VILNIAUS UNIVERSITETAS

Fizikos fakultetas

Mokomoji atomo ir branduolio fizikos laboratorija

Laboratorinis darbas Nr. 5

# DALELIŲ SKAIČIAVIMO STATISTINIŲ DĖSNINGUMŲ TYRIMAS

Parengė A. Poškus

2024-08-28

# Turinys

# Darbo tikslas

Išmatuoti dalelių, kurios užregistruojamos per pastovų laiko tarpą esant pastovioms matavimo sąlygoms, skaičiaus skirstinį esant įvairioms dalelių skaičiavimo spartoms. Įvertinti nuokrypį nuo Puasono skirstinio dėl dalelių detektoriaus neveikos trukmės.

## 1. Užduotys

1. Padėjus radioaktyvųjį šaltinį prie detektoriaus, atlikti kelis tūkstančius vienodos trukmės matavimų (vieno matavimo trukmė – 0,1 s, vieno matavimo rezultatas – detektuotų dalelių skaičius). Šiuos matavimus atlikti, esant šešiems atstumams tarp šaltinio ir detektoriaus.
2. Kiekvienam iš šešių duomenų rinkinių nubraižyti dalelių skaičiaus histogramą, apskaičiuoti vidurkį, dispersiją ir standartinį nuokrypį bei jų atsitiktines paklaidas.
3. Išmatuotąjį dalelių skaičiaus skirstinį palyginti su Puasono skirstiniu. Paaiškinti nuokrypius nuo Puasono skirstinio.
4. Pagal užregistruotų dalelių skaičiaus skirstinio nuokrypius nuo Puasono skirstinio apskaičiuoti dalelių detektoriaus neveikos trukmę ir jos pasikliautinąjį intervalą.

## 2. Kontroliniai klausimai

1. Kodėl per tam tikrą laiką užregistruotų $\alpha$, $\beta$ arba $\gamma$ dalelių skaičius yra atsitiktinis dydis?
2. Apibrėžkite sąvokas „atsitiktinio dydžio dažnis“ ir „dažnio pasiskirstymo funkcija“.
3. Kokiomis formulėmis apibrėžiami atsitiktinio dydžio empiriniai vidurkis, dispersija ir standartinis nuokrypis? Kokią informaciją apie tiriamąjį atsitiktinį dydį suteikia jo standartinis nuokrypis?
4. Apibrėžkite statistinio modelio, tikimybės ir skirstinio sąvokas.
5. Puasono skirstinys kaip binominio skirstinio atskirasis atvejis. Puasono skirstinio pavidalo priklausomybė nuo vidurkio.
6. Puasono skirstinio aproksimavimas Gauso skirstiniu. Tikimybės tankio bendroji apibrėžtis. Trijų sigma taisyklė.
7. Dalelių skaičiavimo sistemos patikrinimas, naudojant $\chi^2$ kriterijų.
8. Skaitiklio neveikos trukmės įtaka užregistruotų dalelių skaičiaus skirstiniui.
9. Vieno dalelių skaičiaus matavimo paklaidos skaičiavimas.
10. Tarkime, dalelių skaičius $x$ išmatuotas $n$ kartų vienodomis sąlygomis ir apskaičiuotas dalelių skaičiaus standartinis nuokrypis $\sigma_x$. Išveskite formulę, kuri nusako dalelių skaičiaus *vidurkio a* standartinį nuokrypį $\sigma_a$.

**Literatūra:**


1. Poškus A. Atomo fizika ir branduolio fizikos eksperimentiniai metodai. Vilnius: Vilniaus universiteto leidykla, 2008. 544 p.
2. Krane K. S. Introductory Nuclear Physics. New York: John Wiley & Sons, 1988. p. 217 – 220.
3. Knoll G. F. Radiation Detection and Measurement. 3rd Edition. New York: John Wiley & Sons, 2000. p. 65 – 92.
4. Абрамов А. И. и др. Основы экспериментальных методов ядерной физики. – М.: Энергоатомиздат, 1985, с. 6 – 27.

# 3. Dalelių skaičiavimo statistika

## 3.1. Matavimų paklaidos

Bet kurį fizikinį dydį (pvz., masę, ilgį, vidutinį įvykių skaičių) galima išmatuoti tik apytiksliai. Matuodami duotąjį fizikinį dydį, po skirtingų matavimų visada gausime šiek tiek skirtingas vertes, net jeigu visų matavimų sąlygos yra vienodos. Todėl matavimų metu galima gauti tik tam tikrą matuojamojo dydžio verčių *intervalą*, kuriam su žinoma tikimybe priklauso tikroji vertė. Kuo kruopščiau matauojama ir kuo tobulesnė matavimų įranga, tuo siauresnis matuojamojo dydžio galimųjų verčių intervalas.

Skirtumas tarp dydžio išmatuotos vertės ir tikrosios vertės vadinamas matavimų ***absoliučiąja paklaida*** arba tiesiog ***paklaida***. Absoliučiosios paklaidos ir tikrosios vertės santykis vadinamas ***santykine paklaida***. Pagal prigimtį paklaidos skirstomos į atsitiktines ir sistemingąsias. Kaip matyti iš pavadinimo, ***atsitiktines paklaidas*** sąlygoja atsitiktiniai veiksniai (pvz., šiluminis krūvininkų judėjimas matavimo įrangos puslaidininkiniuoe elementuose), o ***sistemingąsias paklaidas*** sąlygoja neatsitiktiniai veiksniai (pvz., netiksliai sugraduota liniuotė). Atsitiktinės paklaidos gali būti ir teigiamos, ir neigiamos, ir dažniausiai abiejų ženklų tikimybės yra vienodos. Sistemingosios paklaidos dažniausiai būna vieno ženklo, t. y. jos arba padidina visų matavimų rezultatus, arba sumažina visų matavimų rezultatus. Atsitiktinių paklaidų neįmanoma pašalinti; jas galima tik sumažinti tobulinant matavimų metodiką. Sistemingąsias paklaidas galima pilnai pašalinti, jeigu yra žinoma jų priežastis. Toliau bus aptariamos tik atsitiktinės paklaidos.

Anksčiau pateikta paklaidos apibrėžtis nėra naudinga praktiniu požiūriu, nes ji apibrėžia paklaidą atžvilgiu tikrosios vertės, kurią, kaip ką tik minėta, neįmanoma absoliučiai tiksliai nustatyti. Analizuojant matavimų duomenis, vietoj anksčiau apibrėžtos paklaidos siekiama nustatyti vadinamąją ***standartinę paklaidą***, kuri nusako pusplotį intervalo, kuriam su žinoma tikimybe priklauso tikroji matuojamojo dydžio vertė. Šio intervalo centras atitinka matavimo rezultatą $x$ (arba kelių vienodomis sąlygomis atliktų matavimų rezultatų aritmetinį vidurkį), o visas intervalas nurodomas šitaip: $x \pm \Delta x$. Čia $\Delta x$ yra dydžio $X$ pavienio matavimo arba kelių matavimų vidurkio absoliučioji standartinė paklaida. (toliau raide „$X$“ žymėsime tam tikrą dydį, o raide „$x$“ – jo vertę). Santykinė standartinė paklaida lygi absoliučiosios standartinės paklaidos ir išmatuotosios vertės $x$ modulio santykiui $\Delta x / |x|$.

Matavimų rezultatas $x$ yra bevertis, jeigu bent apytiksliai nėra žinoma jo standartinė paklaida. Ši paklaida apskaičiuojama matematinės statistikos metodais. Norint nustatyti matavimų rezultatų standartinę paklaidą, reikia žinoti matuojamojo dydžio skirstinį. Skirstinio sąvoka ir praktiniai taikymai aprašyti kituose šio skyriaus skyreliuose. Šiame įvadiniame skyrelyje paminėsime tik vieną svarbią išvadą: **jeigu pavienio matavimo standartinė paklaida lygi $\Delta x$, tada $n$ vienodų matavimų vidurkio standartinė paklaida artėja prie $\Delta x / \sqrt{n}$, kai $n$ artėja į begalybę.** Statistikoje standartinė paklaida vadinama „standartiniu nuokrypiu“. Standartinio nuokrypio tikslioji apibrėžtis bus pateikta 3.3 skyrelyje. Jeigu matavimo rezultatai pasiskirstę pagal Gauso skirstinį, tada standartinis nuokrypis nusako pusplotį intervalo, kuriam su 68,3 % tikimybe priklauso tikroji matuojamojo dydžio vertė (žr. 3.4.3 skyrelį).

## 3.2. Branduolių spinduliuotė ir statistika

Branduolio fizikoje ir elementariųjų dalelių fizikoje statistiniai metodai turi ypatingą reikšmę, nes mikropasaulio reiškiniai yra statistinės prigimties. Galima teigti, kad mikroskopinių ir makroskopinių dydžių matavimų paklaidos yra iš esmės skirtingos kilmės.

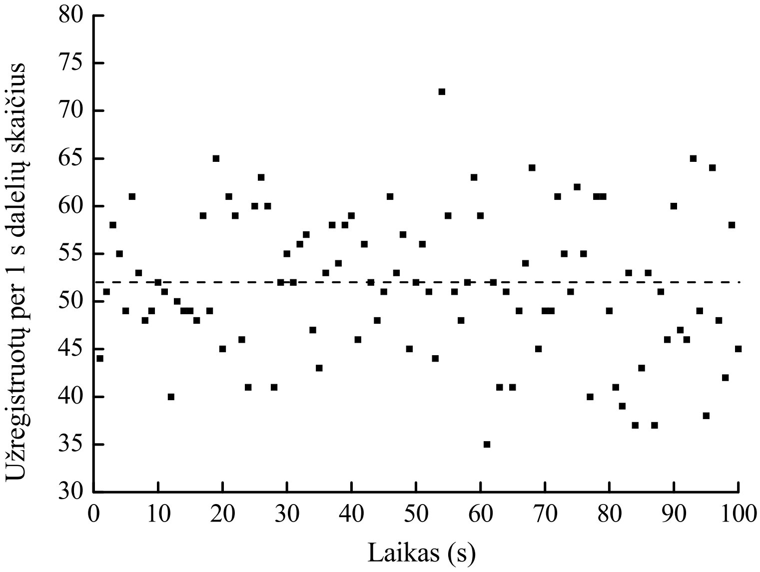
***Makroskopinių dydžių***, kurie apibūdina plika akimi regimus objektus, paklaidas galima laikyti tik matavimo metodikos netobulumo pasekme. T. y. galima laikyti, kad pats matuojamasis makroskopinis dydis objektyviai turi absoliučiai tiksliai apibrėžtą vertę, kurią būtų įmanoma nustatyti, jeigu matavimo įranga būtų tobula. Matuojant ***mikroskopinius dydžius***, kurie apibūdina mikropasaulio procesus (pvz., elektrono judėjimą atome arba atomo branduolio virsmus), matavimo rezultatų išsibarstymą sukelia ne tik netobula matavimų įranga, bet ir paties matuojamojo dydžio objektyvus neapibrėžtumas. Taigi, net jeigu matavimams būtų naudojama tobula įranga ir visi matavimai būtų atliekami visiškai vienodomis sąlygomis, skirtingų matavimų rezultatai vis tiek būtų išsibarstę tam tikrame intervale.

Mikroskopinis dydis, kurio statistinės savybės bus aprašytos toliau – tai radioaktyviosios spinduliuotės dalelių skaičius, kurį užregistruoja dalelių detektorius per apibrėžtą laiko tarpą. Minėtosios dalelės gali būti, pvz., $\alpha$ dalelės – aukštos energijos (dažniausiai ~1 MeV eilės) laisvieji $^4$He branduoliai, β dalelės – aukštos energijos (dažniausiai 10 keV – 10 MeV eilės) laisvieji elektronai arba pozitronai, arba γ kvantai – aukštos energijos (dažniausiai 10 keV – 10 MeV eilės) fotonai. Spinduliuojamų dalelių rūšis ir energija priklauso nuo radioaktyviojo šaltinio. Užregistruotų dalelių skaičius yra proporcingas tiriamojo radioaktyviojo bandinio aktyvumui, t. y. branduolių skilimų skaičiui per laiko vienetą. Taip yra todėl, kad skaičiuojamosios dalelės atsiranda, skylant branduoliams. T. y. viena užregistruota dalelė – tai vienas užregistruotas branduolio skilimas. Vidutinis detektoriaus užregistruotų per 1 s dalelių skaičius $\overline{x}$ nėra lygus bandinio aktyvumui $\Phi$ (t. y. vidutiniam per 1 s skilusių branduolių skaičiui). Šių dviejų vidurkių santykį $\overline{x}\,/\,\Phi$ žymėsime $K$. Jeigu kiekvieno skilimo metu išspinduliuojama viena dalelė, tada $K < 1$, nes detektorius užregistruoja tik dalį išspinduliuotų dalelių. Taip yra dėl trijų priežasčių:

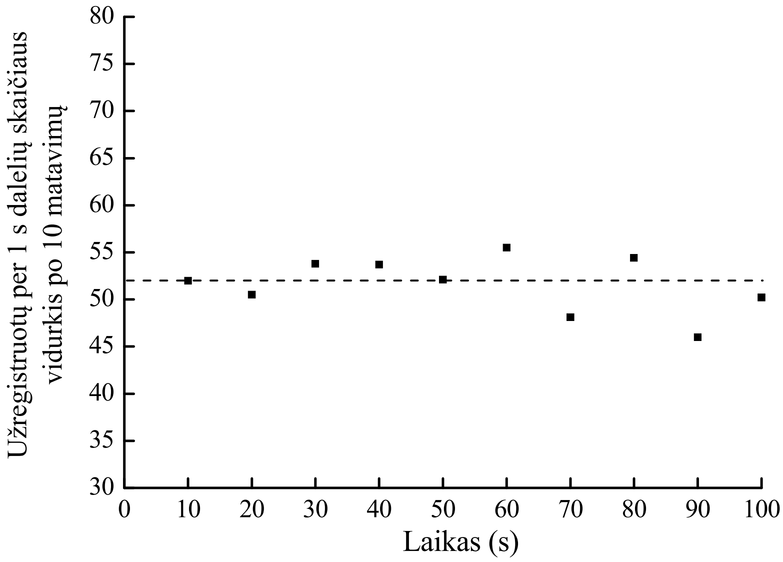
1) skilimo metu išspinduliuotoji dalelė gali išlėkti bet kuria kryptimi ir nebūtinai pataikyti į detektorių;
2) dalelė gali būti sugerta radioaktyviosios medžiagos tūryje arba detektoriaus apvalkale;
3) dalelė gali pralėkti pro detektoriaus tūrį, nesąveikaudama nė su vienu detektoriaus darbinės medžiagos atomu.

Taigi, jeigu $\overline{x}$ yra per 1 s užregistruotų dalelių skaičius, o $\sigma$ yra jo standartinis nuokrypis, tada tiriamojo bandinio aktyvumas lygus $\overline{x}/K$ (čia $0 < K < 1$), aktyvumo matavimo absoliučioji paklaida lygi $\sigma/K$, o santykinė paklaida lygi $\sigma/\overline{x}$. Koeficientas $K$ yra pastovus (nors dažnai praktikoje jo tiksli vertė būna nežinoma). Vadinasi, branduolių skilimų skaičiaus ir užregistruotų dalelių skaičiaus statistinės savybės yra vienodos.

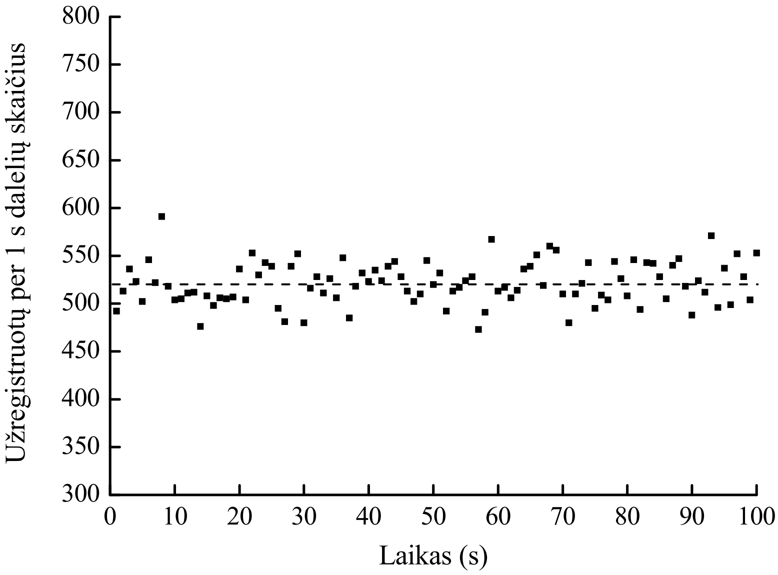
Jeigu šaltinio aktyvumas ir jo padėtis detektoriaus atžvilgiu nekinta, tada vidutinis skaičius dalelių, kurias detektorius užregistruoja per 1 s, taip pat yra pastovus ir turi tiksliai apibrėžtą vertę. Tačiau skirtingų matavimų




**1 pav.** Radioaktyviojo šaltinio spinduliuojamų dalelių skaičiavimo rezultatų pavyzdys. Vidurkis lygus 52 $s^{-1}$




**2 pav.** 10 matavimų po 1 s vidurkiai (panaudoti 1 pav. duomenys)




**3 pav.** Radioaktyviojo šaltinio spinduliuojamų dalelių skaičiavimo rezultatų pavyzdys. Vidurkis lygus 520 $s^{-1}$

rezultatai yra skirtingi. Pvz., 1 pav. pavaizduoti 100 matavimų rezultatai. Šiame pavyzdyje vieno matavimo trukmė lygi 1 s, o šaltinio padėtis detektoriaus atžvilgiu parinkta taip, kad detektorius per 1 s užregistruotų vidutiniškai 52 daleles (šį vidurkį vaizduoja brūkšninė linija). Tačiau, kaip matome, matavimų rezultatai „išsibarstę“ gana plačiose ribose: nuo 35 iki 72. Šio intervalo plotis lygus 72 – 35 = 37. Tai sudaro 37 / 52 = 71 % vidurkio vertės.

Šio užregistruotų dalelių skaičiaus išsibarstymo priežastis yra ta, kad radioaktyvusis skilimas, kurio metu atsiranda minėtos dalelės, yra atsitiktinis vyksmas. Tai reiškia, kad neįmanoma iš anksto numatyti, kada skils duotas radioaktyvus branduolys. Kitaip sakant, radioaktyviajame šaltinyje per laiko vienetą skylančių branduolių skaičius (taigi, ir detektoriaus užregistruotų dalelių skaičius) yra atsitiktinis dydis. ***Atsitiktinis dydis*** – tai dydis, kurio vertė, kai yra pastovios stebėjimo sąlygos, nėra tiksliai apibrėžta, t. y. gali įgyti vertę iš tam tikro verčių intervalo.

2 pav. gautas sugrupavus 1 pav. taškus po 10 ir kiekvienoje grupėje apskaičiavus aritmetinį vidurkį. Akivaizdu, kad išsibarstymas yra mažesnis negu 1 pav. atveju: vertės kinta nuo 46 iki 55,5. Šio intervalo plotis lygus 9,5, t. y. 9,5 / 52 = 18 % vidurkio vertės.

3 pav. skiriasi nuo 1 pav. tik tuo, kad čia panaudotas 10 kartų aktyvesnis šaltinis: detektoriaus per 1 s užregistruotų dalelių skaičiaus vidurkis lygus jau ne 52, o 520. Šiuo atveju matavimų rezultatai svyruoja nuo 473 iki 591. T. y. kitimo intervalo plotis lygus 591 – 473 = 118, o santykinio kitimo intervalo plotis lygus 118 / 520 = 23 %. Taigi, nors absoliutusis išsibarstymas daugiau kaip tris kartus viršija 1 pav. atvejį (118 / 37 = 3,1), tačiau santykinis išsibarstymas yra maždaug tiek pat kartų mažesnis (71 % / 23 % = 3,1) ir yra artimas tam, kuris gautas 2 pav. atveju.

Šie pavyzdžiai iliustruoja vieną iš svarbiausių radioaktyviosios spinduliuotės matavimo dėsningumų: **išmatuoto dalelių skaičiaus santykinis išsibarstymas aplink vidurkį mažėja didėjant matavimo metu užregistruotų dalelių skaičiui**.

## 3.3. Matavimų duomenų statistinis aprašymas. Histograma, vidurkis, dispersija

Atsitiktinių dydžių matavimo rezultatai dažniausiai vaizduojami histogramomis. ***Histograma*** – tai stulpelių diagrama, kurioje kiekvieno stulpelio kraštai nusako tam tikrą atsitiktinio dydžio verčių intervalą, o stulpelio aukštis lygus matavimų skaičiui, kurių metu išmatuotoji atsitiktinio dydžio vertė pakliuvo į tą intervalą. 4 pav. iliustruoja histogramos sudarymą duomenų rinkiniui, kuris pavaizduotas 1 pav. Dėl vaizdumo histogramos $x$ ašis yra vertikali (teigiamoji kryptis – į viršų), o $y$ ašis yra horizontali. Šiuo atveju histogramos stulpelių plotis lygus 5, o stulpelio aukštis nusako skaičių taškų, kurie yra tarp gretimų horizontalių linijų kairiajame grafike. Gautoji histograma pavaizduota 5 pav. Pirmojo stulpelio aukštis lygus skaičiui matavimų, kurių rezultatas buvo nuo 31 iki 35 (tokių matavimų buvo 1), antrojo stulpelio aukštis lygus skaičiui matavimų, kurių rezultatas buvo nuo 36 iki 40 (tokių matavimų buvo 6), ir t. t. Nors 4 pav. iliustruoja histogramos sudarymą tam atvejui, kai matuojamasis dydis yra dalelių skaičius, tačiau histogramos sudarymo metodika lieka tokia pati ir tuo atveju, kai matavimo rezultatas turi bet kurią kitą prasmę.

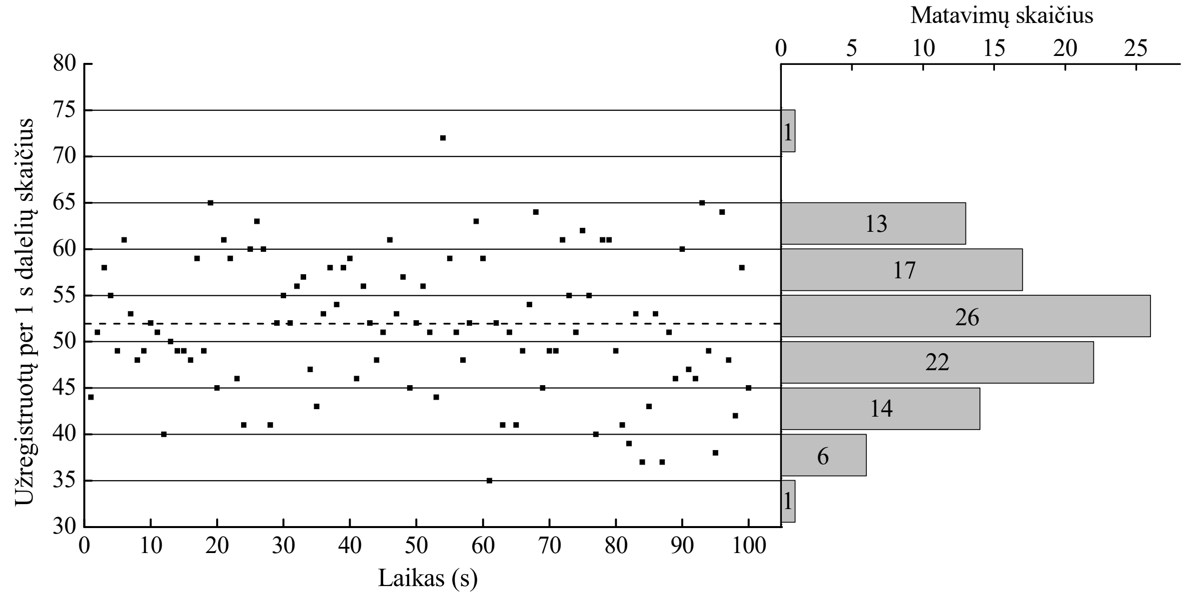
Histograma pilnai nusako matavimų rezultatų rinkinio statistines savybes. Tačiau dažniausiai toks išsamus aprašymas yra nereikalingas, o pakanka žinoti tik dvi svarbiausias atsitiktinio dydžio charakteristikas: jo tikimiausiąją vertę ir „išsibarstymo“ aplink ją laipsnį. Šias charakteristikas galima apytiksliai nustatyti pažiūrėjus į histogramą. Pvz., 5 pav. akivaizdu, kad tikimiausias per 1 s užregistruotų dalelių skaičius yra maždaug 50, o daugumos matavimų rezultatai yra tarp 40 ir 65, t. y. dažniausiai gaunami skaičiai, kurių nuokrypis nuo vidurkio neviršija 15. Tačiau tas pačias charakteristikas galima apibrėžti ir tiksliau. Jeigu tikimiausias užregistruotų dalelių skaičius yra pakankamai didelis (dešimčių eilės arba didesnis), tada jis lygus dalelių skaičiaus aritmetiniam vidurkiui:

$$a_\mathrm{e} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \; ; \tag{3.3.1}$$

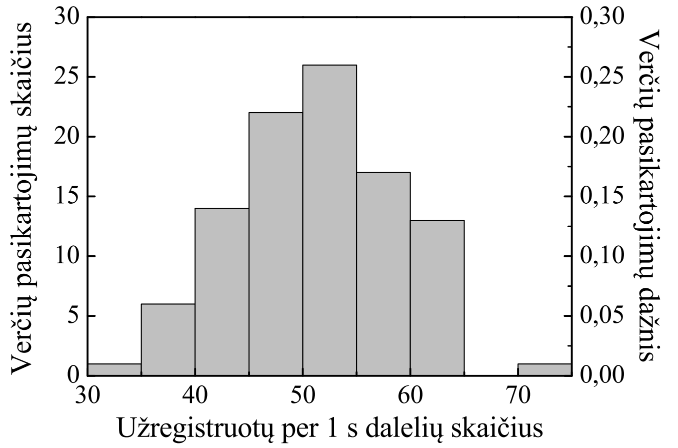
čia $x_i$ ($i$ = 1, 2, …, $n$) yra atskirų matavimų rezultatai. Apatinis indeksas „e“ nurodo, kad turimas omenyje *empirinis* vidurkis, kuris gali skirtis nuo tikrojo vidurkio $a$ (empirinis vidurkis artėja prie tikrojo, kai matavimų skaičius $n$ artėja į begalybę). Atsitiktinio dydžio „išsibarstymo“ apie vidurkį laipsnį nusako to dydžio ***standartinis nuokrypis***. Standartinis nuokrypis žymimas graikiška raide $\sigma$ („sigma“) ir apibrėžiamas šitaip:

$$\sigma_\mathrm{e} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2} \; ; \tag{3.3.2}$$

čia apatinis indeksas „e“ nurodo, kad turimas omenyje *empirinis* standartinis nuokrypis. Reiškinys, kuris yra po šaknies ženklu, vadinamas (empirine) ***dispersija***:




**4 pav.** Histogramos sudarymas atlikus 100 matavimų, kurių kiekvieno trukmė 1 s. Čia vieno stulpelio plotis pasirinktas lygus 5, tačiau jis gali būti ir kitoks (pvz., 1, 2, ...)




**5 pav.** Histograma, kuri atitinka 4 pav. duomenis

$$D_e = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 \; . \tag{3.3.3}$$

Taigi, dispersija yra lygi matavimų rezultatų nuokrypių nuo vidurkio kvadratų vidurkiui, o standartinis nuokrypis yra lygus kvadratinei šakniai iš dispersijos:

$$\sigma = \sqrt{D} \; . \tag{3.3.4}$$

(3.3.2) ir (3.3.3) formulės netinka praktiškai taikyti, nes į jas įeina tikrasis vidurkis $a$, kuris yra nežinomas. Praktikoje tikrąjį vidurkį $a$ reikia pakeisti empiriniu vidurkiu $a_e$. Galima įrodyti [3], kad, norint minimizuoti paklaidą, kuri atsiranda dėl tokio pakeitimo, (3.3.3) reiškinio vardiklyje matavimų skaičių $n$ reikia pakeisti skaičiumi $n - 1$:

$$D_e = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_e)^2 \; . \tag{3.3.5}$$

Jeigu $n$ yra didelis, tada $1/(n - 1) \approx 1/n$, todėl vietoj (3.3.5) galima taikyti ir (3.3.3) formulę, kurioje tikrasis vidurkis $a$ pakeistas empiriniu vidurkiu $a_e$.

Nesunku įsitikinti, kad

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_e)^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right) - a_e^2 \equiv \overline{x_e^2} - a_e^2 \, ,$$

kur $\overline{x_e^2}$ yra atsitiktinio dydžio kvadrato empirinis vidurkis (čia ir toliau brūkšnys viršuje žymi po juo užrašyto reiškinio vidurkį). Todėl

$$D_e = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - na_e^2\right) \equiv \frac{n}{n-1}\left(\overline{x_e^2} - a_e^2\right). \tag{3.3.6}$$

T. y. dispersija yra apytiksliai lygi kvadrato vidurkio ir vidurkio kvadrato skirtumui.

Kartais histogramose vietoj skirtingų rezultatų pasikartojimo skaičių pateikiami skirtingų rezultatų ***dažniai***, t. y. kiekvieno rezultato pasikartojimo skaičiaus ir pilnutinio matavimų skaičiaus santykis. Pvz., jeigu 40 iš 200 matavimų rezultatas lygus 1, tada tokio rezultato dažnis lygus 40/200 = 0,2. Vertės $x$ pasikartojimo dažnį žymėsime $F(x)$. Ši funkcija vadinama ***dažnio pasiskirstymo funkcija***. Bet kokios dydžio $x$ funkcijos $g(x)$ empirinis vidurkis yra lygus

$$\overline{g}_{\mathrm{e}} = \sum_{x=0}^{\infty} g(x)F(x)\,. \tag{3.3.7}$$

Šio sąryšio atskirieji atvejai – tai atsitiktinio dydžio $X$ empirinių vidurkio ir dispersijos išraiškos:

$$a_{\mathrm{e}} \equiv \overline{x}_{\mathrm{e}} = \sum_{x=0}^{\infty} xF(x)\,; \tag{3.3.8}$$

$$D_{\mathrm{e}} = \frac{n}{n-1}\sum_{x=0}^{\infty}(x-a_{\mathrm{e}})^2 F(x) = \frac{n}{n-1}\left(\sum_{x=0}^{\infty} x^2 F(x) - a_{\mathrm{e}}^2\right) \equiv \frac{n}{n-1}\left(\overline{x_{\mathrm{e}}^2} - a_{\mathrm{e}}^2\right). \tag{3.3.9}$$

## 3.4. Statistiniai modeliai

Kartais galima iš anksto apytiksliai numatyti įvairių rezultatų pasikartojimo dažnius. Toks numatymas tampa įmanomas tik padarius tam tikras išankstines prielaidas apie tiriamąjį atsitiktinį dydį. Šios prielaidos kartu su iš jų išplaukiančiais dažnių skaičiavimo metodais yra apibendrintai vadinamos ***statistiniu modeliu***. Statistiniai modeliai leidžia numatyti įvairių verčių ***tikimybes***. Jeigu statistinis modelis yra tikslus, tada, neribotai didėjant matavimų skaičiui $n$, kiekvienos vertės ($x$) dažnis $F(x)$ artėja prie tos vertės tikimybės $P(x)$, kurią numato statistinis modelis. Taigi, duotos vertės tikimybę galima apibrėžti kaip tos vertės „teorinį dažnį“. Jeigu visų verčių tikimybės yra žinomos, tada galima apskaičiuoti ir teorinius vidurkį bei dispersiją. Tam reikia (3.3.7)–(3.3.9) formulėse dažnius $F(x)$ pakeisti tikimybėmis $P(x)$:

$$\overline{g} = \sum_{x=0}^{\infty} g(x)P(x)\,; \tag{3.4.1}$$

$$a \equiv \overline{x} = \sum_{x=0}^{\infty} xP(x)\,; \tag{3.4.2}$$

$$D = \sum_{x=0}^{\infty}(x-a)^2 P(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 P(x) - a^2 \equiv \overline{x^2} - a^2\,. \tag{3.4.3}$$

Tikimybė, kad dydžio $X$ vertė paklius į duotąjį intervalą $x_1 \le x \le x_2$, yra lygi

$$P\{x_1 \le x \le x_2\} = \sum_{x=x_1}^{x_2} P(x)\,. \tag{3.4.4}$$

Visų tikimybių suma yra lygi vienetui:

$$\sum_{x=0}^{\infty} P(x) = 1\,. \tag{3.4.5}$$

Statistinio modelio matematinė išraiška yra ***skirstinys*** – taisyklė (lentelė arba funkcija), kuri numato visų galimų atsitiktinio dydžio verčių $x$ tikimybes $P(x)$.

Prieš aptariant konkrečius skirstinius, reikia tiksliau apibrėžti tiriamąjį atsitiktinį dydį. Aptariamuoju atveju atsitiktinis dydis – tai branduolių skilimų skaičius per duotą laiką $t$. Bendriau formuluojant, tai yra ***palankiųjų įvykių*** skaičius atlikus duotąjį skaičių nepriklausomų ***bandymų***. Vienas bandymas – tai duoto branduolio stebėjimas duotą laiką $t$. Jeigu bandinyje yra $N$ branduolių, tai reiškia, kad per vieną $t$ trukmės matavimą atliekama $N$ bandymų. Šie bandymai yra nepriklausomi, nes duoto branduolio skilimas neturi įtakos kitų branduolių skilimui. Jeigu stebėjimo metu branduolys skilo, tai bandymo rezultatas yra palankusis įvykis, o jeigu neskilo – nepalankusis. Taigi, yra galimos tik dvi bandymo baigtys. Tokie atsitiktiniai vyksmai vadinami ***binariaisiais vyksmais***. Palankiojo įvykio tikimybę atlikus vieną bandymą žymėsime $p$. 3.9 skyrelyje bus įrodyta, kad radioaktyviojo skilimo atveju $p = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$; čia $\lambda$ yra skilimo konstanta. 1 lentelėje pateikti trijų binariųjų vyksmų pavyzdžiai kartu su atitinkamomis $p$ vertėmis.

**1 lentelė**. Binariųjų vyksmų pavyzdžiai

| Bandymas | Palankiojo įvykio apibrėžtis | Palankiojo įvykio tikimybė $p$ |
|---|---|---|
| Monetos metimas | „Erelis“ | 1/2 |
| Kauliuko ridenimas | „Šešetukas“ | 1/6 |
| Radioaktyviojo branduolio stebėjimas laiką $t$ | Branduolio skilimas per stebėjimo laiką | $1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$ |

Toliau bus aprašyti trys skirstiniai:

1. Binominis skirstinys. Tai yra pats bendriausias skirstinys, kuris tinka visiems binariesiems vyksmams, kai tikimybė $p$ yra pastovi. Tačiau, kai bandymų (pvz., branduolių) skaičius $N$ yra labai didelis, tada taikant šį skirstinį reikia sudėtingų skaičiavimų.
2. Puasono skirstinys. Šis skirstinys yra binominio skirstinio ribinis atvejis, kai palankiojo įvykio tikimybė $p$ yra maža. Praktiniu požiūriu tai reiškia, kad stebėjimo trukmė $t$ yra daug mažesnė už radioaktyviosios medžiagos pusamžį. Tada radioaktyviųjų branduolių skaičius praktiškai nesumažėja per matavimų trukmę (t. y. skilusių branduolių skaičius yra daug mažesnis už pilnutinį radioaktyviųjų branduolių skaičių), todėl duotojo konkretaus branduolio skilimo užregistravimo tikimybė $p$ yra maža.
3. Gauso skirstinys. Šis skirstinys yra Puasono skirstinio ribinis atvejis, kai vidutinis palankiųjų įvykių skaičius per vieną matavimą yra palyginti didelis (pvz., didesnis už 20).

Jeigu vieno bandymo palankiosios baigties tikimybė $p$ yra maža, tačiau bandymų skaičius yra pakankamai didelis, kad vidutinis palankiųjų įvykių skaičius per vieną matavimą būtų didelis (pvz., didesnis už 20), tada visi trys anksčiau minėti skirstiniai duoda beveik vienodus rezultatus. Todėl tokiu atveju racionaliausia naudoti Gauso skirstinį, kurio matematinė išraiška yra paprasčiausia.

3.4.1. *Binominis skirstinys*

Tarkime, kad turime $N$ nestabiliųjų branduolių, kurių pusamžis yra žinomas. Be to, yra žinoma kiekvieno branduolio skilimo per stebėjimo laiką tikimybė $p$. Tada tikimybė, kad branduolys per duotą laiką neskils, yra lygi $1 - p$. Kiekvienam branduoliui skirkime eilės numerį. Pagal nepriklausomųjų įvykių tikimybių sandaugos taisyklę, tikimybė, kad per tą laiką skils branduoliai, kurių numeriai yra nuo 1 iki $x$, o branduoliai, kurių numeriai yra nuo $x + 1$ iki $N$, neskils, yra lygi $p^x(1-p)^{N-x}$. Norint apskaičiuoti tikimybę, kad skils *bet kurie* $x$ branduolių, reikia sudėti tikimybes, atitinkančias visas galimas $x$ branduolių imtis iš $N$ branduolių (tokios imtys kartais vadinamos kėliniais iš $N$ po $x$ elementų). Kėlinių iš $N$ po $x$ elementų skaičių nusako binominis koeficientas

$$C_N^x = \frac{N!}{x!(N-x)!}; \tag{3.4.6}$$

čia $x!$ yra skaičiaus $x$ faktorialas: $x! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (x-2) \cdot (x-1) \cdot x$; skaičiaus 0 faktorialas lygus 1. Kadangi visi branduoliai vienodi, tai kiekvieną kėlinį iš $N$ po $x$ branduolių atitinka ta pati tikimybė $p^x(1-p)^{N-x}$. Todėl pagal nesutaikomųjų įvykių tikimybių sumos taisyklę tikimybė $P(x)$ yra lygi

$$P(x) = C_N^x p^x (1-p)^{N-x} = \frac{N!}{x!(N-x)!} p^x (1-p)^{N-x}. \tag{3.4.7}$$

Ši formulė nusako ***binominį skirstinį***. Rasime teorinį vidurkį $a$. Pagal (3.4.2) formulę kiekvieno branduolio indėlis į $a$ yra lygus $p \cdot 1 + (1-p) \cdot 0 = p$. Kadangi visi branduoliai yra vienodi, tai

$$a = pN. \tag{3.4.8}$$

Analogiškai samprotaudami, iš (3.4.3) išvedame dispersijos išraišką:

$$D = Np(1-p). \tag{3.4.9}$$

Iš (3.4.8) išplaukia, kad

$$p = a/N. \tag{3.4.10}$$

Įrašę šią $p$ išraišką į (3.4.7) formulę, išvedame:

$$P(x) = \frac{N!}{x!(N-x)!} \cdot \frac{a^x}{N^x} \left(1 - \frac{a}{N}\right)^{N-x}. \tag{3.4.11}$$

3.4.2. *Puasono skirstinys. Puasono vyksmų pavyzdžiai*

Jeigu matavimo trukmė $t$ yra daug mažesnė už skilimo pusamžį $T_{1/2}$, tada duoto branduolio skilimo tikimybė per laiką $t$ yra daug mažesnė už vienetą, o $N$ yra praktiškai pastovus viso matavimo metu. Tokiu atveju binominio skirstinio išraiškoje (3.4.7) galima pereiti prie ribos $p \to 0$. Turint omenyje $p$ išraišką (3.4.10), ši riba yra tapati ribai $N \to \infty$. Tada (3.4.11) reiškinyje galima pakeisti

$$N!/(N-x)! \to N^x,$$

o laipsnio rodiklį $N - x$ galima pakeisti skaičiumi $N$, todėl

$$P(x) = \frac{a^x}{x!} \lim_{N\to\infty} \left(1 - \frac{a}{N}\right)^N = \frac{a^x}{x!} \lim_{N\to\infty} \left(1 - \frac{a}{N}\right)^{\frac{N}{a}a} = \frac{a^x}{x!} \left[\lim_{N\to\infty} \left(1 - \frac{a}{N}\right)^{\frac{N}{a}}\right]^a.$$

Matematinė analizė įrodo, kad laužtiniuose skliaustuose esantis reiškinys yra lygus 1 / e; čia e yra Eulerio konstanta (e ≈ 2,71828). Vadinasi,

$$P(x) = \frac{a^x}{x!}\mathrm{e}^{-a} \qquad (x = 0, 1, 2, \ldots). \tag{3.4.12}$$

Ši formulė nusako ***Puasono skirstinį*** (angl. *Poisson distribution*). Jeigu $x > 10$, tada faktorialą $x!$, kuris įeina į (3.4.12) išraišką, paprasčiau skaičiuoti pagal apytikslę Stirlingo formulę: $x! \approx x^x \mathrm{e}^{-x}\sqrt{2\pi x}$ . Jeigu siekiama apskaičiuoti Puasono skirstinio tikimybes $P(x)$ visoms $x$ vertėms nuo 0 iki tam tikros didžiausios vertės $x_{\max}$, tada patogiausia naudoti rekurentines formules:

$$P(0) = \mathrm{e}^{-a}; \quad P(x)\big|_{x>0} = P(x-1)\cdot\frac{a}{x}. \tag{3.4.13}$$

Toks metodas remiasi prielaida, kad tikimybė $P(x - 1)$ yra tiksli. Tačiau, kai $a$ yra didelis, tada tikimybės, kurios atitinka mažiausias $x$ vertes, yra labai maži skaičiai (pvz., kai $a = 200$, tada $P(0) = 1{,}4 \cdot 10^{-87}$, $P(1) = 2{,}8 \cdot 10^{-85}$ ir t. t.). Kompiuterinės programos ypač mažus skaičius automatiškai pakeičia nuliais (mažiausias nenulinis skaičius, kuriuo gali operuoti programa, priklauso nuo konkrečios programos). Tada, esant ypač dideliems $a$, minėtosios rekurentinės formulės negali būti taikomos (nes, jeigu $P(0) = 0$, tada ir visos kitos tikimybės būtų lygios nuliui). Tokiu atveju rekurentines formules reikia taikyti skaičiuojant tikimybės logaritmą, o paskui antilogaritmuoti:

$$\ln P(0) = -a; \quad \ln P(x)\big|_{x>0} = \ln P(x-1) + \ln\left(\frac{a}{x}\right); \quad P(x) = \mathrm{e}^{\ln P(x)}.$$

Tada, net jeigu programos apskaičiuota tikimybė $P(0)$ būtų 0, tai neturėtų įtakos kitų tikimybių $P(x)$ skaičiavimo tikslumui, nes $P(x)$ skaičiavimui būtų naudojamas logaritmas $\ln P(x - 1)$, kurio vertė yra tiksli.

Taigi, Puasono skirstinys yra binominio skirstinio atskiras atvejis, kai palankiojo įvykio tikimybė yra labai maža (šią sąlygą atspindi anksčiau minėta prielaida, kad $p \to 0$). Praktikoje binominį skirstinį galima pakeisti Puasono skirstiniu, kai tikimybė $p$ yra $10^{-2}$ eilės arba mažesnė.

Puasono skirstiniu aprašomo atsitiktinio dydžio dispersija sutampa su vidurkiu:

$$D = a \tag{3.4.14}$$

(šį sąryšį galima gauti iš binominio skirstinio vidurkio ir dispersijos išraiškų (3.4.8) ir (3.4.9) perėjus prie ribos $p \to 0$). Taigi, standartinis nuokrypis yra lygus kvadratinei šakniai iš vidurkio:

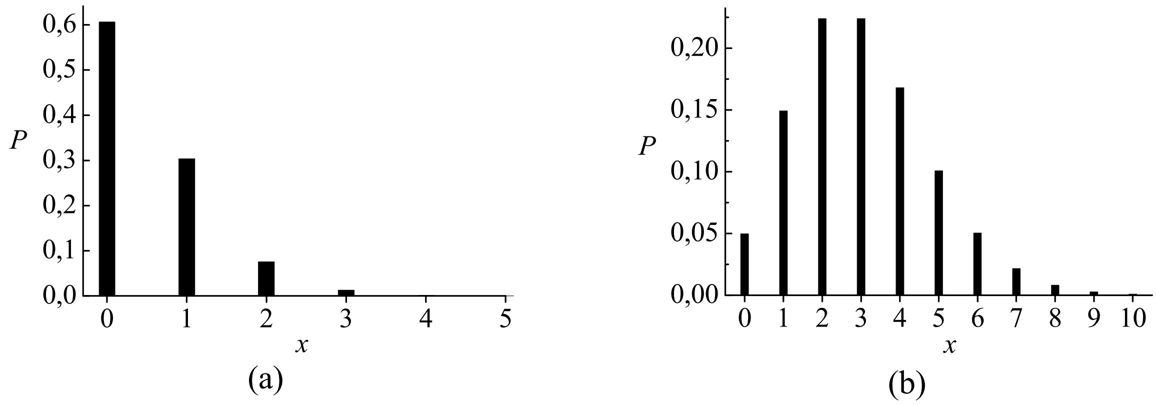
$$\sigma = \sqrt{a}. \tag{3.4.15}$$

Be to, iš (3.4.13) išplaukia, kad, kai $a < 1$, $P(x)$ monotoniškai mažėja didėjant $x$ (nes tada $a / x < 1$). Šiuo atveju didžiausioji tikimybė $P(x)$ atitinka $x = 0$ (žr. 6a pav.). Kai $a > 1$, tikimybės $P(x)$ priklausomybėje nuo $x$ atsiranda maksimumas, kurio padėtis apytiksliai sutampa su $a$ (žr. 6b pav.). Didėjant $a$, ši priklausomybė tampa vis simetriškesnė (žr. 7 pav.).

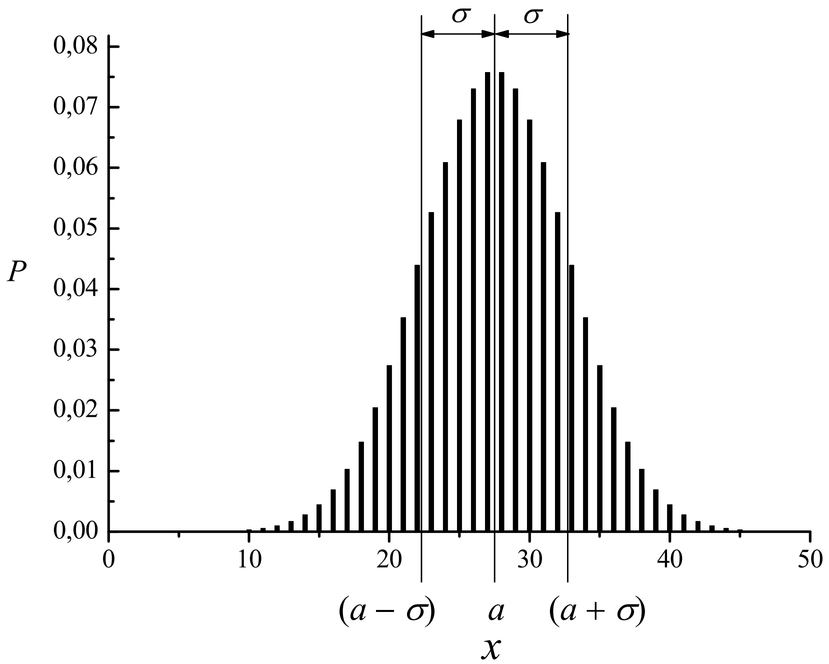
Pagrindinės Puasono skirstinio sąlygos (maža ir pastovi duoto branduolio skilimo tikimybė per duotą laiką) dažnai galioja praktikoje. Todėl per duotą laiką skilusių branduolių skaičius yra pasiskirstęs pagal Puasono skirstinį. Apskritai nepriklausomų įvykių seka, kurioje įvykių skaičius per duotą laiką yra pasiskirstęs pagal Puasono skirstinį, yra vadinama ***Puasono vyksmu***. Taigi, radioaktyvusis skilimas yra Puasono vyksmas.

Bendruoju atveju Puasono vyksmo parametro vaidmenį gali atlikti ne laikas, o koks nors kitas tolydusis dydis. Pvz., tarkime, kad yra skaičiuojami dalelės susidūrimai su medžiagos atomais (pvz., laisvojo elektrono susidūrimai su dujų molekulėmis dujiniame detektoriuje), kai dalelė medžiagoje nueina kelią $d$. Padalykime tą kelią į intervalus, kurių kiekvieno plotis $\Delta d$ yra daug mažesnis už dalelės vidutinį laisvąjį kelią $l$. „Palankusis įvykis" šiuo atveju – tai susidūrimas su atomu, kai dalelė nueina kelią $\Delta d$. Kadangi $\Delta d \ll l$, tai susidūrimas su atomu kelyje $\Delta d$ yra labai mažai tikėtinas įvykis. Taigi, tai atitinka vieną iš Puasono skirstinio sąlygų (maža palankiojo įvykio tikimybė). Jeigu, be to, susidūrimo tikimybė (skerspjūvis), nuėjus dalelei duotąjį kelią $\Delta d$, nepriklauso nuo dalelės judėjimo istorijos, tada galioja ir antroji sąlyga (palankiojo įvykio tikimybės pastovumas). Tokiu atveju dalelės susidūrimai su medžiagos atomais yra Puasono vyksmas, kurio parametras yra dalelės kelias. Palankiųjų įvykių skaičius šiuo atveju – tai susidūrimų su atomais skaičius, kai dalelė nueina duotą atstumą $d$ (pastarasis dydis atlieka tą patį vaidmenį, kaip anksčiau minėto Puasono vyksmo matavimo trukmė). Vadinasi, tikimybė, kad dalelės trajektorijos atkarpoje, kurios ilgis $d$, bus $x$ susidūrimų su atomais, yra nusakoma (3.4.12) reiškiniu, kuriame $a$ reiškia vidutinį susidūrimų skaičių kelyje $d$.

Kitas pavyzdys – medžiagos atomų jonizavimas, kai medžiagoje visiškai sustabdoma elektringoji dalelė, kurios energija $E$ yra daug didesnė už atomo jonizacijos energiją. Padalykime tą energiją į didelį




**6 pav.** Puasono skirstinio pavidalas esant mažoms vidurkio $a$ vertėms. (a) $a$ = 0,5; (b) $a$ = 3




**7 pav.** Puasono skirstinio pavidalas, kai vidurkis $a$ yra didelis ($a$ = 27,5). $\sigma$ yra standartinis nuokrypis

skaičių intervalų, kurių kiekvieno plotis $\Delta E$ yra tik nedaug didesnis už atomo jonizacijos energiją. „Palankusis įvykis“ šiuo atveju – tai atomo jonizavimas, kai dalelės energija sumažėja dydžiu $\Delta E$. Tarkime, kad tik labai maža dalelės energijos nuostolių dalis eikvojama atomų jonizavimui (likusioji dalis prarandama kitais būdais, pvz., išeikvojama atomų sužadinimui arba virsta atomų šiluminio judėjimo energija). Tada atomo jonizavimas, kai dalelės energija sumažėja dydžiu $\Delta E$, yra labai mažai tikėtinas įvykis. Taigi, tai atitinka vieną iš Puasono skirstinio sąlygų (maža palankiojo įvykio tikimybė). Jeigu, be to, jonizacijos tikimybė, sumažėjus dalelės energijai duotuoju dydžiu $\Delta E$, nepriklauso nuo dalelės pradinės energijos, tada galioja ir antroji sąlyga (palankiojo įvykio tikimybės pastovumas). Tokiu atveju atomų jonizavimas yra Puasono vyksmas, kurio parametras yra krintančiosios dalelės energijos sumažėjimas. Palankiųjų įvykių skaičius šiuo atveju – tai jonizuotų atomų skaičius sumažėjus dalelės energijai duotuoju dydžiu $E$ (pastarasis dydis atlieka tą patį vaidmenį, kaip anksčiau minėto Puasono vyksmo matavimo trukmė). Vadinasi, tikimybė, kad dalelės trajektorijos atkarpoje, kurioje dalelės energija sumažėja dydžiu $E$, bus jonizuota $x$ atomų, yra nusakoma (3.4.12) reiškiniu, kuriame $a$ reiškia vidutinį jonizuotų atomų skaičių, kai dalelės energija sumažėja dydžiu $E$.

3.4.3. *Gauso skirstinys*

Jau žinome, kad Puasono skirstinys – tai binominio skirstinio ribinis atvejis, kai $p \ll 1$. Jeigu, be to, skirstinio vidurkis $a$ yra didelis (pvz., didesnis už 20), tada galima dar labiau supaprastinti skirstinio išraišką:

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2a}\right]. \tag{3.4.16}$$

Tai yra ***Gauso skirstinio*** (angl. *Gauss distribution*), taip pat vadinamo ***normaliuoju skirstiniu***, atskirasis atvejis (bendresnė Gauso skirstinio išraiška bus pateikta šio skyrelio pabaigoje). Kadangi (3.4.16) yra Puasono skirstinio ribinis atvejis, tai jam taip pat galioja vidurkio ir dispersijos išraiškos (3.4.8) ir (3.4.14).

Pvz., skirstinys, kuris pavaizduotas 7 pav., yra labai artimas Gauso skirstiniui. Pagrindinės Gauso skirstinio savybės yra šios:

1. Skirstinys yra simetriškas atžvilgiu vidurkio $a$.
2. Kadangi $a$ yra didelis, tikimybių $P(x)$ vertės, kurios atitinka gretimas $x$ vertes, tik nedaug skiriasi viena nuo kitos. Kitaip sakant, $P(x)$ yra lėtai kintanti funkcija.

Dėl pastarosios savybės diskretųjį Gauso skirstinį, kuris pavaizduotas 7 pav., galima pakeisti tolydžiuoju skirstiniu. Kitaip sakant, dalelių skaičiaus $x$ skirstinio teorinę analizę galima atlikti taip, lyg $x$ būtų tolydusis dydis, nors tikrovėje jis yra diskretus[1]. Tolydžiojo atsitiktinio dydžio skirstinys apibrėžiamas šiek tiek kitaip negu diskrečiojo: vietoj konkrečios vertės $x$ tikimybės nurodomas *tikimybės tankis*, kuris atitinka duotąją $x$ vertę. ***Tikimybės tankio*** funkcija $f(x)$ apibrėžiama šitaip:

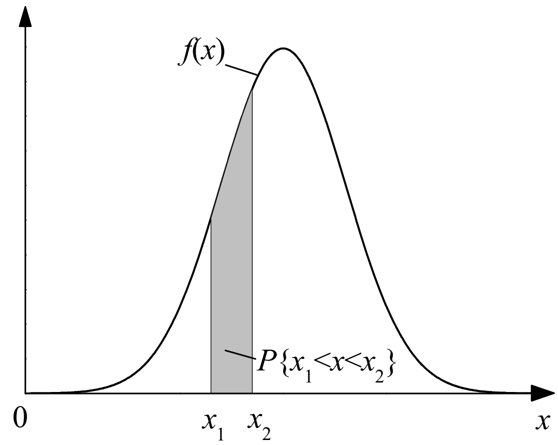
$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\{x \le X < x + \Delta x\}}{\Delta x}; \qquad (3.4.17)$$

čia užrašymas „$P\{x \le X < x + \Delta x\}$" reiškia tikimybę, kad atsitiktinio dydžio $X$ vertė priklausys intervalui $[x;\ x + \Delta x[$. T. y. tikimybės tankis taške $x$ – tai tikimybė aptikti dydį $X$ intervale nuo $x$ iki $x+\Delta x$ ir šio intervalo pločio $\Delta x$ santykio riba, kai $\Delta x$ artėja į nulį. Kitaip sakant, tikimybės tankis yra tikimybės kiekis, kuris atitinka atsitiktinio dydžio $X$ vienetinį intervalą. Iš šios apibrėžties išplaukia tikimybės, kad tolydžiojo atsitiktinio dydžio $X$ matavimo rezultatas paklius į duotą intervalą $x_1 \le x < x_2$, išraiška

$$P\{x_1 \le X < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x \qquad (3.4.18)$$

(plg. su analogiška formule (3.4.4), kai atsitiktinis dydis yra diskretus). (3.4.18) lygybę galima vaizdžiai iliustruoti geometriškai: nubraižius funkciją $f(x)$, tikimybė, jog dydžio $X$ matavimo rezultatas bus tarp $x_1$ ir $x_2$, lygi plotui po kreive $f(x)$ nuo $x_1$ iki $x_2$ (žr. 8 pav.). Kaip ir diskrečiojo atsitiktinio dydžio, visų galimų tolydžiojo atsitiktinio dydžio $X$ verčių tikimybių suma lygi vienetui:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1 \qquad (3.4.19)$$




**8 pav.** Tikimybės tankio kreivės $f(x)$ geometrinis aiškinimas: plotas po kreive nuo $x_1$ iki $x_2$ lygus tikimybei, kad atsitiktinio dydžio $X$ vertė priklauso intervalui $[x_1, x_2]$

(plg. su analogiška formule (3.4.5), kai atsitiktinis dydis yra diskretus). Jeigu $g(x)$ yra bet kokia tolydžiojo atsitiktinio dydžio $X$ funkcija, tada jos vidurkis lygus

$$\overline{g} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x \qquad (3.4.20)$$

(plg. su analogiška formule (3.4.1), kai atsitiktinis dydis yra diskretus). Šios formulės atskirieji atvejai – tai tolydžiojo atsitiktinio dydžio $X$ vidurkio ir dispersijos išraiškos:

$$\overline{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x, \qquad (3.4.21)$$

$$D = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x - a^2 \equiv \overline{x^2} - a^2 \qquad (3.4.22)$$

(plg. su analogiškais sąryšiais (3.4.2) ir (3.4.3), kai atsitiktinis dydis yra diskretus).

---

[1] ***Diskretusis dydis*** – tai dydis, kurio galimų verčių skaičius bet kuriame baigtinio pločio intervale yra baigtinis arba lygus nuliui. Pvz., branduolių skilimų skaičius yra diskretusis dydis, nes tai yra natūralusis skaičius (t. y. nulis arba teigiamas sveikasis skaičius). ***Tolydusis dydis*** – tai dydis, kurio galimų verčių skaičius bet kuriame baigtinio pločio intervale yra begalinis. Pvz., laisvosios dalelės energija ir greitis yra tolydieji dydžiai, nes jie gali būti trupmeniniai su kiek norima dideliu ženklų skaičiumi po kablelio.

Diskrečiojo Gauso skirstinio (3.4.16) tolydžiojo artinio tikimybės tankio išraiška yra tokia pati, kaip ir tikimybės $P(x)$ išraiška:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2a}\right]. \tag{3.4.23}$$

Šios funkcijos grafikas gaunamas sujungus 7 pav. pavaizduotų stulpelių viršūnes glodžia linija.

Bendriausioji Gauso skirstinio išraiška yra šitokia:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right] \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2D}\right]. \tag{3.4.24}$$

Taigi, bendruoju atveju Gauso skirstinys apibūdinamas *dviem* nepriklausomais parametrais – vidurkiu $a$ ir standartiniu nuokrypiu $\sigma$ (arba vidurkiu $a$ ir dispersija $D$). Tuo tarpu Puasono skirstinys apibūdinamas tik vienu parametru – vidurkiu $a$. Gauso skirstinio užrašymas (3.4.16) arba (3.4.23) pavidalu (tik su vienu parametru $a$) atspindi tą faktą, kad tai nėra „tikrasis“ (bendrasis) Gauso skirstinys, o yra Puasono skirstinio, kuriam visada galioja lygybė $D = a$, aproksimacija.

Jeigu matuojamojo dydžio $X$ skirstinys yra Gauso, tada, pasirinkus $x$ verčių intervalą, kurio centras sutampa su vidurkiu $a$, tikimybė, kad atskiro matavimo rezultatas priklausys duotajam intervalui, yra šitaip susijusi su to intervalo pločiu:

$P\{a - \sigma < X < a + \sigma\} = 0{,}683$,

$P\{a - 2\sigma < X < a + 2\sigma\} = 0{,}954$,

$P\{a - 3\sigma < X < a + 3\sigma\} = 0{,}997$.

Pastaroji lygybė išreiškia Gauso skirstinio „trijų sigma taisyklę“: kai yra pakankamai didelis matavimų skaičius, 99,7 % visų matavimų rezultatai priklauso intervalui $a - 3\sigma < x < a + 3\sigma$.

### 3.4.4. *Centrinė ribinė teorema*

Praktikoje matavimo paklaidos (nuokrypiai nuo vidurkio) būna pasiskirsčiusios pagal Gauso skirstinį (3.4.24) tais atvejais, kai matavimo paklaida lygi sumai didelio skaičiaus (praktiškai – didesnio už 4) vienodos didumo eilės atsitiktinių paklaidų, kurias sukelia skirtingi nepriklausomi vienas nuo kito veiksniai. Pvz., matuojant kūno svorį jautriomis mechaninėmis svarstyklėmis, matavimo atsitiktinę paklaidą sudaro: 1) paklaida dėl matavimo rezultato priklausomybės nuo kūno padėties ant svarstyklių lėkštelės, 2) paklaida dėl netikslaus svarstyklių rodyklės vizualaus sutapatinimo su skalės padala, 3) paklaida dėl stalo vibracijos ir t. t. Tokiais atvejais, nepriklausomai nuo kiekvienos iš sudedamųjų paklaidų skirstinio pavidalo, pilnutinės atsitiktinės paklaidos skirstinys yra (3.4.24) pavidalo. Šis rezultatas išplaukia iš tikimybių teorijoje įrodomos ***centrinės ribinės teoremos***, kurios paprasčiausia formuluotė yra tokia:

Jeigu $X_1, X_2, ..., X_m$ yra nepriklausomieji atsitiktiniai dydžiai, kurių kiekvieno vidurkis $\mu$ ir dispersija $D$, tada, didėjant $m$, jų sumõs $Y_m = \sum_{k=1}^{m} X_k$ skirstinys artėja prie Gauso skirstinio, kurio vidurkis $m\mu$ ir dispersija $mD$.

Todėl nesunku suprasti, kodėl Puasono skirstinio tikimybės tankio funkcija tampa vis panašesnė į Gauso skirstinio tikimybės tankio funkciją didėjant vidurkiui. Pvz., jeigu nagrinėjamas branduolių skilimas, radioaktyvųjį bandinį galima suskaidyti į $m$ vienodo tūrio dalių. Tada pilnutinis skilimų skaičius yra lygus kiekvienoje dalyje įvykusių skilimų skaičių sumai. Kadangi skirtingose dalyse branduoliai skyla nepriklausomai vienas nuo kito (tai yra viena iš Puasono skirstinio atsiradimo sąlygų), o kiekvieno dėmens vidurkis yra lygus dispersijai (tai yra pagrindinė Puasono skirstinio savybė), tai pagal centrinę ribinę teoremą, kai $m$ yra pakankamai didelis, sumos skirstinys apytiksliai sutampa su Gauso skirstiniu, kurio vidurkis taip pat lygus dispersijai, tačiau yra $m$ kartų didesnis už kiekvieno dėmens vidurkį[1].

Centrinė ribinė teorema galioja ir tada, kai skirtingų dėmenų skirstiniai yra skirtingi. Be to, tų skirstinių vidurkiai ir dispersijos nebūtinai turi sutapti – pakanka, kad jie būtų vienodos didumo eilės. Todėl Gauso skirstinio vaidmuo tikimybių teorijoje yra išskirtinis. Matuojant tolydžiuosius dydžius,

[1] Toks aiškinimas tinka tik tada, kai kiekvieno matavimo metu skyla bent vienas branduolys *daugelyje* iš minėtųjų $m$ dalių, t. y. kai bandinio aktyvumas yra pakankamai didelis arba kai matavimai yra pakankamai ilgi. Kai bandinio aktyvumas yra mažas arba matavimai yra trumpi, tada kiekvieno matavimo metu skilimų skaičius daugumoje iš $m$ sričių lygus nuliui. Jeigu matavimo rezultatas yra mažas (pvz., 0, 1 arba 2), tada jau negalima laikyti, kad nepriklausomų veiksnių skaičius yra didelis, todėl sumos skirstinys jau nėra Gauso skirstinio pavidalo, o turi būti skaičiuojamas pagal (3.4.12) formulę.

matavimų paklaidų skirstinys dažniausiai yra Gauso skirstinio pavidalo, nes šias paklaidas dažniausiai galima išreikšti daugelio „elementariųjų paklaidų“ suma.

## 3.5. Statistinių modelių taikymai

Ankstesniuose dviejuose skyreliuose buvo aptarti du nepriklausomi klausimai: matavimo duomenų statistinis apibūdinimas (3.3 skyrelis) ir keli konkretūs statistiniai modeliai (3.4 skyrelis). Šiame skyrelyje sujungsime šiuos du atskirus klausimus.

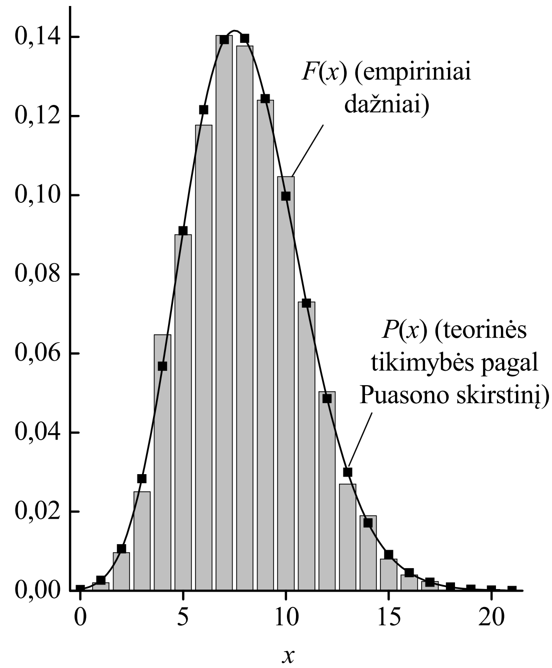
Atliekant branduolio fizikos matavimus, statistinių modelių taikymas yra dvejopas. Pirma, atlikus daug tiriamojo dydžio matavimų vienodomis sąlygomis, tų matavimų duomenų statistinė analizė leidžia nustatyti, ar matuojamojo dydžio „išsibarstymo“ pobūdis atitinka tą, kurį numato statistinis modelis. Tipiškas tokio palyginimo tikslas – nustatyti, ar dalelių skaičiavimo įranga funkcionuoja normaliai. Antra, turint statistinį modelį, galima apytiksliai apskaičiuoti matuojamojo dydžio pasikliautinąjį intervalą, net kai atliktas tik vienas matavimas.

3.5.1. *Skaičiavimo įrangos patikra palyginus stebimąsias fliuktuacijas su teorinėmis*

3.4 skirsnyje buvo aprašytas per fiksuotą laiko tarpą skilusių branduolių skaičiaus skirstinys: tai yra Puasono skirstinys (3.4.12), kurį esant dideliems vidurkiams galima aproksimuoti Gauso skirstiniu (3.4.16). Tokio paties pavidalo yra ir į detektorių patekusių dalelių skaičiaus skirstinys (kaip minėta 3.2 skyrelyje, šių dviejų skaičių vidurkiai skiriasi tik pastoviu daugikliu). Todėl, jeigu *užregistruotų* dalelių skaičiaus skirstinys skiriasi nuo Puasono arba Gauso skirstinio, tai reiškia, kad dalelių skaičiavimo įranga veikia neoptimaliai (pvz., detektoriaus išėjimo signale yra daug pašalinių impulsų, kurie nesusiję su registruojamąja spinduliuote, arba kai kurie spinduliuotės sukeltieji impulsai nėra užregistruojami). Taigi, dalelių skaičiaus skirstinio statistinį modelį galima panaudoti skaičiavimo įrangos patikrinimui: pakanka palyginti statistinio modelio išvadas (tikimybes ir teorinę dispersiją) su atitinkamais empiriniais parametrais (dažniais ir empirine dispersija). Kaip matome, tarp lyginamųjų dydžių nėra vidurkio. Taip yra todėl, kad „teorinį“ (t. y. neiškraipytą jokių matavimo įrangos defektų) vidurkį lemiantys veiksniai nėra susiję su skaičiavimo statistika. Pvz., šis vidurkis priklauso nuo radioaktyviojo šaltinio aktyvumo, atstumo tarp šaltinio ir detektoriaus, detektoriaus tipo ir kt. Dažniausiai teorinis vidurkis $\bar{x}$ nebūna žinomas iš anksto. Tačiau jis yra reikalingas skaičiuojant tikimybes ir teorinę dispersiją: jis įeina į tikimybių išraiškas (3.4.12) ir (3.4.16) ir į teorinės dispersijos išraišką (3.4.3). Vienintelė išeitis – teorinį vidurkį pakeisti empiriniu. Taigi, veiksmų seka, kurią reikia atlikti tikrinant skaičiavimo įrangą, yra tokia:

1) atliekami $N$ vienodos trukmės matavimų vienodomis sąlygomis;
2) apskaičiuojami empiriniai dažniai, vidurkis $a_e$ ir dispersija $D_e$ (pastarieji du dydžiai skaičiuojami pagal (3.3.1) ir (3.3.5) formules);
3) imant empirinį vidurkį $a_e$ vietoj teorinio vidurkio $a$, apskaičiuojamos teorinės tikimybės $P(x)$ (tiksliai skaičiuojant, reikia naudoti (3.4.12) formulę, kurią galima pakeisti rekurentinėmis formulėmis (3.4.13), o jeigu $a_e$ yra pakankamai didelis, tada galima naudoti ir apytikslę formulę (3.4.16)) ir teorinė dispersija $D$ (3.4.3);
4) empirinių dažnių pasiskirstymo funkcija $F(x)$ palyginama su teorinių tikimybių pasiskirstymo funkcija $P(x)$, o empirinė dispersija $D_e$ palyginama su teorine dispersija $D$. Jeigu matavimų duomenys atitinka naudojamą statistinį modelį, tada $F(x)$ turėtų apytiksliai sutapti su $P(x)$ esant visoms $x$ vertėms, o $D_e$ turėtų apytiksliai sutapti su $D$.

Paprasčiausia palyginti $F(x)$ ir $P(x)$ nubrėžus abi šias funkcijas viename grafike. Pvz., empirinė histograma, kuri pavaizduota 9 pav. stulpelių pavidalu, buvo gauta atlikus 3000 matavimų. Empirinis vidurkis lygus 8,018. Ši vertė turi būti įrašyta vietoj $a$ skaičiuojant teorines tikimybes $P(x)$. Kadangi vidurkis nėra didelis, tai tikimybes $P(x)$ reikia skaičiuoti pagal bendrąją Puasono skirstinio išraišką (3.4.12) (jeigu vidurkis būtų didesnis už 20, tada taip pat būtų galima taikyti (3.4.12), tačiau praktiškai tas pats rezultatas būtų gautas ir taikant Gauso skirstinį (3.4.16), kurio matematinė išraiška paprastesnė). Teorinės tikimybės pavaizduotos taškais, kurie sujungti linija (kadangi Puasono skirstinys apibrėžtas tik diskrečioms $x$ vertėms, tai jungianti linija yra tik dėl vaizdumo). Kaip matome, empirinė ir teorinė funkcijos yra artimos viena kitai. Vien pažiūrėjus į šį grafiką, nieko daugiau ir negalima pasakyti (toks vizualus kreivių palyginimas kartais vadinamas „kokybiniu“ palyginimu).




**9 pav.** Empirinių dažnių ir teorinių tikimybių palyginimas (matavimų skaičius 3000, empirinis vidurkis 8,018)

Kadangi empiriniai dažniai $F(x)$ yra atsitiktiniai dydžiai, tai jie gali skirtis nuo teorinių tikimybių $P(x)$ net ir tada, kai matavimų duomenų statistinės savybės tiksliai atitinka Puasono skirstinį. Didėjant matavimų skaičiui, tokie atsitiktiniai nuokrypiai nuo teorinės kreivės mažėtų. Tačiau skirtumų gali atsirasti ir dėl skaičiavimo įrangos defektų. Didinant matavimų skaičių, tokie skirtumai ne mažėtų, o taptų dar ryškesni. Norint nuspręsti, ar skirtumai yra grynai atsitiktiniai (t. y. įranga veikia optimaliai), ar ne (t. y. pasireiškia įrangos defektai), reikia *kiekybinio* palyginimo. Kiekybiškai palyginant empirinius dažnius ir teorines tikimybes, reikia nustatyti vieną parametrą, kuris apibūdina duomenis kaip visumą. Praktikoje dažniausiai pasirenkamas vadinamasis „chi kvadratu kriterijus“ („$\chi^2$ kriterijus“; čia „$\chi$“ yra graikų abėcėlės raidė „chi“). Jo esmė yra tokia. Apibrėžkime skaičių

$$\chi^2 = \frac{1}{\bar{x}_e} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_e)^2 . \tag{3.5.1}$$

Kadangi šis skaičius apskaičiuotas naudojant atsitiktinio dydžio $X$ vertes $x_i$ ($i = 1, 2, ..., n$), tai jis taip pat yra tam tikro atsitiktinio dydžio vertė. Kaip ir visus kitus atsitiktinius dydžius, tą dydį galima apibūdinti tam tikru skirstiniu. Aišku, kad to skirstinio pavidalas priklauso nuo dydžio $X$ skirstinio ir nuo dėmenų skaičiaus $n$. Jeigu dydžio $X$ skirstinys yra Puasono, tada dydžio, kurio vertės apibrėžtos (3.5.1) sąryšiu, skirstinys yra tiksliai apibrėžto pavidalo ir vadinamas ***$\chi^2$ skirstiniu***. Atsitiktinį dydį, kuris apibūdinamas $\chi^2$ skirstiniu, žymėsime $Y$ (kaip ir anksčiau, „atsitiktinio dydžio“ sąvoką skirsime nuo to dydžio empirinės vertės sąvokos). Šį skirstinį galima nusakyti tikimybės tankio funkcija, tačiau praktikoje dažniau naudojama kita funkcija, kurios prasmė – tikimybė, kad atsitiktinio dydžio $Y$ vertė taps mažesnė už empirinę vertę $\chi^2$, kuri apskaičiuota pagal (3.5.1). Šią tikimybę žymėsime $P(Y < \chi^2)$. Apskaičiavus (arba nuskaičius iš specialių lentelių) šią tikimybę, ji lyginama su tam tikromis „kritinėmis“ vertėmis, kurių viena yra artima nuliui (pvz., 0,01), o kita artima vienetui (pvz., 0,99). Jeigu tikimybė $P(Y < \chi^2)$ yra mažesnė už 0,01, tai reiškia, kad $\chi^2$ vertė yra neįtikėtinai maža: jeigu matavimo duomenų skirstinys būtų Puasono, tada tokia maža $\chi^2$ vertė būti gaunama rečiau negu vieną kartą iš šimto. Jeigu tikimybė $P(Y < \chi^2)$ yra didesnė už 0,99, tai reiškia, kad $\chi^2$ vertė yra neįtikėtinai didelė: jeigu matavimo duomenų skirstinys būtų Puasono, tada daugiau negu 99 matavimuose iš šimto būtų gaunama mažesnė vertė. Tokiais atvejais galima spėti, kad blogai veikia skaičiavimo įranga. Jeigu tikimybė $P(Y < \chi^2)$ yra tarp 0,01 ir 0,99 (t. y. nei per maža, nei per didelė), tada galima teigti, kad dalelių skaičiavimo įranga veikia tinkamai.

Palyginus $\chi^2$ apibrėžtį (3.5.1) su empirinės dispersijos apibrėžtimi (3.3.5), tampa akivaizdu, kad

$$\chi^2 = \frac{(n-1)D_e}{a_e} . \tag{3.5.2}$$

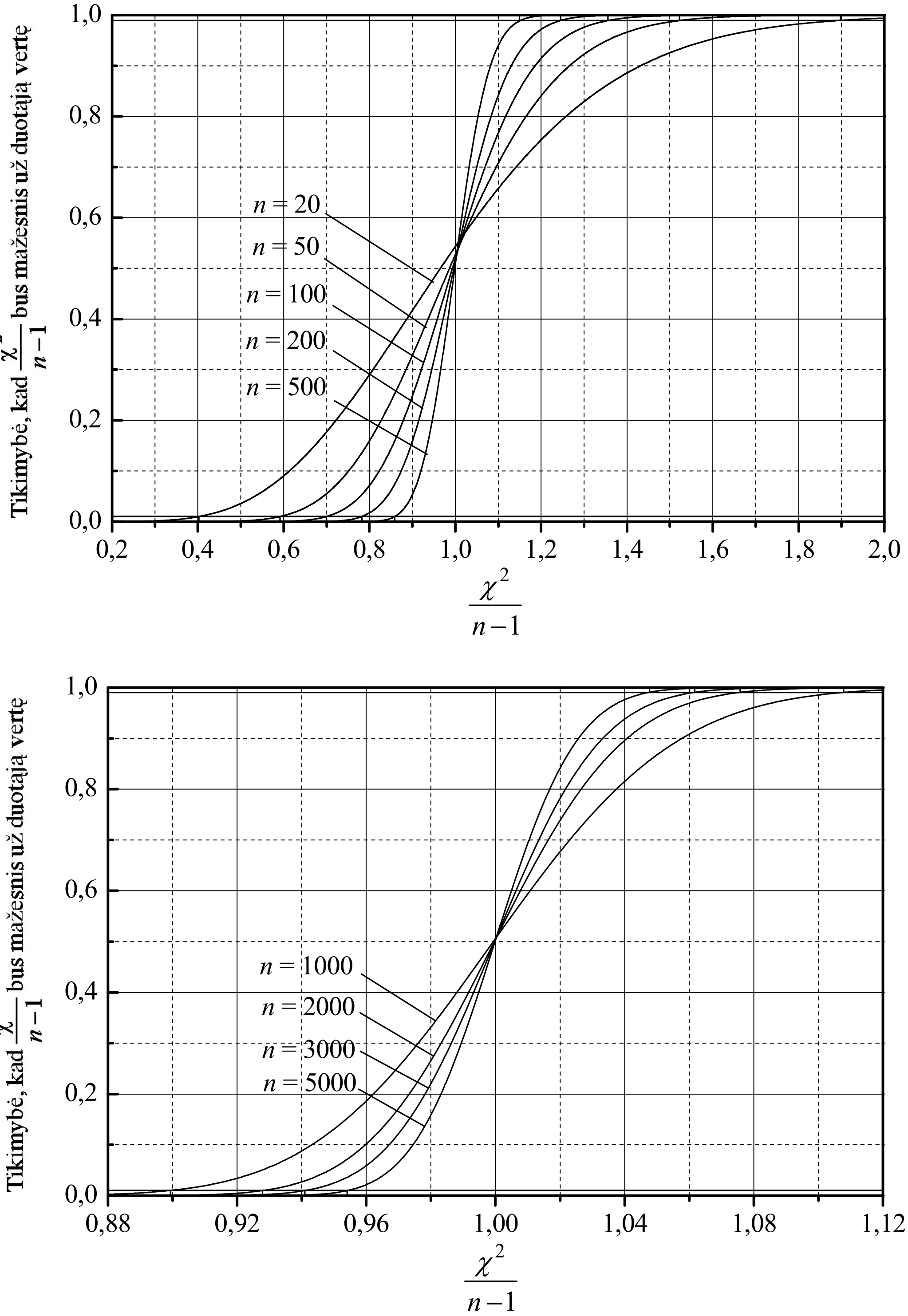
Kadangi Puasono skirstinio atveju empirinė dispersija turėtų būti artima empiriniam vidurkiui (žr. (3.4.14)), tai (3.5.2) reiškinio vertė turėtų būti artima skaičiui $n - 1$. Todėl vietoj anksčiau apibrėžto dydžio $Y$ patogiau vartoti dydį $Y / (n - 1)$, kurio empirinė vertė lygi

$$\frac{\chi^2}{(n-1)} = \frac{D_e}{a_e} . \tag{3.5.3}$$

Ši vertė dažniausiai būna artima vienetui. 10 pav. pateiktieji grafikai nusako tikimybę, kad dydžio $Y / (n - 1)$ vertė atsitiktinai taps mažesnė už duotąją vertę (kuri atidėta ant abscisių ašies). Dvi horizontalios linijos nurodo „kritines“ tikimybes (0,01 ir 0,99). Šių linijų ir grafikų sankirtos taškų abscisės nusako dydžio $Y / (n - 1)$ kritines vertes. Jeigu $\chi^2/(n - 1)$ yra tarp tų kritinių verčių, tada galima teigti, kad įranga veikia tinkamai; priešingu atveju galima spėti, kad įranga veikia neoptimaliai.

Pvz., empirinio duomenų rinkinio, kurio histograma pavaizduota 9 pav., vidurkis $a_e$ yra lygus 8,018, dispersija $D_e$ yra lygi 7,818, o $\chi^2 \approx 2924{,}3$. Kadangi $D_e < a_e$, tai galima daryti išvadą, kad empirinių duomenų išsibarstymo laipsnis yra šiek tiek mažesnis už tą, kuris išplaukia iš Puasono skirstinio. Norint nustatyti, ar šis nuokrypis nuo teorijos yra statistiškai reikšmingas, reikia taikyti anksčiau aprašytą $\chi^2$ kriterijų. Kadangi šiuo atveju $n = 3000$, tai $\chi^2 / (n-1) \approx 0{,}975$. Iš 10 pav. išplaukia, kad, kai $n = 3000$, tikimybė, kad $\chi^2 / (n-1)$ taps mažesnis už 0,975, yra lygi maždaug 0,17. Kadangi ši vertė nėra nei pernelyg maža, nei pernelyg didelė (tiksliau, ši vertė yra didesnė už 0,01 ir mažesnė už 0,99), tai galima daryti išvadą, kad minėtas skirtumas tarp empirinės ir teorinės dispersijų yra atsitiktinis, o dalelių skaičiavimo įranga veikia normaliai.

Praktikoje tikslioji tikimybės $P(Y < \chi^2)$ vertė dažniausiai nebūna svarbi: pakanka tik nustatyti, ar ji yra tarp tam tikrų iš anksto duotų kritinių tikimybių (pvz., 0,01 ir 0,99). Todėl $\chi^2$ kriterijus kartais




**10 pav.** $\chi^2$ skirstinio kreivės, kai yra įvairūs matavimų skaičiai $n$. Dvi horizontalios tiesės atitinka kritines tikimybes 0,01 ir 0,99 taikomas šitaip: empirinė $\chi^2$ vertė palyginama su kritinėmis vertėmis, kurios atitinka minėtas kritines tikimybes (kritinės $\chi^2$ vertės dažniausiai nuskaitomos iš specialių lentelių arba grafikų). Pvz., kai $n =$ $= 3000$, kritinės $\chi^2 / (n - 1)$ vertės yra lygios maždaug 0,94 ir 1,06 (žr. 10 pav.). Jeigu matavimo įranga veikia tinkamai, tada empirinė $\chi^2 / (n - 1)$ vertė turėtų būti tarp kritinių verčių.

Apibendrinant anksčiau aprašytą „$\chi^2$ kriterijų“, galima teigti, kad jo paskirtis – nustatyti, ar tikrasis skirstinys yra Puasono (t. y. dispersija lygi vidurkiui), ar ne (t. y. dispersija nelygi vidurkiui). Pirmuoju atveju eksperimentinio skirstinio nuokrypis nuo Puasono skirstinio yra grynai atsitiktinis (dėl nepakankamai didelio matavimų skaičiaus), t. y., neribotai didinant matavimų skaičių, eksperimentinis skirstinys artėtų prie Puasono skirstinio, o empirinė dispersija artėtų prie vidurkio. Antruoju atveju, atvirkščiai, eksperimentinio skirstinio nuokrypis nuo Puasono skirstinio yra neatsitiktinis ir taptų vis akivaizdesnis, jeigu matavimų skaičius būtų didinamas (o dispersija paklaidų ribose neatitiktų vidurkio). Aišku, kad bet kuriuo atveju detektuotų dalelių skaičiaus tikrasis skirstinys nebus *tiksliai* Puasono, nes tai būtų idealus atvejis, kuris nepasiekiamas dėl matavimo įrangos arba metodikos netobulumo. Tačiau, jeigu empirinė dispersijos ir vidurkio santykio $D_e / a_e = \chi^2 / (n - 1)$ reikšmė yra tarp minėtųjų kritinių verčių, tada galima teigti, kad eksperimentinio skirstinio nuokrypis nuo Puasono skirstinio yra pakankamai mažas, kad jo būtų galima nepaisyti praktikoje. Tokia dalelių sistemos veika vadinama „optimalia“, nes tada yra užtikrinamas apytikslis proporcingumas tarp krintančių į detektorių dalelių skaičiaus ir detektuojamų dalelių skaičiaus. T. y., nors detektuotų dalelių skaičius visada mažesnis už pataikiusių į detektorių dalelių skaičių (kartais – net keliomis eilėmis mažesnis), tačiau jų santykis yra konstanta, kuri priklauso tik nuo dalelių savybių (tiksliau, jų rūšies ir energijos), bet nepriklauso nuo dalelių srauto intensyvumo. Tą proporcingumo koeficientą nesunku nustatyti eksperimentiškai (užtenka turėti tos pačios rūšies ir energijos dalelių šaltinį, kuris išspinduliuoja žinomą dalelių skaičių per sekundę). Priešingu atveju (kai veikimas nėra optimalus) tas santykis nebūtų konstanta, o jo priklausomybė nuo dalelių srauto intensyvumo gali būti sudėtinga ir iš anksto nežinoma, todėl būtų sunkiau interpretuoti matavimo duomenis. Kitame skirsnyje aprašytas atskiras atvejis, kai minėtasis nuokrypis nuo Puasono skirstinio gali būti išreikštas palyginti paprasta formule, todėl, turint empirinius dispersiją ir vidurkį, galima išspręsti atvirkščią uždavinį – apskaičiuoti konkretų įrangos parametrą (skaitiklio neveikos trukmę), dėl kurio atsiranda tas nuokrypis (su sąlyga, kad $D_e / a_e$ nuokrypis nuo vieneto yra pakankamai didelis, o kitokio tipo netobulumai pasireiškia palyginti silpnai).

3.5.2. *Neveikos trukmės nustatymas pagal eksperimentinio skirstinio nuokrypį nuo Puasono skirstinio*

Vienas iš veiksnių, kurie sąlygoja užregistruotų dalelių skaičiaus skirstinio nuokrypį nuo Puasono skirstinio, yra skaitiklio neveikos trukmė $\tau_n$. Taip yra vadinamas mažiausias laiko tarpas, kuris turi praeiti po dalelės detektavimo, kad skaitiklis galėtų detektuoti kitą dalelę. T. y., jeigu tame laiko tarpe į skaitiklį pataikys dalelė, ji nebus detektuota, net jeigu sąveikaus su skaitiklio darbine medžiaga. Kitaip sakant, neveikos trukmė – tai detektoriaus „atsistatymo“ trukmė, detektavus dalelę. Kadangi „palankusis įvykis“ šiuo atveju yra dalelės detektavimas, tai jo tikimybė yra lygi nuliui laiko tarpe, kurio trukmė $\tau_n$ ir kurio pradžia yra paskutiniosios dalelės detektavimo momentas. Vadinasi, nustoja galioti palankiojo įvykio tikimybės *pastovumo* sąlyga: ta tikimybė nėra lygi tam tikrai mažai pastoviai vertei $p$, o tampa lygi nuliui atsitiktiniais laiko momentais. Kaip minėta 3.4 skirsnyje, palankiojo įvykio tikimybės pastovumas yra būtinoji binominio skirstinio (ir jo atskiro atvejo – Puasono skirstinio) sąlyga. Todėl aišku, kad neveikos trukmė ne tik sumažina vidurkį (dėl „praleistų“ dalelių), bet neišvengiamai pakeičia ir skirstinio *tipą*: empirinis skirstinys jau nėra Puasono. Vienas iš šio nuokrypio nuo Puasono skirstinio požymių yra empirinių dispersijos ir vidurkio santykio $D_e / a_e$ (arba šaknies $\sqrt{D_e / a_e} = \sigma / \sqrt{a_e}$ ) nuokrypis nuo vieneto, kuris yra tuo didesnis, kuo didesnė tikimybė, kad dalelė sąveikaus su detektoriaus darbine medžiaga neveikos laiko tarpe. Įrodyta[1], kad, galiojant nepratęsiamosios neveikos trukmės modeliui (žr. 4 skyrių), vidutinė dalelių skaičiavimo sparta (t. y. dydis $N = a / T$ , kur $T$ yra vieno matavimo trukmė) išreiškiama (4.3) formule, o užregistruotų per vieną matavimą dalelių skaičiaus standartinis nuokrypis lygus

$$\sigma = \sqrt{\frac{N_0 T}{(1 + N_0 \tau_n)^3}} \,. \qquad (3.5.4)$$

Įrašę „tikrosios“ skaičiavimo spartos $N_0$ išraišką (4.1) į (3.5.4), gauname:

[1] Pagal *Cantor B. I., Teicht M. C. Dead-time-corrected photocounting distributions for laser radiation // Journal of the Optical Society of America, vol. 65, no.7, 1975, p. 786–791.*

$$\sigma = \sqrt{NT}(1 - N\tau_{\text{n}}) \equiv \sqrt{a}\left(1 - a\frac{\tau_{\text{n}}}{T}\right). \tag{3.5.5}$$

Akivaizdu, kad $\sigma < \sqrt{a}$, t. y. neveikos trukmė pasireiškia tuo, kad užregistruotų dalelių skaičiaus skirstinys tampa siauresnis už Puasono skirstinį, kuris atitinka duotąjį vidurkį $a$. Nors (3.5.4) formulės matematinis išvedimas yra gana sudėtingas, minėtąjį skirstinio pločio sumažėjimą nesunku suprasti, išnagrinėjus ribinį atvejį, kai $N_0 \to \infty$. Šiuo atveju iš (4.2) gauname, kad $N = 1/\tau_{\text{n}}$, t. y. visų matavimų rezultatai tampa vienodi. Tai reiškia, kad, neribotai didėjant tikrajai skaičiavimo spartai $N_0$ ir galiojant nepratęsiamosios neveikos trukmės modeliui, per laiką $T$ užregistruotų dalelių skaičiaus skirstinys artėja į Dirako delta funkcijos pavidalo skirstinį, kurio centras yra ties $T/\tau_{\text{n}}$. Tokio skirstinio standartinis nuokrypis yra lygus nuliui. Todėl nenuostabu, kad skaitiklio neveikos trukmė sąlygoja užregistruotų dalelių skirstinio pločio *sumažėjimą*, palyginti su Puasono skirstiniu, kuris atitinka duotą išmatuotąjį dalelių skaičiaus vidurkį $a$. Išmatavus empirinius vidurkį $a_{\text{e}}$ ir standartinį nuokrypį $\sigma_{\text{e}}$ (arba dispersiją $D_{\text{e}}$), pagal (3.5.5) formulę galima apskaičiuoti skaitiklio neveikos trukmę:

$$\tau_{\text{n}} = \frac{T}{a_{\text{e}}}\left(1 - \frac{\sigma_{\text{e}}}{\sqrt{a_{\text{e}}}}\right) = \frac{T}{a_{\text{e}}}\left(1 - \sqrt{\frac{D_{\text{e}}}{a_{\text{e}}}}\right). \tag{3.5.6}$$

Tačiau reikia turėti omenyje, kad šis rezultatas galioja tik nepratęsiamosios neveikos trukmės modeliui (žr. 4 skyrių). Pratęsiamosios neveikos trukmės arba „mišriajam“ modeliui (3.5.4)–(3.5.6) formules galima taikyti tik palyginti mažų spartų atvejais, kai $a\tau_{\text{n}}/T << 1$ (kad būtų kuo mažesnė tikimybė, kad dvi dalelės paklius į tą patį neveikos intervalą). Be to, kaip minėta, (3.5.6) įskaito vieną konkretų įrangos netobulumą (neveikos trukmę), tačiau neįskaito kito tipo netobulumų, kurie taip pat gali turėti įtakos empirinio skirstinio pavidalui. Čia reikia pabrėžti, kad mažas skaitiklio efektyvumas pats savaime nėra „netobulumas“ ta prasme, kuria šis žodis vartojamas šiame skirsnyje: jeigu skaitiklis detektuoja tik dalį į jį krintančių dalelių ir jeigu ta dalis yra konstanta, nepriklausanti nuo matavimo sąlygų, tada lieka galioti palankiojo įvykio pastovumo sąlyga ir tokio skaitiklio veikimas yra „optimalus“, kad ir kokia maža būtų detektuojamų dalelių santykinė dalis (kuri įprastai vadinama skaitiklio „efektyvumu“). Veikimo neoptimalumą gali sąlygoti tik veiksniai, dėl kurių palankiojo įvyko tikimybė tampa nepastovi. Be neveikos trukmės, yra ir kitų veiksnių, kurie sąlygoja minėtos tikimybės svyravimus. Pvz., detektoriaus maitinimo įtampa niekada nebūna idealiai pastovi, o įtampos impulsų, kuriuos generuoja Geigerio ir Miulerio skaitiklis, aukštis (amplitudė) yra statistiškai pasiskirstęs. Tos amplitudės statistinis vidurkis yra proporcingas skaitiklio maitinimo įtampai. Kadangi ši įtampa nėra pastovi, tai svyruoja ir amplitudės vidurkis. Antra vertus, impulsų skaičiavimo įrenginys, kuris priima įtampos impulsus iš skaitiklio (ir atvaizduoja jų skaičių rodytuve), turi tam tikrą „jautrio ribą“, t. y. mažiausią amplitudę, kurią gali užregistruoti (jeigu skaičiavimo įrenginio įėjime atsiras impulsas, kurio amplitudė mažesnė už jautrio ribą, tada jis nebus užregistruotas). Sumažėjus maitinimo įtampai ir impulsų amplitudės vidurkiui, padidėja santykinė dalis impulsų, kurių amplitudė mažesnė už jautrio ribą, todėl sumažėja skaičiavimo sparta ir tuo pačiu – palankiojo įvykio (dalelės detektavimo) tikimybė. Vadinasi, skaitiklio maitinimo įtampos svyravimai taip pat sąlygoja palankiojo įvykio nepastovumą, ir dėl to atsiranda empirinio skirstinio nuokrypis nuo Puasono skirstinio. Tačiau dėl šio veiksnio (kitaip negu dėl neveikos trukmės) dispersija *padidėja*, o vidurkio pokytis yra palyginti nežymus. Vadinasi, skaitiklio įtampos svyravimai padidina empirinių dispersijos ir vidurkio santykį $D_{\text{e}} / a_{\text{e}}$. Jeigu tie svyravimai būtų vienintelis pašalinis veiksnys, tada $D_{\text{e}} / a_{\text{e}}$ būtų didesnis už vienetą. Jeigu vienu metu pasireiškia ir neveikos trukmė, ir minėtieji svyravimai, tada $D_{\text{e}} / a_{\text{e}}$ gali būti ir didesnis už vienetą, ir mažesnis už vienetą, priklausomai nuo to, kuris iš tų dviejų veiksnių yra vyraujantis. Jeigu maitinimo įtampos svyravimų įtaka skirstinio pavidalui (t. y. santykiui $D_{\text{e}} / a_{\text{e}}$) nėra daug mažesnė už neveikos trukmės įtaką, tada (3.5.6) formulė tampa netinkama. Pvz., jeigu $D_{\text{e}} / a_{\text{e}} > 1$, tada pagal (3.5.6) formulę gaunamas neturintis fizikinės prasmės rezultatas – neigiama neveikos trukmė. Net jeigu $D_{\text{e}} / a_{\text{e}} < 1$, pagal (3.5.6) formulę apskaičiuota neveikos trukmė gali būti labai netiksli (sumažinta), nes dėl minėtų svyravimų (kurie didina $D_{\text{e}}$) santykis $D_{\text{e}} / a_{\text{e}}$ gali būti daug arčiau vieneto, negu tuo atveju, kai pasireiškia tik neveikos trukmė.

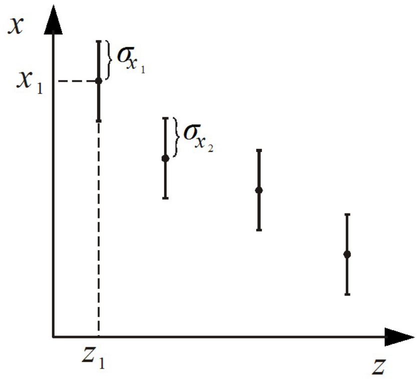
3.5.3. *Vieno matavimo tikslumo įvertinimas*

Antrasis statistinio modelio taikymas yra naudingas tais atvejais, kai siekiama bent apytiksliai nustatyti dalelių skaičiaus teorinį vidurkį $a$, tačiau turimas tik vieno matavimo rezultatas $x$. Jeigu būtų žinomas standartinis nuokrypis $\sigma$, tada būtų galima teigti, kad vidurkis greičiausiai priklauso intervalui $x - \sigma < a < x + \sigma$, nes daugumos matavimų rezultatų nuokrypių nuo vidurkio $a$ moduliai neviršija standartinio nuokrypio $\sigma$ (pvz., žr. 7 pav.). Žinome, kad standartinis nuokrypis $\sigma$ yra lygus kvadratinei šakniai iš dispersijos $D$. Tačiau aišku, kad, atlikus tik vieną matavimą ($n = 1$), dispersija negali būti skaičiuojama pagal jos apibrėžtį (3.3.5). Tokiu atveju galima pasinaudoti statistiniu modeliu – Puasono skirstiniu. Kaip matome iš Puasono skirstinio išraiškos (3.4.12), šį skirstinį visiškai apibūdina vidurkis $a$ (t. y., žinodami $a$, galime apskaičiuoti visų verčių $x$ tikimybes $P(x)$ ir dispersiją). Turint vienintelį matavimą, vidurkį reikia prilyginti to matavimo rezultatui: $a \approx x$. Dabar galime pasinaudoti žinoma Puasono skirstinio savybe: $D = a$. Sujungę pastarąsias dvi lygybes, gauname: $D \approx x$, t. y. $\sigma \approx \sqrt{x}$ . Taigi, *tipiškas pavienio matavimo rezultato nuokrypis nuo tikrojo vidurkio yra lygus šakniai iš to matavimo rezultato*.

Jeigu išmatuotasis dalelių skaičius $x$ yra didelis (didesnis už 20), tada šią išvadą galima suformuluoti tikslesniu pavidalu: tikrasis vidurkis $a$ priklauso intervalui $x - \sqrt{x} < a < x + \sqrt{x}$ su 68,3 % tikimybe. Kitaip sakant, šis intervalas yra ***vidurkio 68,3 % pasikliautinasis intervalas***. Analogiškai intervalas $x - 2\sqrt{x} < a < x + 2\sqrt{x}$ yra 95,4 % pasikliautinasis intervalas, $x - 3\sqrt{x} < a < x + 3\sqrt{x}$ yra 99,7 % pasikliautinasis intervalas ir t. t. (žr. 3.4.3 skyrelis, paskutiniosios dvi pastraipos).

Taigi, vieno matavimo ***santykinė standartinė paklaida*** ($\sigma / x$) yra lygi $\sqrt{x} / x = 1/\sqrt{x}$ . Matome, kad vieno matavimo rezultatas (pilnutinis per matavimo trukmę užregistruotų dalelių skaičius) visiškai nusako to matavimo santykinę paklaidą. Jeigu matavimo metu buvo užregistruota 100 dalelių, tada santykinė standartinė paklaida lygi 10 %. Norint sumažinti šią paklaidą iki 1 %, reikia užregistruoti 10 000 dalelių. Tai rodo, kad optimalioji matavimo trukmė yra atvirkščiai proporcinga pageidaujamos santykinės paklaidos kvadratui (jeigu vidutinis dalelių skaičius per laiko vienetą yra pastovus).

Pateikiant matavimų rezultatus grafiškai, kiekvieno matavimo paklaidos dažnai nurodomos vertikalių brūkšnelių pavidalu. Pvz., 11 pav. parodytas hipotetinis matavimo duomenų rinkinys, kuris gautas matuojant dydį $x$, kuris yra dydžio $z$ funkcija. Matavimų duomenys pateikiami taškų pavidalu, o kiekvieno matavimo neapibrėžtumo intervalas nurodomas vertikaliu brūkšneliu, kurio centre yra atitinkamas taškas. Paklaidų brūkšnelio ilgį įprasta pasirinkti lygiu $2\sigma$ (t. y. $\sigma$ į viršų ir $\sigma$ į apačią nuo taško). Tada, aproksimuojant matavimų duomenis teorine funkcija $x = f(z)$ ir nubrėžus tą funkciją tame pačiame grafike, teorinė funkcija turėtų kirsti maždaug 68 % visų paklaidų brūkšnelių (žr. 3.4.3 skyrelio pabaigą). Žinoma, taip yra tik tada, kai taškų skaičius yra pakankamai didelis, kad pasireikštų statistiniai dėsningumai (bent kelios dešimtys). Jeigu taškų skaičius yra mažas (pvz., 5), tada yra didelė tikimybė, kad teorinė funkcija nekirs daugumos paklaidų brūkšnelių.



**11 pav.** Matavimo paklaidų grafinis vaizdavimas

Reikia turėti omenyje, kad visos anksčiau suformuluotos išvados galioja tik tada, kai $x$ yra dalelių skaičius, užregistruotas per *vieną* duotosios trukmės matavimą. Šiomis išvadomis *negalima* remtis skaičiuojant šių dydžių paklaidas:

1) kelių nepriklausomų matavimų *vidurkio*;
2) skaičiavimo *spartos* (t. y. vidutinio skaičiaus per laiko vienetą);
3) dalelių skaičių *sumos* arba *skirtumo*;
4) dydžio, kuris yra dalelių skaičiaus *funkcija*.

Tokiais atvejais, skaičiuojant paklaidas, reikia taikyti kitame skyrelyje išdėstytus metodus.

## 3.6. Paklaidų skaičiavimas

Iki šiol buvo aptariami tik tiesiogiai išmatuoto dalelių skaičiaus skirstiniai. Tačiau praktikoje eksperimentatorių dažniausiai domina ne pilnutinis per tam tikrą laiką užregistruotų dalelių skaičius, o tam tikras išvestinis dydis, kuris gaunamas atliekant įvairias aritmetines operacijas su išmatuotais dalelių skaičiais. Kadangi tiesiogiai išmatuotasis dalelių skaičius yra atsitiktinis dydis, tai visi dydžiai, kurie gaunami operuojant dalelių skaičiais, taip pat yra atsitiktiniai. Jų skirstiniai priklauso ir nuo išmatuotojo dalelių skaičiaus skirstinio, ir nuo konkrečių matematinių operacijų, kurios yra su tais skaičiais atliekamos.

Kaip pavyzdį, aptarkime matavimus, kurių metu detektorius registruoja radioaktyviojo šaltinio spinduliuotę. Tarkime, kad pilnutinis to šaltinio išspinduliuotų dalelių skaičius per vieną matavimą yra pakankamai didelis, kad jo skirstinį (Puasono skirstinį) būtų galima aproksimuoti Gauso skirstiniu (3.4.16). Šį skirstinį visiškai nusako jo vidurkis $a$, o standartinis nuokrypis lygus kvadratinei šakniai iš vidurkio. Be to, tarkime, kad detektorius užregistruoja tik 50 % visų dalelių, kurias spinduliuoja šaltinis. Tada, norint apskaičiuoti šaltinio išspinduliuotų dalelių skaičių, matavimo rezultatą reikėtų padauginti iš 2. Atlikus tokius matavimus daug kartų ir kiekvieno matavimo rezultatą padauginus iš 2, būtų gautas naujas skirstinys, kuris skiriasi nuo tiesiogiai užregistruotų dalelių skaičiaus skirstinio. Aišku, kad šio apskaičiuotojo skirstinio vidurkis būtų lygus dvigubam užregistruotų dalelių skaičiaus vidurkiui. Tačiau kyla klausimas: kokie yra šio skirstinio pavidalas ir standartinis nuokrypis?

Atsakymas į šį klausimą yra toks. Padauginus atsitiktinį dydį iš konstantos (šiuo atveju – iš 2), gautojo dydžio skirstinio *pavidalas* yra toks pat kaip pradinio dydžio (šiuo atveju – Gauso skirstinys), tačiau naujo skirstinio standartinis nuokrypis jau nėra lygus kvadratinei šakniai iš vidurkio (t. y. minėtame pavyzdyje naujasis standartinis nuokrypis nebus lygus senajam standartiniam nuokrypiui, padaugintam iš $\sqrt{2}$ ) . Todėl naują Gauso skirstinį reikia apibūdinti *dviem* parametrais: jo vidurkiu $a$ ir standartiniu nuokrypiu $\sigma$. Tokio Gauso skirstinio tikimybės tankio funkcija $f(x)$ yra (3.4.24). Kaip minėta 3.4.3 skyrelyje, $f(x)\mathrm{d}x$ nusako tikimybę, kad apskaičiuoto dydžio (šiuo atveju – dvigubo užregistruotų dalelių skaičiaus) vertė bus tarp $x$ ir $x + \mathrm{d}x$.

Pasirodo, kad, atlikus įvairias matematines operacijas su dydžiais, kurių skirstinys yra Gauso, skaičiavimo rezultato skirstinys dažniausiai taip pat yra Gauso. Norint gauti šio skirstinio vidurkį, pakanka atlikti tas pačias operacijas su pradinio dydžio vidurkiu. Tačiau standartinio nuokrypio skaičiavimas nėra toks akivaizdus. Toliau suformuluota bendroji taisyklė, kuri taikoma skaičiuojant bet kurio išvestinio dydžio standartinį nuokrypį.

Tarkime, kad $x$, $y$, $z$, ... yra tiesiogiai išmatuotieji dalelių skaičiai arba kitokie nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, kurių standartiniai nuokrypiai $\sigma_x$, $\sigma_y$, $\sigma_z$ yra žinomi. Be to, duota tų dydžių funkcija $u(x, y, z, ...)$. Tada, jeigu tos funkcijos dalinių išvestinių standartiniai nuokrypiai yra daug mažesni už tų išvestinių modulius, atsitiktinio dydžio $u$ standartinis nuokrypis $\sigma_u$ atitinka lygybę

$$\sigma_u^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \sigma_z^2 + ... \tag{3.6.1}$$

Toliau pateiktas šio sąryšio taikymas keliais paprastais atvejais.

**I atvejis**. Atsitiktinių dydžių suma arba skirtumas

Jeigu

$$u = x + y \quad \text{arba} \quad u = x - y,$$

tada

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \quad \text{ir} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \pm 1 .$$

Pasinaudoję (3.6.1) sąryšiu, gauname:

$$\sigma_u = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} . \tag{3.6.2}$$

Pvz., šis sąryšis taikomas, jeigu matavimų duomenis reikia pataisyti atimant vadinamojo „fono“ impulsų skaičių (foną sąlygoja pašaliniai veiksniai, pvz., kosminė spinduliuotė, statybinių medžiagų natūralioji spinduliuotė, matavimų įrangos triukšmai ir kt.).

**II atvejis**. Atsitiktinio dydžio daugyba arba dalyba iš konstantos

Jeigu

$$u = Ax,$$

kur $A$ yra tiksliai apibrėžta konstanta, tada

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A .$$

Pasinaudoję (3.6.1) sąryšiu, matome:

$$\sigma_u = A\sigma_x. \tag{3.6.3}$$

Analogiškai, jeigu

$$u = x / B ,$$

tada

$$\sigma_u = \sigma_x / B . \tag{3.6.4}$$

Pvz., tarkime, kad reikia apskaičiuoti skaičiavimo spartos paklaidą. Skaičiavimo sparta $r$ – tai pilnutinio užregistruotų dalelių skaičiaus $x$ ir laiko $t$, per kurį jos buvo užregistruotos, santykis:

$$r = x / t .$$

Šio dydžio standartinė paklaida apskaičiuojama pagal bendrąją taisyklę (3.6.4), kur vietoj $B$ yra pilnutinė matavimo trukmė $t$.

**III atvejis**. Atsitiktinių dydžių daugyba arba dalyba vienas iš kito

Jeigu

$$u = xy,$$

tada

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y , \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = x ,$$

todėl pagal (3.6.1) sąryšį

$$\sigma_u^2 = y^2\sigma_x^2 + x^2\sigma_y^2 .$$

Padalijęs abi puses iš $u^2 = x^2y^2$, matome:

$$\left(\frac{\sigma_u}{u}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2 . \tag{3.6.5}$$

Analogiškai, jeigu

$$u = \frac{x}{y},$$

tada

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y} , \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} , \qquad \sigma_u^2 = \left(\frac{1}{y}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(-\frac{x}{y^2}\right)^2 \sigma_y^2 .$$

Padalijęs abi puses iš $u^2 = x^2 / y^2$, vėl gauname (3.6.5) sąryšį. Taigi, dalelių skaičių sandaugos arba dalmens *santykiniai* standartiniai nuokrypiai ($\sigma_u/u$, $\sigma_x/x$ ir $\sigma_y/y$) susiję tarpusavyje taip pat kaip dalelių skaičių sumos arba skirtumo *absoliutieji* standartiniai nuokrypiai (plg. (3.6.5) ir (3.6.2)).

**IV atvejis**. Dalelių skaičiaus matavimų rezultatų vidurkis

Tarkime, buvo atlikta $n$ vienodos trukmės matavimų vienodomis sąlygomis. Atitinkamus užregistruotų dalelių skaičius žymėsime $x_1, x_2, \ldots, x_n$, o jų sumą žymėsime $\Sigma$:

$$\Sigma = x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

Taikant bendrąją atsitiktinių dydžių funkcijos standartinio nuokrypio skaičiavimo formulę (3.6.1), gaunamas sąryšis

$$\sigma_\Sigma^2 = \sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 + \ldots + \sigma_{x_n}^2 ,$$

nes visiems nepriklausomiems kintamiesiems $x_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) galioja $\partial\Sigma / \partial x_i = 1$. Tačiau kadangi kiekvienam kintamajam $\sigma_{x_i} = \sqrt{x_i}$ , tai

$$\sigma_\Sigma^2 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \Sigma ,$$

$$\sigma_\Sigma = \sqrt{\Sigma} . \tag{3.6.6}$$

Šis rezultatas rodo, kad kelių matavimų rezultatų (dalelių skaičių) sumos paklaida yra tokia pat kaip vieno matavimo, kurio rezultatas lygus tai sumai. T. y., skaičiuojant kelių matavimų rezultatų sumos paklaidą, nėra svarbu, ar visas matavimų laikas buvo suskaidytas į atskirus trumpesnius matavimus, ar ne – svarbus tik pilnutinis per visą matavimų laiką užregistruotų dalelių skaičius.

Minėtųjų $n$ nepriklausomų matavimų vidurkis yra lygus

$$a = \frac{\Sigma}{n} . \tag{3.6.7}$$

Kadangi $n$ yra konstanta, tai galima taikyti anksčiau išvestą sąryšį (3.6.4), kuris nusako standartinį nuokrypį po dalybos iš konstantos:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_\Sigma}{n} = \frac{\sqrt{\Sigma}}{n} = \frac{\sqrt{na}}{n} ,$$

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{a}{n}}\,. \qquad (3.6.8)$$

Kadangi pavienio matavimo paklaida yra $\sigma_{x_i} = \sqrt{x_i}$, o tipiškos kintamųjų $x_i$ ($i$ = 1, 2, …, $n$) vertės yra artimos $a$, galima padaryti išvadą, kad $n$ matavimų vidurkio paklaida yra maždaug $\sqrt{n}$ kartų mažesnė negu kurio nors vieno iš tų matavimų paklaida. Vadinasi, norint 2 kartus padidinti matavimų tikslumą skaičiuojant daleles, reikia 4 kartus padidinti pilnutinę dalelių skaičiavimo trukmę.

## 3.7. Dispersijos matavimo paklaida

Vėl tarkime, kad buvo atlikta $n$ vienodos trukmės dalelių skaičiaus matavimų vienodomis sąlygomis. Dabar mūsų tikslas – apskaičiuoti atsitiktinio dydžio, kurio vertė lygi empirinei dispersijai (3.3.5), dispersiją $\sigma_D^2$ ir standartinį nuokrypį $\sigma_D$. Supaprastinsime šį uždavinį: tarkime, kad matavimų skaičius $n$ yra toks didelis, kad (3.3.5) reiškinio vertė yra praktiškai lygi (3.3.3) reiškinio vertei:

$$D_\mathrm{e} \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 \equiv \frac{\Sigma}{n}\,, \qquad (3.7.1)$$

$$\Sigma \equiv \sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 \equiv \sum_{i=1}^{n} y_i\,; \qquad (3.7.2)$$

čia $y_i \equiv (x_i - a)^2$. Vadinasi, reikia apskaičiuoti $n$ nepriklausomų atsitiktinių dydžių $Y_i \equiv (X_i - a)^2$ sumos (3.7.2) dispersiją $\sigma_\Sigma^2$. Kadangi visų tų dydžių dispersijos yra vienodos ir lygios $\sigma_y^2$, tai pagal bendrąją atsitiktinių dydžių funkcijos dispersijos išraišką (3.6.1) rašome:

$$\sigma_\Sigma^2 = n\sigma_y^2\,. \qquad (3.7.3)$$

Pagal dalybos iš konstantos taisyklę (žr. 3.6 skyrelį) empirinės dispersijos (3.7.1) dispersija lygi

$$\sigma_D^2 \approx \frac{\sigma_\Sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma_y^2}{n}\,. \qquad (3.7.4)$$

Dispersijos $\sigma_y^2$ negalima išreikšti dydžio $X$ dispersija $\sigma_x^2$ pagal bendrąją atsitiktinio dydžio funkcijos dispersijos išraišką (3.6.1), nes dydžio $Y \equiv (X - a)^2$ išvestinė lygi 2 ($X - a$), t. y. tos išvestinės standartinis nuokrypis (kuris yra lygus $2\sigma_x$) nėra daug mažesnis už jos vidurkį (kuris yra lygus nuliui). Dispersiją $\sigma_y^2$ skaičiuosime pagal (3.4.22):

$$\sigma_y^2 = \overline{y^2} - \overline{y}^2 \equiv \mu_4 - \mu_2^2 \equiv \mu_4 - \sigma_x^4\,; \qquad (3.7.5)$$

čia $\mu_k$ ($k$ = 2, 3, 4, ...) yra dydžio $X$ ***k-tasis centrinis momentas***, kuris apibrėžiamas šitaip:

$$\mu_k \equiv \overline{(x-a)^k}\,, \qquad (3.7.6)$$

t. y. $\mu_k$ yra dydžio $X$ nuokrypio nuo vidurkio $k$-tojo laipsnio vidurkis (pvz., dispersija $\sigma_x^2$ yra lygi antrajam centriniam momentui $\mu_2$). Įrašę (3.7.6) į (3.7.4), matome:

$$\sigma_D^2 \approx \frac{1}{n}(\mu_4 - \sigma_x^4)\,.$$

Tikslioji dydžio (3.3.5) dispersijos išraiška yra tokia[1]:

$$\sigma_D^2 = \frac{1}{n}\left(\mu_4 - \frac{n-3}{n-1}\sigma_x^4\right) \qquad (3.7.7)$$

(kai $n$ yra didelis, pastarųjų dviejų reiškinių vertės yra praktiškai vienodos). Apskaičiuosime atsitiktinio dydžio $X$ ketvirtąjį centrinį momentą $\mu_4$. Laikysime, kad dalelių skaičiaus vidurkis $a$ yra didelis (didesnis negu 20). Tada dalelių skaičiaus skirstinį galima aproksimuoti Gauso skirstiniu, kurio tikimybės tankis yra (3.4.23). Tačiau, kad gautas rezultatas būtų bendresnis, naudosime bendresnę formulę (3.4.24):

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_x^2}\right]. \qquad (3.7.8)$$

Tada pagal atsitiktinio dydžio funkcijos vidurkio bendrąją išraišką (3.4.20) rašome:

[1] Pagal tinklalapį <http://mathworld.wolfram.com/SampleVarianceDistribution.html>.

$$\mu_4=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^4 f_X(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^4\exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_x^2}\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}z^4\exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma_x^2}\right)\mathrm{d}z\,. \quad (3.7.9)$$

Integralas, kuris įeina į šį reiškinį, yra lygus

$$\int_{-\infty}^{+\infty}z^4\exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma_x^2}\right)\mathrm{d}z=3\sqrt{2\pi}\,\sigma_x^5\,.$$

Vadinasi,

$$\mu_4=3\sigma_x^4\,. \quad (3.7.10)$$

Įrašę (3.7.10) į (3.7.7), gauname atsitiktinio dydžio, kuris apibūdinamas Gauso skirstiniu (3.7.8), empirinės dispersijos dispersiją (t. y. empirinės dispersijos standartinės paklaidos kvadratą):

$$\sigma_D^2=\frac{2\sigma_x^4}{n-1}\,. \quad (3.7.11)$$

Kadangi $\sigma_x\approx\sqrt{D_\mathrm{e}}$, tai, apskaičiavus dydžio $X$ empirinę dispersiją $D_\mathrm{e}$ ir jos dispersiją $\sigma_D^2$, dydžio $X$ empirinio standartinio nuokrypio $\sigma_x$ paklaidą (standartinį nuokrypį) $\sigma_\sigma$ galima apskaičiuoti pagal atsitiktinio dydžio funkcijos standartinio nuokrypio išraišką (3.6.1):

$$\sigma_\sigma=\frac{\sigma_D}{2\sqrt{D_\mathrm{e}}}\approx\frac{\sigma_D}{2\sigma_x}\,. \quad (3.7.12)$$

Pvz., galiojant (3.7.11) lygybei,

$$\sigma_\sigma=\frac{\sigma_x}{\sqrt{2(n-1)}}\,. \quad (3.7.13)$$

Jeigu dydis $X$ yra dalelių skaičius, tada jo skirstinys yra Puasono, todėl $\sigma_x=\sqrt{a}$ (žr. (3.4.15)). Vadinasi, šiuo atveju vietoj (3.7.11) ir (3.7.13) galima rašyti:

$$\sigma_D^2=\frac{2a^2}{n-1}\,; \quad (3.7.14)$$

$$\sigma_\sigma=\sqrt{\frac{a}{2(n-1)}}\,. \quad (3.7.15)$$

## 3.8. Intervalų tarp Puasono vyksmo įvykių skirstinys

Rasime laiko intervalų tarp Puasono vyksmo įvykių tikimybės tankio funkciją $f(t)$. Kad būtų konkrečiau, kalbėsime apie laiko intervalus tarp dalelių, kurios pataiko į detektorių. Šie intervalai dažnai yra svarbūs matuojant dalelių skaičių (pvz., žr. 4 skyrių). Tarkime, kad laiko momentu $t = 0$ į detektorių pataikė dalelė. Pagal tikimybės tankio apibrėžtį (žr. 3.4.3 skyrelį) tikimybė, kad kita dalelė pataikys į detektorių per laiką nuo $t$ iki $t + \mathrm{d}t$, yra lygi

$$\mathrm{d}P=f(t)\mathrm{d}t\,. \quad (3.8.1)$$

Kadangi teigiame, kad $t$ yra intervalas tarp dviejų „gretimų“ dalelių, tai tikimybė d$P$ yra lygi dviejų nepriklausomų įvykių tikimybių sandaugai: I įvykis – per laiko tarpą nuo 0 iki $t$ nėra *nė vienos* dalelės; II įvykis – per laiko tarpą nuo $t$ iki $t + \mathrm{d}t$ yra *bent viena* dalelė. Pirmąją tikimybę nusako Puasono skirstinio išraiška (3.4.12) su $k = 0$: $P_0=\mathrm{e}^{-\bar{k}(t)}=\mathrm{e}^{-rt}$; čia $\bar{k}(t)=rt$ yra vidutinis dalelių skaičius per laiką $t$, o $r$ yra vidutinis dalelių srautas (t. y. vidutinis dalelių skaičius per laiko vienetą). Antroji tikimybė gaunama, atėmus iš vieneto tikimybę, kad per laiko tarpą, kurio plotis d$t$, nebus nė vienos dalelės. Pastaroji tikimybė skaičiuojama taip pat kaip anksčiau: $\mathrm{d}P_0 = \mathrm{e}^{-r\cdot\mathrm{d}t} = 1 - r\cdot\mathrm{d}t$. Vadinasi, tikimybė, kad per laiką d$t$ bus bent viena dalelė, yra lygi $1 - (1 - r\cdot\mathrm{d}t) = r\cdot\mathrm{d}t$. Taigi,

$$\mathrm{d}P=\mathrm{e}^{-rt}r\mathrm{d}t\,. \quad (3.8.2)$$

Palyginę (3.8.1) ir (3.8.2), gauname intervalų tarp dalelių tikimybės tankio funkciją:

$$f(t)=r\mathrm{e}^{-rt}\,. \quad (3.8.3)$$

Matome, kad intervalų tarp dalelių skirstinys yra eksponentinis. Tikimybė, kad intervalas tarp dviejų dalelių bus didesnis už duotąjį laiką $\tau$, yra lygi funkcijos (3.8.3) integralui nuo $\tau$ iki $\infty$:

$$P(t>\tau)=\int_{\tau}^{\infty}r\mathrm{e}^{-rt}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-r\tau}\,. \quad (3.8.4)$$

Tikimybė, kad intervalas tarp dviejų dalelių bus mažesnis už duotąjį laiką $\tau$, yra

$$P(t < \tau) = 1 - P(t > \tau) = 1 - e^{-r\tau}. \tag{3.8.5}$$

Kadangi dalelės yra nepriklausomos, tai laiko $\tau$, kuris įeina į (3.8.4) ir (3.8.5) formules, atskaitos momentas gali būti pasirinktas laisvai (tai nebūtinai turi būti ankstesniosios dalelės pataikymo į detektorių momentas). (3.8.4) nusako tikimybę, kad per laiką $\tau$ į detektorių nepataikys nė viena dalelė, o (3.8.5) – tikimybę, kad per laiką $\tau$ į detektorių pataikys bent viena dalelė.

Pagal (3.8.5) formulę galima apskaičiuoti duoto branduolio skilimo tikimybę per duotą laiką $\tau$. Tam ankstesniuose samprotavimuose pakanka padaryti du neesminius pakeitimus: 1) vietoj užregistruotų dalelių skaičiaus reikia kalbėti apie *skilimų* skaičių (abu šie skaičiai sutampa, jeigu detektoriaus absoliutusis efektyvumas lygus 100 %, t. y. jeigu detektorius visada generuoja signalą, kai skyla branduolys); 2) reikia nagrinėti bandinį, kurį sudaro tik vienas branduolys. Pagal radioaktyviojo skilimo dėsnį (9.1.1) tokio bandinio vidutinis skilimų skaičius per laiko vienetą yra lygus $\lambda$. Vadinasi, duotojo branduolio skilimo tikimybę per laiką $\tau$ nusako (3.8.5) reiškinys, kuriame $r = \lambda$:

$$p(\tau) = 1 - e^{-\lambda\tau}. \tag{3.8.6}$$

Analogiškos formulės galioja ir kitų rūšių Puasono vyksmams, kurių pavyzdžiai buvo pateikti 3.4.2 skyrelyje. Pvz., tikimybė, kad elektronas dujose nulėks atstumą $d$ be susidūrimų su dujų molekulėmis, yra lygi

$$P(x > d) = e^{-d/l}; \tag{3.8.7}$$

čia $x$ yra elektrono kelias (Puasono vyksmo parametras), o $l$ yra elektrono vidutinis laisvasis kelias dujose. Tikimybė, kad, dalelei praradus energijos kiekį $E$ medžiagoje, nebus išlaisvintas nė vienas elektronas, yra

$$P(x > E) = e^{-E/W}; \tag{3.8.8}$$

čia $x$ yra dalelės energijos nuostoliai medžiagoje (Puasono vyksmo parametras), o $W$ yra vidutinis dalelės energijos sumažėjimas, kuris atitinka vieną išlaisvintą elektroną. (3.8.8) galioja tik tada, kai $W$ yra daug didesnis už atomo jonizacijos energiją[1].

[1] Ši sąlyga tinka blyksimiesiems detektoriams (kai $W$ yra vidutinis dalelės energijos sumažėjimas, kuris atitinka vieną *iš fotodaugintuvo fotokatodo* išlaisvintą elektroną), tačiau netinka dujiniams ir puslaidininkiniams detektoriams (kai $W$ yra vidutinis dalelės energijos sumažėjimas, kuris atitinka vieną *iš detektoriaus darbinės medžiagos atomo* išlaisvintą elektroną).

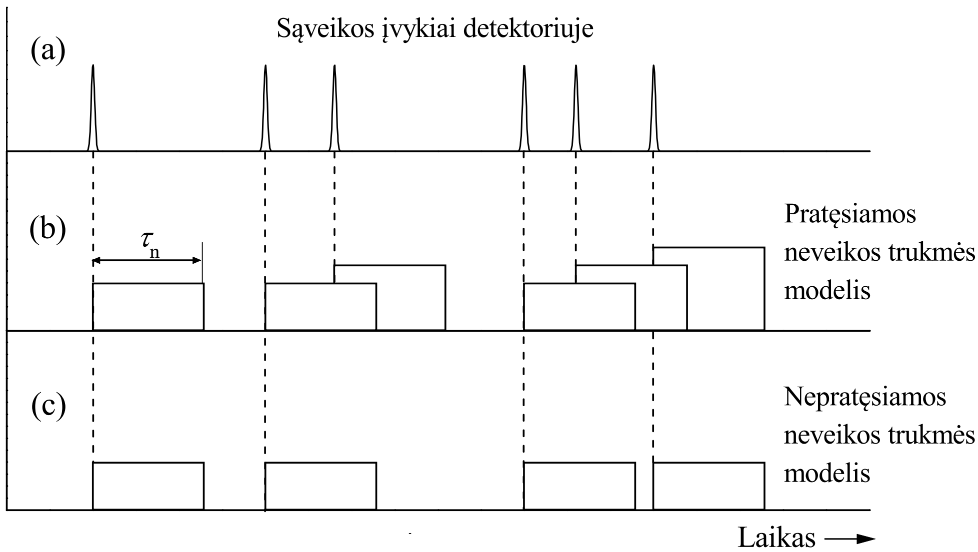
# 4. Detektoriaus neveikos trukmė

Dauguma detektorių po kiekvienos dalelės detektavimo laikinai nustoja registruoti kitas daleles. Šis laiko tarpas, kurio metu detektorius yra nejautrus spinduliuotei, vadinamas ***neveikos trukme***. Neveikos trukmė toliau bus žymima $\tau_n$. Neveikos trukmė gali būti artima signalo trukmei, tačiau gali būti ir didesnė už ją.

Išsiaiškinsime, kaip pagal vidutinę skaičiavimo spartą $N$ (signalų skaičius per laiko vienetą) apskaičiuoti tikrąjį dalelių sąveikos su detektoriaus darbine medžiaga įvykių (pvz., jonizacijos įvykių) vidutinį skaičių per laiko vienetą $N_0$. Dydis $N_0$ – tai skaičiavimo sparta, kuri būtų gauta tuo atveju, kai $\tau_n = 0$. Dydį $N_0$ vadinsime „tikrąja sparta“. Norint nustatyti $N_0$, nepakanka žinoti vien neveikos trukmę. Dar reikia žinoti, ar tai yra pratęsiamoji neveikos trukmė, ar nepratęsiamoji neveikos trukmė. Šias sąvokas iliustruoja 12 pav. Viršutiniame grafike (12a pav.) atidėti laiko momentai, kai su detektoriaus darbine medžiaga sąveikauja dalelės. Su kiekvienu sąveikos įvykiu yra susietas $\tau_n$ ilgio laiko tarpas, kurio metu detektorius negali registruoti kitų dalelių. Šie laiko tarpai yra parodyti 12b pav. Jeigu neveikos trukmė yra nepratęsiama, tada dalelė, kuri sąveikavo su detektoriumi neveikos intervale (pvz., dalelės Nr. 3 ir Nr. 5), nesukelia jokių pastebimų pokyčių. T. y. efektas toks pat lyg tų dalelių nebūtų (kaip 12c pav.). Todėl 12 pav. detektorius su nepratęsiamąja neveikos trukme užregistruotų 4 iš 6 dalelių (Nr. 1, Nr. 2, Nr. 4 ir Nr. 6). Jeigu neveikos trukmė yra pratęsiama, tada *kiekviena* dalelė, kuri sąveikavo su detektoriaus darbine medžiaga (įskaitant ir tas daleles, kurios pataikė į detektorių neveikos intervalo metu), pradeda naują $\tau_n$ trukmės laiko intervalą, kuriame detektorius yra nejautrus spinduliuotei. Vadinasi, jeigu sąveika įvyko neveikos intervalo metu (pvz., dalelės Nr. 3 ir Nr. 5), tada neveikos intervalas pratęsiamas. Todėl 12 pav. atveju detektorius su pratęsiamąja neveikos trukme neužregistruotų dalelės Nr. 6. Taigi, šiame pavyzdyje detektorius su pratęsiamąja neveikos trukme užregistruotų tik 3 iš 6 dalelių (Nr. 1, Nr. 2 ir Nr. 4).

Pratęsiamos ir nepratęsiamos neveikos trukmės modeliai tėra idealizuoti ribiniai atvejai. Realių sistemų veikimas dažnai aprašomas tarpiniu modeliu. Pvz., Geigerio ir Miulerio skaitiklio neveikos trukmė nėra pratęsiama, jeigu laiko tarpas tarp paskutiniojo impulso ir jonizacijos įvykio yra mažesnis už $\tau'_n$ (nes tada impulsas iš viso neatsiranda), tačiau yra pratęsiama, jeigu šis intervalas yra tarp $\tau'_n$ ir $\tau_n$ (nes tada atsiranda impulsas, kuris nėra užregistruojamas dėl pernelyg mažos amplitudės).

Visų pirma rasime $N$ ir $N_0$ sąryšį nepratęsiamos neveikos trukmės atveju. Tarkime, kad per laiko tarpą, kurio trukmė $t >> \tau_n$, sistema detektavo $Nt$ dalelių. Kadangi po kiekvienos užregistruotos dalelės sistema buvo nejautri laiką $\tau_n$, tai pilnutinis laikas, kurio metu sistema buvo nejautri, yra lygus $Nt\tau_n$. Taigi, vidutinis neužregistruotų sąveikos įvykių skaičius per matavimų trukmę yra lygus $N_0 Nt\tau_n$, o tikrasis sąveikos įvykių skaičius yra lygus užregistruotų ir neužregistruotų sąveikos įvykių skaičių sumai:




**12 pav.** Pratęsiamos ir nepratęsiamos neveikos trukmės modelių aiškinimas

$$N_0 t = N_0 N t \tau_n + N t$$

arba

$$N_0 = \frac{N}{1 - N\tau_n}. \tag{4.1}$$

Taigi, kai neveikos trukmė $\tau_n$ yra žinoma, pagal išmatuotą skaičiavimo spartą $N$ galima nesunkiai apskaičiuoti tikrąją spartą $N_0$. Iš (4.1) išplaukia, kad

$$N = \frac{N_0}{1 + N_0\tau_n}. \tag{4.2}$$

Kai $N_0 \to \infty$, šis reiškinys artėja prie $1/\tau_n$. Vadinasi, nepratęsiamos neveikos trukmės atveju, didėjant tikrajai spartai $N_0$, skaičiavimo sparta didėja asimptotiškai artėdama prie atvirkštinės neveikos trukmės $1/\tau_n$ (žr. 13 pav., ištisinė kreivė). (4.1) ir (4.2) formulės galioja tada, kai sistema yra nejautri laiką $\tau_n$ po *kiekvienos* užregistruotos dalelės. Praktikoje dažnai taip nėra. Jeigu matuojama kelis kartus, tada kiekvieno matavimo pradžioje skaitiklis jau būna parengtas dalelių registravimui, nors ankstesnio matavimo pabaigoje jis galėjo dar būti nejautrus (jeigu skirtumas tarp to matavimo pabaigos momento ir paskutinės dalelės užregistravimo momento buvo mažesnis už $\tau_n$). Taigi, efektas toks, lyg skaitiklio neveikos trukmė kartais taptų mažesnė už tikrąją neveikos trukmę $\tau_n$. Atsižvelgus į šį efektą, vietoj (4.2) gaunama tokia formulė[1]:

$$N = \frac{N_0}{1 + N_0\tau_n} + \frac{1}{2T}\cdot\frac{(N_0\tau_n)^2}{(1 + N_0\tau_n)^2}; \tag{4.3}$$

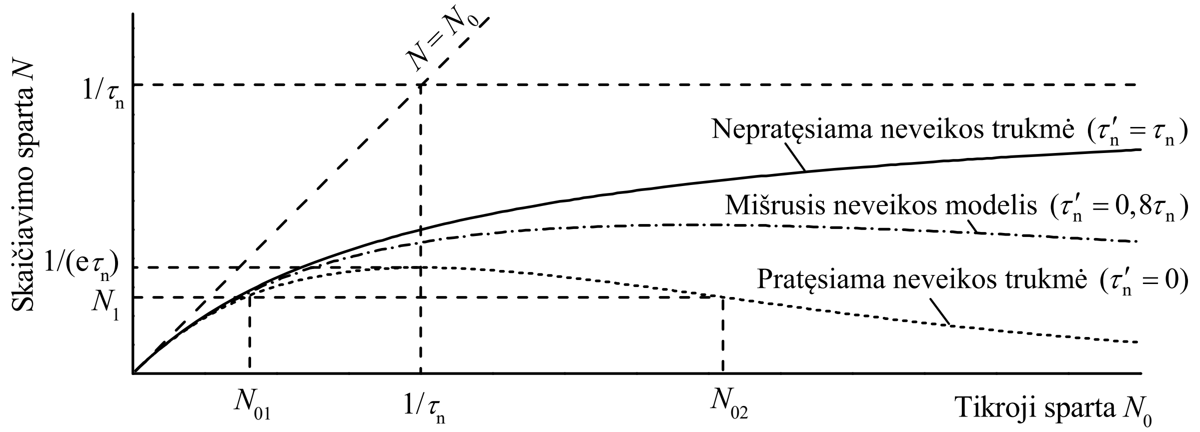
čia $T$ yra vieno matavimo trukmė. Akivaizdu, kad antrasis dėmuo šiame reiškinyje negali būti didesnis už $1/(2T)$. Vadinasi, jeigu vidutinis dalelių skaičius per vieną matavimą ($N_0T$) yra daug didesnis už vienetą, o $N_0\tau_n$ yra vienetų eilės arba mažesnis, tada (4.3) reiškinio antrojo dėmens galima nepaisyti ir (4.2) formulė lieka pakankamai tiksli, kad ją būtų galima taikyti praktikoje.

Esant pratęsiamai neveikos trukmei, neveikos intervalai nėra vienodos trukmės, todėl (4.1) ir (4.2) formulės negalioja. Šiuo atveju sąveikos įvykis užregistruojamas tik tada, kai laikas tarp to įvykio ir ankstesnio sąveikos įvykio yra didesnis už $\tau_n$ (nepriklausomai nuo to, ar ankstesnis sąveikos įvykis buvo užregistruotas, ar ne). Vadinasi, tikimybė, kad sąveikos įvykis bus užregistruotas, yra lygi tikimybei, kad intervalas tarp dviejų sąveikos įvykių yra didesnis už $\tau_n$. Šią tikimybę nusako (3.8.4) formulė:

$$P(t > \tau_n) = \mathrm{e}^{-N_0\tau_n}. \tag{4.4}$$

Norint gauti dalelių skaičiavimo spartą $N$, reikia tikrąją spartą $N_0$ padauginti iš užregistruotų sąveikos įvykių santykinės dalies, kurią nusako (4.4) reiškinys:

$$N = N_0\mathrm{e}^{-N_0\tau_n}. \tag{4.5}$$




**13 pav.** Skaičiavimo spartos kitimas kintant tikrajai spartai. Pavaizduotos kreivės atitinka tris neveikos trukmės modelius: nėra pratęsimo, yra pratęsimas ir mišrusis. $\tau_n$ yra neveikos trukmė. $\tau_n'$ yra neveikos intervalo pradinė dalis, kurios metu dalelės negali sukelti neveikos intervalo pratęsimo. Dalelės, kurios sąveikauja su detektoriaus darbine medžiaga per laiko tarpą nuo $\tau_n'$ iki $\tau_n$, pratęsia neveikos intervalą

[1] Pagal *Cantor B. I., Teicht M. C. Dead-time-corrected photocounting distributions for laser radiation // Journal of the Optical Society of America, vol. 65, no.7, 1975, p. 786–791.*

Jeigu žinomi $N$ ir $\tau_n$, tada (4.5) yra lygtis $N_0$ atžvilgiu. Šią lygtį galima išspręsti tik skaitmeniškai, nuosekliųjų artinių metodu. Taigi, esant pratęsiamai neveikos trukmei, neįmanoma gauti paprastos formulės (panašios į (4.1)), kuri išreikštų $N_0$, kai žinomi $N$ ir $\tau_n$. Didėjant $N_0$, (4.5) reiškinys iš pradžių didėja, pasiekia maksimumą, o paskui pradeda mažėti (13 pav., brūkšninė kreivė). Maksimumas pasiekiamas, kai $N_0 = 1/\tau_n$, o didžiausioji skaičiavimo sparta lygi $(1/e)\cdot(1/\tau_n) \approx 0{,}368/\tau_n$. Kai $N_0 >> 1/\tau_n$, neveikos intervalai yra daug kartų pratęsiami, todėl tik labai maža dalis sąveikos įvykių gali būti užregistruoti. Matome, kad pratęsiamos neveikos trukmės atveju pagal išmatuotą skaičiavimo spartą $N$ neįmanoma vienareikšmiškai pasakyti, kokia yra tikroji sparta $N_0$, net jeigu yra žinoma neveikos trukmė $\tau_n$ (nes (4.5) lygtis turi du sprendinius). Pvz., kaip parodyta 13 pav., skaičiavimo spartos vertė $N_1$ gali reikšti, kad tikroji sparta yra lygi $N_{01}$ arba $N_{02}$. Norint nustatyti, kuris iš dviejų sprendinių yra teisingas, reikia pakeisti tikrąją spartą žinoma kryptimi ir nustatyti, kuria kryptimi pasikeičia skaičiavimo sparta. Pvz., tikrąją spartą galima sumažinti padidinus atstumą tarp radioaktyviosios medžiagos ir detektoriaus. Jeigu tada skaičiavimo sparta padidėja, tai reiškia, kad tikroji sparta yra didesnė už $1/\tau_n$, t. y. teisingas sprendinys yra $N_{02}$.

Kaip matome 13 pav., esant pakankamai mažai tikrajai spartai $N_0$ (praktiškai – kai $N_0\tau_n < 0{,}2$), abu ribinius neveikos modelius atitinkančios kreivės beveik sutampa. Todėl, kai $N_0\tau_n < 0{,}2$, neveikos modelio pasirinkimas neturi didelės reikšmės, ir galima taikyti (4.1) formulę.

# 5. Tyrimo metodika

## 5.1. Darbo priemonės ir matavimo tvarka

Darbo įrangą sudaro:

1. Radioaktyvusis šaltinis su $\beta^{-}$ radioaktyvaus stroncio izotopo $^{90}Sr$ bandiniu.
2. Geigerio ir Miulerio detektorius.
3. Geigerio ir Miulerio detektoriaus maitinimo blokas.
4. Impulsų skaičiavimo įrenginys su mikrokontroleriu (14 pav. jis yra ant kompiuterio sisteminio bloko, dešinėje, juodas korpusas).
5. Kompiuteris, prie kurio prijungtas impulsų skaičiavimo įrenginys.

**14 pav.** Matavimo įrangos fragmentas. Ant kompiuterio sisteminio bloko matomi du įrenginiai – detektoriaus maitinimo blokas ir impulsų skaičiavimo įrenginys (dešinėje). [Pats detektorius čia neparodytas, nes, kai buvo rašomas šis aprašas, detektoriaus blokas buvo remontuojamas.]

Matavimų metu reikia išmatuoti detektuotų dalelių skaičiaus histogramą, esant šešiems skirtingiems atstumams tarp šaltinio ir detektoriaus. Atstumas tarp šaltinio ir detektoriaus lemia vidutinę skaičiavimo spartą (vidutinį per laiko vienetą detektuotų dalelių skaičių), kuris savo ruožtu lemia histogramos pavidalą. Atstumai turėtų būti parenkami taip, kad minėti šeši vidurkiai kuo labiau skirtųsi vienas nuo kito (nuo mažesnių už vienetą verčių iki 100). Pvz., tie vidurkiai galėtų priklausyti šiems intervalams: vidurkis Nr. 1 – tarp 90 ir 110, vidurkis Nr. 2 – tarp 65 ir 75, vidurkis Nr. 3 – tarp 35 ir 45, vidurkis Nr. 4 – tarp 18 ir 22, vidurkis Nr. 5 – tarp 3 ir 5, vidurkis Nr. 6 – tarp 0,5 ir 0,9. Vieno matavimo trukmė priklauso nuo naudojamo Geigerio ir Miulerio detektoriaus parametrų (ta trukmė nurodyta eksperimentinės dalies apraše, kuris yra prie matavimo įrangos). Pilnutinis matavimų skaičius priklauso nuo vieno matavimo trukmės. Optimalus matavimų skaičius yra toks, kad vienos histogramos matavimas truktų maždaug 10 min. Pvz., jeigu vieno matavimo trukmė yra 0,1 s, tada, atsižvelgus į tai, kad tarp matavimų yra 0,01 – 0,02 s trukmės intervalai, optimalus matavimų skaičius viename duomenų rinkinyje yra maždaug 3000. Jeigu vieno matavimo trukmė yra 0,5 s, tada optimalus matavimų skaičius viename duomenų rinkinyje yra maždaug 1000.

Kompiuterinė programa, kuri priima duomenis iš impulsų skaičiavimo įrenginio, realiu laiku siunčia tuos duomenis į programą „Origin 6“. Programa „Origin 6“ atvaizduoja duomenų lenteles ir histogramas. Baigus matavimus, reikia atspausdinti „Origin“ lentelę su visų histogramų duomenimis. Po lentele su matavimo duomenimis turi pasirašyti darbo vadovas arba laborantas.

Prie matavimo įrangos yra atskiras matavimo tvarkos aprašas, kuris yra daug smulkesnis, negu tas, kuris pateiktas čia. Tuo aprašu reikia naudotis tik matavimo metu. Baigus matuoti, jį reikia palikti prie matavimo įrangos. Ruošiantis darbui, nebūtina žinoti visų matavimo tvarkos smulkmenų. Jeigu matavimo tvarkos nurodymai, kurie buvo pateikti anksčiau, neatitinka nurodymų, kurie pateikti detaliajame apraše, tada matuojant reikia vadovautis detaliuoju aprašu.

## 5.2. Pagrindiniai skaičiavimai analizuojant matavimo duomenis

Kiekvienoje iš šešių histogramų nubraižomos trys teorinės kreivės, kurių kiekviena gaunama, padauginus teorinę tikimybę $P(x)$ iš pilnutinio matavimų skaičiaus:

1) kreivė, kuri atitinka tikslųjį teorinį Puasono skirstinį (3.4.12); ši kreivė nusako histogramos stulpelių aukščius, kurie būtų gauti tuo atveju, jeigu visų galimų matavimo rezultatų dažniai tiksliai atitiktų Puasono skirstinį;
2) kreivė, kuri atitinka apytikslį Puasono skirstinį, kuriuo galima pakeisti tikslųjį skirstinį, kai vidurkis yra pakankamai didelis (tas apytikslis Puasono skirstinys – tai Gauso skirstinio atskirasis atvejis (3.4.23), kurio ypatybė yra ta, kad jo dispersija lygi vidurkiui);
3) kreivė, kuri atitinka bendrąjį Gauso skirstinį (3.4.24), t. y. Gauso skirstinį, kurio dispersija nebūtinai lygi vidurkiui.

Visų šių teorinių kreivių parametrai ($a$ ir $D$) turi būti lygūs atitinkamoms empirinėms vertėms ($a_e$ ir $D_e$), o ne apskaičiuoti aproksimavimo metodu. Kreivė, kuri atitinka tikslųjį Puasono skirstinį, turi būti pavaizduota atskirų taškų pavidalu (nes Puasono skirstinio tikimybių vertės yra apibrėžtos tik sveikosioms atsitiktinio dydžio $x$ vertėms). Minėtas teorines kreives galima nubraižyti, naudojantis mygtukais, kurie yra „Origin“ langų „Hist<*n*>“ dešiniajame krašte.

Pagal (3.6.8), (3.7.14) ir (3.7.15) formules kiekvienam iš šešių matavimo rezultatų rinkinių apskaičiuojami vidurkio, dispersijos ir standartinio nuokrypio standartiniai nuokrypiai (t. y. paklaidos) $\sigma_{\bar{x}}$, $\sigma_D$ ir $\sigma_\sigma$. Vidurkiai, dispersijos ir standartiniai nuokrypiai bei jų paklaidos surašomi į lentelę. Kiekvienai vidurkio vertei patikrinama Puasono skirstinio savybė (3.4.14).

Kiekvienam duomenų rinkiniui apskaičiuojamas parametras $\chi^2/(n-1) = D_e/a_e$ (žr. (3.5.3) formulę). To parametro vertė palyginama su „kritinėmis“ vertėmis, kurios atitinka „kritines“ tikimybes 0,01 ir 0,99 (žr. 10 pav.). Pagal tai nustatoma, kuriais iš šešių atvejų dalelių skaičiavimo sistema veikia optimaliai, o kuriais – ne.

Naudojant tris didžiausiuosius vidurkius (iš šešių) ir atitinkamus standartinius nuokrypius bei jų paklaidas, pagal (3.5.6) formulę apskaičiuojama skaitiklio neveikos trukmė $\tau_n$ bei jos paklaida (ši paklaida skaičiuojama pagal bendrąją kelių atsitiktinių dydžių funkcijos paklaidos apskaičiavimo taisyklę, kurią išreiškia (3.6.1) formulė). Patikrinama, ar trys apskaičiuotosios $\tau_n$ vertės sutampa paklaidų ribose. Jos turėtų sutapti, jeigu skaitiklio neveikos trukmė yra pagrindinis veiksnys, kuris sąlygoja išmatuoto dalelių skaičiaus skirstinio nuokrypį nuo Puasono skirstinio ir jeigu visais atvejais vidutinis laiko tarpas tarp detektuotų dalelių yra bent 5 kartus didesnis už neveikos trukmę (pastaroji sąlyga reikalinga tam, kad neveikos modelis neturėtų didelės įtakos skirstinio pavidalui, t. y., kad tiktų (3.5.6) formulė, kuri išvesta remiantis prielaida, kad neveikos trukmė yra nepratęsiama). Kiti galimi veiksniai, dėl kurių išmatuotas skirstinys gali nukrypti nuo Puasono skirstinio, yra, pvz., detektoriaus maitinimo įtampos nestabilumas, stalo vibracijos, dėl kurių galėtų pasikeisti atstumas tarp šaltinio ir detektoriaus, ir kt. Pastarųjų veiksnių įtaka detektuotų dalelių skaičiaus dispersijai yra priešinga neveikos trukmės įtakai: dėl jų dispersija padidėja (o dėl neveikos trukmės dispersija sumažėja).

Pastebėti dėsningumai paaiškinami ir palyginami su teoriniais teiginiais. Dėsningumai, į kuriuos reikėtų atkreipti dėmesį, yra: dalelių skaičiaus skirstinio (ir jo nuokrypio nuo Puasono skirstinio) kitimas kintant vidurkiui, aproksimavimo Gauso funkcijomis tinkamumas įvairiais atvejais ir kt.