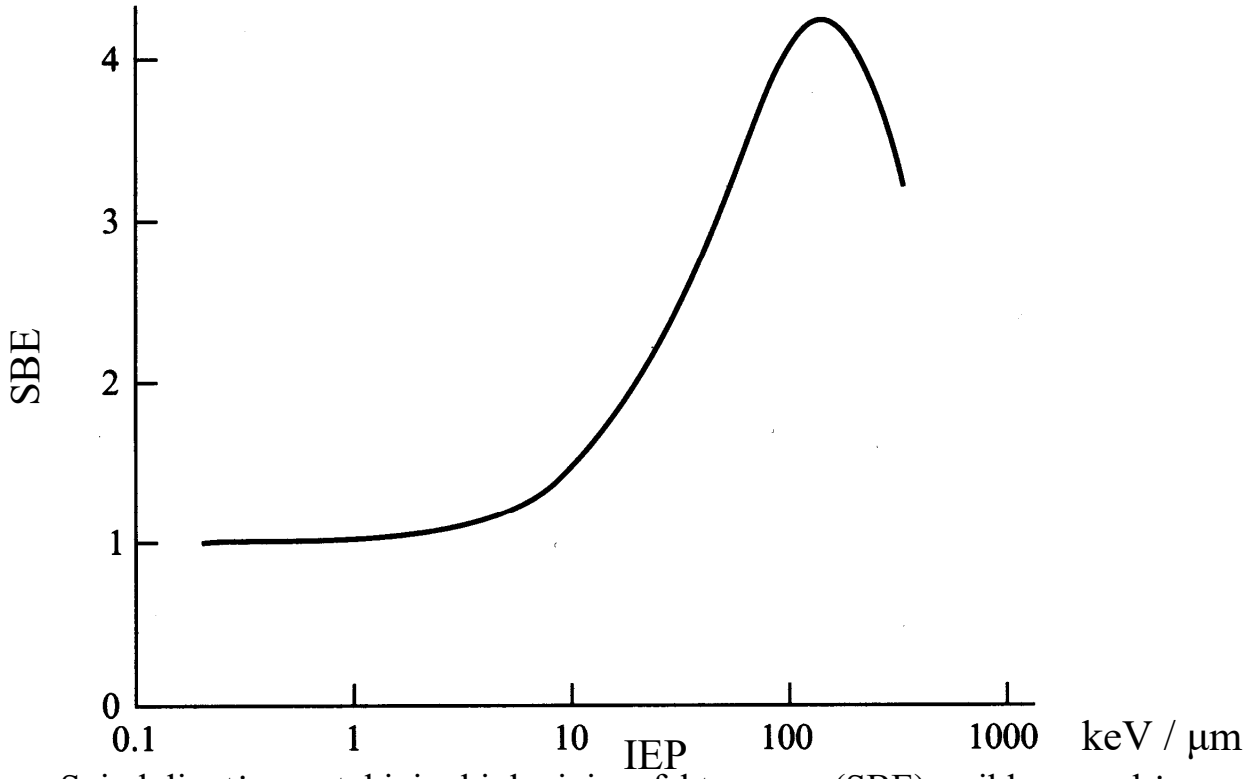
Vandens arba biologinio audinio IEP kinta nuo mažesnių už 1 keV/μm verčių (elektronai, gama fotonai) iki maždaug 100 keV/μm (protonai, alfa dalelės, neutronai).

Biologinį poveikį galima įvertinti dviem požiūriais:

1) pagal poveikį *svarbiems* audiniams (pvz., smegenims);
2) pagal nepataisomai pažeistų ląstelių skaičių, *nepriklausomai nuo tų ląstelių svarbos*.

Jeigu spinduliuotės šaltinis yra organizmo išorėje, tada pirmuoju požiūriu stipresnis poveikis yra spinduliuotės, kurios IEP yra maža (nes ta spinduliuotė giliau įsiskverbia ir gali paveikti kritinius vidinius audinius ir organus), o antruoju požiūriu stipresnis poveikis spinduliuotės, kurios IEP yra didelė.

Kiekybiškai įvertinant biologinį poveikį, naudojamas antrasis minėtasis kriterijus. Santykinis biologinis efektyvumas (SBE) nusako, kiek kartų duotosios rūšies spinduliuotės nepataisomai pažeistų ląstelių skaičius yra didesnis už tos pačios sugertosios dozės 250 keV energijos fotonų nepataisomai pažeistų ląstelių skaičių.



9.1 pav. Spinduliuotės santykinio biologinio efektyvumo (SBE) priklausomybė nuo jos ilginės energijos perdavos (IEP) biologiniame audinyje

9.1 lentelė. Įvairių rūšių spinduliuotės svoriniai daugikliai

Spinduliuotės rūšis	Energija	Svorinis daugiklis w_s
Fotonai, elektronai	Visos energijos	1
Neutronai	< 10 keV	5
	10 – 100 keV	10
	100 keV – 2 MeV	20
	2 – 20 MeV	10
	> 20 MeV	5
Protonai	< 20 MeV	5
α dalelės, dalijimosi skeveldros, sunkieji branduoliai		20

Lygiavertė dozė:

$$D_{\mathrm{a}} = w_{\mathrm{s}} D_{\mathrm{s}}.$$

Jeigu vienu metu veikia kelių rūšių spinduliuotė,

$$D_{\mathrm{a}} = \sum_{\mathrm{s}} w_{\mathrm{s}} D_{\mathrm{s}}.$$

Efektinė dozė:

$$D_{\mathrm{ef}} = \sum_{\mathrm{a}} w_{\mathrm{a}} D_{\mathrm{a}} = \sum_{\mathrm{a}} w_{\mathrm{a}} \sum_{\mathrm{s}} w_{\mathrm{s}} D_{\mathrm{a,s}}.$$

Kai visas yra apšvitinamas tolygiai (t. y., kai visuose taškuose sugertoji dozė D_{s} yra vienoda),

$$D_{\mathrm{ef}} = \sum_{\mathrm{s}} w_{\mathrm{s}} \sum_{\mathrm{a}} w_{\mathrm{a}} D_{\mathrm{a,s}} = \sum_{\mathrm{s}} w_{\mathrm{s}} D_{\mathrm{s}} \sum_{\mathrm{a}} w_{\mathrm{a}} = \sum_{\mathrm{s}} w_{\mathrm{s}} D_{\mathrm{s}} \equiv D_{\mathrm{L}},$$

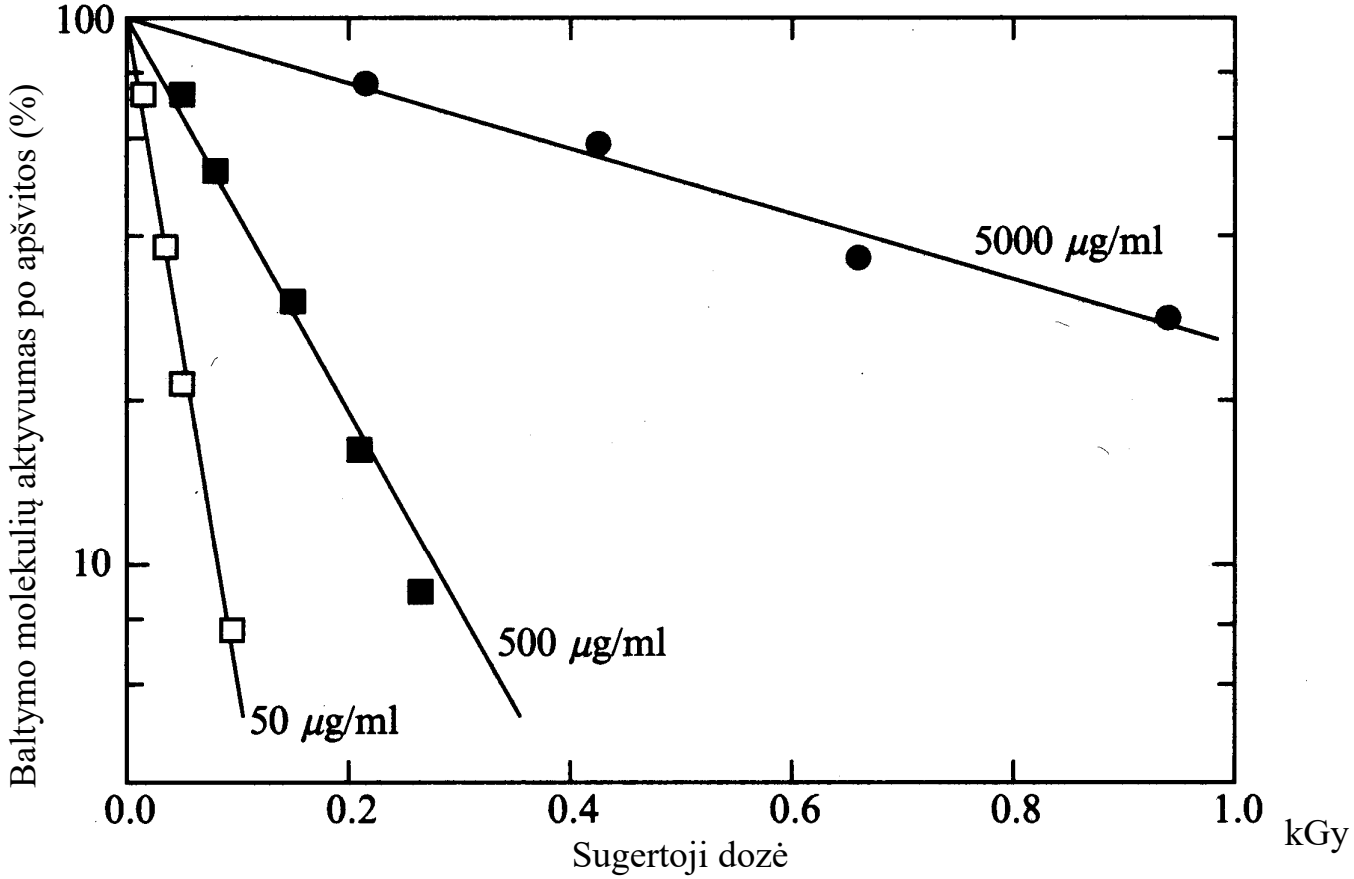
čia D_{L} yra lygiavertė dozė.

9.2 lentelė. Atskirų žmogaus kūno organų audinių svoriniai daugikliai

Audinys	**Audinio svorinis daugiklis w_{a}**
Lytiniai organai	0,20
Raudonieji kaulų smegenys	0,12
Storoji žarna	0,12
Plaučiai	0,12
Skrandis	0,12
Šlapimo pūslė	0,05
Krūtinė	0,05
Kepenys	0,05
Stemplė	0,05
Skydinė liauka	0,05
Oda	0,01
Kaulų paviršius	0,01
Likusioji kūno dalis	0,05

9.4. Kritinių audinių pažaida

9.4.1. *Sudėtingų molekulių pažaida*



9.2 pav. Baltymo dezoksiribonukleazės molekulių aktyvumo tirpale priklausomybė nuo sugertosios dozės, esant trims skirtingoms baltymo tirpalo koncentracijoms. Aktyvumas išreikštas procentais atžvilgiu jo vertės prieš apšvitinimą. Ordinačių ašies mastelis yra logaritminis

Puasono statistika: tikimybė, jog duotoji molekulė apšvitos metu bus pažeista n kartų, yra lygi

$$P(n) = \frac{\mu^n}{n!} \mathrm{e}^{-\mu},$$

čia μ yra vidutinis vienos molekulės pažeidimų skaičius (t. y. pilnutinio pažeidimų skaičiaus ir pilnutinio molekulių skaičiaus santykis). „Pažeidimas“ – tai nutrauktas cheminis ryšys.

$$P(0) = \mathrm{e}^{-\mu}$$

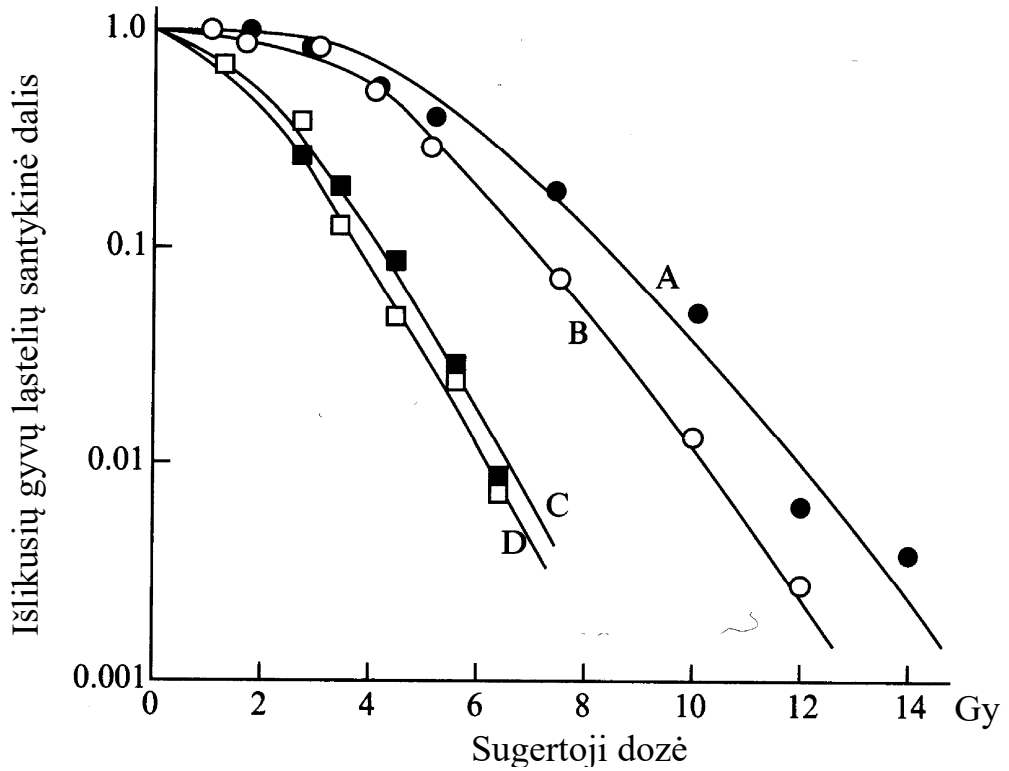
9.4.2. *Ląstelių pažaida*

DNR molekulė lemia ląstelės gebėjimą gyva jonizuojančiosios spinduliuotės sąlygomis. Kadangi DNR molekulė yra daug didesnė už baltymo molekulę, tai žinduolio ląstelės jonizuojančiosios spinduliuotės mirtinos sugertosios dozės vertė (1 – 2 Gy) yra daug mažesnė negu baltymo molekulės.

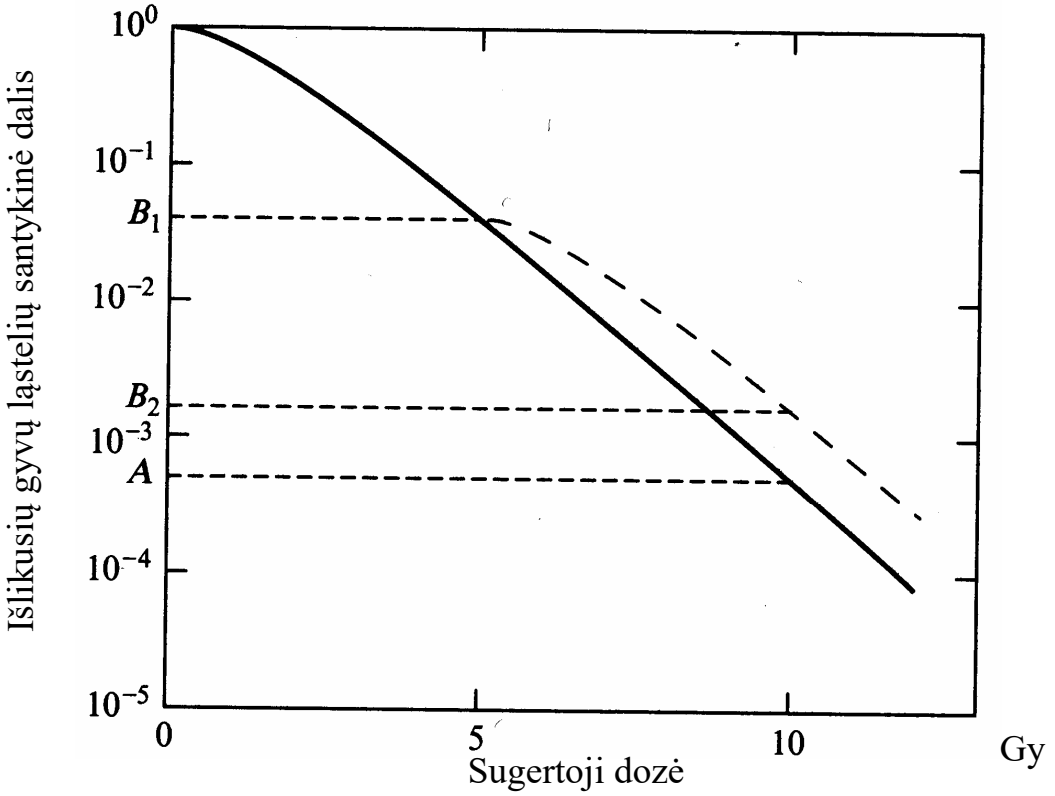
Vidutinio likusių gyvų ląstelių skaičiaus priklausomybė nuo sugertosios dozės nėra eksponentinė. Nuokrypį nuo eksponentinio mažėjimo galima paaiškinti tuo, kad ląstelė miršta tik po dviejų arba didesnio skaičiaus pažeidimų, o jeigu yra tik vienas pažeidimas, tada ląstelė per kelių valandų laiką jį pataiso. Tada ląstelės išlikimo tikimybė lygi

$$P(0) + P(1) = (1 + \mu)\mathrm{e}^{-\mu},$$

čia μ yra vidutinis vienos ląstelės pažeidimų skaičius apšvitos metu (t. y. pilnutinio pažeidimų skaičiaus ir pilnutinio ląstelių skaičiaus santykis).



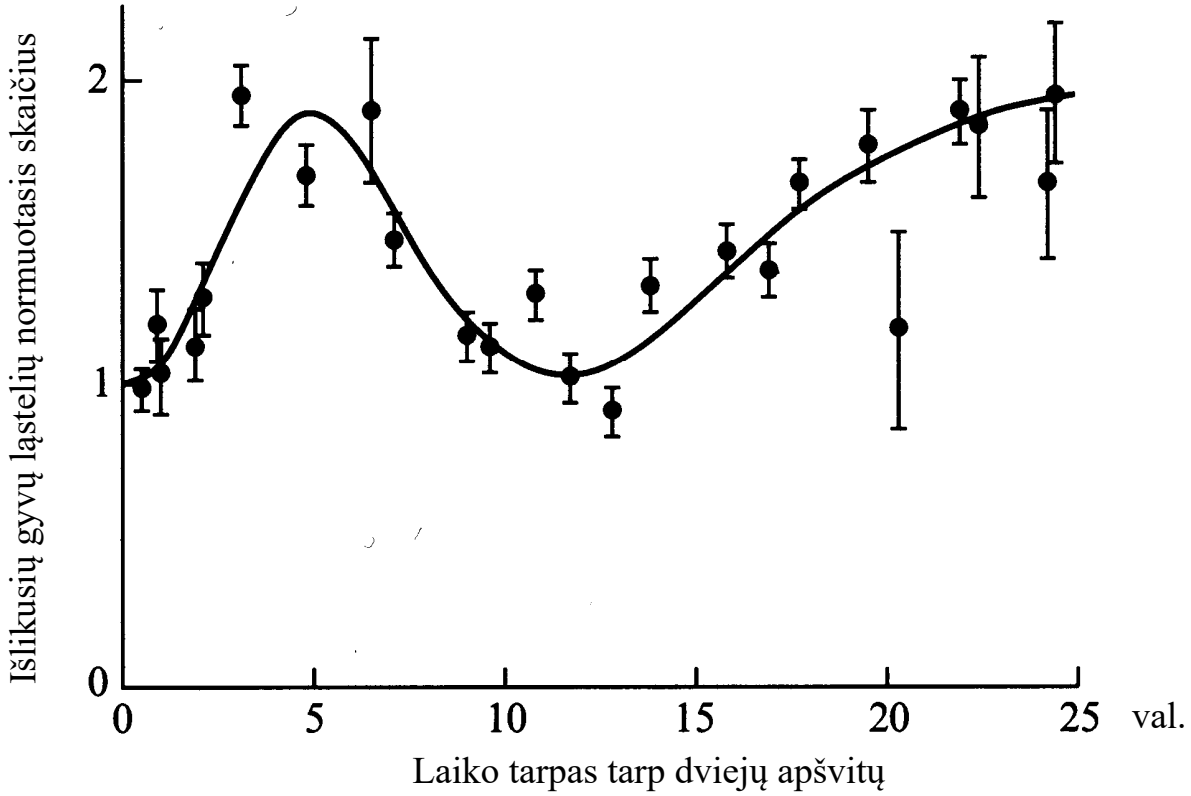
9.4 pav. Ląstelių, kurios liko gyvos po apšvitos, santykinės dalies priklausomybė nuo sugertosios dozės. Kreivės A ir B atitinka apšvitą rentgeno spinduliais, o kreivės C ir D atitinka apšvitą neutronais. Kreivės A ir C (uždari simboliai) atitinka 5 h pertrauką tarp apšvitos ir išlikusių gyvų ląstelių santykinės dalies matavimo. Ordinačių ašies mastelis yra logaritminis



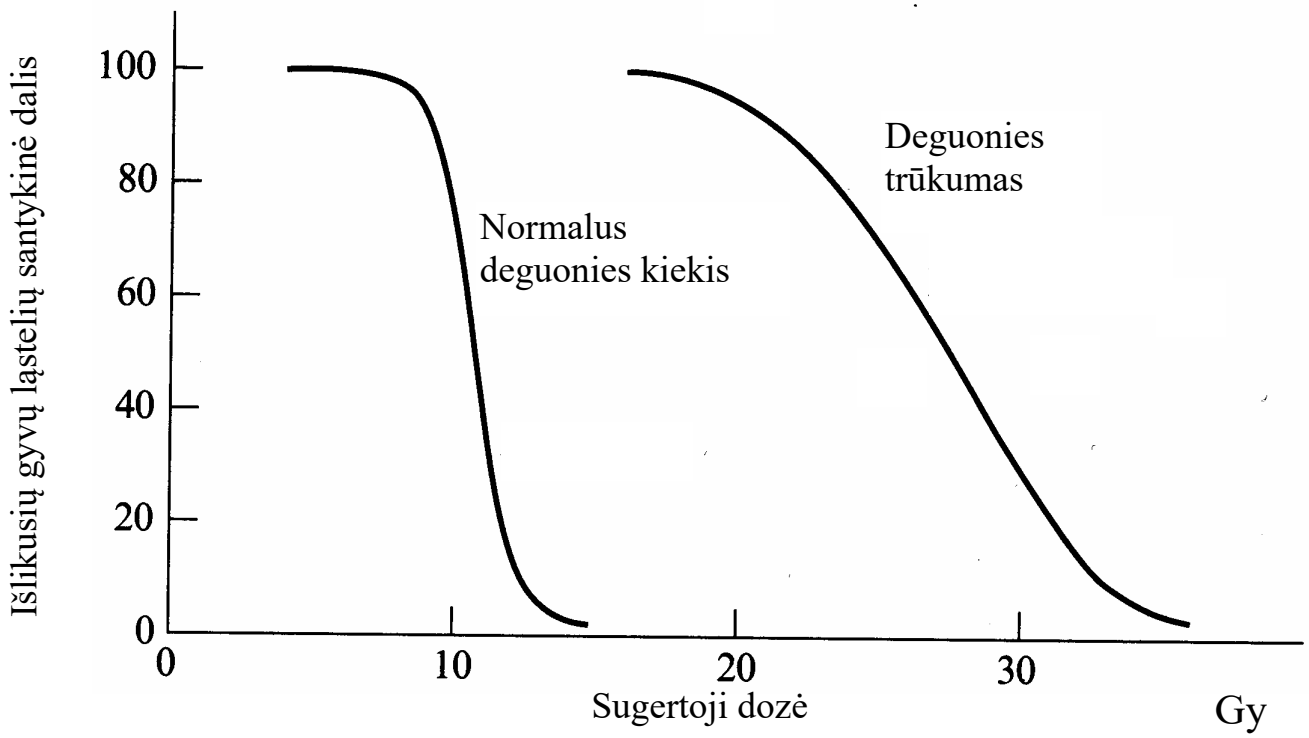
9.5 pav. Ląstelių, kurios liko gyvos po apšvitos, santykinės dalies idealizuota priklausomybė nuo sugertosios dozės (modelis, pagal kurį pavieniai pažeidimai yra pataisomi)

9.4.3. *Pažaidą modifikuojantys veiksniai*

Du svarbiausi modifikuojantys veiksniai yra ląstelių ciklo fazė ir deguonies efektas.



9.6 pav. Pelės kaulų smegenų ląstelių, kurios liko gyvos po dviejų apšvitų, kurių kiekvienos sugertoji dozė 2 Gy, skaičiaus ir tokių pačių ląstelių, kurios liko gyvos po vienos 4 Gy apšvitos, skaičiaus santykio priklausomybė nuo intervalo tarp minėtų dviejų apšvitų



9.7 pav. Ląstelių, kurios liko gyvos po apšvitos, santykinės dalies priklausomybė nuo sugertosios dozės, esant dviem deguonies koncentracijos audinyje vertėms

10. Jonizuojančioji spinduliuotė aplinkoje

Tarptautinė Radiologinės Apsaugos Komisija (TRAK)

angl. „*International Commission on Radiological Protection*“ (*ICRP*).

10.1 lentelė. Jungtinės Karalystės gyventojų vidutinės metinės efektinės dozės

Šaltinis	Metinė efektinė dozė (μSv)	Atskirų asmenų dozių kitimo intervalas (μSv)
Natūralieji šaltiniai (85 %):		
Kosminiai spinduliai	260	200 – 300
Maistas ir gėrimai	300	100 – 1000
Radonas	1300	300 – 100 000
Žemės gama spinduliuotė	350	100 – 1000
Iš viso natūraliųjų šaltinių:	2210	
Dirbtiniai šaltiniai (15 %):		
Medicininiai šaltiniai	370	Priklauso nuo taikymo; gali būti didelė
Pramoninės atliekos	<1	Iki 150 – 200
Nuosėdos po branduolinių sprogimų	5	Iki 15
Įvairios prekės	0,4	1 – 100
Iš viso dirbtinių šaltinių:	376	
Profesinė veikla (0,3 %)	8	Iki 20 000
Iš viso:	2600	
Specialių grupių papildoma apšvita:		
Srityse, kur yra radono perteklius	5000	
Branduolinė pramonė	1000	
Radiacijos darbuotojai	500	
Medicininės radiacijos darbuotojai	100	

10.2. Dozės apskaičiavimas

Sugertoji dozė priklauso nuo šių veiksnių:

1) Spinduliuotės intensyvumas (energijos kiekis ploto vieneuti per laiko vienetą)
2) Apšvitos trukmė
3) Kritusios energijos dalis f, kuri buvo sugerta švitinamajame audinyje.

Sunkiųjų elektringųjų dalelių ir mažos energijos elektronų $f \approx 1$.
Greitųjų elektronų ir didelės energijos (gama arba rentgeno) fotonų $f < 1$.

Išorinės gama spinduliuotės atveju koeficientą f galima apytiksliai apskaičiuoti pagal formulę

$$f = 1 - \exp(-\mu_e d),$$

čia μ_e yra ***energijos sugerties koeficientas***, o d yra sluoksnio storis.

[Pilnutinė medžiagoje sugerta energija bendruoju atveju yra mažesnė už kinetinę energiją, kurią fotonai perdavė medžiagos elektronams. Pastaroji energija, apskaičiuota masės vienetui, yra vadinama ***kerma*** (angl. „***k***inetic ***e***nergy ***r***eleased in ***ma***tter“).]

Kai fotono energija 0,1 MeV < E_γ < 3 MeV, biologiniame audinyje $\mu_e \approx 0{,}07\ \mathrm{cm}^{-1}$. Tada, remiantis prielaida, kad $d = 20$ cm, gaunama tokia vidutinės sugertosios dozės galia, kai biologinis audinys švitinamas išoriniais gama arba rentgeno spinduliuotės šaltiniais:

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}(\mu\mathrm{Sv\ h}^{-1}) \approx \frac{A(\mathrm{MBq}) \times E_\gamma(\mathrm{MeV})}{6 \times [r(\mathrm{m})]^2}$$

Vidiniai šaltiniai:

$$\frac{\mathrm{d}D_\mathrm{a}}{\mathrm{d}t} = \frac{A\ E_\mathrm{dal}\ f}{m_\mathrm{a}}$$

Apskaičiuojant vidinės apšvitos sugertąją dozę, reikia atsižvelgti į šiuos veiksnius:

1) Ne visa išspinduliuota energija sugeriama audinyje, kuriame vyksta spinduliavimas (t. y. $f < 1$);
2) Radioaktyviojo nuklido kiekis organizme mažėja laike (***biologinė pusėjimo trukmė***);
3) Kai kurie elementai organizme pasiskirsto netolygiai.

10.2 lentelė. Efektinės dozės, kai į organizmą patekusio nuklido pilnutinis aktyvumas yra 1 kBq

Nuklidas	Jautriausias organas	Dozė įkvėpus (μSv/kBq)	Dozė prarijus (μSv/kBq)
^{90}Sr	Raudonieji kaulų smegenys, plaučiai	30	28
^{131}I	Skydliaukė	11	22
^{123}I	Skydliaukė	0,11	0,21
^{137}Cs	Visas kūnas	6,7	13

10.3. Rizikos apskaičiavimas

10.3 lentelė. Mirties nuo jonizuojančiosios spinduliuotės sukelto vėžio rizikos koeficientai

Audinys arba organas	Efektas	Rizikos koeficientas (Sv^{-1})
Krūtis	Vėžys	$2{,}0 \cdot 10^{-3}$
Raudonieji kaulų smegenys	Leukemija	$5{,}0 \cdot 10^{-3}$
Plaučiai	Vėžys	$8{,}5 \cdot 10^{-3}$
Skydliaukė	Vėžys	$8{,}0 \cdot 10^{-4}$
Kaulų paviršius	Vėžys	$5{,}0 \cdot 10^{-4}$
Kiti audiniai	Vėžys	$3{,}4 \cdot 10^{-2}$
Visas kūnas, visų rūšių vėžys		$5 \cdot 10^{-2}$

10.4 lentelė. TRAK rekomenduojamos didžiausios leidžiamos efektinės dozės

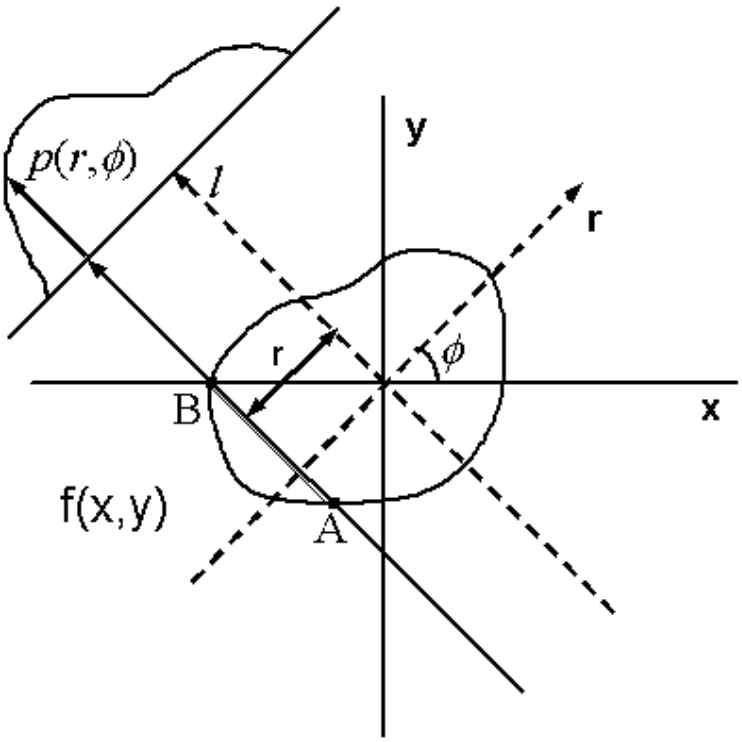
Audinys	Radiacijos darbuotojai	Praktikantai	Gyventojai
Visas kūnas (mSv / m.)	20	6	1
Oda (mSv vienai apšvitai)	500	150	50
Akies lęšiukas (mSv vienai apšvitai)	150	50	15
Gemalas (mSv vienam nėštumui)	1		

11. Rentgeno ir žymėtųjų atomų tomografija

11.1. Kompiuterinės tomografijos matematiniai principai

Tikslas – išmatuoti funkcijos $f(x, y)$ vertes duotajame skerspjūvyje pagal tos funkcijos ***linijinius integralus*** išilgai atkarpų, kurių galai priklauso tiriamojo skerspjūvio perimetrui. Kiekvieną tokią atkarpą nusako kitos dvi koordinatės – radialioji koordinatė r ir posūkio kampas ϕ:

$$p(r,\phi) = \int_{A}^{B} f(x,y)\mathrm{d}l.$$

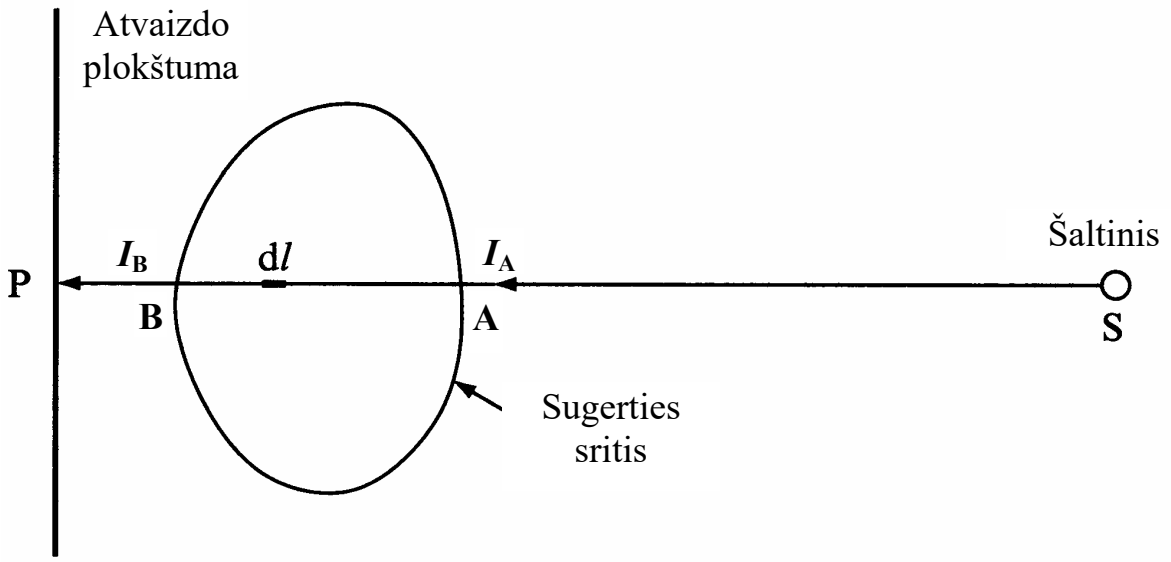


11.1 pav. Integravimo liniją AB apibrėžia du kintamieji: radialioji koordinatė r ir posūkio (azimutinis) kampas ϕ

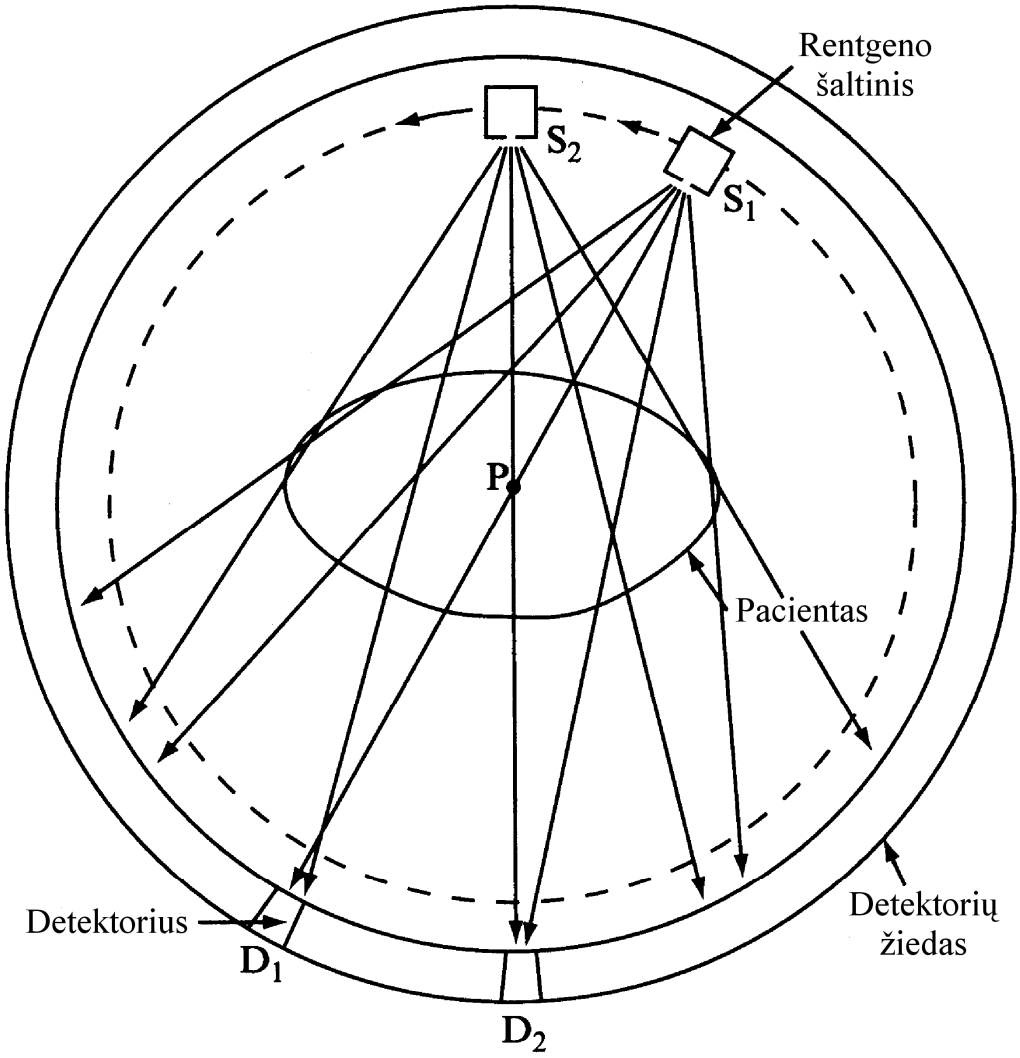
Skirtingi tomografijos taikymai skiriasi integruojamojo dydžio prasme ir linijinių integralų matavimo metodika.

11.2. Kompiuterinė rentgeno tomografija

$$\ln\left(\frac{I_A}{I_B}\right) = \int_A^B \mu \mathrm{d}l$$

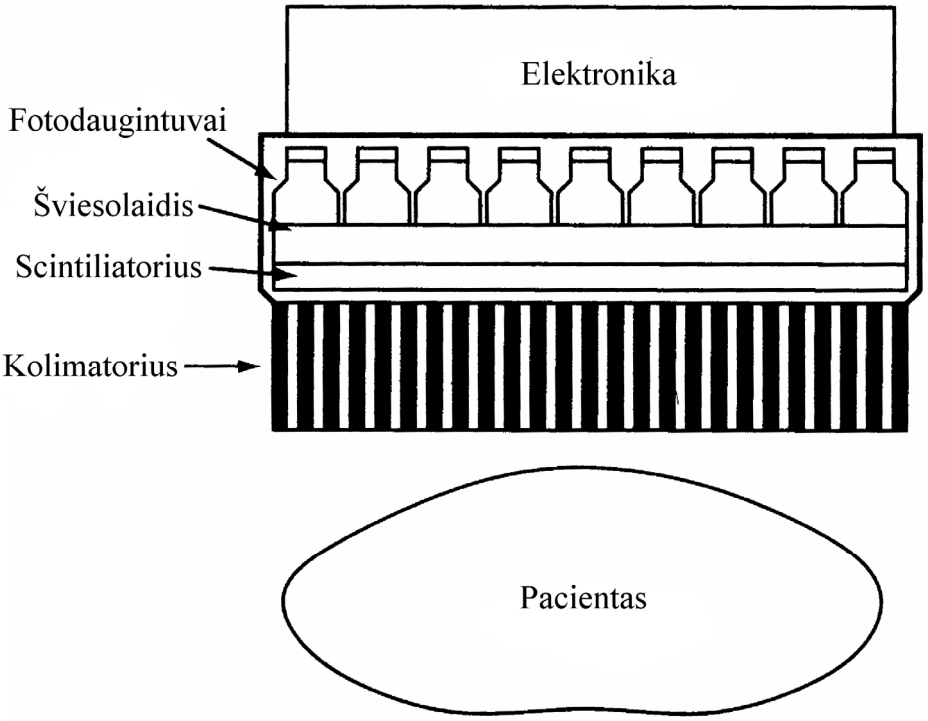


11.2 pav. Silpimo koeficiento linijinio integralo matavimas



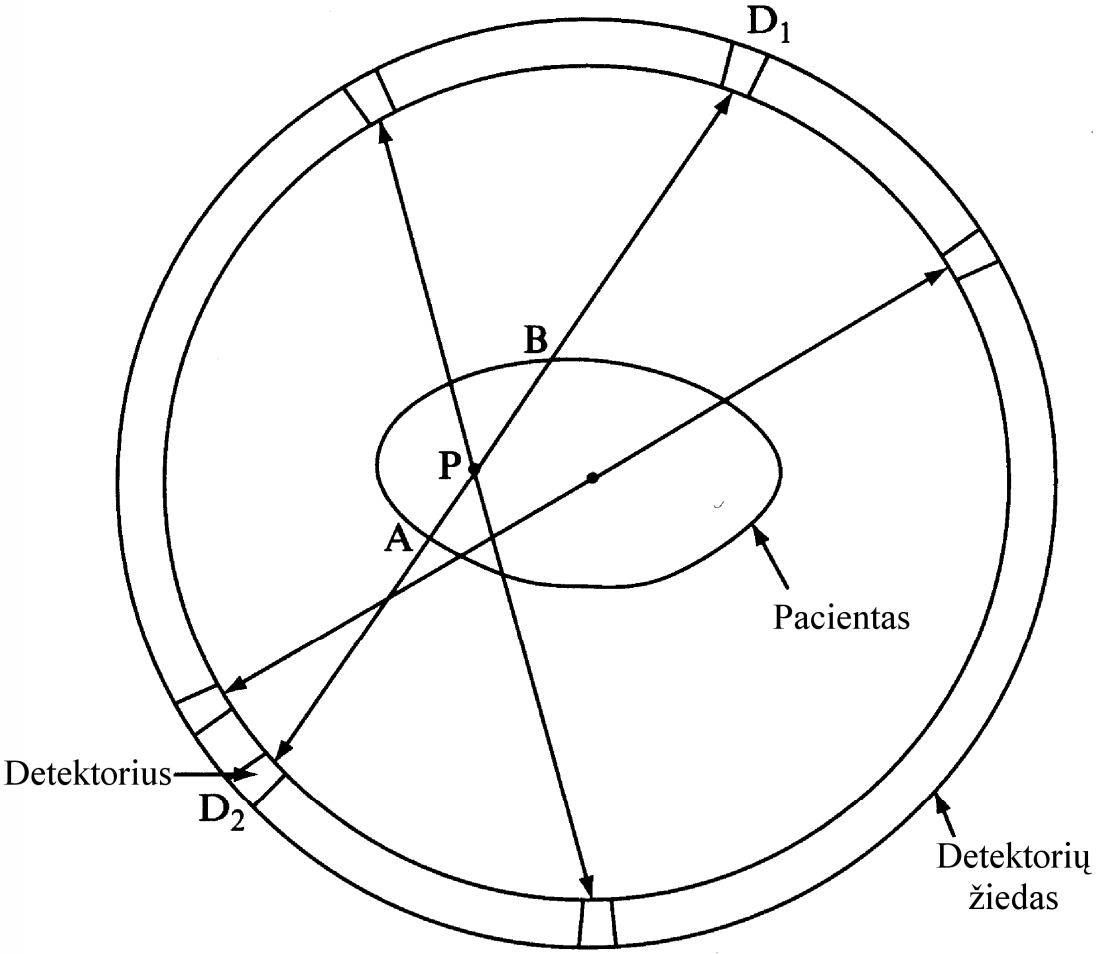
11.3 pav. Kompiuterinės rentgeno tomografijos įrenginio schema

11.3. Vieno fotono emisijos kompiuterinė tomografija



11.4 pav. Gama kameros schema

11.4. Pozitrono emisijos kompiuterinė tomografija



11.5 pav. Pozitrono emisijos kompiuterinės tomografijos įranga