VILNIAUS UNIVERSITETAS
Kietojo kūno elektronikos katedra

SIGNALAI TELEKOMUNIKACIJŲ SISTEMOSE

Mokymo priemonė

Parengė A. Poškus

2004

Turinys

1. ĮVADAS ... 1

1.1. Telekomunikacijų sistemos struktūrinė schema. Pagrindinės sąvokos ... 1

1.2. Perdavimo režimai ... 3

1.3. Informacijos matas ... 4

1.4. Kanalo pralaida ir idealiosios telekomunikacijų sistemos ... 5

1.5. Duomenų perdavimo klaidos ir duomenų kodavimas ... 5

1.5.1. Blokiniai kodai ... 7

1.5.2. Konvoliuciniai kodai ... 10

1.5.3. Kodo efektyvumas ... 12

1.6. Uždavinių sprendimo pavyzdžiai ... 14

Uždaviniai ... 15

2. SIGNALAI IR SPEKTRAI ... 16

2.1. Signalo ir triukšmo galia ... 16

2.2. Furjė transformacija ir spektrai ... 17

2.2.1. Pagrindiniai apibrėžimai ... 17

2.2.2. Furjė transformacijos savybės. Signalo energijos spektrinis tankis ... 18

2.2.3. Dirako δ funkcija ir vienetinė laiptinė funkcija ... 19

2.2.4. Sinusoidės spektras ... 20

2.2.5. Stačiakampio ir trikampio impulsų spektrai ... 21

2.3. Galios spektrinis tankis ir autokoreliacijos funkcija ... 23

2.3.1. Galios spektrinis tankis ... 23

2.3.2. Autokoreliacijos funkcija ... 23

2.3.1. Sinusoidės galios spektrinis tankis ... 24

2.4. Signalų išraiška ortogonaliosiomis eilutėmis ... 25

2.4.1. Ortogonaliosios funkcijos. Ortogonaliosios kompleksinės eksponentinės funkcijos ... 25

2.4.2. Ortogonaliosios eilutės ... 25

2.5. Furjė eilutės ... 26

2.5.1. Kompleksinė Furjė eilutė ... 26

2.5.2. Kvadratūrinė Furjė eilutė ... 27

2.5.3. Polinė Furjė eilutė ... 28

2.5.4. Įvairių rūšių Furjė eilučių tapatumas. Signalų aproksimavimas baigtinėm Furjė eilutėm ... 29

2.5.5. Periodinio signalo spektras ... 30

2.5.6. Periodinio signalo galios spektrinis tankis ... 31

2.6. Tiesinių sistemų pagrindai ... 32

2.6.1. Tiesinės sistemos sąvoka. Laikinis invariantiškumas ... 32

2.6.2. Tiesinės sistemos impulsinis atsakas ... 33

2.6.3. Tiesinės sistemos perdavimo funkcija ... 34

2.6.4. Žemųjų dažnių RC filtro impulsinis atsakas ir perdavimo funkcija ... 35

2.6.5. Signalų perdavimas be iškraipymų tiesinėse sistemose 36
2.6.6. Signalo iškraipymai, kuriuos sukelia žemųjų dažnių RC filtras 37
2.7. Riboto dažnio signalai 39
2.7.1. Ėmimo teorema 39
2.7.2. Impulsinis ėmimas 42
2.8. Dažnių juostos plotis 43
2.9. Uždavinių sprendimo pavyzdžiai 45
Uždaviniai 48
3. SKAITMENINIŲ IMPULSINIŲ SIGNALŲ PERDAVIMAS 54
3.1. Impulsų amplitudės moduliavimas 54
3.1.1. Natūralusis ėmimas 54
3.1.2. Momentinis ėmimas 58
3.2. Kodinis impulsinis moduliavimas 61
3.2.1. Ėmimas, kvantavimas ir kodavimas 61
3.2.2. Kodinio impulsinio moduliavimo signalo dažnių juostos plotis 64
3.2.3. Triukšmas PCM sistemos išėjimo analoginiame signale 65
3.2.4. PCM sistemų projektavimo pavyzdžiai 67
3.2.5. Netolyginis kvantavimas 68
3.3. Skaitmeninių signalų matematinė analizė 70
3.3.1. Skaitmeninio signalo bendrasis pavidalas 70
3.3.2. Skaitmeninio signalo dažnių juostos plotis 71
3.3.3. Daugialygiai signalai 72
3.4. Linijos kodai ir jų spektrai 74
3.4.1. Dvilygiai linijos kodai 74
3.4.2. Įvairių linijos kodų galios spektrinis tankis 76
3.4.3. Diferencialinis kodavimas 78
3.4.4. Filtravimo ir triukšmo efektų matavimas 80
3.4.5. Regeneraciniai retransliatoriai 81
3.4.6. Bitų sinchronizavimas 81
3.4.7. Daugialygių signalų galios spektrinis tankis 84
3.4.8. Skaitmeninio signalo spektro panaudojimo efektyvumas 86
3.5. Tarpženklinė interferencija 87
3.5.1. Pagrindinės sąvokos 87
3.5.2. Pirmasis Naikvisto metodas tarpženklinei interferencijai sumažinti 89
3.5.3. Tarpženklinės interferencijos sumažinimas, naudojant pakelto kosinuso formos kryčio filtrą 89
3.5.4. Antrasis ir trečiasis Naikvisto metodai tarpženklinei interferencijai sumažinti 91
3.8. Laikinis tankinimas 92
3.8.1. Laikinio tankinimo sąvoka 92
3.8.2. Bitų grupių sinchronizavimas 94
3.8.3. Sinchroninės, asinchroninės ir kvazisinchroninės sistemos 95
3.8.4. Laikinio tankinimo multipleksoriaus projektavimo pavyzdys 96

3.9. Uždavinių sprendimo pavyzdžiai 98

Uždaviniai 101

4. JUOSTINIŲ SIGNALŲ PERDAVIMO PRINCIPAI IR GRANDINĖS 106

4.1. Juostinių signalų kompleksinė išraiška 106

4.1.1. Pagrindinės sąvokos: žemadažnis signalas, juostinis signalas, moduliavimas 106

4.1.2. Juostinio signalo kompleksinės gaubtinės sąvoka 106

4.2. Moduliuotojo signalo matematinė išraiška 107

4.3. Juostinio signalo spektras, galios spektrinis tankis ir normuotoji galia 108

4.3.1. Juostinio signalo spektro ir galios bendrosios išraiškos 108

4.3.2. Moduliuotos amplitudės signalo spektras ir galia 109

4.4. Juostiniai filtrai ir tiesiniai iškraipymai 111

4.4.1. Juostinio filtro pakeitimas ekvivalenčiu žemųjų dažnių filtru 111

4.4.2. Juostinio signalo tiesiniai iškraipymai 112

4.5. Juostinio signalo ėmimo teorema 114

4.6. Netiesiniai iškraipymai 115

4.7. Signalo ribotuvai 119

4.8. Signalų maišikliai ir aukštinamieji bei žeminamieji dažnio keitikliai 120

4.9. Dažnio daugintuvai 125

4.10. Detektoriai 127

4.10.1. Gaubtinės detektorius 127

4.10.2. Sandaugos detektorius 128

4.10.3. Dažnio detektoriai 130

4.11. Fazės derinimo kilpos (PLL kilpos) ir dažnio sintezatoriai 137

4.12. Siųstuvai ir imtuvai 144

4.12.1. Apibendrintieji siųstuvai 144

4.12.2. Apibendrintieji imtuvai 145

4.13. Uždavinių sprendimo pavyzdžiai 149

Uždaviniai 153

5. AM, FM IR SKAITMENINIO MODULIAVIMO SISTEMOS 156

5.1. Amplitudės moduliavimas 156

5.2. Dvipusės šalinės juostos numalšintojo nešlio (DSB-SC) signalai 162

5.3. DSB-SC signalo detektoriai: Kosto PLL kilpa ir kėlimo kvadratu sistema 162

5.4. Asimetrinių šalinių juostų signalai 164

5.4.1. Vienpusės šalinės juostos signalai 164

5.4.2. Liekamosios šalinės juostos signalai 167

5.5. Fazės moduliavimas ir dažnio moduliavimas 169

5.5.1. PM ir FM signalų matematinės išraiškos ir generavimo būdai 169

5.5.2. Moduliuoto kampo signalų spektrai 173

5.5.3. PM arba FM signalo spektras, kai moduliavimo signalas yra sinusoidės pavidalo 174

5.5.4. Siaurajuostis kampo moduliavimas ... 176

5.5.5. Plačiajuostis dažnio moduliavimas ... 177

5.5.6. Išankstinė korekcija ir atvirkštinė korekcija kampo moduliavimo sistemose ... 181

5.6. Dažninis tankinimas ir moduliuoto dažnio stereofoniniai signalai ... 182

5.7. Dvilygio skaitmeninio moduliavimo juostiniai signalai ... 185

5.7.1. Dvilygio skaitmeninio moduliavimo rūšys ... 185

5.7.2. Amplitudės manipuliavimas ... 187

5.7.3. Apgrąžinis fazės manipuliavimas ... 190

5.7.4. Fazių skirtumo manipuliavimas ... 192

5.7.5. Dažninis manipuliavimas ... 192

5.8. Daugialygio skaitmeninio moduliavimo juostiniai signalai ... 194

5.8.1. Ketvirtinis fazės manipuliavimas ir daugiakartis fazės manipuliavimas ... 194

5.8.2. Kvadratūrinis amplitudės moduliavimas ... 195

5.8.3. MPSK ir QAM signalų galios spektrinis tankis ... 197

5.9. Uždavinių sprendimo pavyzdžiai ... 199

Uždaviniai ... 206

Priedas A. Matematiniai metodai, tapatybės ir lentelės ... 211

A-1. Trigonometrija ... 211

Apibrėžimai ... 211

Trigonometrinės tapatybės ... 211

A-2. Diferencialinis skaičiavimas ... 212

Išvestinės apibrėžimas ... 212

Diferencijavimo taisyklės ... 212

Išvestinių lentelė ... 212

A-3. Neapibrėžtumų aiškinimas ... 213

A-4. Integralinis skaičiavimas ... 213

Integralo apibrėžimas ... 213

Integravimo metodai ... 213

A-5. Integralų lentelės ... 214

Neapibrėžtiniai integralai ... 214

Apibrėžtiniai integralai ... 216

A-6. Eilutės ... 217

Baigtinės eilutės ... 217

Begalinės eilutės ... 218

Priedas B. Furjė transformacijos savybės ... 219

Priedas C. Įvairių moduliavimo tipų kompleksinės gaubtinės ... 221

Priedas D. Beselio funkcijų lentelės ... 222

Literatūra ... 223

1. ĮVADAS

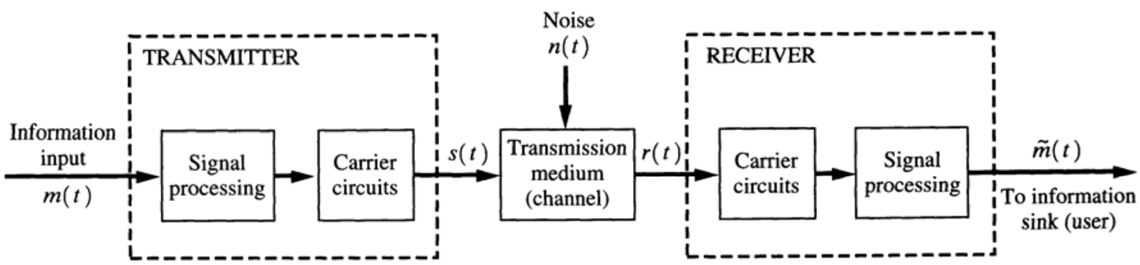
Telekomunikacijos yra elektrotechnikos šaka. Elektrotechnikoje sprendžiami dviejų tipų uždaviniai: vienas yra elektros energijos gaminimas ir perdavimas, o kitas – informacijos perdavimas. ***Telekomunikacijų sistema*** arba ***ryšių sistema*** – tai įrenginių ir metodų sistema, kurios paskirtis yra informacijos perdavimas per atstumą. Esminis skirtumas tarp elektros energijos sistemų ir ryšių sistemų yra tas, kad elektros energijos sistemose perduodamo signalo pavidalas yra fiksuotas (pagrindinis tikslas – kuo labiau sumažinti energijos nuostolius), o telekomunikacijų sistemose signalo pavidalas priklauso nuo perduodamos informacijos (pagrindinis tikslas – kuo labiau sumažinti perduodamos informacijos iškraipymus, esant duotoms siųstuvo galiai ir informacijos perdavimo spartai). Šioje mokymo priemonėje aprašytos įvairios signalų transformacijos, kurios atliekamos telekomunikacijų sistemose: moduliavimas, detektavimas, kodavimas ir kt.; aprašyti signalų matematinės analizės metodai. Maždaug 90% čia pateiktos medžiagos yra paimta iš knygos

Couch, Leon W. Digital and Analog Communication Systems, 5th ed. – Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1997. – 742 p.

Iš tos pačios knygos paimti ir visi uždaviniai bei matematiniai priedai.

1.1. Telekomunikacijų sistemos struktūrinė schema. Pagrindinės sąvokos

Telekomunikacijų sistemos supaprastinta struktūrinė schema pateikta 1.1.1 pav. Sistemą sudaro trys pagrindinės dalys: siųstuvas, perdavimo aplinka (kanalas) ir imtuvas. ***Siųstuvo*** paskirtis – transformuoti informacijos šaltinio generuojamą informaciją taip, kad ją būtų įmanoma siųsti kanalu. ***Perdavimo aplinka*** arba ***kanalas*** fiziškai sujungia imtuvą su siųstuvu (pvz., metalinis laidininkas, šviesolaidis arba laisva erdvė). Informacija kanalu perduodama elektromagnetinių bangų pavidalu. Dažnai “kanalu” vadinamas ir perduodamojo signalo dažnių intervalas (žr. žemiau apie moduliavimą). ***Imtuvo*** paskirtis – atkurti informacijos šaltinio signalą.



1.1.1 pav. Telekomunikacijų sistemos supaprastinta struktūrinė schema.

Dažniausiai informacinis signalas netinka tiesioginiam perdavimui. Todėl siųstuvas jį transformuoja į tinkamesnį pavidalą. Ši signalų transformacija vadinama aukšto dažnio signalo ***moduliavimu*** informaciniu signalu. Pvz., gali būti, kad duotajame kanale sklindančių bangų dažnis turi būti žymiai didesnis už mikrofono generuojamos įtampos dažnį. Tokiu atveju perduodamas ne pats informacinis signalas, o aukšto dažnio signalas, kurio momentinė amplitudė, dažnis arba fazė proporcinga informaciniam signalui (paprasčiausiu atveju). Moduliuojamasis aukšto dažnio signalas vadinamas ***nešliu***. Imtuvas atstato pradinį informacijos pavidalą, t.y., ***demoduliuoja*** priimtąjį signalą. Signalas, kuris naudojamas nešlio moduliavimui, vadinamas ***moduliavimo signalu***. Moduliavimo signalas gali skirtis nuo informacinio signalo (žr. žemiau).

Informacinis signalas bei signalas, kuris sklinda kanalu, gali būti skaitmeninis arba analoginis. ***Skaitmeninis signalas*** – tai laiko funkcija, kuri gali įgyti tik diskrečias vertes (pvz., diskretūs įtampos lygiai), o ***analoginis signalas*** – tai laiko funkcija, kurios verčių rinkinys yra tolydus (pvz., harmoninė įtampa). Tikslesnis skaitmeninio signalo apibrėžimas pateiktas 3.3.1 poskyryje.

Ryšių sistemos taip pat skirstomos į skaitmenines ir analogines. ***Analoginėje ryšių sistemoje*** informacija perduodama analoginiu pavidalu, pvz., tolydžiai kintančios įtampos pavidalu. ***Skaitmeninėje ryšių sistemoje*** informacija perduodama skaitmeniniu pavidalu (pvz., diskretūs įtampos lygiai 0 V ir 5 V arba pastovios amplitudės harmoninė įtampa, kurios pradinė fazė gali įgyti dvi arba daugiau diskrečių verčių). Analoginėse ryšių sistemose perduodami tik analoginiai signalai. Skaitmeninėse ryšių sistemose gali būti perduodami ir skaitmeniniai, ir analoginiai signalai. Pvz., jeigu perduodama harmoninė įtampa, kurios dažnio vertės yra diskrečios, tuomet duotoji ryšių sistema yra skaitmeninė, tačiau joje perduodamas analoginis signalas. Taigi, ryšių sistemų skirstymas į analogines ir skaitmenines grindžiamas ne perduodamo signalo analoginiu arba skaitmeniniu pobūdžiu, o *moduliavimo* būdu.

Reikia turėti omenyje, kad skaitmeninė ryšių sistema gali būti naudojama analoginės informacijos perdavimui, o analoginė ryšių sistema gali būti naudojama skaitmeninės informacijos perdavimui. Pirmuoju atveju siųstuvas prieš moduliavimą paverčia analoginį informacinį signalą skaitmeniniu signalu, o antruoju atveju skaitmeninis informacinis signalas paverčiamas analoginiu. Imtuvas po demoduliavimo atlieka priešingą transformaciją. Vadinasi, moduliavimo signalas bendruoju atveju skiriasi nuo informacinio signalo.

1.1.1 pav. parodyta, kaip susiję informacinis (moduliavimo) signalas $m(t)$ (nuo angliško žodžio “*message*” – “pranešimas”), nešlys (moduliuojamasis signalas) $s(t)$, perduodamasis signalas (moduliuota banga) $r(t)$, triukšmas $n(t)$ ir priimamasis signalas $\widetilde{m}(t)$. Ženklas “~” nurodo, kad priimtasis pranešimas gali skirtis nuo išsiųsto pranešimo dėl triukšmo įtakos arba dėl kitų sistemos defektų, pvz., netiesiškumo.

Moduliavimo signalą suformuoja signalų procesorius, kuris yra siųstuve. Šio signalų procesoriaus paskirtis – pakeisti informacinio signalo pavidalą taip, kad informacijos perdavimas būtų kuo efektyvesnis. Pvz., analoginėje sistemoje siųstuvo signalų procesorius gali būti analoginis žemųjų dažnių filtras, kuris apriboja signalo $m(t)$ dažnių juostą iš viršaus. Skaitmeninėje sistemoje, kuri naudoja analoginį informacijos šaltinį, siųstuvo signalų procesorius yra ***skaitmeninis analogo keitiklis*** (***SAK***). SAK apdoroja analoginį informacinį signalą dviem etapais: 1) diskretizuoja jį, t.y., paverčia impulsų seka; 2) kiekvieno impulso amplitudę išreiškia dvejetainiu skaičiumi, t.y., loginių nulių ir vienetų seka. Tokiu būdu suformuojamas “skaitmeninis žodis”, kuris nusako analoginio signalo amplitudes tam tikrais diskrečiais laiko momentais. Toks įėjimo informacinio signalo apdorojimas apibendrintai vadinamas ***šaltinio kodavimu*** (*source coding*), nes jo paskirtis – išgauti esminę informaciją iš informacijos šaltinio ir užkoduoti ją skaitmeniniu pavidalu (apie šaltinio kodavimą smulkiau kalbama 3 skyriuje). Be to, signalų procesorius gali papildyti skaitmeninį žodį ***lyginumo bitais***, kuriuos naudoja imtuvo signalo procesorius klaidų aptikimui ir ištaisymui. Toks skaitmeninio pranešimo kodavimas vadinamas ***kanalo kodavimu*** (*channel coding*), nes jo paskirtis – sumažinti kanalo triukšmo sąlygotų klaidų skaičių (apie kanalo kodavimą smulkiau kalbama 1.5 poskyryje).

Moduliatorius naudojamas tik analoginėse ryšių sistemose ir tose skaitmeninėse ryšių sistemose, kuriose perduodamas analoginis signalas. Moduliatoriaus paskirtis – nešlio moduliavimas signalu, kuris yra signalų procesoriaus išėjime. T.y., šis signalas “perkeliamas” į dažnių juostą, kuri atitinka duotąjį kanalą. Tokiu būdu suformuojamas siųstuvo išėjimo signalas $s(t)$, kurio spektras sutelktas nešlio dažnio f_c aplinkoje. Todėl moduliuotieji signalai vadinami ***juostiniais signalais***. Pavyzdžiui, jeigu kanalą sudaro optinis kabelis, o signalų procesoriaus išėjimo signalas yra garsinio dažnio, tuomet moduliatorius transformuoja garsinius dažnius į šviesos dažnius. Tokiu atveju $s(t)$ yra šviesa. 4 skyriuje bus parodyta, kad juostinį signalą visuomet galima išreikšti tokiu pavidalu:

$$s(t) = R(t)\cos[\omega_c t + \theta(t)], \tag{1.1.1}$$

kur $\omega_c = 2\pi f_c$. Jeigu $R(t) = const$ ir $\theta(t) = const$, tuomet $s(t)$ yra harmoninė funkcija, kurios dažnis $f = f_c$. Moduliavimas pasireiškia tuo, kad juostinio signalo amplitudė $R(t)$ arba fazė $\theta(t)$ kinta kaip informacinio signalo $m(t)$ funkcijos. Dėl šio $R(t)$ ir $\theta(t)$ kitimo $s(t)$ turi nenulinio pločio spektrą (dažnių juostą).

Sklindant signalui kanalu, signalas silpsta, o triukšmas auga. ***Triukšmas*** – tai nereikalinga priimamo signalo dalis, kuri neneša jokios informacijos. 1.1.1 pav. ši signalo dalis žymima $n(t)$. Kanalo triukšmą gali sukelti natūralūs elektriniai trikdžiai (pvz., žaibas) arba dirbtinės kilmės šaltiniai (pvz., aukštos įtampos perdavimo linijos). Siekiant išlaikyti pakankamai didelį naudingo signalo ir triukšmo santykį, kanale naudojami aktyvieji stiprinimo įrenginiai – retransliatoriai.

Taigi, dėl triukšmo ir kitų kanalo defektų signalas imtuvo įėjime $r(t)$ skiriasi nuo signalo siųstuvo išėjime $s(t)$.

Imtuvas sustiprina iškraipytą signalą $r(t)$ ir demoduliuoja jį, t.y., “grąžina” į pradinio informacinio signalo dažnių juostą. Imtuvo signalų procesorius dekoduoja šį signalą (skaitmeninėje sistemoje) ir suformuoja išėjimo informacinį signalą $\tilde{m}(t)$, kuris *apytiksliai* sutampa su įėjimo informaciniu signalu $m(t)$.

Skaitmeninis ryšys turi keletą privalumą, lyginant su analoginiu:

- Skaitmeninės elektrinės grandinės yra pigesnės už analogines.
- Perduodamą informaciją galima užkoduoti ir tokiu būdu užtikrinti jos slaptumą.
- Pasiekiamas didesnis ***dinaminis diapazonas*** (didžiausios ir mažiausios perduodamo dydžio verčių santykis).
- Informaciją, kurią generuoja skirtingo tipo informacijos šaltiniai (garso, vaizdo ir duomenų) galima vienu metu perduoti viena skaitmenine ryšių sistema.
- Net ir tuo atveju, kai priimamo signalo triukšmas yra didelis, galima užtikrinti pakankamai mažas duomenų klaidas.
- Klaidas dažnai įmanoma ištaisyti, specialiu būdu užkodavus perduodamą informaciją.

Skaitmeninio ryšio trūkumai:

- Reikalingas didesnis dažnių juostos plotis, negu analoginėse sistemose.
- Duomenų detektavimui imtuve reikalingas sinchronizavimo signalas. Šis signalas turi būti atkuriamas pagal priimtąją duomenų seką arba perduodamas atskiru kanalu.

Skaitmeninio ryšio privalumai dažniausiai “nusveria” jo trūkumus. Todėl skaitmeninės ryšių sistemos palaipsniui išstumia analogines.

Pagrindinis tikslas, projektuojant ryšių sistemas, yra užtikrinti kuo mažesnius perduodamos informacijos iškraipymus, tuo pat metu laikantis perduodamos galios, perduodamo signalo dažnių juostos pločio ir sistemos kainos apribojimų. Skaitmeninėse ryšių sistemose informacijos iškraipymų matas yra bito klaidos tikimybė (P_e) priimtuose duomenyse $\tilde{m}$. Šis dydis dar vadinamas ***klaidingų bitų dažniu*** (*bit error rate*). Analoginių ryšių sistemų efektyvumo matas yra informacinio signalo ir triukšmo santykis imtuvo išėjime.

1.2. Perdavimo režimai

Ryšių sistemas galima suskirstyti į sistemas, kurios perduoda informaciją tik viena kryptimi, pakaitom priešingom kryptim, vienu metu priešingom kryptim arba vienu metu dviem kryptim, kurios nebūtinai yra priešingos. Šie informacijos perdavimo būdai vadinami

perdavimo režimais. Galimi keturi perdavimo režimai: vienpusis ryšys (simpleksas), pakaitinis dvipusis ryšys (pusiau dupleksas), vienalaikis dvipusis ryšys (pilnas dupleksas) ir pilnas/pilnas dupleksas.

Vienpusis ryšys arba ***simpleksas*** ("*simplex*", SX) – tai toks ryšys, kai informacija perduodama tik viena kryptimi. T.y., duotajame ryšio punkte informacija gali būti tik priimama arba tik perduodama. Vienpusio ryšio pavyzdys yra komercinis radijo ir televizijos programų transliavimas.

Pakaitinis dvipusis ryšys arba ***pusiau dupleksas*** ("*half-duplex*", HDX) – tai toks ryšys, kai informacija perduodama abiem kryptim, tačiau ne vienu metu. T.y., duotojoje vietoje informacija gali būti priimama arba perduodama, tačiau negali būti vienu metu priimama ir perduodama. Todėl kiekviena ryšio stotis turi nuolat persijungti iš perdavimo režimo į priėmimo režimą ir atgal. Pakaitinis dvipusis ryšys naudojamas, pvz., policijos radijo ryšio sistemose.

Vienalaikis dvipusis ryšys arba ***pilnasis dupleksas*** ("*full duplex*", FDX) arba tiesiog ***dupleksas*** ("*duplex*", DX) – tai toks ryšys, kai informacija gali būti perduodama vienu metu abiem kryptim. T.y., duotojoje vietoje informacija gali būti vienu metu priimama ir perduodama. Stotis, iš kurios priimama informacija, turi būti ta pati stotis, kuriai perduodama informacija. Tokios ryšių sistemos pavyzdys yra standartinė telefono ryšių sistema.

Pilnas/pilnas dupleksas ("*full/full duplex*", F/FDX) – tai toks ryšys, kai informacija gali būti vienu metu perduodama ir priimama, tačiau nebūtinai tarp tų pačių dviejų punktų. T.y., viena stotis gali perduoti informaciją į antrą stotį ir tuo pat metu priimti informaciją iš trečios stoties.

1.3. Informacijos matas

Ryšių sistemos paskirtis yra informacijos perdavimas iš informacijos šaltinio informacijos vartotojui. Tačiau kaip tiksliai apibrėžti "informacijos" sąvoką ir kaip ji matuojama? Intuityviai aišku, kad perduotos informacijos kiekis yra susijęs su jos netikėtumu, t.y., su gautojo pranešimo tikimybe: kuo labiau netikėtas pranešimas (t.y., kuo mažesnė jo tikimybė), tuo daugiau informacijos jis perduoda. Skaitmeninio informacijos šaltinio j-tojo pranešimo perduotas ***informacijos kiekis*** I_j apibrėžiamas šitaip:

$$I_j = \log_2\left(\frac{1}{P_j}\right), \tag{1.3.1a}$$

kur P_j yra j-tojo pranešimo perdavimo tikimybė. Informacijos matavimo vienetas yra ***bitas***. Pagal (1.3.1a) formulę, 1 bitas – tai informacijos kiekis, kurį perduoda pranešimas, kurio tikimybė lygi 0.5. Sąvoka "bitas" naudojama ir kita prasme – kaip dvejetainių duomenų vienetas, t.y., duomenų kiekis, kurį nusako dvejetainio skaičiaus skaitmuo (nulis arba vienetas). Jeigu dvejetainio nulio ir dvejetainio vieneto tikimybės yra vienodos ir lygios 0.5, tai vieno dvejetainio skaitmens perduotas informacijos kiekis lygus 1 bitui. Taigi, abi žodžio „bitas“ prasmės yra artimai susijusios. Toliau "bito" sąvoka bus naudojama abiem šiom prasmėm, o konkreti prasmė bus aiški iš konteksto.

Kadangi dešimtainį arba natūrinį logaritmą apskaičiuoti paprasčiau, negu dvejetainį logaritmą, tai praktiniuose skaičiavimuose vietoj (1.3.1a) naudojamos šios dydžio I_j išraiškos:

$$I_j = -\frac{1}{\log_{10} 2}\log_{10} P_j = -\frac{1}{\ln 2}\ln P_j\,. \tag{1.3.1b}$$

Kadangi skirtingų pranešimų tikimybės yra skirtingos, tai skiriasi ir jų perduodamas informacijos kiekis. Todėl skaitmeninį informacijos šaltinį patogiau apibūdinti *vidutiniu* informacijos kiekiu, kurį perduoda vienas pranešimas. Pasinaudoję vidurkio apibrėžimu ir vieno pranešimo informacijos kiekio išraiška (1.3.1a), randame šitokią vidutinio informacijos kiekio išraišką:

$$H = \sum_{j=1}^{m} P_j I_j = \sum_{j=1}^{m} P_j \log_2\left(\frac{1}{P_j}\right), \tag{1.3.2}$$

kur m yra pilnasis galimų pranešimų skaičius. Vidutinis vieno pranešimo informacijos kiekis H yra vadinamas informacijos šaltinio ***entropija***.

Informacijos ***šaltinio sparta*** apibrėžiama šitaip:

$$R = \frac{H}{T}, \tag{1.3.3}$$

kur T yra vidutinė vieno pranešimo perdavimo trukmė. Šaltinio sparta matuojama bitais per sekundę (b/s).

Visi aukščiau pateikti apibrėžimai galioja tik skaitmeniniams informacijos šaltiniams. Analoginiai šaltiniai čia neaprašomi, nes atitinkamos matematinės išraiškos yra sudėtingesnės, o jų fizikinė prasmė mažiau akivaizdi. Tačiau atskiras analoginių šaltinių aprašymas ir nėra būtinas, nes analoginį šaltinį galima aproksimuoti skaitmeniniu bet kokiu pageidaujamu tikslumu.

1.4. Kanalo pralaida ir idealiosios telekomunikacijų sistemos

Pagrindiniai rodikliai, kurie apibūdina ryšių sistemos efektyvumą, yra jos kaina, dažnių juostos plotis, naudojamoji siųstuvo galia, signalo ir triukšmo santykis įvairiuose sistemos taškuose, klaidingų bitų dažnis (skaitmeninėse sistemose) ir signalo vėlinimas.

Optimalioji skaitmeninė telekomunikacijų sistema – tai sistema, kurioje pasiekiamas mažiausias klaidingų bitų dažnis, tenkinant duotuosius galios ir dažnių juostos pločio apribojimus. Iškyla klausimas: ar įmanoma sukurti skaitmeninę ryšių sistemą, kurios imtuvo išėjime visiškai nebūtų klaidų, nors kanale egzistuoja triukšmas? Į šį klausimą 1948 m. atsakė amerikiečių matematikas Klodas Šenonas (*Claude Shannon*). Jis įrodė, kad tokia ***idealioji skaitmeninė telekomunikacijų sistema*** teoriškai gali egzistuoti, tačiau su sąlyga, kad informacijos perdavimo sparta yra mažesnė už tam tikrą ribinę vertę C, kuri priklauso nuo sistemos dažnių juostos pločio bei nuo signalo ir triukšmo santykio. Ši ribinė informacijos sparta C vadinama ***kanalo pralaida***, o jos išraiška yra

$$C = B\log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right), \tag{1.4.1}$$

kur B yra kanalo dažnių juostos plotis (Hz), o S/N yra signalo ir triukšmo galių, tenkančių kanalo dažnių juostai, santykis imtuvo įėjime. Kanalo pralaidos išraiška (1.4.1) vadinama ***Šenono teorema***. Realiose sistemose klaidos tikimybė niekada nebūna lygi nuliui, tačiau ją galima sumažinti iki pakankamai mažų verčių, naudojant duomenų kodavimą (apie tai kalbama sekančiame poskyryje). Taigi, Šenono teoremą galima suformuluoti taip: egzistuoja toks ***optimaliojo kodavimo*** būdas, kad klaidingų bitų dažnis imtuvo išėjime būtų lygus nuliui, jeigu informacijos sparta yra mažesnė už ribinę vertę C (1.4.1).

Optimalioji analoginė telekomunikacijų sistema – tai sistema, kurioje pasiekiamas didžiausias signalo ir triukšmo santykis imtuvo išėjime, tenkinant duotuosius galios ir dažnių juostos pločio apribojimus. ***Idealioji analoginė telekomunikacijų sistema*** – tai sistema, kurios išėjime signalo ir triukšmo santykis yra be galo didelis. Esant kanalo triukšmui, tokia ideali analoginė sistema iš principo negali egzistuoti.

1.5. Duomenų perdavimo klaidos ir duomenų kodavimas

Skaitmeninėje ryšių sistemoje perduodama informacija yra dvejetainio pavidalo. T.y., perduodamą informaciją galima išreikšti dvejetainių simbolių – loginių nulių ir vienetų – seka (bitų seka). Dėl kanalo triukšmo kuris nors simbolis gali virsti kitu (t.y., nulis gali virsti vienetu arba vienetas – nuliu). Toks pakitimas vadinamas duomenų perdavimo ***klaida***. Jeigu priimtuose duomenyse pasikeitė du bitai, tuomet sakoma, kad duomenyse yra dvi klaidos, ir t.t. Jeigu duomenyse, kurie priimami skaitmeninės ryšių sistemos imtuvo įėjime, yra klaidų, jų skaičius gali būti sumažintas vienu iš dviejų būdų:

- ***automatinis kartojamasis klaidų taisymas*** (*automatic repeat request*, ***ARQ***);
- ***tiesioginis klaidų taisymas*** (*forward error correction*, ***FEC***).

ARQ sistemoje, kai imtuvas aptinka klaidą duomenyse, jis pareikalauja, kad duomenys būtų perduoti dar kartą. T.y., šiuo atveju perduodamus duomenis pakanka užkoduoti taip, kad imtuvas galėtų klaidas aptikti (bet nebūtinai ištaisyti). FEC sistemoje perduodami duomenys yra užkoduoti tokiu būdu, kad imtuvas galėtų ne tik aptikti klaidas, bet ir pats jas ištaisyti. Duomenų kodavimas, kurio paskirtis – aptikti arba ištaisyti kanalo triukšmo sukeltas klaidas, vadinamas ***kanalo kodavimu*** (skirtingai nuo *šaltinio kodavimo*, kuris aprašomas 3 skyriuje).

Automatinio kartojamojo klaidų taisymo (ARQ) privalumas yra tas, kad jį galima realizuoti palyginti pigiai. ARQ dažniausiai naudojamas kompiuterinių ryšių sistemose, kuriose yra patikimas dvipusis ryšys (pilnas dupleksas arba pusiau dupleksas), pvz., vietiniuose tinkluose (LAN). Naudojant ARQ, duomenys perduodami blokais (paketais). Jeigu priimtajame duomenų bloke aptinkama klaida, imtuvas perduoda siųstuvui pranešimą NAC ("*negative acknowledge*"), kuris reiškia, kad šį duomenų bloką reikia perduoti dar kartą. Jeigu duomenų bloke klaidų nerasta, tuomet siųstuvui perduodamas pranešimas ACK ("*acknowledge*"). Ankstyvosiose ARQ sistemose siųstuvas po kiekvieno perduoto duomenų bloko laukdavo ACK arba NAC pranešimo, po kurio perduodavo sekantį duomenų bloką arba pakartotinai siųsdavo tą patį duomenų bloką. Naujesnėse sistemose imtuvui kartu su duomenų paketu perduodamas ir to paketo eilės numeris. Patikrinus, ar priimtajame duomenų pakete nėra klaidų, imtuvas praneša siųstuvui, kuris paketas buvo patikrintas ir ar jame rasta klaida. Todėl siųstuvas neturi laukti ACK/NAC pranešimo po kiekvieno perduoto paketo, o gali iš karto siųsti sekantį paketą. Automatinio kartojamojo klaidų taisymo įtaką informacijos perdavimo spartai galima pastebėti, pvz., atidarant interneto tinklapį vietiniame tinkle: lygiagrečiai su duomenų priėmimu, vyksta ir duomenų perdavimas. Šie perduotieji duomenys ir yra ARQ pranešimai, kuriuos imtuvas siunčia siųstuvui.

Vienpusio ryšio sistemose ARQ metodikos neįmanoma pritaikyti. Dvipusio ryšio sistemose su dideliu perdavimo vėlinimu (t.y., su ilgom pauzėm tarp duomenų paketų) ARQ įdiegimas nėra racionalus, nes tuomet siųstuvas didžiąją dalį laiko praleistų laukdamas ACK/NAC pranešimo. Tokiais atvejais pritaikomas tiesioginis klaidų taisymas (FEC), apie kurį kalbama likusioje šio poskyrio dalyje.

Kaip minėta, tiesioginis klaidų taisymas įgyvendinamas kanalo kodavimo būdu. ***Kanalo kodavimas*** pasireiškia tuo, kad į duomenų srautą įterpiami papildomi (pertekliniai) bitai, kuriuos imtuvas naudoja klaidų radimui ir taisymui. T.y., pradinį skaičių k informacinių (***įėjimo***) bitų atitinka didesnis skaičius $n > k$ kodinių (***išėjimo***) bitų. Konkrečios k ir n reikšmės priklauso nuo kodavimo metodo (tačiau tas pačias k ir n reikšmes gali atitikti įvairūs kodavimo metodai). Kodavimo metodas dažniausiai vadinamas tiesiog ***kodu***. Santykis $R = k/n$ vadinamas ***kodo sparta***. Kodo sparta – tai užkoduoto signalo bitų skaičius per sekundę, laikant, kad įėjimo signalo bitų sparta lygi 1 b/s. Kuo mažesnė kodo sparta (kuo daugiau perteklinių bitų), tuo daugiau klaidų galima ištaisyti. Tačiau, didinant perteklinių bitų skaičių, perduodamos naudingos informacijos kiekis nedidėja. Todėl, norint išsaugoti tą pačią informacijos perdavimo spartą, esant didesniam perteklinių bitų skaičiui, reikalingas didesnis kanalo dažnių juostos plotis.

Daugumą kodų galima suskirstyti į dvi dideles grupes: blokiniai kodai ir konvoliuciniai kodai. Žemiau pateiktas trumpas šių dviejų kodų grupių aprašymas.

1.5.1. Blokiniai kodai

Naudojant ***blokinį kodą***, koduotuvas užkuoduoja kiekvieną fiksuoto skaičiaus k bitų seką ("bloką"), pakeisdamas ją n kodinių bitų seka (***kodiniu žodžiu***). Šiuo atveju n išėjimo bitų priklauso tik nuo paskutiniųjų k įėjimo bitų. T.y., blokinis koduotuvas yra įrenginys *be atminties*. Blokiniai kodai žymimi (n, k), kur k svyruoja nuo 3 iki kelių šimtų, o kodo sparta k/n – nuo 1/4 iki 7/8.

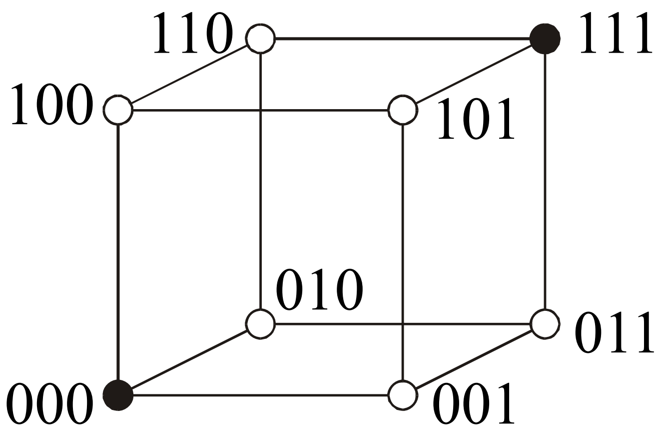
Blokinio kodo atveju klaida priimtuose duomenyse aptinkama pagal tai, kad priimtasis n bitų žodis nėra vienas iš kodinių žodžių (t.y., neturi prasmės duotajame kode). Klaida ištaisoma, pakeičiant priimtąjį žodį *artimiausiu* kodiniu žodžiu. Kodavimo teorijoje naudojama "Hemingo atstumo" tarp dviejų žodžių sąvoka. ***Hemingo atstumas*** ("*Hamming distance*"), arba tiesiog ***atstumas*** tarp dviejų dvejetainių žodžių – tai bitų, kuriais jie skiriasi, skaičius. Pvz., atstumas tarp žodžių 110101 ir 111001 lygus $d = 2$. Kiekviena klaida duotajame žodyje vienetu padidina atstumą tarp to žodžio ir teisingojo žodžio ir priartina duotąjį žodį prie kitų kodinių žodžių. Kai žodis dėl klaidų nutolsta nuo teisingojo žodžio tiek, kad šis jau nėra artimiausias kodinis žodis, klaidos ištaisyti neįmanoma. Kuo didesnis mažiausias atstumas tarp kodinių žodžių, tuo daugiau klaidų gali įvykti viename žodyje, nesikeičiant artimiausiam kodiniam žodžiui (t.y., neprarandant informacijos, kuri reikalinga klaidos ištaisymui). Žemiau pateikti pavyzdžiai, kurie iliustruoja šį teiginį.

Tarkime, naudojamas blokinis kodas (2, 1), kuriame kiekvieną įėjimo loginį nulį (0) atitinka du loginiai nuliai išėjime (00), o kiekvieną įėjimo loginį vienetą (1) atitinka du loginiai vienetai išėjime (11). (n, 1) tipo blokinis kodas, kuris kiekvieną įėjimo bitą pakeičia n tokių pačių išėjimo bitų, vadinamas ***kartojamuoju kodu***. Kartojamajame kode (n, 1) yra tik du kodiniai žodžiai: $\underbrace{00...0}_{n}$ ir $\underbrace{11...1}_{n}$. Kartojamajame kode (2, 1) kodiniai žodžiai yra 00 ir 11. Atstumas tarp jų lygus 2. Iš viso galima sudaryti keturis dvejetainius žodžius, kurių ilgis lygus $n = 2$: 00, 10, 01 ir 11. Du iš jų (10 ir 01) šiame kode neturi prasmės, todėl imtuvas juos laikys klaidingais. Žodžiai 01 arba 10 priimami tuo atveju, kai perduotame kodiniame žodyje (00 arba 11) pasikeičia vienas bitas, t.y., kai žodyje yra *viena* klaida. Tačiau šios klaidos imtuvas negali ištaisyti, nes klaidingieji žodžiai 01 ir 10 nutolę nuo abiejų kodinių žodžių vienodu atstumu ($d = 1$). Taigi, kartojamasis kodas (2, 1) leidžia aptikti (bet ne ištaisyti) vieną klaidą žodyje. Dviejų klaidų (kai pasikeičia abu bitai) aptikti šiuo atveju neįmanoma, nes tuomet vienas kodinis žodis virsta kitu kodiniu žodžiu (00 virsta 11 arba atvirkščiai).

Aukščiau aprašyto kartojamojo kodo (2, 1) atveju Hemingo atstumas tarp kodinių žodžių lygus 2. Apskritai, blokinis kodas, kurio mažiausias Hemingo atstumas lygus 2, leidžia tik aptikti (bet ne ištaisyti) vieną klaidą žodyje. Pats paprasčiausias tokio tipo kodavimo būdas yra žodžio papildymas ***lyginumo bitu***. Lyginumo bito reikšmė parenkama taip, kad pilnas vienetų skaičius žodyje visuomet būtų lyginis arba visuomet būtų nelyginis (atitinkamai, toks kodas vadinamas ***lyginiu lyginumu*** arba ***nelyginiu lyginumu***). Pvz., jeigu naudojamas lyginio lyginumo blokinis kodas (5,4), tuomet vietoj žodžio 1101 perduodamas žodis 11011, o vietoj žodžio 1001 perduodamas žodis 10010. Įvykus vienai klaidai, vienetų skaičiaus lyginumas pasikeičia – pagal tai aptinkama klaida. Lyginumo bito reikšmė – tai informacinių bitų suma moduliu 2. Dviejų bitų ***suma moduliu 2*** žymima simboliu ⊕ ir skaičiuojama pagal šias taisykles:

$$0 \oplus 0 = 0, \quad 0 \oplus 1 = 1, \quad 1 \oplus 0 = 1, \quad 1 \oplus 1 = 0.$$

(loginė operacija, kuri tenkina šias taisykles, vadinama ***nevienareikšmiškumo*** logine operacija ir žymima XOR: "*Exclusive OR*"). Taigi, jeigu naudojami, pvz., 4 informaciniai bitai i_1, i_2, i_3 ir i_4, tuomet lyginumo bito reikšmę formaliai galima išreikšti šitaip: $p = i_1 \oplus i_2 \oplus i_3 \oplus i_4$.



1.5.1 pav. Kartojamasis kodas (3, 1).

Kitas blokinio kodo pavyzdys – kartojamasis kodas (3, 1). Šio kodo žodžiai yra 000 ir 111. Iš trijų simbolių iš viso galima sudaryti $2^3 = 8$ dvejetainius žodžius. Šį aštuonių žodžių rinkinį patogu vaizduoti taškais, esančiais kubo viršūnėse (1.5.1 pav.). Atstumas tarp dviejų žodžių – tai mažiausias kubo briaunų skaičius, kurį reikia pereiti, einant nuo vieno žodžio prie kito. Kodiniai žodžiai 000 ir 111 yra priešingose kubo viršūnėse: atstumas tarp jų lygus 3. Kiekviena klaida pasireiškia žodžio "poslinkiu" išilgai briaunos link kurios nors iš trijų kaimyninių viršūnių. Jeigu įvyko tik viena klaida (pvz., vietoj kodinio žodžio 111 priimtas žodis 101), tuomet arčiausiai esantis kodinis žodis sutampa su teisinguoju žodžiu, todėl imtuvas gali ištaisyti šią klaidą. Jeigu įvyko dvi klaidos (pvz., vietoj kodinio žodžio 111 priimtas žodis 100), tuomet imtuvas gali aptikti klaidą, nes priimtasis žodis nėra vienas iš kodinių, tačiau negali tos klaidos ištaisyti, nes arčiausiai esantis kodinis žodis yra klaidingas. Jeigu įvyko trys klaidos (t.y., pasikeitė visi trys žodžio bitai), tuomet klaidos aptikti neįmanoma.

Aukščiau pateiktus teiginius galima apibendrinti bet kokio tipo (t.y., ne vien kartojamiesiems) blokiniams kodams. Tarkime, kad mažiausias atstumas tarp kodinių žodžių yra d. Tuomet:

1) kad imtuvas galėtų patikimai nustatyti, jog įvyko *bent viena* klaida, klaidų skaičius turi būti nedidesnis už $d - 1$;
2) kad imtuvas galėtų teisingai nustatyti klaidų skaičių, šis skaičius turi būti nedidesnis už $[d/2]$ (laužtiniai skliaustai reiškia skaičiaus sveikąją dalį);
3) kad imtuvas galėtų ištaisyti visas klaidas, jų skaičius turi būti nedidesnis už $[(d - 1)/2]$.

Taigi, jeigu priimtajame dvejetainiame žodyje yra t klaidų, visos jos gali būti ištaisytos tik tuo atveju, kai mažiausias atstumas tarp kodinių žodžių tenkina nelygybę

$$d \geq 2t + 1. \qquad (1.5.1)$$

Vadinasi, blokinis kodas, kurio mažiausias Hemingo atstumas lygus 3 (pvz., aukščiau aprašytasis kartojamasis kodas (3, 1)), leidžia ištaisyti tik vieną klaidą žodyje. Kadangi šiuolaikinėse skaitmeninėse ryšių sistemose duomenų perdavimo klaidos yra gana retos, tai praktikoje dažnai pakanka naudoti tik tokius blokinius kodus.

Amerikiečių matematikas Ričardas Hemingas (*Richard W. Hamming*) 1948 m. suformulavo blokinių kodų, kurių mažiausias Hemingo atstumas lygus 3, sudarymo būdą. Šiuose koduose naudojami keli lyginumo bitai. T.y., kodinis žodis bendruoju atveju yra tokio pavidalo:

$$i_1\, i_2\, i_3 \ldots i_k\, p_1\, p_2\, p_3 \ldots p_m,$$

kur i_1, i_2, i_3, …, i_k yra informaciniai bitai, o p_1, p_2, p_3, … p_m yra lyginumo bitai. Lyginumo bitai nebūtinai yra kodinio žodžio pabaigoje. Kiekvienas lyginumo bitas nusako tam tikro informacinių bitų pogrupio lyginumą. Kaip ir paprasčiausiame lyginumo kode, klaida aptinkama pagal tai, ar pilnojo vienetų skaičiaus lyginumas atitinka kodo lyginumą. Tačiau ***Hemingo kodo*** ypatybė yra ta, kad, dėl klaidos pasikeitus kuriam nors žodžio bitui, pagal lyginumo bitus galima apskaičiuoti klaidingo bito numerį (netgi tuo atveju, kai klaida yra lyginumo bite). Taigi, Hemingo kodas leidžia ne tik aptikti vieną klaidą, bet ir ištaisyti ją.

Hemingo kode lyginumo bitų skaičius (m) visuomet didesnis už 2, o informacinių bitų skaičius lygus $k = 2^m - 1 - m$. T.y., galimi Hemingo kodų ilgiai yra

$$(n, k) = (2^m - 1, 2^m - 1 - m) \quad (m \geq 3).$$

Vadinasi, galimi Hemingo kodai yra (7, 4), (15, 11), (31, 26), (63, 57), (127, 120) ir t.t. Didėjant m, Hemingo kodo sparta artėja į vienetą.

Jeigu naudojamas Hemingo kodas, tuomet, sudėjus kiekvieną priimtąjį lyginumo bitą su atitinkamais informaciniais bitais priimtajame žodyje, gaunamas klaidingo bito numeris žodyje. Lyginumo bitai ir informaciniai bitai kodiniame žodyje išdėstomi taip, kad ryšys tarp lyginumo bitų numerių ir atitinkamų informacinių bitų numerių būtų kuo paprastesnis. Žemiau pateiktos Hemingo kodų sudarymo ir panaudojimo taisyklės:

1) Lyginumo bitų numeriai (skaičiuojant dvejetainio skaitmens svorio didėjimo kryptimi) yra $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, …, 2^{m-1}. Pvz., Hemingo kodo (7, 4) atveju kodinis žodis yra tokio pavidalo:
$$p_1\, p_2\, i_3\, p_4\, i_5\, i_6\, i_7.$$
2) Kiekvienas lyginumo bitas apskaičiuojamas, sudėjus informacinius bitus, kurių numeriai dvejetainiame pavidale turi vienetą toje pačioje padėtyje, kaip ir atitinkamo lyginumo bito numeris. Pvz., Hemingo kodo (7, 4) atveju
$$p_1 = i_3 \oplus i_5 \oplus i_7;$$
$$p_2 = i_3 \oplus i_6 \oplus i_7;$$
$$p_4 = i_5 \oplus i_6 \oplus i_7.$$
3) Jeigu priimtajame žodyje tik vienas bitas yra klaidingas, tuomet jo numerio dvejetainiai skaitmenys ($c_1 c_2 c_4 ... c_{2^{m-1}}$) randami, sudėjus kiekvieną lyginumo bitą su atitinkamais informaciniais bitais. Pvz., Hemingo kodo (7, 4) atveju
$$c_1 = p_1 \oplus i_3 \oplus i_5 \oplus i_7;$$
$$c_2 = p_2 \oplus i_3 \oplus i_6 \oplus i_7;$$
$$c_4 = p_4 \oplus i_5 \oplus i_6 \oplus i_7.$$

Pvz., tarkime, kad reikia perduoti informacinį žodį 1010, t.y., pradiniai informaciniai bitai yra

$$i_3 = 1, \quad i_5 = 0, \quad i_6 = 1, \quad i_7 = 0.$$

Tuomet lyginumo bitai yra

$$p_1 = 1, \quad p_2 = 0, \quad p_4 = 1.$$

Vadinasi, perduodamas kodinis žodis 1011010. Kaip matome, bendras vienetų skaičius yra lyginis (4). T.y., šis Hemingo kodas yra lyginio lyginumo kodas. Tarkime, klaida yra šeštajame kodinio žodžio bite (trečiajame informaciniame bite), t.y., priimamas žodis 1011000, kurio šeštasis bitas $i_6 = 0$. Klaida aptinkama pagal tai, kad priimtajame žodyje vienetų skaičius yra nelyginis (3). Sudėję kiekvieną lyginumo bitą su atitinkamais trim informaciniais bitais, gauname:

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 1, \quad c_4 = 1.$$

Taigi, gavome dvejetainį skaičių 011, kuris sutampa su klaidingo bito numeriu (6).

Be Hemingo kodų, egzistuoja daug kitų tipų blokinių kodų. Pvz., naudojami ***cikliniai kodai***, kuriuose kiekvienas kodinis žodis gali būti gautas, paėmus kažkurį kitą kodinį žodį, paslinkus jo bitus į dešinę, o "atliekamus" paskutiniuosius bitus perkėlus į žodžio pradžią. Tokių kodų pranašumas – tai palyginti paprastas jų realizavimas, naudojant pigius postūmio registrus.

Blokiniai kodai dažniausiai naudojami žemo dažnio sistemose (pvz., personaliniuose kompiuteriuose ir kompaktinių diskų grotuvuose).

1.5.2. Konvoliuciniai kodai

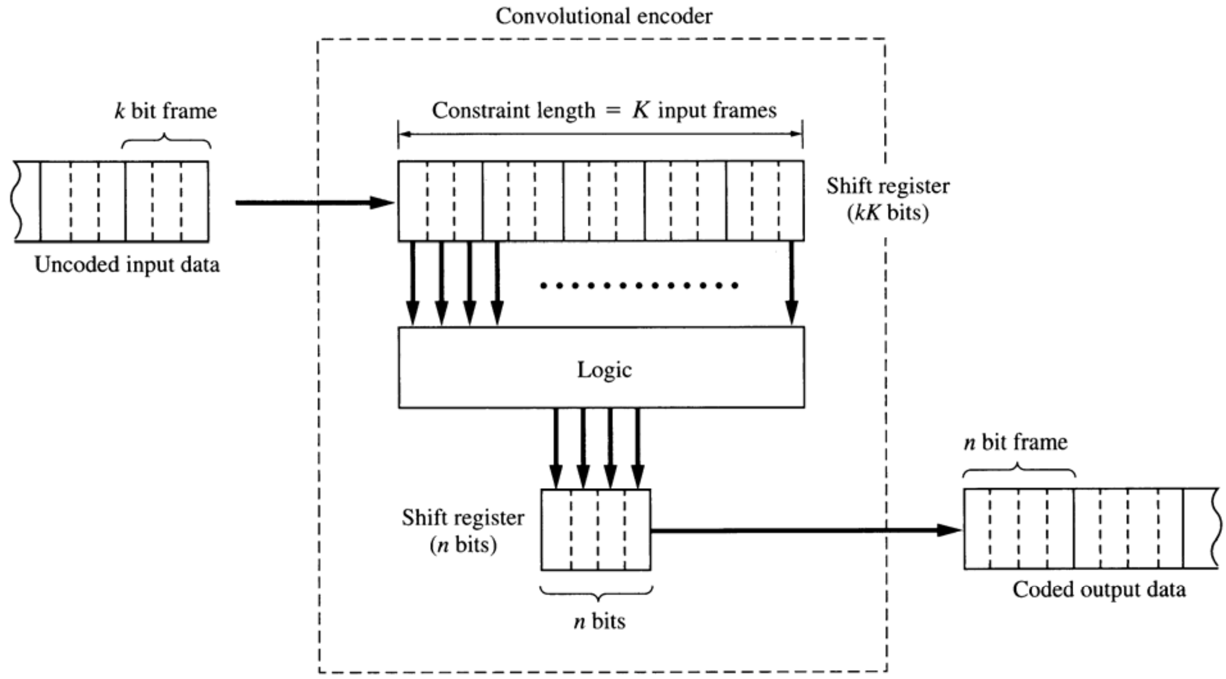
Konvoliucinis koduotuvas, taip pat, kaip ir blokinis, priima k įėjimo bitų ir generuoja $n > k$ išėjimo bitų, tačiau šiuo atveju išėjimo bitai priklauso ne vien nuo paskutiniųjų k įėjimo bitų, bet ir nuo ankstesniųjų υ įėjimo bitų. T.y., konvoliucinis koduotuvas turi *atmintį*. Tipiškos k reikšmės svyruoja nuo 1 iki 8, υ reikšmės kinta nuo 2 iki 60, o kodo sparta sparta k/n – nuo 1/4 iki 7/8. Konvoliucinio kodavimo atveju įėjimo bitų srautas nėra skaidomas į blokus, t.y., su bet kuriais paskutiniaisiais $k + \upsilon$ bitų atliekami tie patys veiksmai, kurių metu suformuojami n išėjimo bitų. Todėl toks kodavimo būdas kartais vadinamas "nuolatiniu kodavimu" (*continuous coding*).

Konvoliucinio koduotuvo veikimą iliustruoja 1.6.2 pav. Kaip matome, kiekviena n išėjimo bitų grupė priklauso nuo $K > 1$ paskutiniųjų įėjimo bitų grupių po k bitų. Kiekvienas iš n išėjimo bitų suformuojamas, sudedant (moduliu 2) tam tikrus iš minėtųjų kK bitų. Kiekviena iš K bitų grupių vadinama konvoliucinio koduotuvo ***pakopa*** (*stage*). Pakopų skaičius K lemia sudėties operacijų skaičių, t.y., koduotuvo ir dekoderio sudėtingumą, bei koduotuvo "atminties" dydį ($\upsilon = kK - k$). Kuo didesnė koduotuvo atmintis (kuo didesnis pakopų skaičius K), tuo daugiau klaidų galima ištaisyti. Tačiau, augant K, dekodavimo trukmė auga eksponentiškai, todėl praktikoje K beveik niekada neviršija 9.

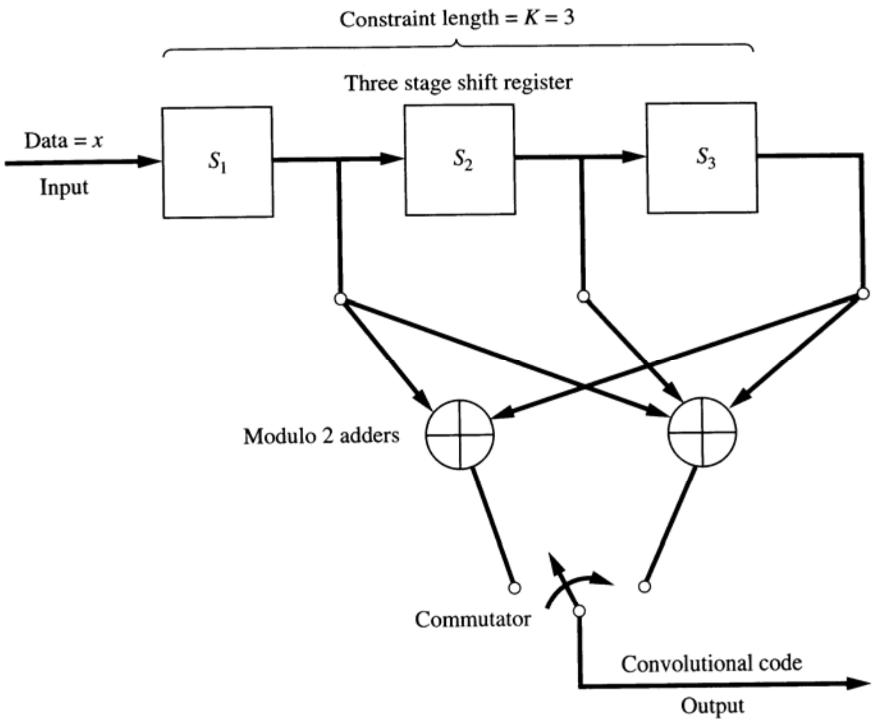
Paprasčiausio konvoliucinio koduotuvo schema pateikta 1.6.3 pav. Šiame pavyzdyje $k = 1$, $n = 2$, o $K = 3$. Taigi, šio kodo sparta yra 1/2. Yra įrodyta, kad 1.6.3 pavaizduotasis koduotuvas yra "geriausias" šioms parametrų k, n ir K reikšmėms (nes mažiausiasis Hemingo atstumas tarp dviejų kodinių sekų yra maksimalus). Iš schemos akivaizdu, kad kiekvienas įėjimo bitas įtakoja $K = 3$ išėjimo bitų poras (kitais žodžiais, kiekviena išėjimo bitų pora priklauso nuo trijų paskutinių įėjimo bitų, o koduotuvo atmintis lygi $\upsilon = kK - k = 3 - 1 = 2$). Tai yra labai svarbi konvoliucinio koduotuvo savybė, kuri ir suteikia galimybę ištaisyti bitų klaidas dekodavimo metu. 1.6.4 pav. pavaizduotos šio koduotuvo išėjimo bitų sekos, atitinkančios įvairias įėjimo bitų sekas. Ši diagrama vadinama ***kodo medžiu***. Kodo medis naudojamas tokiu būdu: jeigu įėjime yra loginis 0, pasirenkamas posūkis į viršų, o jeigu loginis 1 – posūkis į apačią. Pvz., įėjimo bitų seką 1010 atitinka išėjimo bitų seka 11010001 (1.5.4 pav. – kelias A).

Konvoliucinio koduotuvo užkoduotas signalas dekoduojamas, lyginant priimtuosius duomenis su atitinkama bitų seka kodo medyje. Paprasčiausias “teisingo kelio” radimo būdas panašus į vairuotojo veiksmus, kai jis, važiuodamas keliu, kartais pasirenka klaidingą posūkį, tačiau po to pastebi savo klaidą, grįžta atgal ir pasirenka kitą kelią. Jeigu kanale yra triukšmas, kai kurie iš priimtųjų bitų gali būti klaidingi. Tokiu atveju pasirenkamas tas kelias, kuris yra arčiausiai priimtosios bitų sekos (Hemingo atstumo prasme). Optimalusis konvoliucinio kodo dekodavimo algoritmas yra taip vadinamas Viterbi algoritmas, kurį 1967 m sukūrė amerikiečių mokslininkas Andrew J. Viterbi. Viterbi algoritmas šiuo metu yra dažniausiai naudojamas praktikoje. Kadangi šis algoritmas yra gana sudėtingas, jis čia neaprašytas.

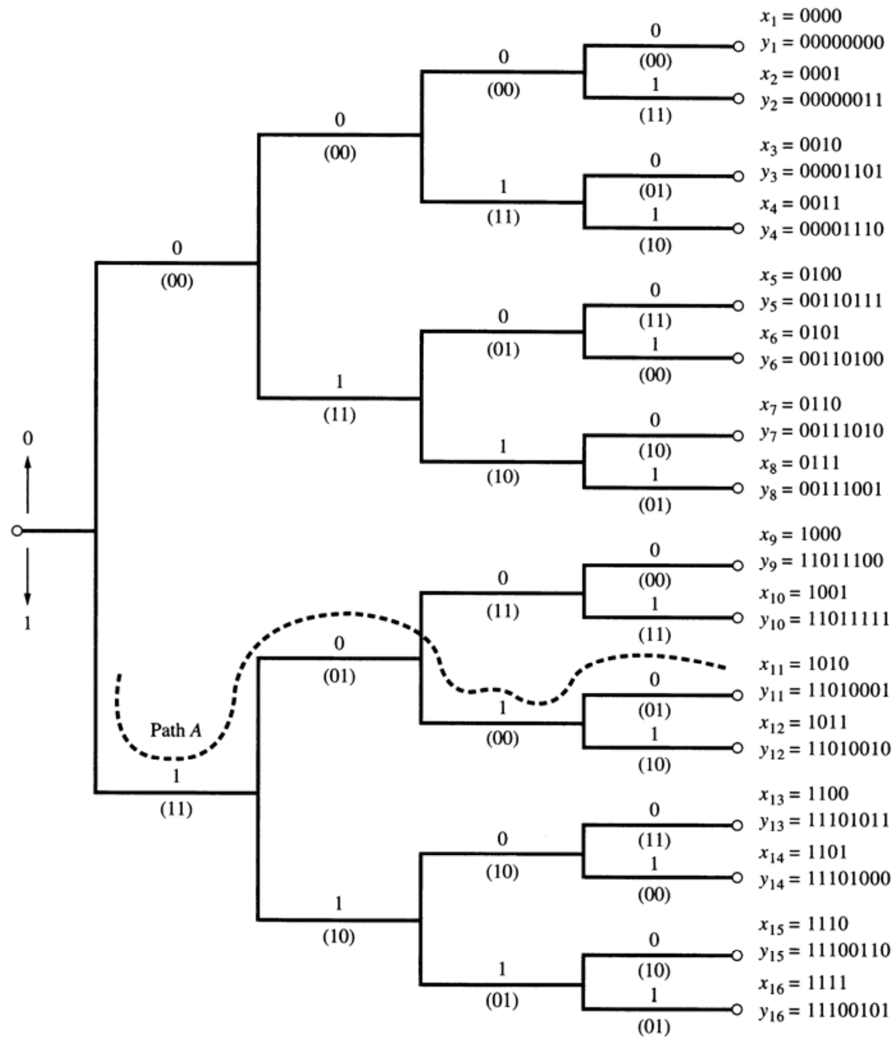
Konvoliucinis kodavimas labiau tinka, koduojant ilgas bitų sekas kanale su triukšmu, negu blokinis kodavimas. Be to, konvoliucinį kodavimą lengviau realizuoti praktiškai. Todėl konvoliucinis kodavimas šiuo metu plačiai naudojamas mobilaus telefoninio ryšio (GSM) sistemose, palydovinio ryšio sistemose bei standartiniuose 56 kb/s spartos modemuose.



1.5.2 pav. Konvoliucinio koduotuvo apibendrintoji schema (k = 3, n = 4, K = 5, R = 3/4).



1.5.3 pav. Konvoliucinio koduotuvo pavyzdys (R = 1/2, K = 3).

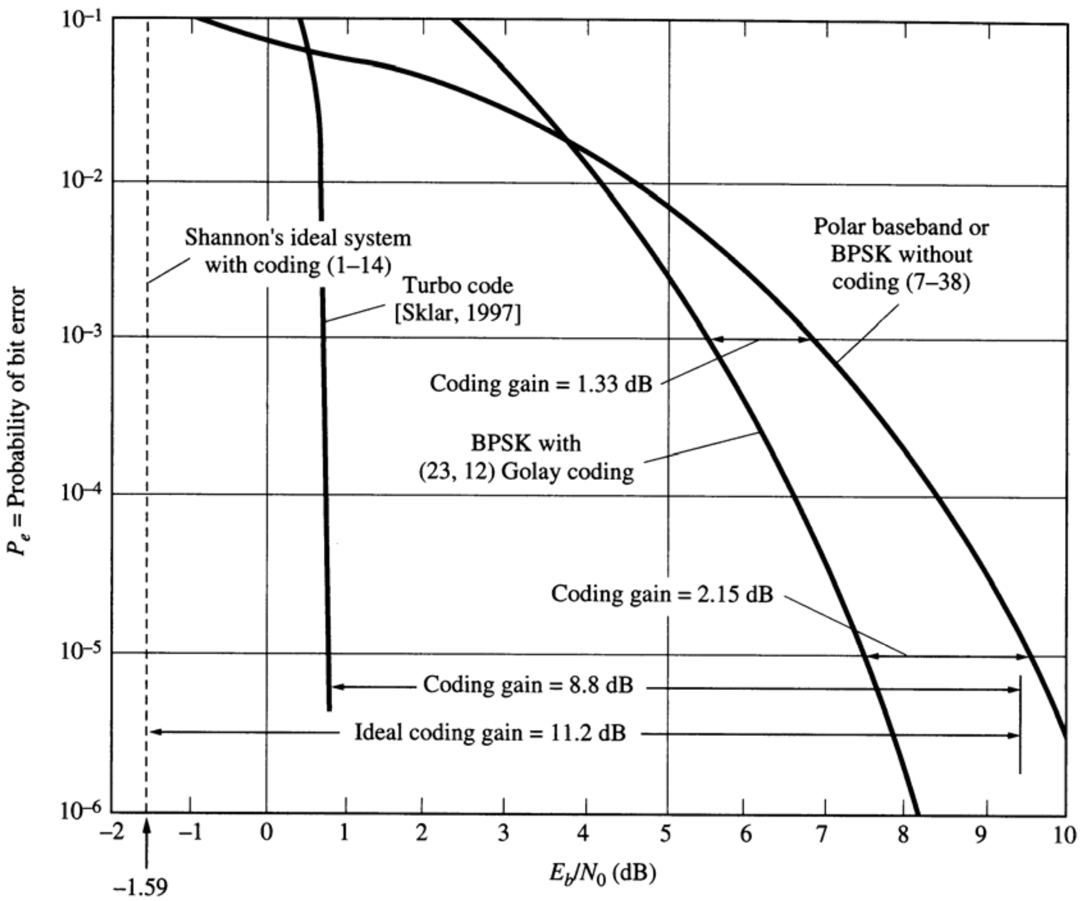


1.5.4 pav. Konvoliucinio koduotuvo, kuris pavaizduotas 1.5.3 pav., kodo medis.

1.5.3. Kodo efektyvumas

Klaidingų bitų dažnio (P_e) priklausomybė nuo bito energijos ir triukšmo galios spektrinio tankio santykio (E_b/N_0) įvairioms skaitmeninėms ryšių sistemoms pavaizduota 1.5.5 pav. Čia pavaizduotos keturios kreivės: viena atitinka apgręžinį fazės manipuliavimą be kodavimo, antroji atitinka apgręžinį fazės manipuliavimą su konkrečiu blokiniu kodu, trečioji atitinka taip vadinamą turbo kodą (dviejų konvoliucinių kodų derinį), o ketvirtoji atitinka idealiąją skaitmeninę sistemą. Šiame paveiksle matyti, kad, mažėjant bito energijos ir triukšmo galios tankio santykiui, klaidingų bitų dažnis auga. Be to, idealiosios sistemos atveju, sumažėjus santykio E_b/N_0 vertei iki tam tikros ribinės vertės, klaidingų bitų dažnis šuoliškai išauga nuo nulio iki 0.25. Šis ribinis santykis E_b/N_0 vadinamas ***Šenono riba***. Taigi, ***Šenono riba*** – tai mažiausias bito energijos ir triukšmo galios tankio santykis E_b/N_0, kuriam esant, yra įmanomas duomenų perdavimas be klaidų skaitmeninėje ryšių sistemoje.

1.5.5 pav. taip pat parodyta, kaip apibrėžiamas kodavimo našumas. Duotąjį klaidingų bitų dažnį atitinkantis ***kodavimo našumas*** (*coding gain*) nusako, kiek kartų skiriasi santykio E_b/N_0 vertės nekoduotam signalui ir koduotam signalui, esant duotam klaidingų bitų dažniui. Kodavimo našumas matuojamas decibelais (žr. 2.1 poskyrį). Pvz., 1.5.5 pav. atveju duotojo tipo kodo našumas, atitinkantis klaidingų bitų dažnį $P_e = 10^{-3}$, yra 1.33 dB, o $P_e = 10^{-5}$ atitinka kodavimo našumas 2.15 dB. Optimaliojo kodavimo našumas, atitinkantis $P_e = 10^{-5}$, apgręžinio fazės manipuliavimo sistemoje lygus 9.61 - (-1.59) = 11.2 dB.



1.5.5 pav. Įvairių skaitmeninių telekomunikacijų sistemų kodavimo našumo palyginimas.

Be to, 1.5.5 pav. akivaizdu, kad egzistuoja ***kodavimo slenkstis*** – mažiausias bito energijos ir triukšmo galios tankio santykis E_b/N_0, kuriam esant, sistemos su kodavimu klaidingų bitų dažnis yra didesnis už analogiškos sistemos be kodavimo klaidingų bitų dažnį. Šiame pavyzdyje kodavimo slenkstis lygus maždaug 3.5 dB. T.y., kai bito energijos ir triukšmo galios santykis tampa mažesnis už 3.5 dB, sistema be kodavimo tampa efektyvesnė už analogišką sistemą su kodavimu.

Šenono ribą idealiajai sistemai galima apskaičiuoti, naudojantis Šenono teorema (1.4.1). Visų pirma reikia rasti būdą eliminuoti kanalo dažnių juostos plotį B. Jeigu norima išsaugoti tą pačią informacijos perdavimo spartą, koduotos sistemos dažnių juostos plotis turi būti n/k kartų didesnis už nekoduoto signalo dažnių juostos plotį (čia n yra pilnasis kodinio žodžio bitų skaičius, o k yra informacinių bitų skaičius). Blokinių kodų atveju, kad imtuvas galėtų ištaisyti visas klaidas, jų skaičius žodyje turi tenkinti (1.5.1) nelygybę. Kadangi klaidų skaičius t teoriškai gali būti lygus bet kokiam teigiamam sveikajam skaičiui, kuris nedidesnis už žodžio ilgį n, tai, kad (1.5.1) nelygybė galiotų visuomet, reikia, kad mažiausias Hemingo atstumas tarp kodinių žodžių d būtų begalinis. Tai reiškia, kad ir bitų skaičius n viename žodyje turėtų būti begalinis. Kadangi šis bitų skaičius turėtų būti perduodamas per baigtinį laiko tarpą, tai ir kanalo dažnių juostos plotis tokiu atveju turėtų būti begalinis. Šis teiginys galioja tik blokinių kodų atveju. Pagal Šenono teoremą, egzistuoja kito tipo kodas, kuris leidžia ištaisyti visas klaidas priimtajame signale, net jeigu B yra baigtinis (su sąlyga, kad informacijos sparta neviršija kanalo pralaidos (1.4.1)). Nors šis optimalusis kodas yra nežinomas, tačiau iš blokinių kodų aprašymo aišku, kad ir optimaliojo kodo atveju B turėtų būti žymiai didesnis už nekoduoto signalo dažnių juostos plotį. Todėl, skaičiuojant kanalo pralaidą C pagal (1.4.1), galima pereiti prie ribos $B \to \infty$. Be to, galima pasinaudoti tuo, kad skaitmeninio signalo galia – tai energijos E_b, kuri išeikvojama vieno informacijos bito perdavimui, ir bito trukmės T_b santykis: $S = E_b/T_b$, o triukšmo galia lygi triukšmo galios tankio N_0 ir kanalo dažnių juostos pločio B sandaugai: $N = N_0B$. Tokiu būdu gauname

$$C = \lim_{B\to\infty}\left[B\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)\right] = \lim_{B\to\infty}\left[B\log_2\left(1+\frac{E_b/T_b}{N_0B}\right)\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x\ln 2}\ln\left(1+\frac{E_b}{N_0T_b}x\right)\right].$$

Vadinasi, reikia apskaičiuoti neapibrėžtumo 0/0 ribinę reikšmę. Iš matematinės analizės kurso žinoma, kad ši riba lygi skaitiklio ir vardiklio išvestinių santykio ribinei reikšmei (Lopitalio taisyklė). Tokiu būdu randame

$$C = \frac{E_b}{N_0T_b\ln 2}. \quad (1.5.2)$$

Antra vertus, didžiausia informacijos sparta yra lygi atvirkštinei bito perdavimo trukmei: $C = 1/T_b$. Įrašę tai į (1.5.2), randame Šenono ribą:

$$E_b/N_0 = \ln 2 = -1.59\text{dB}. \quad (1.5.3)$$

Vadinasi, mažiausias bito energijos ir triukšmo galios tankio santykis, kuriam esant, idealiojoje sistemoje informacija perduodama be klaidų, yra lygus -1.59 dB.

1.6. Uždavinių sprendimo pavyzdžiai

Pavyzdys Nr. 1

Telefono pultas turi mygtukus su skaitmenimis nuo 0 iki 9 bei mygtukus * ir #. Simbolio * arba # siuntimo tikimybė lygi 0.005, o kiekvieno skaitmens siuntimo tikimybė lygi 0.099. Mygtukai spaudžiami 2 mygt./s sparta. Apskaičiuokite šio informacijos šaltinio spartą.

Sprendimas

Pagal formulę (1.3.2), vidutinis vieno pranešimo informacijos kiekis (entropija) lygus

$$H = \sum_{j=1}^{m} P_j\log_2\left(\frac{1}{P_j}\right) = \frac{1}{\lg 2}\sum_{j=1}^{m} P_j\lg\left(\frac{1}{P_j}\right) = \frac{1}{\lg 2}\left[10\cdot 0.099\cdot\lg\left(\frac{1}{0.099}\right) + 2\cdot 0.005\cdot\left(\frac{1}{0.005}\right)\right] = 3.38\ \text{b/mygt.}$$

Vidutinė vieno pranešimo (skaitmens arba simbolio) perdavimo trukmė lygi $T = 1$ / (2 mygt./s) = 0.5 s / mygt. Pagal formulę (1.3.3), šaltinio sparta lygi

$$R = \frac{H}{T} = \frac{3.38}{0.5} = 6.76\ \text{b/s}.$$

Pavyzdys Nr. 2

Kompiuterio vartotojas ketina pirkti modemą duomenų perdavimui analogine telefono linija. Telefono linijos signalo ir triukšmo santykis lygus 25 dB, o perduodamieji garso dažniai priklauso intervalui nuo 300 Hz iki 3200 Hz. Apskaičiuokite didžiausią informacijos perdavimo spartą, kurią įmanoma pasiekti, su sąlyga, kad priimtuose duomenyse nebūtų klaidų.

Sprendimas

Perėjus nuo decibelų prie „natūraliųjų" vienetų, signalo ir triukšmo santykis lygus $S / N = 10^{(25/10)} = 316.2$ (žr. decibelo apibrėžimą 2.1 poskyryje), o kanalo dažnių juostos plotis lygus $B = 3200 - 300 = 2900$ Hz. Pagal Šenono teoremą (1.4.1), didžiausia informacijos sparta lygi

$$R = B\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right) = 2900\frac{\lg(1+316.2)}{\lg 2} = 24.097 \text{ b/s.}$$

Vadinasi, 57.6 kb/s arba 28.8 kb/s spartos modemas neveiktų su tokia telefono linija; tačiau 14.4 kb/s spartos modemas turėtų perduoti informaciją be klaidų.

Uždaviniai

1.1. Skaitmeninis informacijos šaltinis generuoja -1 V, 0 V, +3 V ir +4 V įtampos lygius. Kiekvieno iš dviejų lygių -1 V ir 0 V tikimybės lygios 0.2, o kiekvieno iš likusiųjų dviejų lygių tikimybės lygios 0.3. Apskaičiuokite šaltinio vidutinį informacijos kiekį (entropiją).

1.2. Įrodykite, kad dvejetainio informacijos šaltinio entropija H yra didžiausia tuomet, kad dvejetainio vieneto siuntimo tikimybė yra lygi dvejetainio nulio siuntimo tikimybei. Apskaičiuokite šią didžiausią entropijos vertę.

1.3. Skaičiaus „0“ atvaizdavimo vieno skaitmens skystakristaliame rodytuve tikimybė lygi 0.25, kiekvieno iš skaičių 1 ir 2 atvaizdavimo tikimybė lygi 0.15, kiekvieno iš skaičių 3, 4, 5, 6, 7 ir 8 atvaizdavimo tikimybė lygi 0.07, o skaičiaus 9 atvaizdavimo tikimybė lygi 0.03. Raskite šio informacijos šaltinio entropiją.

1.4. Skaitmeninis pultas turi mygtukus su skaitmenimis 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ir 9. Visų skaitmenų siuntimo tikimybės yra vienodos. Apskaičiuokite, kokiu dažniu turi būti nuspaudžiami mygtukai, kad informacijos perdavimo sparta būtų lygi 2 b/s.

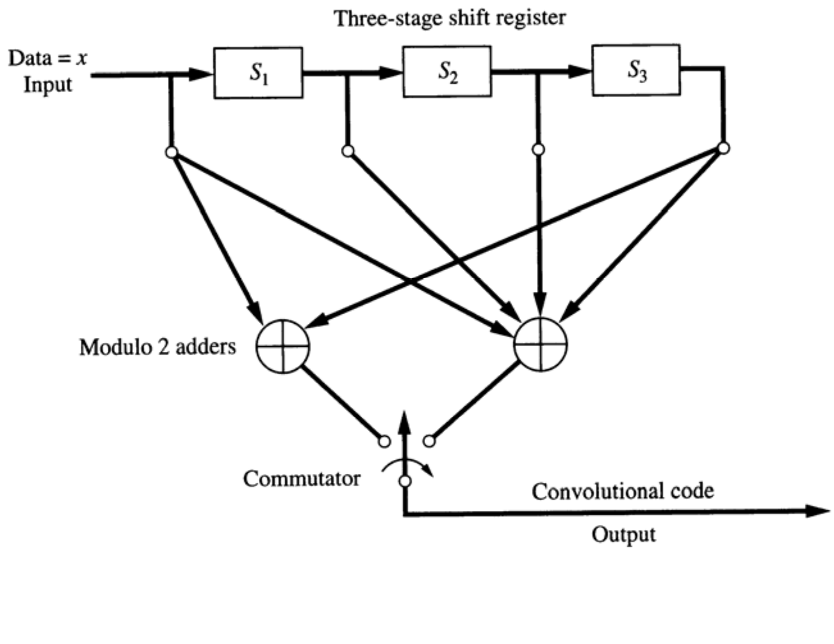
1.5. Kompiuterio klaviatūra turi 110 simbolių, ir kiekvienas simbolis yra perduodamas, naudojant dvejetainį žodį.

(a) Koks bitų skaičius reikalingas vieno simbolio kodavimui?

(b) Kokia didžiausia sparta galima perduoti simbolius (simboliai/s) telefono linija, kurios dažnių juostos plotis 3.2 kHz, o signalo ir triukšmo santykis 20 dB?

(c) Koks yra vieno simbolio perduodamas informacijos kiekis, jeigu visų simbolių perdavimo tikimybės yra vienodos?

1.6. Apskaičiuokite konvoliucinio koduotuvo, kurio struktūrinė schema pavaizduota žemiau, išėjimo bitų seką, kai įėjimo bitų seka yra 10111. Kokie yra šio kodo sparta (k/n) ir pakopų skaičius (K)?



2. SIGNALAI IR SPEKTRAI

2.1. Signalo ir triukšmo galia

Ryšių sistemose priimtajame signale galima išskirti naudingąją dalį, kuri neša reikalingą informaciją, ir pašalinę dalį. Pašalinė dalis vadinama ***triukšmu***. Be klaidų priimti informaciją įmanoma tik tuo atveju, kai priimtojo signalo ir triukšmo vidutinių galių santykis yra pakankamai didelis (šį teiginį iliustruoja Šenono teorema (1.4.1)). Todėl vidutinė galia yra viena iš svarbiausių signalo charakteristikų.

Kaip žinoma, galia yra darbas per laiko vienetą, įtampa yra darbas, tenkantis vienetiniam krūviui, o srovė yra krūvis per laiko vienetą. Iš čia išplaukia ši gerai žinoma elektros srovės ***momentinės galios*** išraiška:

$$p(t) = \upsilon(t)i(t), \tag{2.1.1}$$

kur $\upsilon(t)$ yra įtampa grandinės įėjime, o $i(t)$ – įėjimo srovė. ***Vidutinė galia*** lygi

$$P = \langle p(t)\rangle = \langle \upsilon(t)i(t)\rangle, \tag{2.1.2}$$

kur skliaustai $\langle\rangle$ žymi laikinio vidurkio operatorių:

$$\langle[-]\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[-]dt\,. \tag{2.1.3}$$

Pagal Omo dėsnį, vidutinę galią (2.1.2) galima susieti su $\upsilon(t)$ ir $i(t)$ efektiniais vidurkiais:

$$P = \frac{\langle \upsilon^2(t)\rangle}{R} = \langle i^2(t)\rangle R = \frac{V_{\mathrm{rms}}^2}{R} = I_{\mathrm{rms}}^2 R = V_{\mathrm{rms}} I_{\mathrm{rms}}\,. \tag{2.1.4}$$

Čia V_{rms} žymi įtampos vidutinę kvadratinę vertę (“*root mean square*”), I_{rms} – srovės vidutinę kvadratinę vertę, o R – apkrovos varžą. Signalo $w(t)$ ***vidutinės kvadratinės vertės*** bendrasis apibrėžimas yra šitoks:

$$W_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\langle w^2(t)\rangle}\,. \tag{2.1.5}$$

Signalo vidutinė kvadratinė vertė radioelektronikoje dažnai vadinama ***efektiniu vidurkiu***.

Reikia turėti omenyje, kad vidutinės galios išraiška (2.1.4) galioja tik aktyviajai (ominei) apkrovai, tuo tarpu formulė (2.1.2) yra bendra: ji galioja bet kokio tipo apkrovai ir bet kokio pavidalo signalui.

Kadangi telekomunikacijose signalo ir triukšmo galių santykis yra svarbesnė sistemos charakteristika, negu signalo galia, tai dažnai naudojama normuotos galios sąvoka. Signalo $w(t)$ ***normuotoji galia*** apibrėžiama sąryšiu

$$p(t) = w^2(t), \tag{2.1.6}$$

o vidutinė normuotoji galia lygi

$$P = \langle w^2(t)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} w^2(t)dt\,. \tag{2.1.7}$$

Vadinasi, srovės arba įtampos normuotoji galia – tai to paties didumo srovės arba įtampos galia 1 Ω apkrovoje. Skaičiuojant signalo ir triukšmo galių santykį, varža išsiprastina, todėl normuotųjų galių santykis lygus tikrųjų galių santykiui. Iš (2.1.7) ir (2.1.5) išplaukia, kad kvadratinė šaknis iš vidutinės normuotosios galios sutampa su signalo efektiniu vidurkiu.

Galių santykis išreiškiamas ***decibelais*** (dB). Decibelais išreikštas galių santykis – tai to santykio dešimtainis logaritmas, padaugintas iš 10. Pvz., jeigu grandinės išėjimo vidutinė galia lygi P_{out}, o įėjimo galia lygi P_{in}, tuomet stiprinimo koeficientas lygus $10\cdot\log(P_{\mathrm{out}}/P_{\mathrm{in}})$ dB. Reikia turėti omenyje, kad decibelais praktikoje matuojamas *tik* galių santykis. Pvz., jeigu sakoma, kad dviejų signalų efektinių vidurkių santykis lygus 20 dB, turimas omenyje tų signalų vidutinių galių santykis. Kadangi signalo efektinis vidurkis lygus šakniai iš normuotosios galios (žr. (2.1.7)), tai 20 dB reiškia, kad signalų efektinių vidurkių santykis lygus $\sqrt{100} = 10$.

Pagal galios apibrėžimą, signalo energija lygi galios integralui laiko atžvilgiu nuo -∞ iki +∞. Vadinasi, signalo $w(t)$ ***normuotoji energija*** E lygi

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} w^2(t)dt\,. \tag{2.1.8}$$

Signalų matematinėje analizėje kartais reikia įvertinti ***kompleksinio signalo vidutinę normuotąją galią*** (pvz., žr. 4.3.1 poskyrį). Ši galia apibrėžiama sąryšiu

$$P = \langle | w(t) |^2 \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} | w(t) |^2 \, dt\,. \tag{2.1.9}$$

Palyginus su realiojo signalo vidutinės galios išraiška (2.1.7), matyti, kad, skaičiuojant kompleksinio signalo vidutinę galią, vietoj signalo kvadrato reikia naudoti jo *absoliutinės vertės* kvadratą. Ta pati taisyklė galioja, skaičiuojant ***kompleksinio signalo normuotąją energiją***:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} | w(t) |^2 \, dt \tag{2.1.10}$$

(plg. su (2.1.8)).

Toliau, kalbant apie signalo galią, vidutinę galią arba energiją, visuomet bus turima omenyje normuotoji galia (2.1.6), vidutinė normuotoji galia (2.1.9) arba normuotoji energija (2.1.10). Perėjimo nuo normuotosios galios prie tikrosios galios arba nuo normuotosios energijos prie tikrosios energijos taisyklės išplaukia iš (2.1.4): a) tuo atveju, kai $w(t)$ yra įtampos kritimas varžoje R, normuotąją galią arba energiją reikia padalinti iš R; b) tuo atveju, kai $w(t)$ yra srovė varžoje R, normuotąją galią arba energiją reikia padauginti iš R.

2.2. Furjė transformacija ir spektrai

2.2.1. Pagrindiniai apibrėžimai

Nuo laiko priklausantis signalas $w(t)$ – tai suma įvairių dažnių ir fazių harmoninių signalų (1.1.1). Kiekvieno dažnio santykinį indėlį į pilnąjį signalą nusako ***signalo spektras***. Signalo $w(t)$ spektras apskaičiuojamas ***Furjė transformacijos*** būdu:

$$W(f) = F[w(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} w(t)e^{-j2\pi ft}dt\,, \tag{2.2.1}$$

kur simboliai $F[]$ žymi Furjė transformaciją, j žymi menamąjį vienetą, o f yra parametras, kurio dimensija sutampa su dažnio dimensija [Hz]. Formulė (2.2.1) kartu apibrėžia ir dažnio sąvoką: ***dažnis*** – tai Furjė transformacijos (2.2.1) parametras f. Spektras, kurį apibrėžia (2.2.1) formulė, vadinamas ***dvipusiu spektru***, nes parametras f gali būti ir teigiamas, ir neigiamas.

Toliau, kaip ir iki šiol, laiko funkcijos bus žymimos mažosiomis raidėmis, o dažnio funkcijos, kurios nusako laiko funkcijų spektrus, bus žymimos didžiosiomis raidėmis (pvz., žr. (2.2.1)).

Kadangi dydis $\exp(-j2\pi ft)$ yra kompleksinis, tai bendruoju atveju $W(f)$ yra kompleksinė dažnio funkcija, kurią galima išreikšti tokiu būdu:

$$W(f) = X(f) + jY(f) \tag{2.2.2}$$

(Dekarto forma) arba

$$W(f) = | W(f) | \, e^{j\theta(f)} \tag{2.2.3}$$

(polinė forma), kur

$$|W(f)| = \sqrt{X^2(f) + Y^2(f)} \qquad \text{ir} \qquad \theta(f) = \arctan\frac{Y(f)}{X(f)}. \tag{2.2.4}$$

Dydis $|W(f)|$ vadinamas dažnio f spektro dedamosios ***amplitude***, o dydis $\theta(f)$ – ***faze***. Dažnio funkcija $|W(f)|$ nusako signalo $w(t)$ ***amplitudžių spektrą***, o dažnio funkcija $\theta(f)$ – ***fazių spektrą***. Norint įvertinti įvairių dažnių santykinį indėlį į signalą, pakanka žinoti tik amplitudžių spektrą $|W(f)|$. Pvz., 10 Hz dažnis yra signale (spektre) tada ir tik tada, kai $|W(10)| \neq 0$.

Žinant signalo spektrą, patį signalą galima apskaičiuoti ***atvirkštinės Furjė transformacijos*** būdu:

$$w(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(f) e^{j2\pi ft} df\,. \tag{2.2.5}$$

Taigi, laiko funkcija $w(t)$ ir dažnio funkcija $W(f)$ suteikia vienodą informaciją apie tiriamąjį signalą. Funkcijos $w(t)$ ir $W(f)$, kurios susijusios Furjė transformacija (2.2.1) ir (2.2.5), sudaro ***Furjė porą***. Simboliškai šis teiginys užrašomas šitaip: $w(t) \leftrightarrow W(f)$.

2.2.2. Furjė transformacijos savybės. Signalo energijos spektrinis tankis

Visi praktikoje sutinkami signalai $w(t)$ – tai realios laiko funkcijos. Realiojo signalo ***spektro simetrija*** pasireiškia tuo, kad

$$W(-f) = W^*(f)\,. \tag{2.2.6}$$

Čia ženklas "*" reiškia kompleksiškai jungtinį dydį. Iš (2.2.6) išplaukia, kad amplitudžių spektras yra lyginis, t.y.,

$$|W(-f)| = |W(f)|, \tag{2.2.7}$$

o fazių spektras – nelyginis:

$$\theta(-f) = -\theta(f)\,. \tag{2.2.8}$$

Be to, jeigu signalas $w(t)$ yra lyginis (t.y., $w(t) = w(-t)$), tuomet jo Furjė transformacija $W(f)$ yra realioji funkcija (t.y., $\mathrm{Im}[W(f)] = 0$). Jeigu signalas $w(t)$ yra nelyginis (t.y., $w(t) = -w(-t)$), tuomet jo Furjė transformacija $W(f)$ yra menamoji funkcija (t.y., $\mathrm{Re}[W(f)] = 0$). Tarpiniu atveju, kai $w(t)$ nėra nei lyginė, nei nelyginė funkcija, $W(f)$ yra kompleksinis skaičius, kurio realioji ir menamoji dalys nėra tapačiai lygios nuliui.

Kitą naudingą Furjė transformacijos savybę išreiškia ***Parsevalio teorema***:

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_1(t) w_2^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} W_1(f) W_2^*(f) df\,. \tag{2.2.9}$$

Jeigu $w_1(t) = w_2(t) = w(t)$, iš (2.2.9) išplaukia

$$\int_{-\infty}^{\infty} |w(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |W(f)|^2\, df\,. \tag{2.2.10}$$

Šios lygybės kairioji pusė – tai signalo normuotoji energija (2.1.10). Vadinasi, Parsevalio teorema pateikia alternatyvų signalo energijos skaičiavimo būdą, naudojant signalo amplitudžių spektrą $|W(f)|$ vietoj paties signalo $w(t)$. Iš (2.2.10) išplaukia, kad dydis $|W(f)|^2$ – tai ***energijos spektrinis tankis***:

$$\mathcal{E}(f) = |W(f)|^2, \tag{2.2.11}$$

o signalo normuotoji energija E lygi plotui po energijos spektrinio tankio funkcija $\mathcal{E}(f)$:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(f) df \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |W(f)|^2\, df\,. \tag{2.2.12}$$

Energijos spektrinis tankis matuojamas džauliais į hercą (J/Hz).

Be Parsevalio teoremos, egzistuoja daug kitų teoremų, kurios palengvina Furjė transformacijos skaičiavimą įvairiais atskirais atvejais, pvz., vėlinimo, mastelio pakeitimo, dualumo, diferencijavimo, integravimo ir kitos teoremos. Kai kurios Furjė transformacijų teoremos pateiktos priede, lentelėje B-1. Lentelėje B-2 pateiktos kai kurios Furjė poros.

2.2.3. Dirako δ funkcija ir vienetinė laiptinė funkcija

Viena iš funkcijų, kurios dažnai sutinkamos telekomunikacijos uždaviniuose, yra Dirako δ funkcija. ***Dirako δ funkcija*** apibrėžiama sąryšiu

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x)\delta(x)dx = w(0)\,, \tag{2.2.13}$$

kur $w(x)$ yra bet kokia funkcija, kuri yra tolydi taške $x = 0$. Kintamasis x gali būti laikas arba dažnis, priklausomai nuo konkretaus uždavinio. Kitas Dirako δ funkcijos apibrėžimas yra toks: ***Dirako δ funkcija*** – tai funkcija, kuri tenkina šiuos du sąryšius:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1\,, \tag{2.2.14a}$$

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0; \\ 0, & x \neq 0. \end{cases} \tag{2.2.14b}$$

Iš (2.2.13) išplaukia, kad δ funkcijai yra būdinga "vertės išskyrimo savybė":

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x)\delta(x - x_0)dx = w(x_0)\,, \tag{2.2.15a}$$

t.y., δ funkcija $\delta(x\text{-}x_0)$ "išskiria" funkcijos $w(x)$ vertę $w(x_0)$ iš integralo. Kadangi δ funkcija yra lyginė, tai (2.2.15a) lygybę galima perrašyti šitaip:

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x)\delta(x_0 - x)dx = w(x_0)\,. \tag{2.2.15b}$$

Šios lygybės kairiojoje pusėje esantis integralas – tai funkcijų $w(x)$ ir $\delta(x)$ ***sąsūka***, kurios argumentas yra x_0. Vadinasi, šią δ funkcijos savybę žodžiais galima suformuluoti šitaip: *duotosios funkcijos w(t) ir δ funkcijos sąsūka sutampa su w(t).*

Kai kuriuose uždaviniuose taip pat naudojama δ funkcijos išraiška integralu

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm j2\pi xy}dy\,. \tag{2.2.16}$$

Ši formulė gaunama, apskaičiavus δ funkcijos Furjė transformaciją (naudojantis (2.2.15a)), o po to gautosios lygybės abiem pusėms pritaikius atvirkštinę Furjė transformaciją. δ funkcijos savybė (2.2.16) žodžiais formuluojama šitaip: *δ funkcija – tai vienetinės funkcijos (vieneto) tiesioginė arba atvirkštinė Furjė transformacija*:

$$\delta(f) = F[1]\,, \quad \delta(x) = F^{-1}[1]\,. \tag{2.2.17}$$

Su Dirako δ funkcija susijusi ***vienetinė laiptinė funkcija*** $u(t)$, kuri apibrėžiama šitaip:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases} \tag{2.2.18}$$

Vienetinė laiptinė funkcija ir Dirako δ funkcija susijusios sąryšiu

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\lambda)d\lambda = u(t)\,, \tag{2.2.19}$$

iš kurio išplaukia

$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t). \tag{2.2.20}$$

2.2.4. Sinusoidės spektras

Rasime sinusoidės pavidalo įtampos

$$\upsilon(t) = A\sin\omega_0 t, \qquad \text{kur} \quad \omega_0 = 2\pi f_0, \tag{2.2.21}$$

spektrą. Visų pirma sinusoidę išreikšime kompleksiniu pavidalu:

$$\upsilon(t) = A\sin\omega_0 t = A\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} = \frac{A}{2j}e^{j\omega_0 t} - \frac{A}{2j}e^{-j\omega_0 t}. \tag{2.2.22}$$

Pagal spektro apibrėžimą (2.2.1), sinusoidės spektras lygus

$$V(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} A\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}e^{-j\omega t}dt = \frac{A}{2j}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi(f-f_0)t}dt - \frac{A}{2j}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi(f+f_0)t}dt. \tag{2.2.23}$$

Atsižvelgus į (2.2.16), pastaruosius du integralus galima pakeisti Dirako δ funkcijom:

$$V(f) = j\frac{A}{2}[\delta(f+f_0) - \delta(f-f_0)]. \tag{2.2.24}$$

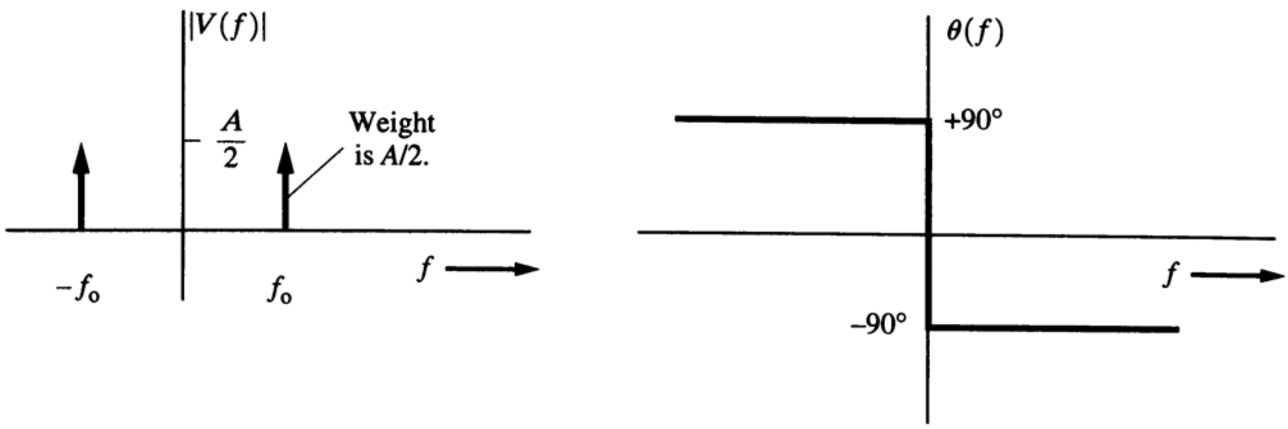
T.y., sinusoidės spektre yra tik du dažniai – teigiamas f_0 ir neigiamas $-f_0$. Atitinkamas amplitudžių spektras yra

$$|V(f)| = \frac{A}{2}\delta(f-f_0) + \frac{A}{2}\delta(f+f_0), \tag{2.2.25}$$

kur A yra teigiamas skaičius. Kadangi spektre yra tik du dažniai ($f = \pm f_0$), tai fazių spektras $\theta(f)$, griežtai kalbant, gali būti apibrėžtas tik šiems dviems dažniams. T.y., $\theta(f)$ yra diskretaus argumento funkcija, kuri apibrėžta tik dviejuose taškuose $f = \pm f_0$: $\theta(f_0) = -90°$, $\theta(-f_0) = 90°$. Tačiau, turint omenyje, kad amplitudžių spektras lygus nuliui visur, išskyrus tuos du taškus, spektras $V(f)$ nepasikeis, jeigu taškuose $f \neq \pm f_0$ fazei $\theta(f)$ bus priskirta bet kokia vertė. Pvz., galima laikyti, kad $\theta(f)$ yra tolydaus argumento funkcija, kuri apibrėžta visoje dažnių tiesėje ($-\infty < f < \infty$) ir kurios vertės lygios

$$\theta(f) = \begin{Bmatrix} -\pi/2, & f > 0 \\ +\pi/2, & f < 0 \end{Bmatrix}\text{rad} = \begin{Bmatrix} -90°, & f > 0 \\ 90°, & f < 0 \end{Bmatrix}. \tag{2.2.26}$$

Sinusoidės amplitudžių spektras ir fazių spektras pavaizduoti 2.2.1 pav. Rodyklės ant spektro linijų nurodo, kad grafike pavaizduotasis linijos ilgis nusako *plotą* po spektro maksimumu (t.y., ***spektro linijos svorį***), o ne maksimumo aukštį, kuris yra begalinis. Akivaizdu, kad amplitudžių spektras yra lyginis, o fazių spektras – nelyginis, kaip ir buvo galima tikėtis (žr. (2.2.7) ir (2.2.8)).



2.2.1 pav. Sinusoidės amplitudžių spektras (a) ir fazių spektras (b).

Aukščiau buvo laikoma, kad sinusoidės pradinė fazė lygi nuliui. Dabar tarkime, kad pradinė fazė θ_0 gali būti bet kokia. T.y., rasime signalo

$$w(t) = A\sin(\omega_0 t + \theta_0) = A\sin[\omega_0 (t + \theta_0 / \omega_0)], \tag{2.2.27}$$

spektrą. Pagal vėlinimo teoremą (žr. B-1 lentelę) ir pagal (2.2.24),

$$W(f) = j\frac{A}{2}e^{j\theta_0 (f/f_0)}[\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)]. \tag{2.2.28}$$

Vadinasi, lyginant su nulinės pradinės fazės atveju (2.2.24), atsirado daugiklis $e^{j\theta_0 (f/f_0)}$. Kadangi šio daugiklio absoliutinė vertė lygi vienetui, tai amplitudžių spektras yra toks pats, kaip ir ankstesniu atveju (žr. (2.2.25)). Fazių spektras lygus ankstesniojo fazių spektro (2.2.26) ir tiesinės dažnio funkcijos $(\theta_0/f_0)f$ sumai. Tačiau, kadangi pilnasis signalo spektras lygus nuliui visuose dažniuose, išskyrus du dažnius $f = \pm f_0$, tai, kaip ir anksčiau, fizikinę prasmę turi tik fazės vertės, atitinkančios tuos du dažnius. Esant dažniui $f = f_0$, fazė yra $\theta_0 - \pi/2$, o esant dažniui $f = -f_0$, fazė yra $-(\theta_0 - \pi/2)$.

Matematiniu požiūriu, dažnio f_0 sinusoidę sudaro du dažniai: $f = +f_0$ ir $f = -f_0$. Tai akivaizdu 2.2.1 pav. Šis teiginys išplaukia iš to, kad sinusoidė $\sin(2\pi f_0 t)$ – tai dviejų eksponentinių funkcijų $e^{j2\pi f_0 t}$ ir $e^{-j2\pi f_0 t}$ tiesinys darinys (2.2.22). Tačiau praktikoje dažnai sakoma, kad sinusoidę sudaro *vienas* teigiamas dažnis $f = f_0$. Dėl tokios terminologijos nekyla nesusipratimų, nes realiųjų signalų spektro simetrijos savybė (2.2.6) rodo, kad bet kurį teigiamąjį dažnį spektre *visuomet* atitinka priešingas dažnis.

2.2.1 pav. akivaizdu, kad sinusoidės spektras sudarytas iš atskirų *linijų* (t.y., iš Dirako δ funkcijų). 2.5.5 poskyryje bus įrodyta, kad toks spektro pavidalas yra signalo periodiškumo pasekmė. Jeigu sinusoidė yra baigtinės trukmės (t.y., turi pradžią ir pabaigą), tuomet signalas jau nėra periodinis, todėl spektras yra ištisinis. Tačiau jame galima išskirti du ryškius maksimumus ties dažniais $f = \pm f_0$. Kuo ilgesnė sinusoidės trukmė, tuo šie du maksimumai yra siauresni ir tuo panašesnis spektras į idealios sinusoidės spektrą.

2.2.5. Stačiakampio ir trikampio impulsų spektrai

Be sinusoidės, telekomunikacijos uždaviniuose dažnai sutinkami dar kelių tipų signalai, pvz., stačiakampis impulsas, trikampis impulsas, funkcija $\sin x/x$. Šios funkcijos nurodomos specialiais žymėjimais:

- Funkcija $\Pi(t/T)$ – tai vienas T trukmės stačiakampis impulsas:

$$\Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1, & |t| \le \dfrac{T}{2}; \\ 0, & |t| > \dfrac{T}{2}. \end{cases} \tag{2.2.29}$$

- Žymėjimas $\mathrm{Sa}(x)$ reiškia funkciją $(\sin x)/x$:

$$\mathrm{Sa}(x) = \frac{\sin x}{x}. \tag{2.2.30}$$

- Funkcija $\Lambda(t/T)$ – tai vienas $2T$ trukmės trikampis impulsas:

$$\Lambda\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|t|}{T}, & |t| \le T; \\ 0, & |t| > T. \end{cases} \tag{2.2.31}$$

Šios funkcijos pavaizduotos 2.2.2 pav. kairiojoje pusėje.

Stačiakampio ir trikampio impulsų spektrai išreiškiami funkcija $\mathrm{Sa}(x)$:

$$\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow T\,\mathrm{Sa}(\pi Tf) \equiv T\frac{\sin(\pi Tf)}{\pi Tf} = \frac{\sin(\pi Tf)}{\pi f}, \tag{2.2.32}$$

$$2W\,\mathrm{Sa}(2\pi Wt) \leftrightarrow \Pi\left(-\frac{f}{2W}\right) = \Pi\left(\frac{f}{2W}\right), \tag{2.2.33}$$

$$\Lambda\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow T\,\mathrm{Sa}^2(\pi Tf) \equiv T\frac{\sin^2(\pi Tf)}{\pi^2T^2f^2} = \frac{\sin^2(\pi Tf)}{\pi^2Tf^2}. \tag{2.2.34}$$

Šie spektrai pavaizduoti 2.2.2 pav. dešiniojoje pusėje. Šie spektrai yra realūs, nes funkcijos (2.2.29) ÷ (2.2.31) yra lyginės (žr. 2.2.2 poskyrį). Jeigu impulso centras pasislinkęs atžvilgiu koordinačių pradžios $t = 0$, tuomet spektras yra kompleksinis. Pvz., tarkime, kad $\upsilon(t)$ yra stačiakampis impulsas, kurio priekinis frontas yra taške $t = 0$, o plotis lygus T (t.y., impulso centras yra taške $t = T/2$):

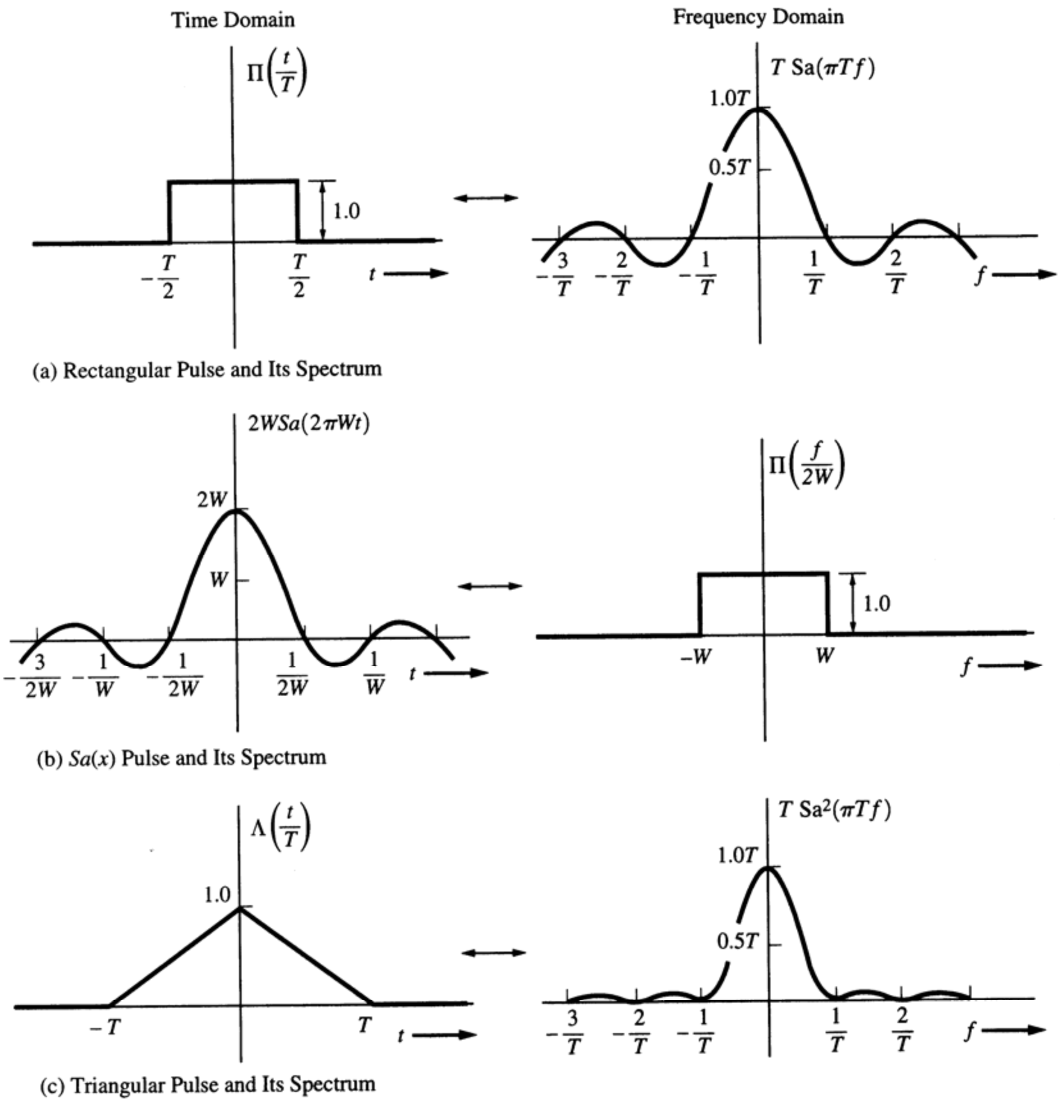
$$\upsilon(t) = \left.\begin{cases} 1, & 0 < t < T \\ 0, & t \le 0 \text{ arba } t \ge T \end{cases}\right\} = \Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right). \tag{2.2.35}$$

Pasinaudoję "centruotojo" impulso Furjė transformacija (2.2.32) ir vėlinimo teorema (žr. B-1 lentelę), randame

$$V(f) = Te^{-j\pi fT}\,\mathrm{Sa}(\pi Tf). \tag{2.2.36}$$

Vadinasi, T trukmės vienetinės amplitudės stačiakampio impulso amplitudžių spektras yra

$$|V(f)| = T\,|\mathrm{Sa}(\pi Tf)| = \left|\frac{\sin(\pi Tf)}{\pi f}\right|. \tag{2.2.37}$$



2.2.2 pav. Stačiakampis, (sin$x$)/x ir trikampis impulsai ir jų spektrai.

2.3. Galios spektrinis tankis ir autokoreliacijos funkcija

2.3.1. Galios spektrinis tankis

2.2.2 poskyryje buvo apibrėžtas energijos spektrinis tankis $\mathcal{E}(f)$ (2.2.11). Signalų teorinėje analizėje realieji (baigtinės trukmės) signalai dažnai pakeičiami begalinės trukmės periodiniais signalais (pvz., harmoninis signalas (1.1.1)). Tokio signalo energija (2.1.10) arba (2.2.12) yra begalinė. Todėl tokį signalą patogiau aprašyti ne energijos spektrinio tankio funkcija, o galios spektrinio tankio funkcija. Galios spektrinio tankio apibrėžimas analogiškas energijos spektrinio tankio apibrėžimui: bendroji vidutinės galios išraiška (2.1.9) perrašoma, remiantis Parsevalio teorema (2.2.10). Tačiau šiuo atveju integravimo rėžiai nėra begaliniai, o yra susiję su daugikliu prieš integralą ($1/T$), todėl tiesiogiai Parsevalio teoremos pritaikyti neįmanoma. Dėl šios priežasties tiriamąjį signalą $w(t)$ reikia pakeisti pagalbine laiko funkcija $w_T(t)$, kuri sutampa su tiriamuoju signalu intervale $-T/2 < t < T/2$ ir lygi nuliui už šio intervalo ribų:

$$w_T(t) = \begin{cases} w(t), & \text{kai} \quad -T/2 < t < T/2; \\ 0, & \text{kai} \quad t < -T/2 \quad \text{arba} \quad t > T/2. \end{cases} \tag{2.3.1}$$

Dabar integravimo rėžius jau galima laikyti begaliniais:

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |\, w_T(t)\,|^2 \, dt \,. \tag{2.3.2}$$

Pritaikę Parsevalio teoremą (2.2.10) šiam integralui, randame

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |\, W_T(f)\,|^2 \, df = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\lim_{T\to\infty} \frac{|\, W_T(f)\,|^2}{T} \right) df \,. \tag{2.3.3}$$

Čia $W_T(f)$ yra pagalbinės funkcijos $w_T(t)$ Furjė transformacija. Iš (2.3.3) išplaukia, kad ***galios spektrinis tankis*** lygus

$$P_w(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{|\, W_T(f)\,|^2}{T} \,. \tag{2.3.4}$$

Naudojant galios spektrinį tankį, signalo vidutinė galia lygi

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} P_w(f) df \,. \tag{2.3.5}$$

Galios spektrinis tankis matuojamas vatais į hercą (normuotosios galios spektrinis tankis matuojamas V^2/Hz arba A^2/Hz).

Kadangi $|W_T(f)|$ yra realioji dažnio funkcija, iš (2.3.4) išplaukia, kad $P_w(f)$ taip pat yra realioji funkcija:

$$P_w^*(f) = P_w(f) \,. \tag{2.3.6}$$

(2.3.1) ÷ (2.3.6) formulės galioja bendruoju kompleksinio signalo $w(t)$ atveju. Jeigu $w(t)$ yra *realusis* signalas, tuomet $|W_T(f)|$ yra lyginė dažnio funkcija (žr. (2.2.7)), todėl iš (2.3.4) išplaukia, kad $P_w(f)$ taip pat yra lyginė funkcija:

$$P_w(-f) = P_w(f). \tag{2.3.7}$$

2.3.2. Autokoreliacijos funkcija

Su galios spektriniu tankiu P_w susijusi signalo ***autokoreliacijos funkcija*** $R_w(\tau)$, kuri apibrėžiama šitaip:

$$R_w(\tau) = \langle w^*(t)w(t+\tau)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} w^*(t)w(t+\tau)dt\,. \tag{2.3.8}$$

Iš (2.3.8) išplaukia, kad kompleksinio signalo autokoreliacijos funkcijai yra būdinga ši ***laikinės simetrijos*** savybė:

$$R_w(-\tau) = R_w^*(\tau)\,. \tag{2.3.9}$$

Realiojo signalo atveju jo autokoreliacijos funkcija (2.3.8) yra realioji laiko funkcija, todėl (2.3.9) virsta teiginiu, kad realiojo signalo autokoreliacijos funkcija yra lyginė.

Galios spektrinis tankis ir autokoreliacijos funkcija sudaro Furjė porą:

$$R_w(\tau) \leftrightarrow P_w(f)\,, \tag{2.3.10}$$

t.y., $P_w(f)$ yra autokoreliacijos funkcijos Furjė transformacija. Šis teiginys vadinamas ***Vinerio ir Chinčino teorema*** (*Wiener-Khintchine theorem*).

Taigi, galios spektrinis tankis gali būti apskaičiuotas vienu iš šių dviejų būdų:

1) tiesiogiai – pagal apibrėžimą (2.3.4);
2) netiesiogiai – visų pirma apskaičiavus autokoreliacijos funkciją (2.3.8), o po to apskaičiavus jos Furjė transformaciją (šis skaičiavimo būdas dažniausiai yra paprastesnis už tiesioginį).

Tuo tarpu signalo $w(t)$ vidutinę normuotąją galią galima apskaičiuoti keturiais būdais:

$$P = \langle w^2(t)\rangle = W_{\mathrm{rms}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} P_w(f)df = R_w(0)\,. \tag{2.3.11}$$

2.3.1. Sinusoidės galios spektrinis tankis

Tarkime, kad signalas yra tokio pavidalo:

$$w(t) = A\sin\omega_0 t\,. \tag{2.3.12}$$

Rasime šio signalo galios spektrinį tankį netiesioginiu metodu. T.y., visų pirma apskaičiuosime autokoreliacijos funkciją (2.3.8), o po to pasinaudosime sąryšiu (2.3.10). Autokoreliacijos funkcija yra

$$R_w(\tau) = \langle w(t)w(t+\tau)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A^2\sin\omega_0 t\sin\omega_0(t+\tau)dt\,.$$

Pasinaudoję trigonometrine tapatybe $\sin x\sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]$, randame

$$R_w(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos\omega_0\tau\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}dt - \frac{A^2}{2}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\cos(2\omega_0 t+\omega_0\tau)dt\,.$$

Pirmoji riba lygi 1, o antroji – 0. Vadinasi, sinusoidės (2.3.12) autokoreliacijos funkcija yra

$$R_w(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos\omega_0\tau\,. \tag{2.3.13}$$

Signalo (2.3.12) galios spektrinis tankis $P_w(f)$ yra šios funkcijos Furjė transformacija. Pasinaudoję tapatybe $\cos\omega_0\tau = \sin(\omega_0\tau+\pi/2)$ ir anksčiau gauta sinusoidės (2.2.27) Furjė transformacijos išraiška (2.2.28), randame

$$P_w(f) = \frac{A^2}{4}[\delta(f+f_0)+\delta(f-f_0)]\,. \tag{2.3.14}$$

Taigi, kaip ir reikėjo tikėtis, sinusoidės galios spektrinio tankio priklausomybė nuo dažnio savo pavidalu yra panaši į sinusoidės amplitudžių spektrą (žr. (2.2.25) ir 2.2.1a pav.): ji sudaryta iš dviejų linijų ties dažniais $f = \pm f_0$.

Žinant galios spektrinį tankį, sinusoidės vidutinę normuotąją galią galima apskaičiuoti pagal (2.3.5):

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A^2}{4}[\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)]df = \frac{A^2}{2}. \tag{2.3.15}$$

Ši vertė atitinka žinomą teiginį, kad sinusoidės (2.3.12) efektinis vidurkis lygus $A/\sqrt{2}$:

$$P = \langle w^2(t) \rangle = W_{\text{rms}}^2 = (A/\sqrt{2})^2 = A^2/2. \tag{2.3.16}$$

2.4. Signalų išraiška ortogonaliosiomis eilutėmis

Iki šiol buvo kalbama tik apie signalo transformacijas bei jo parametrus – spektrą, vidutinę galią, efektinį vidurkį – tačiau nebuvo kalbama apie paties signalo (laiko funkcijos) $w(t)$ pavidalą. Telekomunikacijos uždaviniuose svarbią reikšmę turi signalo išraiška ortogonaliosiomis eilutėmis. ***Ortogonalioji eilutė*** – tai laiko funkcijos skleidinys ortogonaliosiomis funkcijomis.

2.4.1. Ortogonaliosios funkcijos. Ortogonaliosios kompleksinės eksponentinės funkcijos

Funkcijos $\varphi_n(t)$ ir $\varphi_m(t)$ vadinamos tarpusavyje ***ortogonaliomis intervale*** $a < t < b$, jeigu jos tenkina sąlygą

$$\int_a^b \varphi_n(t)\varphi_m^*(t)dt = \begin{Bmatrix} 0, & n \neq m \\ K_n, & n = m \end{Bmatrix} = K_n\delta_{nm}, \tag{2.4.1}$$

kur δ_{nm} yra ***Kronekerio δ funkcija***, kuri apibrėžiama šitaip:

$$\delta_{nm} = \begin{Bmatrix} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{Bmatrix}. \tag{2.4.2}$$

Jeigu visos konstantos K_n yra lygios vienetui, tuomet funkcijos $\varphi_n(t)$ vadinamos ***ortonormuotomis funkcijomis***. Jeigu funkcijos $\varphi_n(t)$ yra ortogonalios, tuomet jas galima padaryti ortonormuotomis, padauginus iš $1/\sqrt{K_n}$. Šie daugikliai vadinami ***normavimo konstantom***.

Pvz., kompleksinės eksponentinės funkcijos $\varphi_n(t) = e^{jn\omega_0 t}$ $(n = 0,\ \pm1, \pm2,\ldots)$ yra tarpusavyje ortogonalios intervale $a < t < b$, kur $b = a + T_0$, $T_0 = 1/f_0$, $\omega_0 = 2\pi f_0$. Tuo lengva įsitikinti, įrašius šių funkcijų išraiškas į integralą (2.4.1):

$$\int_a^b \varphi_n(t)\varphi_m^*(t)dt = \int_a^{a+T_0} e^{jn\omega_0 t}e^{-jm\omega_0 t}dt = \int_a^{a+T_0} e^{j(n-m)\omega_0 t}dt = \begin{Bmatrix} \dfrac{e^{j(n-m)\omega_0 a}[e^{j(n-m)2\pi} - 1]}{j(n-m)\omega_0}, & m \neq n \\ \displaystyle\int_a^{a+T_0} 1dt, & m = n \end{Bmatrix} = T_0\delta_{nm}. \tag{2.4.3}$$

Kadangi T_0 bendruoju atveju nelygus vienetui, tai šios funkcijos $\varphi_n(t)$ nėra ortonormuotos. Ortonormuotosios kompleksinės eksponentinės funkcijos gaunamos, padauginus senąsias funkcijas iš $1/\sqrt{T_0}$:

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{T_0}}e^{jn\omega_0 t}. \tag{2.4.4}$$

2.4.2. Ortogonaliosios eilutės

Tarkime, kad $w(t)$ nusako kažkokį signalą arba triukšmą, kurį mes norime išreikšti matematiniu pavidalu intervale $a < t < b$. Tokiu atveju galima pasinaudoti šia teorema: funkciją $w(t)$ intervale $a < t < b$ galima išreikšti ortogonalių tame intervale funkcijų eilute

$$w(t) = \sum_n a_n\varphi_n(t), \tag{2.4.5}$$

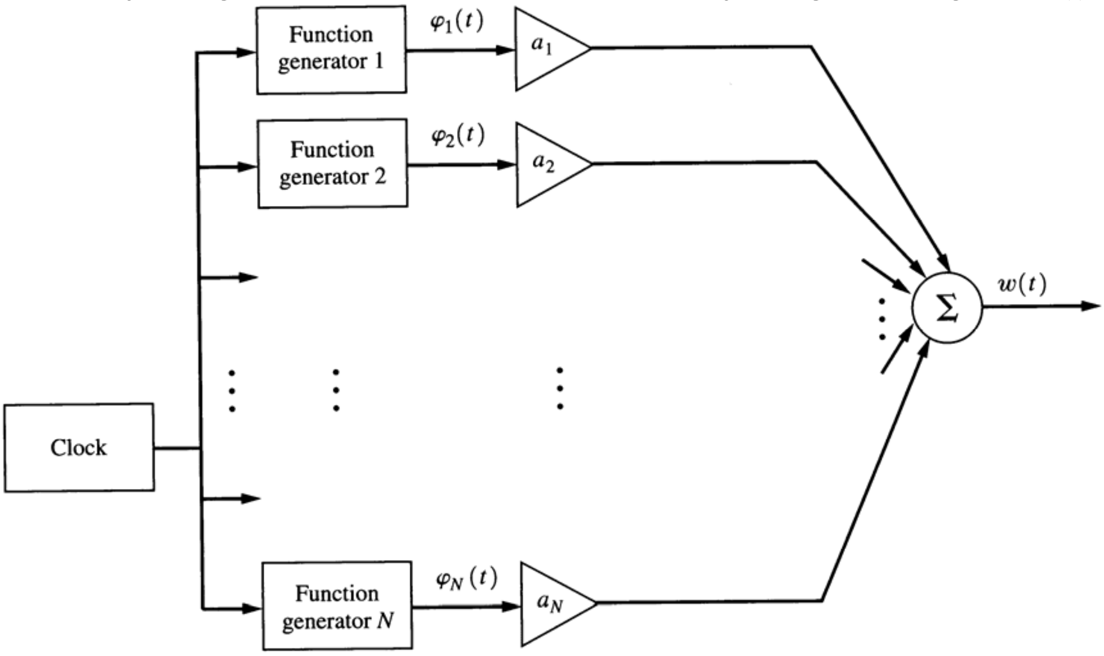
kurios koeficientai apibrėžiami šitaip:

$$a_n = \frac{1}{K_n} \int_a^b w(t) \varphi_n^*(t) dt, \qquad (2.4.6)$$

o sumavimo indeksas n įgyja visas įmanomas vertes, kurios įeina į ortogonaliųjų funkcijų $\varphi_n(t)$ žymėjimus. (2.4.5) eilutės koeficientai a_n vadinami ***ortogonaliaisiais koeficientais***, o ortogonaliosios funkcijos $\varphi_n(t)$ vadinamos ***eilutės bazinėmis funkcijomis***.

Norint (2.4.5) pavidalu išreikšti *bet kokį* fizikinį signalą ("fizikinio signalo" sąvoka tiksliai apibrėžta 2.7 poskyryje), funkcijų rinkinys $\{\varphi_n(t)\}$ turi būti ***pilnasis ortogonaliųjų funkcijų rinkinys***. Tai reiškia, kad bet kokią funkciją galima aproksimuoti ortogonaliąja eilute (2.4.5) *su kiek norima maža paklaida*. Paklaida yra tuo mažesnė, kuo daugiau ortogonaliųjų funkcijų įtraukiama į (2.4.5) skleidinį. Aukščiau minėtasis kompleksinių eksponentinių funkcijų rinkinys yra pilnas. Kitas pilnojo rinkinio pavyzdys yra realiųjų harmoninių funkcijų rinkinys (žr. 2.5.2 poskyrį).

Praktikoje (2.4.5) eilutę galima panaudoti, atkuriant signalą $w(t)$ pagal žinomas koeficientų a_n vertes, kai yra žinomos ortogonaliosios funkcijos $\varphi_n(t)$. Šį procesą, kai koeficientai a_n ir funkcijos $\varphi_n(t)$ yra realūs, iliustruoja 2.4.1 pav. Čia panaudojami sinchronizuoti ortogonaliųjų funkcijų generatoriai, kurių išėjimuose yra stiprintuvai. Visų stiprintuvų išėjimo signalai sudedami – tokiu būdu suformuojamas galutinis signalas $w(t)$.



2.4.1 pav. Signalo sintezė, naudojant ortogonaliųjų funkcijų generatorius.

2.5. Furjė eilutės

Furjė eilutė –tai ortogonalioji eilutė, kurios bazinės funkcijos yra kompleksinės eksponentinės funkcijos arba sinusoidės.

2.5.1. Kompleksinė Furjė eilutė

Kompleksinėje Furjė eilutėje naudojamos kompleksinės eksponentinės funkcijos

$$\varphi_n(t) = e^{jn\omega_0 t} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \qquad (2.5.1)$$

kur $\omega_0 = 2\pi/T_0$, o $T_0 = b - a$ yra tiriamojo laiko intervalo plotis. Pritaikę ortogonaliosios eilutės matematinį apibrėžimą (2.4.5) ÷ (2.4.6) šiam ortogonaliųjų funkcijų rinkiniui, randame, kad bet kurį fizikinį signalą intervale $a < t < a + T_0$ galima išreikšti kompleksine Furjė eilute

$$w(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}, \tag{2.5.2}$$

kurios koeficientai (atsižvelgus į normavimo konstantos išraišką: žr. (2.4.4)) yra

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_a^{a+T_0} w(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \tag{2.5.3}$$

o $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi/T_0$. Koeficientai c_n vadinami ***Furjė koeficientais***.

Funkcijos $\varphi_n(t)$ yra periodinės ir jų visų periodai turi bendrą kartotinį T_0. Vadinasi, kompleksinė Furjė eilutė (2.5.2) yra periodinė funkcija, kurios periodas lygus T_0. Todėl, jeigu signalas $w(t)$ yra periodinis ir jo periodas sutampa su parametru T_0, kuris įeina į kompleksinės Furjė eilutės apibrėžimą (2.5.1) ÷ (2.5.3), tuomet formulė (2.5.2) galioja visiems laiko momentams (t.y., intervale $-\infty < t < \infty$). Vadinasi, *kad periodinio signalo išraiška Furjė eilute (2.5.2) galiotų visais laiko momentais, Furjė eilutės parametras T_0 turi sutapti su signalo periodu*. Tokiu atveju parametro a, kuris įeina į eilutės koeficientų apibrėžimą (2.5.3), vertė gali būti bet kokia. Dažniausiai laikoma, kad $a = 0$ arba $a = -T_0/2$. Periodinės funkcijos, kurios periodas T_0, dažnis $f_0 = 1/T_0$ vadinamas ***pagrindiniu dažniu***, o n-tosios ortogonaliosios funkcijos (2.5.1) dažnis nf_0 vadinamas ***n-tosios harmonikos dažniu***. Pati kompleksinė eksponentinė funkcija $\varphi_n(t)$ (2.5.1) tokiu atveju vadinama ***n-tąja harmonika***. Koeficientas c_0 nusako signalo nuolatinę dedamąją.

Koeficientai c_n bendruoju atveju yra kompleksiniai skaičiai.

Kompleksinių Furjė eilučių kai kurios savybės pateiktos žemiau.

1. Jeigu $w(t)$ yra realioji funkcija,
$$c_n = c_{-n}^*. \tag{2.5.4}$$
2. Jeigu $w(t)$ yra realioji lyginė funkcija (t.y., $w(t) = w(-t)$), tuomet kompleksinės Furjė eilutės koeficientai yra realieji skaičiai, t.y.,
$$\mathrm{Im}[c_n] = 0. \tag{2.5.5}$$
3. Jeigu $w(t)$ yra realioji nelyginė funkcija (t.y., $w(t) = -w(-t)$), tuomet kompleksinės Furjė eilutės koeficientai yra menamieji skaičiai, t.y.,
$$\mathrm{Re}[c_n] = 0. \tag{2.5.6}$$
4. Jeigu $w(t)$ yra periodinis signalas, tuomet jo vidutinė normuotoji galia (žr. (2.1.7)) lygi
$$P \equiv \langle w^2(t) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} |c_n|^2, \tag{2.5.7}$$
kur c_n yra kompleksinės Furjė eilutės koeficientai.

2.5.2. Kvadratūrinė Furjė eilutė

Iš (2.5.4) savybės išplaukia, kad kompleksinėje Furjė eilutėje (2.5.2) dėmenys su priešingais indeksais n yra kompleksiškai jungtiniai. Vadinasi, jų suma yra realioji laiko funkcija, kurios pavidalas priklauso tik nuo n absoliutinės vertės. Šią funkciją galima išreikšti vienodo dažnio ir nulinės pradinės fazės sinusoidės ir kosinusoidės suma. Tokiu būdu gaunama ***kvadratūrinė Furjė eilutė***. Šioje eilutėje ortogonaliosios funkcijos yra

$$\begin{Bmatrix} \sin n\omega_0 t \\ \cos n\omega_0 t \end{Bmatrix} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots), \tag{2.5.8}$$

kur $\omega_0 = 2\pi/T_0$, o $T_0 = b - a$ yra tiriamojo laiko intervalo plotis. Taigi, šiuo atveju eilutėje nelieka dėmenų su neigiamais indeksais, tačiau kiekvieną indekso n reikšmę (išskyrus $n = 0$) atitinka dvi ortogonaliosios funkcijos. Tuo pačiu metodu, kaip ir kompleksinės Furjė eilutės atveju, randame šitokią kvadratūrinės Furjė eilutės išraišką:

$$w(t) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n \sin n\omega_0 t, \tag{2.5.9}$$

kur

$$a = \begin{cases} \dfrac{1}{T_0} \displaystyle\int_a^{a+T_0} w(t)dt, & n = 0; \\ \dfrac{2}{T_0} \displaystyle\int_a^{a+T_0} w(t)\cos(n\omega_0 t)dt, & n \geq 1 \end{cases} \tag{2.5.10}$$

ir

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_a^{a+T_0} w(t)\sin(n\omega_0 t)dt, \quad n > 0. \tag{2.5.11}$$

Kaip ir kompleksinė Furjė eilutė (2.5.2), kvadratūrinė Furjė eilutė (2.5.9) yra periodinė funkcija, kurios periodas T_0. Todėl tuo atveju, kai signalas $w(t)$ yra periodinė funkcija, kurios periodas T_0, lygybė (2.5.9) galioja visais laiko momentais.

Kvadratūrinės Furjė eilutės (2.5.9) koeficientai a_n ir b_n susiję su kompleksinės Furjė eilutės (2.5.2) koeficientais c_n tokiu sąryšiu:

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n - j\frac{1}{2}b_n, & n > 0; \\ a_0, & n = 0; \\ \frac{1}{2}a_{-n} + j\frac{1}{2}b_{-n}, & n < 0. \end{cases} \tag{2.5.12}$$

Atvirkštinės formulės yra

$$a_n = \begin{cases} c_0, & n = 0 \\ 2\,\mathrm{Re}[c_n], & n \geq 1 \end{cases} \tag{2.5.13}$$

ir

$$b_n = -2\,\mathrm{Im}[c_n], \qquad n \geq 1. \tag{2.5.14}$$

2.5.3. Polinė Furjė eilutė

Polinė Furjė eilutė gaunama, apjungus kvadratūrinėje Furjė eilutėje (2.5.9) sinusoidės ir kosinusoidės pavidalo dėmenis su vienodu indeksu n į vieną dėmenį:

$$w(t) = D_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} D_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n), \tag{2.5.15}$$

Kompleksinės Furjė eilutės (2.5.2) koeficientų išraiška polinės Furjė eilutės (2.5.15) koeficientais:

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}D_n e^{i\varphi_n}, & n > 0; \\ D_0, & n = 0; \\ \frac{1}{2}D_{-n} e^{-i\varphi_{-n}}, & n < 0. \end{cases} \tag{2.5.16}$$

Kvadratūrinės Furjė eilutės (2.5.9) koeficientų išraiška polinės Furjė eilutės (2.5.15) koeficientais:

$$a_n = \begin{cases} D_0, & n = 0; \\ D_n \cos\varphi_n, & n \geq 1; \end{cases} \tag{2.5.17}$$

$$b_n = -D_n \sin\varphi_n, \quad n \geq 1. \tag{2.5.18}$$

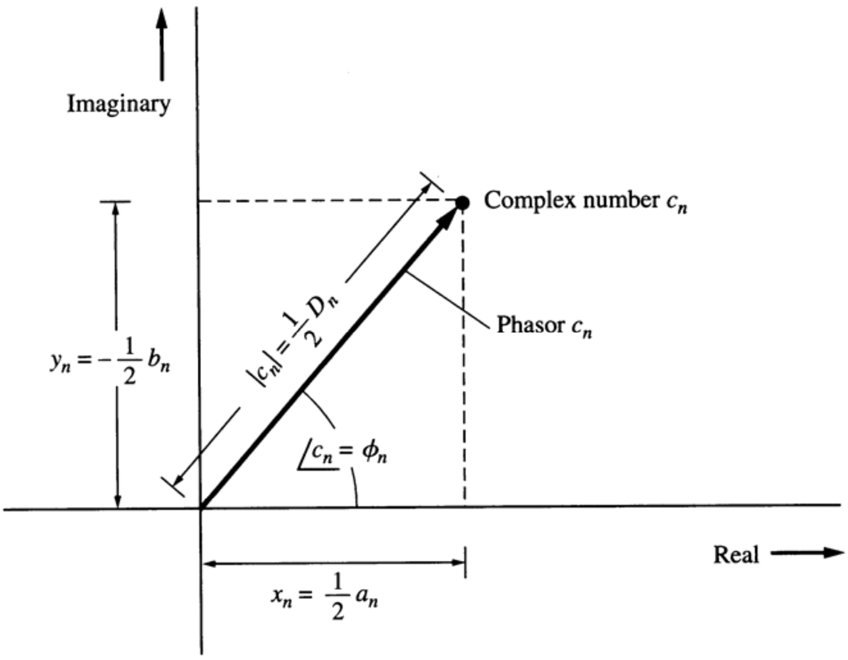
Polinės Furjė eilutės (2.5.15) koeficientų išraiška kvadratūrinės bei kompleksinės Furjė eilučių koeficientais:

$$D_n = \begin{Bmatrix} a_0, & n = 0 \\ \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, & n \geq 1 \end{Bmatrix} = \begin{cases} c_0, & n = 0; \\ 2\,|\,c_n\,|, & n \geq 1; \end{cases} \tag{2.5.19}$$

$$\varphi_n = -\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}[c_n]}{\mathrm{Re}[c_n]}\right). \tag{2.5.20}$$

2.5.4. Įvairių rūšių Furjė eilučių tapatumas. Signalų aproksimavimas baigtinėm Furjė eilutėm

Visų trijų minėtųjų Furjė eilučių tipų koeficientų tapatumą iliustruoja 2.5.1 pav. Kaip matome, kvadratūrinės Furjė eilutės koeficientai a_n ir b_n nusako kompleksinių skaičių c_n realiąją ir menamąją dalis, o polinės Furjė eilutės koeficientai D_n ir φ_n nusako tų pačių kompleksinių skaičių absoliutines vertes ir kampus. Taigi, kompleksinė Furjė eilutė atitinka harmonikų užrašymą kompleksinių amplitudžių metodu, kvadratūrinė Furjė eilutė atitinka harmonikų kompleksinių amplitudžių c_n užrašymą stačiakampėje Dekarto koordinačių sistemoje, o polinė Furjė eilutė atitinka harmonikų kompleksinių amplitudžių c_n užrašymą polinėje koordinačių sistemoje.



2.5.1 pav. Ryšys tarp skirtingų rūšių Furjė eilučių koeficientų.

Praktikoje, išreiškiant signalus Furjė eilutėmis, naudojamas baigtinis dėmenų (harmonikų) skaičius. Pvz., stačiakampių impulsų bangą pakankamu tikslumu galima aproksimuoti 10 harmonikų. Svarbi tokios baigtinės eilutės savybė yra ta, kad jos koeficientų optimalios vertės sutampa su begalinės eilutės atitinkamų koeficientų vertėm.

Nors kompleksinė, kvadratūrinė ir polinė Furjė eilutės yra matematiškai ekvivalenčios, tačiau, sprendžiant skirtingus praktinius uždavinius, gali būti patogiau naudoti skirtingas Furjė eilutes. Pvz., jeigu uždavinys sprendžiamas analiziškai, patogiau operuoti kompleksiniais koeficientais. Jeigu signalas matuojamas laboratorijoje, tuomet polinė forma dažniausiai yra patogiausia, nes matavimo prietaisai dažniausiai matuoja amplitudę ir fazę. Praktikoje signalo spektras dažnai sudaromas tokiu būdu: išmatuojamos polinės Furjė eilutės amplitudės D_n ($n \geq 0$), o po to virš dažnių tiesės ties atitinkamais dažniais $f = nf_0$ nubraižomos vertikalios linijos, kurių aukštis proporcingas D_n. Toks spektras vadinamas ***vienpusiu spektru***, nes jame yra tik teigiami dažniai. Tačiau reikia turėti omenyje, kad tikrasis spektras – tai Furjė transformacija (2.2.1), kuri yra apibrėžta visoje dažnių tiesėje $-\infty < f < \infty$. T.y., spektrą tiksliausiai nusako kompleksinės Furjė eilutės koeficientai. Teorema, kuri tiksliai išreiškia pastarąjį teiginį, pateikta žemiau.

2.5.5. Periodinio signalo spektras

Jeigu signalas $w(t)$ yra periodinis, o jo periodas lygus T_0, tuomet signalo spektras lygus

$$W(f) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n \delta(f - nf_0), \tag{2.5.21}$$

kur $f_0 = 1/T_0$, o c_n yra signalo kompleksinės Furjė eilutės (2.5.2) koeficientai. Ši teorema įrodoma, apskaičiavus kompleksinės Furjė eilutės (2.5.2) Furjė transformaciją (2.2.1) ir pasinaudojus δ funkcijos integraline išraiška (2.2.16).

Taigi, periodinės funkcijos spektras visuomet yra sudarytas iš atskirų linijų. Šią periodinių funkcijų savybę iliustruoja, pvz., sinusoidės spektras (2.2.24) (t.p. žr. 2.2.1a pav.): šiuo atveju $c_1 = -jA/2$, $c_{-1} = jA/2$, o visi kiti koeficientai c_n lygūs nuliui. Be to, kadangi $c_0 = 0$ (nėra linijos ties $f = 0$), tai sinusoidės atveju nėra nuolatinės dedamosios.

Iš (2.5.21) išplaukia, kad periodinio signalo spektrą (Furjė transformaciją) pilnai nusako signalo Furjė koeficientai c_n ir periodas T_0. Periodinio signalo Furjė koeficientus galima apskaičiuoti tokiu būdu. Periodinį signalą $w(t)$, kurio periodas T_0, galima išreikšti begaline suma neperiodinių funkcijų, kurios apibrėžia signalą nepersiklojančiuose T_0 pločio intervaluose:

$$w(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} h(t - nT_0), \tag{2.5.22}$$

kur

$$h(t) \equiv \begin{cases} w(t), & |t| < \dfrac{T_0}{2}; \\ 0, & |t| \geq \dfrac{T_0}{2}. \end{cases} \tag{2.5.23}$$

T.y., funkcija $h(t)$ nusako $w(t)$ kitimą vieno periodo metu. Todėl periodinio signalo Furjė koeficientus c_n galima apskaičiuoti, remiantis funkcijos h spektru $H(f)$. Išvesime formulę, kuri sieja c_n ir $H(f)$. Kadangi bet kurią funkciją galima pakeisti tos funkcijos ir δ funkcijos sąsūka (žr. (2.2.15b)), tai signalą (2.5.22) galima užrašyti šitaip:

$$w(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t) * \delta(t - nT_0) = h(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0), \tag{2.5.24}$$

kur ženklas "*"žymi dviejų funkcijų sąsūkos operaciją. (2.5.24) lygybės dešiniojoje pusėje esanti δ funkcijų suma yra periodinė funkcija, kurios periodas lygus T_0. Vadinasi, šią sumą galima išreikšti Furjė eilute (2.5.2) visoje laiko ašyje (žr. 2.5.1 poskyrį). Šios eilutės koeficientai c_n skaičiuojami pagal (2.5.3) formulę, kurioje apatinio integravimo rėžio a vertė gali būti bet kokia. Apskaičiavę šį integralą, gauname kad $c_n = 1/T_0 \equiv f_0$. Vadinasi,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0 e^{jn2\pi f_0 t}, \tag{2.5.25}$$

Lygybė (2.5.25) vadinama ***Puasono sumos formule***. Įrašę (2.5.25) į periodinio signalo išraišką (2.5.24), gauname:

$$w(t) = h(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0 e^{jn\omega_0 t}. \tag{2.5.26}$$

Šio signalo Furjė transformaciją nesunku apskaičiuoti, pasinaudojus tuo, kad dviejų funkcijų sąsūkos Furjė transformacija lygi jų spektrų sandaugai (žr. B-1 lentelę). Tokiu būdu gauname

$$W(f) = H(f)\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0\delta(f - nf_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}[f_0H(nf_0)]\delta(f - nf_0). \tag{2.5.27}$$

Palyginus (2.5.27) ir (2.5.21), randamas koeficientų c_n ir vieno periodo Furjė transformacijos $H(f)$ sąryšis:

$$c_n = f_0H(nf_0) = \frac{H(n/T_0)}{T_0}, \tag{2.5.28}$$

kur $f_0 = 1/T_0$.

Pagal vėlinimo teoremą (žr. B-1 lentelę), vieno periodo Furjė transformacija $H(f)$ nepriklauso nuo funkcijos $h(t)$ apibrėžimo intervalo padėties laiko ašyje, o priklauso tik nuo jo pločio T_0.

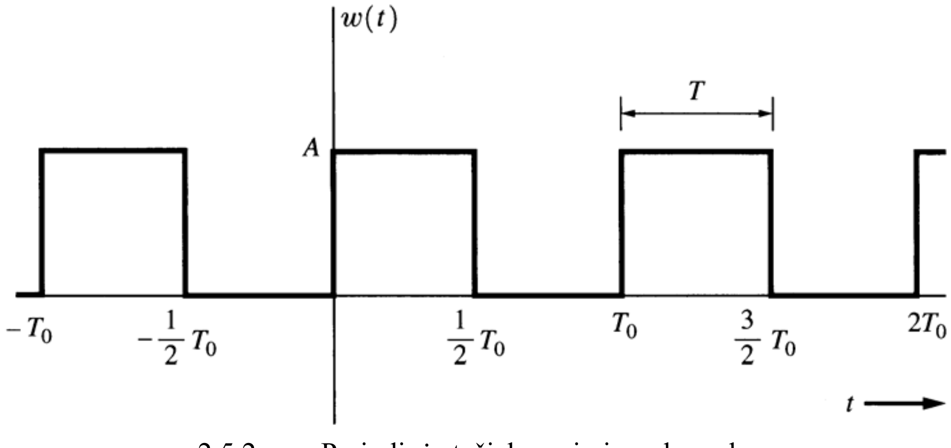
Periodinės funkcijos Furjė koeficientus patogu skaičiuoti pagal (2.5.28) formulę tais atvejais, kai $H(f)$ pavidalas yra žinomas arba gali būti lengvai apskaičiuotas (pvz., pagal Furjė transformacijų lenteles B-1 ir B-2). Pvz., tarkime, kad reikia apskaičiuoti stačiakampių impulsų sekos, kuri pavaizduota 2.5.2 pav., Furjė koeficientus. Pagal (2.5.28), šie koeficientai lygūs

$$c_n = \frac{A}{T_0}V(nf_0). \tag{2.5.29}$$

Čia $V(nf_0)$ yra vienetinio impulso Furjė transformacija (2.2.36), kur $T = T_0/2$. Įrašę (2.2.36) į (2.5.29) ir atsižvelgę į tai, kad $f_0 = 1/T_0$, randame

$$c_n = \frac{A}{2}e^{-jn\pi/2}\,\mathrm{Sa}(n\pi/2) = \frac{A}{2}e^{-jn\pi/2}\frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi/2} = \begin{cases} \dfrac{A}{2}, & n = 0; \\ -j\dfrac{A}{n\pi}, & n \text{ nelyginis;} \\ 0 & \text{kitais atvejais.} \end{cases} \tag{2.5.30}$$

Tą patį rezultatą galima gauti, ir tiesiog įrašius (2.5.22) ÷ (2.5.23) į c_n apibrėžimą (2.5.3).



2.5.2 pav. Periodinė stačiakampių impulsų seka.

2.5.6. Periodinio signalo galios spektrinis tankis

Jeigu signalas $w(t)$ yra periodinis, o jo periodas lygus T_0, tuomet signalo galios spektrinis tankis lygus

$$P_w(f) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty}|c_n|^2\,\delta(f - nf_0), \tag{2.5.31}$$

kur $f_0 = 1/T_0$, o c_n yra signalo kompleksinės Furjė eilutės (2.5.2) koeficientai. Ši teorema įrodoma, apskaičiavus kompleksinės Furjė eilutės (2.5.2) autokoreliacijos funkciją (2.3.8), o po to apskaičiavus jos Furjė transformaciją ir pasinaudojus sąryšiu (2.3.10).

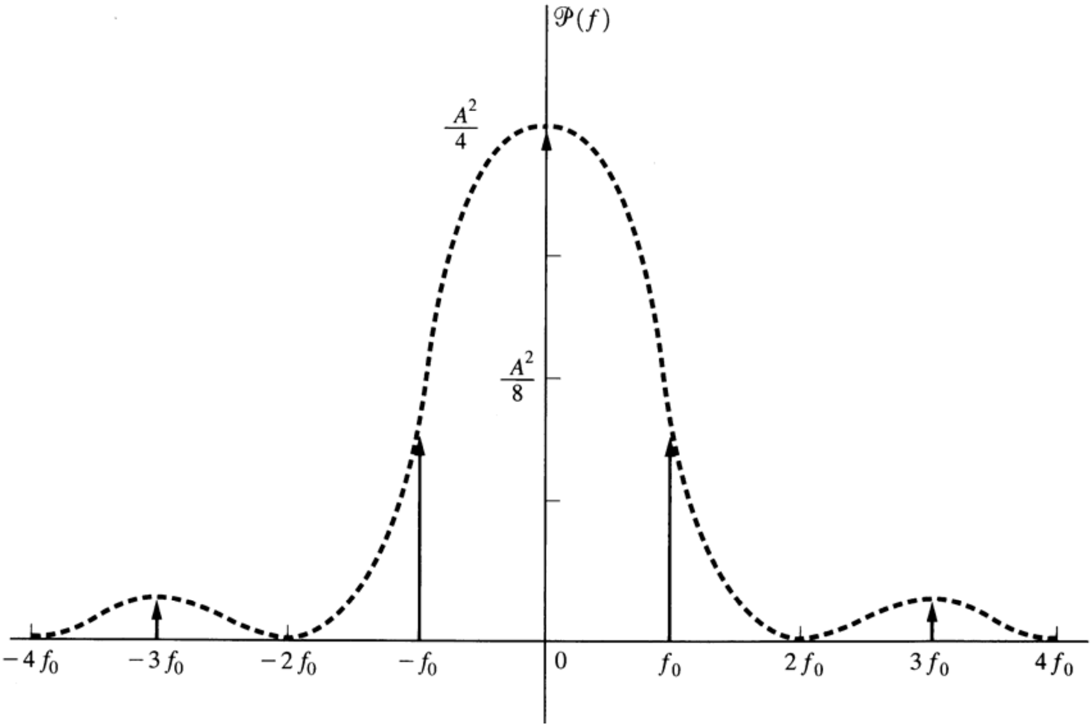
Vadinasi, periodinio signalo galios spektrinį tankį pilnai nusako signalo periodas T_0 ir Furjė koeficientų c_n absoliutinių verčių kvadratai.

Turint omenyje, kad periodinio signalo vidutinė normuotoji galia P lygi jo Furjė koeficientų absoliutinių verčių kvadratų sumai (žr. (2.5.7)), lygybė (2.5.31) suteikia galimybę ne tik įvertinti periodinio signalo galios spektrinį tankį, bet ir apskaičiuoti signalo dažnių juostos plotį. Pvz., dažnių intervalą, kuriame sutelkta 90 % viso signalo galios, nusako dažniai nf_0, kuriuos atitinkančių koeficientų c_n absoliutinių verčių kvadratų suma lygi $0.9P$.

Apskaičiuosime stačiakampių impulsų sekos, kuri pavaizduota 2.5.2 pav., galios spektrinį tankį. Kadangi šis signalas yra periodinis, tai galios spektrinį tankį galima skaičiuoti pagal (2.5.31) formulę. Vadinasi, kaip ir periodinio signalo spektro atveju, pakanka apskaičiuoti kompleksinės Furjė eilutės koeficientus c_n. Šiuo atveju koeficientus c_n nusako (2.5.30) formulė. Vadinasi, galios spektrinis tankis lygus

$$P_w(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{A}{2}\right)^2 \left(\frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi/2}\right)^2 \delta(f - nf_0). \tag{2.5.32}$$

Šis galios spektrinis tankis pavaizduotas 2.5.3 pav. ištisinėmis linijomis.



2.5.3 pav. Periodinės stačiakampių impulsų sekos, kuri pavaizduota 2.5.2 pav., galios spektrinis tankis.

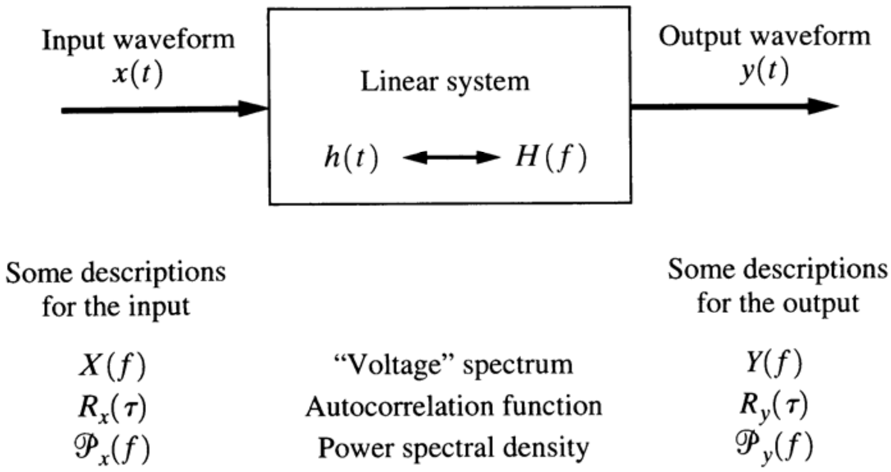
2.6. Tiesinių sistemų pagrindai

2.6.1. Tiesinės sistemos sąvoka. Laikinis invariantiškumas

Elektroninė sistema vadinama ***tiesine***, jeigu ji tenkina signalų ***superpozicijos*** sąlygą, t.y., jeigu išėjimo signalas, atitinkantis dviejų įėjimo signalų tiesinį darinį su pastoviais koeficientais, yra lygus atitinkamų dviejų išėjimo signalų tiesiniam dariniui su tais pačiais koeficientais. Pažymėjus išėjimo signalą $y(t)$, o įėjimo signalus $x_1(t)$ ir $x_2(t)$ (žr. 2.6.1 pav.), superpozicijos sąlygą galima užrašyti šitaip:

$$y(t) = L[a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)] = a_1 L[x_1(t)] + a_2 L[x_2(t)]. \tag{2.6.1}$$

Čia $L[\cdot]$ žymi tiesinį diferencialinį operatorių, kuris veikia įėjimo signalą (bet kurios tiesinės sistemos poveikį įėjimo signalui nusako kažkoks tiesinis diferencialinis operatorius). Jeigu, “užvėlinus” įėjimo signalą dydžiu t_0, išėjimo signalas užvėlinamas tiek pat, tuomet sakoma, kad sistemai būdinga ***laikinio invariantiškumo*** savybė. T.y., jeigu įėjimo signalą $x(t)$ atitinka



2.6.1 pav. Tiesinė sistema

išėjimo signalas $y(t)$, tuomet įėjimo signalą $x(t - t_0)$ atitinka išėjimo signalas $y(t - t_0)$. Laikinis invariantiškumas reiškia, kad sistemos átsako (išėjimo signalo) *pavidalas* nepriklauso nuo poveikio (įėjimo signalo) momento.

2.6.2. Tiesinės sistemos impulsinis atsakas

Tiesinė sistema, kuriai būdingas laikinis invariantiškumas, yra aprašoma tiesine diferencialine lygtimi su pastoviais koeficientais. Žemiau parodyta, kad tokią sistemą pilnai apibūdina jos impulsinis atsakas $h(t)$. ***Impulsinis atsakas*** – tai diferencialinės lygties sprendinys, kai poveikis (įėjimo signalas) yra Dirako δ funkcija. T.y., $y(t) = h(t)$, kai $x(t) = \delta(t)$. Be to, fizikinių sistemų impulsinis atsakas turi tenkinti ***priežastingumo principą***, kuris teigia, kad pasekmė negali įvykti anksčiau už priežastį. T.y., $h(t) = 0$, kai $t = 0$. Priežastingumo principą galima suformuluoti ir kaip reikalavimą impulsinio atsako spektrui $H(f)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln|H(f)||}{1+f^2} df < \infty . \tag{2.6.2}$$

Pvz., iš (2.6.2) išplaukia, kad impulsinio atsako spektras negali būti tiksliai lygus nuliui, kai dažnis f yra didesnis už tam tikrą ribinį dažnį: tokiu atveju impulsinis atsakas neturėtų pradžios (žr. 2.7 poskyrį), t.y., netenkintų priežastingumo principo.

Sistemos impulsinį atsaką galima panaudoti, skaičiuojant sistemos išėjimo signalą, kai įėjimo signalas nėra impulso pavidalo. Tuo tikslu bendro pavidalo signalas $x(t)$ aproksimuojamas δ funkcijos pavidalo impulsų seka:

$$x(t) \approx \sum_{n=0}^{\infty} x(n\Delta t)\delta(t - n\Delta t)\Delta t , \tag{2.6.3}$$

kur Δt yra intervalas tarp impulsų. T.y., tolydi funkcija $x(t)$ pakeičiama diskrečiu jos verčių rinkiniu laiko momentais $t = n\Delta t$. Pasinaudojus superpozicijos ir laikinio invariantiškumo savybėmis, sistemos atsakas į poveikį $x(t)$ lygus

$$y(t) \approx \sum_{n=0}^{\infty} x(n\Delta t)h(t - n\Delta t)\Delta t . \tag{2.6.4}$$

Ši apytikslė lygybė virsta tikslia, kai $\Delta t \to 0$. Tuomet suma (2.6.4) virsta integralu

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t - \lambda)d\lambda \equiv x(t) * h(t) , \tag{2.6.5}$$

kur ženklas “*”žymi dviejų funkcijų sąsūkos operaciją (funkcijų $x(t)$ ir $h(t)$ ***sąsūka*** – tai (2.6.5) integralas). Taigi, tiesinės sistemos, kuriai būdingas laikinis invariantiškumas, išėjimo signalas – tai įėjimo signalo ir impulsinio atsako sąsūka.

2.6.3. Tiesinės sistemos perdavimo funkcija

Pagal signalo spektro apibrėžimą (2.2.1), tiesinės sistemos išėjimo signalo spektras $Y(f)$ lygus reiškinio (2.6.5) Furjė transformacijai. Yra žinoma, kad dviejų funkcijų sąsūkos Furjė transformacija yra lygi tų funkcijų Furjė transformacijų sandaugai (žr. B-1 lentelę). Vadinasi,

$$Y(f) = X(f)H(f) \tag{2.6.6}$$

arba

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}, \tag{2.6.7}$$

kur $H(f)$ yra impulsinio atsako Furjė transformacija ($H(f) \equiv F[h(t)]$). Funkcija $H(f)$ vadinama sistemos ***perdavimo funkcija*** arba ***dažnine charakteristika***. Taigi, impulsinis atsakas $h(t)$ ir dažninė charakteristika sudaro Furjė porą:

$$h(t) \leftrightarrow H(f). \tag{2.6.8}$$

Bendruoju atveju perdavimo funkcija yra kompleksinis dydis:

$$H(f) = | H(f) | e^{j\theta(f)}. \tag{2.6.9}$$

Šio kompleksinio skaičiaus absoliutinė vertė $|H(f)|$ vadinama sistemos ***dažnine amplitudės charakteristika***, o kampas $\theta(f)$ – ***dažnine fazės charakteristika***:

$$\theta(f) = \arctan\left[\frac{\mathrm{Im}\{H(f)\}}{\mathrm{Re}\{H(f)\}}\right]. \tag{2.6.10}$$

Kadangi realiose sistemose $h(t)$ yra realioji laiko funkcija, tai, pagal Furjė transformacijos savybes (2.2.7) ir (2.2.8), $|H(f)|$ yra lyginė dažnio funkcija, o $\theta(f)$ – nelyginė dažnio funkcija:

$$| H(-f) | = | H(f) |, \tag{2.6.11}$$

$$\theta(-f) = -\theta(f). \tag{2.6.12}$$

Tiesinės sistemos perdavimo funkciją galima išmatuoti, naudojant sinusoidės pavidalo įėjimo įtampą. Taip yra todėl, kad dažnio f_0 sinusoidės spektras sudarytas iš dviejų linijų ties dažniais $f = \pm f_0$ (žr. (2.2.28)). Pvz., jeigu $x(t) = A\sin\omega_0 t = A\sin 2\pi f_0 t$, tuomet įėjimo signalo Furjė transformacija $X(f)$ yra (2.2.24). Įrašę šį reiškinį į (2.6.6) ir atsižvelgę į (2.6.11) ir (2.6.12), gauname, kad tiesinės sistemos atsako į sinusoidės pavidalo poveikį spektras yra

$$Y(f) = j\frac{A}{2} | H(f_0) | e^{j\theta(f_0)(f/f_0)}[\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)]. \tag{2.6.13}$$

Palyginę šį reiškinį su bendrojo pavidalo sinusoidės (2.2.27) Furjė transformacija (2.2.28), matome, kad spektras $Y(f)$ sutampa su sinusoidės

$$y(t) = A | H(f_0) | \sin[2\pi f_0 t + \theta(f_0)] \tag{2.6.14}$$

spektru. Vadinasi, funkcija (2.6.14) – tai tiesinės sistemos atsakas į sinusoidės pavidalo poveikį. Taigi, tiesinės sistemos perdavimo funkciją $H(f) = |H(f)|\exp(j\theta(f))$ galima išmatuoti, matuojant sistemos išėjimo įtampos amplitudę ir fazę, kai įėjimo įtampa yra sinusoidės pavidalo.

Bendrojo pavidalo periodinio įėjimo signalo $x(t)$ spektrą $X(f)$ galima išreikšti (2.5.21) pavidalo begaline suma:

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n \delta(f - nf_0), \tag{2.6.15}$$

kur $\{c_n\}$ yra įėjimo signalo kompleksiniai Furjė koeficientai. Įrašę (2.6.15) į (2.6.6), randame

$$Y(f) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n H(nf_0)\delta(f - nf_0). \qquad (2.6.16)$$

Susiesime tiesinės sistemos išėjimo ir įėjimo signalų galios spektrinius tankius $P_y(f)$ ir $P_x(f)$. Pagal apibrėžimą (2.3.4), išėjimo signalo $y(t)$ galios spektrinis tankis lygus

$$P_y(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{|Y_T(f)|^2}{T}. \qquad (2.6.17)$$

Funkciją $Y_T(f)$ galima išreikšti funkcija $X_T(f)$ pagal (2.6.6). Įrašę šią $Y_T(f)$ išraišką į (2.6.17), randame

$$P_y(f) = |H(f)|^2 \lim_{T\to\infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T}$$

arba

$$P_y(f) = |H(f)|^2 \, P_x(f). \qquad (2.6.18)$$

Vadinasi, tiesinės sistemos ***galios perdavimo funkcija*** yra

$$G_h(f) \equiv \frac{P_y(f)}{P_x(f)} = |H(f)|^2. \qquad (2.6.19)$$

2.6.4. Žemųjų dažnių RC filtro impulsinis atsakas ir perdavimo funkcija

Žemųjų dažnių RC filtras pavaizduotas 2.6.2a pav. Čia $x(t)$ ir $y(t)$ žymi atitinkamai įėjimo ir išėjimo signalus. Pagal Kirchhofo taisyklę,

$$x(t) = Ri(t) + y(t),$$

kur $i(t) = C\cdot dy(t)/dt$. Vadinasi, sprendžiamoji diferencialinė lygtis yra

$$RC\frac{dy}{dt} + y(t) = x(t). \qquad (2.6.20)$$

Pasinaudoję funkcijos išvestinės Furjė transformacijos išraiška (žr. B-1 lentelę), randame diferencialinės lygties (2.6.20) Furjė atvaizdą:

$$RC(j2\pi f)Y(f) + Y(f) = X(f). \qquad (2.6.21)$$

Vadinasi, pagal (2.6.7), šio filtro perdavimo funkcija yra

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{1}{1 + j(f/f_0)}, \qquad (2.6.22)$$

o galios perdavimo funkcija (pagal (2.6.19)) yra

$$G_h(f) = |H(f)|^2 = \frac{1}{1 + (f/f_0)^2}, \qquad (2.6.23)$$

kur

$$f_0 \equiv \frac{1}{2\pi RC}. \qquad (2.6.24)$$

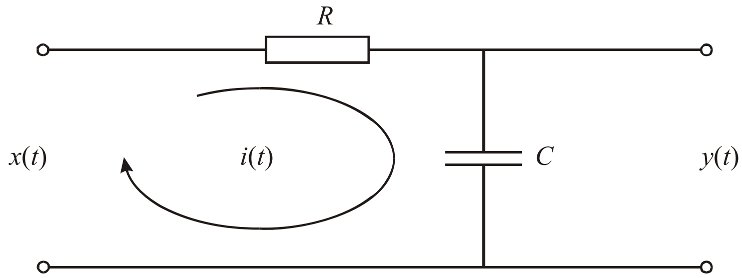
Suradę (2.6.22) pavidalo funkciją Furjė transformacijų lentelėje B-2, gauname žemųjų dažnių filtro impulsinį atsaką:

$$h(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\tau_0} e^{-t/\tau_0}, & t \ge 0; \\ 0, & t < 0, \end{cases} \qquad (2.6.25)$$

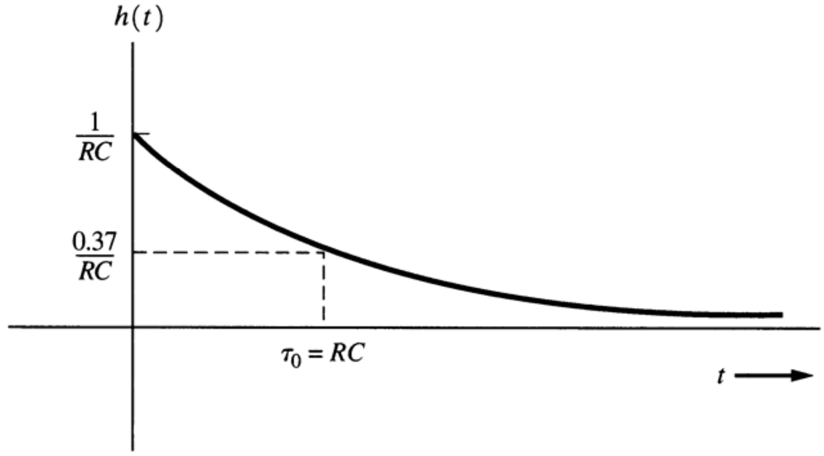
kur τ_0 yra filtro ***laiko konstanta***:

$$\tau_0 = RC = \frac{1}{2\pi f_0}. \qquad (2.6.26)$$

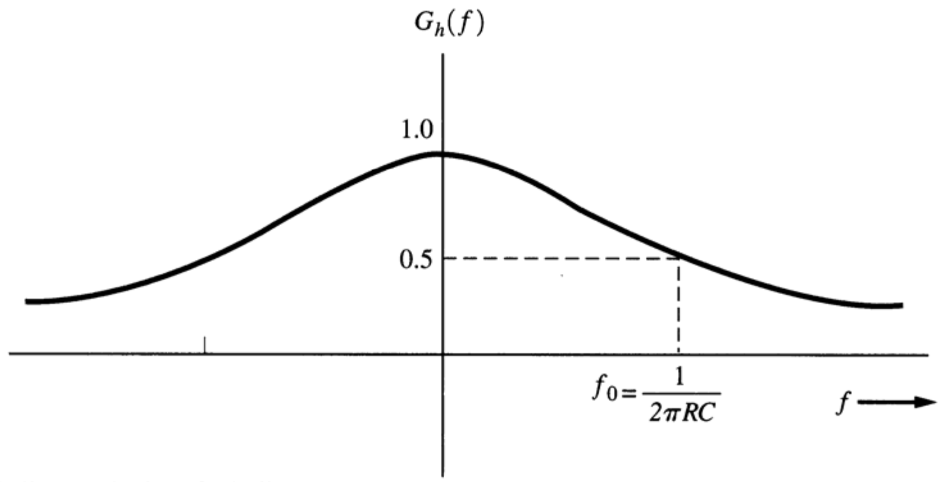
Žemųjų dažnių RC filtro impulsinio atsako funkcija $h(t)$ ir galios perdavimo funkcija $G_h(f)$ yra pavaizduotos 2.6.2b,c pav. 2.6.2b pav. akivaizdu, kad laiko konstanta τ_0



(a) Žemųjų dažnių RC filtras



(b) Impulsinis atsakas



(c) Galios perdavimo funkcija

2.6.2 pav. Žemųjų dažnių *RC* filtras (a), jo impulsinio atsako funkcija (b) ir galios perdavimo funkcija (c).

nusako laiką, per kurį išėjimo amplitudė sumažėja $e \approx 2.72$ kartų, lyginant su pradine verte. 2.6.2c pav. akivaizdu, kad ***ribinis dažnis*** f_0 – tai dažnis, kuriame galios stiprinimo koeficientas yra 2 kartus (t.y., 3 dB) mažesnis, lyginant su maksimalia verte ties $f = 0$. Šis teiginys trumpai formuluojamas šitaip: "šio filtro 3 dB lygio dažnių juostos plotis yra $f = f_0$" (apie dažnių juostos plotį smulkiau kalbama 2.8 poskyryje).

2.6.5. Signalų perdavimas be iškraipymų tiesinėse sistemose

Telekomunikacijų sistemose dažnai reikalingas signalų perdavimas be iškraipymų. Tai reiškia, kad sistemos išėjimo signalas $y(t)$ yra proporcingas "užvėlintam" įėjimo signalui $x(t)$:

$$y(t) = Ax(t - T_d), \tag{2.6.27}$$

kur A yra stiprinimo koeficientas (kuris gali būti mažesnis už vienetą), o T_d yra signalo vėlinimas. Be to, A ir T_d nepriklauso nuo įėjimo signalo pavidalo. Apskaičiavę (2.6.27) lygybės abiejų pusių Furjė transformaciją ir įrašę gautąją $Y(f)$ išraišką į perdavimo funkcijos išraišką (2.6.7), randame atitinkamą reikalavimą sistemos perdavimo funkcijai:

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = Ae^{-j2\pi f T_d}. \tag{2.6.28}$$

Taigi, kad tiesinė sistema perduotų signalą be iškraipymų, turi būti patenkintos dvi sąlygos:

1) dažninė amplitudės charakteristika turi būti "plokščia", t.y.,

$$|H(f)| = A = const; \tag{2.6.29a}$$

2) dažninė fazės charakteristika turi būti *tiesinė* dažnio funkcija, t.y.,

$$\theta(f) = -2\pi f T_d. \tag{2.6.29b}$$

Jeigu tenkinama pirmoji sąlyga, tuomet sakoma, kad nėra ***amplitudinių iškraipymų***. Jeigu tenkinama antroji sąlyga, tuomet sakoma, kad nėra ***fazinių iškraipymų***. Jeigu tiesinė grandinė netenkina kurios nors iš šių dviejų sąlygų, tuomet jos išėjimo signale atsiranda iškraipymai, kurie vadinami ***tiesiniais iškraipymais***.

Antrąjį reikalavimą (2.6.29b) galima suformuluoti šiek tiek kitaip. Kaip minėta, tiesinės sistemos atsakas į sinusoidės pavidalo signalą yra to paties dažnio sinusoidė (žr. (2.6.14)). Vadinasi, tiesinėje sistemoje sinusoidės pavidalo signalo atveju visuomet galioja lygybė (2.6.27). Tačiau bendruoju atveju (kai egzistuoja tiesiniai iškraipymai) parametrai A ir T_d priklauso nuo sinusoidės dažnio f. Funkcija $T_d(f)$ vadinama sistemos ***vėlinimo funkcija***. Pagal (2.6.29b), vėlinimo funkcija lygi

$$T_d(f) = -\frac{1}{2\pi f}\theta(f), \tag{2.6.30}$$

kur $\theta(f)$ yra sistemos dažninė fazės charakteristika. Vadinasi, fazės iškraipymų nebuvimo sąlygą galima suformuluoti šitaip:

$$T_d(f) = const. \tag{2.6.31}$$

Tiesinės sistemos išėjimo signalo spektrą sudaro tie patys dažniai, kaip ir įėjimo signalo spektrą – net ir tuo atveju, kai signalas iškraipomas. Netiesinėje sistemoje, be amplitudės ir fazės iškraipymų, galimi ir kito tipo iškraipymai, dėl kurių išėjimo signalo spektre atsiranda nauji dažniai. Kartais šie naujieji dažniai yra reikalingi, todėl juos neteisinga būtų vadinti "iškraipymais". Tokie atvejai aprašyti 4 skyriuje.

2.6.6. Signalo iškraipymai, kuriuos sukelia žemųjų dažnių RC filtras

Aprašysime iškraipymus, kuriuos sukelia 2.6.4 poskyryje aprašytas žemadažnis *RC* filtras. Pagal (2.6.22), šio filtro dažninė amplitudės charakteristika lygi

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_0)^2}}, \tag{2.6.32}$$

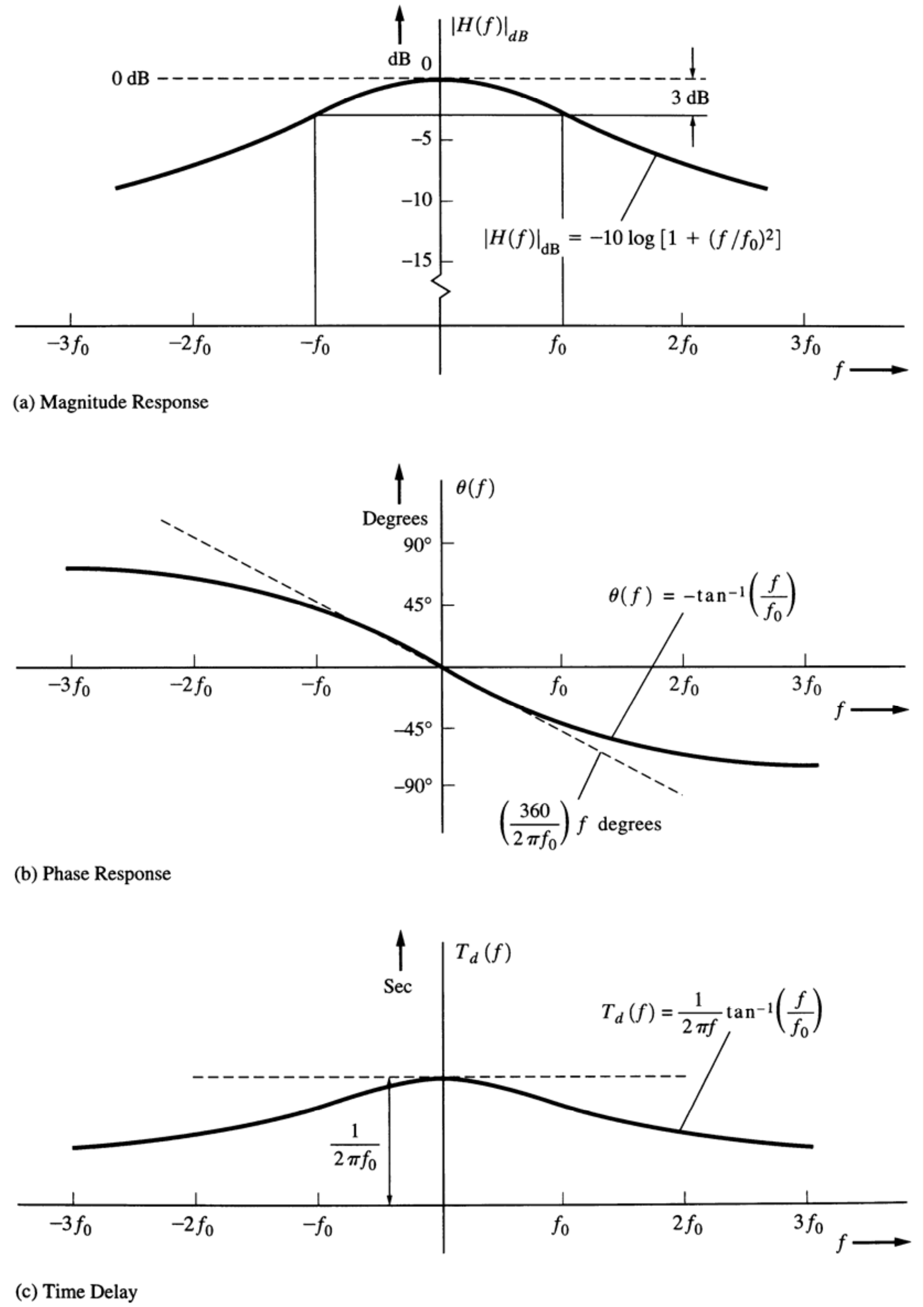
o dažninė fazės charakteristika yra

$$\theta(f) = -\arctan\left(\frac{f}{f_0}\right). \tag{2.6.33}$$

Pagal (2.6.30), atitinkama signalo vėlinimo funkcija yra

$$T_d(f) = \frac{1}{2\pi f}\arctan\left(\frac{f}{f_0}\right). \tag{2.6.34}$$

Šios trys dažnio funkcijos pavaizduotos 2.6.3 pav. ištisinėm linijom. Akivaizdu, kad žemadažnis *RC* filtras netenkina sąlygų (2.6.29a) ir (2.6.29b) (arba (2.6.31)), todėl iškraipo įėjimo signalą. Tačiau tuo atveju, kai įėjimo signalo spektre yra tik dažniai, kurie tenkina



2.6.3 pav. Žemųjų dažnių RC filtro dažninė amplitudės charakteristika (a), dažninė fazės charakteristika (b) ir signalo vėlinimo funkcija (c).

nelygybę $f < 0.5f_0$, šie iškraipymai yra labai silpni (amplitudės paklaida <0.5 dB, o fazės paklaida <2.1°). T.y., šioje dažnių juostoje *RC* filtras elgiasi beveik kaip filtras be iškraipymų, kurį atitinka punktyrinės linijos 2.6.3 pav. Jeigu $f < f_0$, amplitudės paklaida yra mažesnė už 3 dB, o fazės paklaida mažesnė už 12.3°. Praktikoje tokios paklaidos taip pat dažnai laikomos priimtinomis. Gautieji rezultatai taip pat rodo, kad signalų, kurių spektras sutelktas dažnių intervale $f < 0.5f_0$, vėlinimas yra beveik pastovus ir lygus $1/(2\pi f_0)$. Aukštesniųjų dažnių signalų vėlinimas yra mažesnis.

2.7. Riboto dažnio signalai

Praktikoje dažniausiai naudojami ***riboto dažnio signalai***, t.y., signalai, kurių spektrai skiriasi nuo nulio baigtinio pločio dažnių juostoje. Jeigu signalo Furjė transformacija tenkina sąlygą

$$W(f) = F[w(t)] = 0, \qquad \text{kai} \quad |f| \geq B, \tag{2.7.1}$$

tuomet sakoma, kad ***signalo ribinis dažnis*** yra mažesnis už B (hercų).

Jeigu signalas tenkina sąlygą

$$w(t) = 0, \qquad \text{kai} \quad |t| \geq T, \tag{2.7.2}$$

tuomet toks signalas vadinamas ***baigtinės trukmės signalu*** (*time limited waveform*).

Galima įrodyti, kad bet kuris riboto dažnio signalas yra neribotas laike (t.y., begalinės trukmės), o bet kuris baigtinės trukmės signalas yra neriboto dažnio. Pvz., stačiakampis impulsas turi begalinio pločio spektrą (žr. 2.2.2a pav.). Reikia turėti omenyje, kad atvirkštiniai teiginiai negalioja, t.y., neribotas laike signalas gali turėti begalinio pločio spektrą (pvz., tiksliai stačiakampių impulsų periodinė seka).

Visi praktikoje sutinkami signalai yra baigtinės trukmės. Todėl, griežtai kalbant, realių signalų spektrai yra begalinio pločio. Tačiau *praktiniu požiūriu* visuomet galima laikyti, kad signalo spektras yra baigtinio pločio, nes visuomet egzistuoja kažkoks ribinis dažnis, virš kurio signalo amplitudžių spektras tampa mažesnis už matavimo prietaisų jautrį. Šį teiginį galima įrodyti, remiantis signalo energijos išraiška (2.2.12). Kadangi fizikinis signalas yra baigtinės trukmės, tai jo energija taip pat yra baigtinė. Kadangi (2.2.12) integralo rėžiai yra begaliniai, tai šis integralas gali būti baigtinis tik tuo atveju, kai energijos spektrinis tankis $|W(f)|^2$ tampa nykstamai mažas dažnių intervale $f > B$, kur B yra kažkoks pakankamai didelis dažnis. Vadinasi, visi *fizikiniai* signalai yra baigtinės trukmės ir riboto dažnio. Žemiau pateiktos visos sąlygos, kurias tenkina ***fizikiniai signalai***:

1. Signalas pastebimai skiriasi nuo nulio baigtinio pločio laiko intervale.
2. Signalo spektras pastebimai skiriasi nuo nulio baigtinio pločio dažnių intervale.
3. Signalas yra tolydžioji laiko funkcija.
4. Signalo maksimali vertė yra baigtinė.
5. Signalas yra realusis dydis.

Tačiau teorinėje signalų analizėje dažnai naudojami signalų matematiniai modeliai, kurie netenkina vienos arba kelių iš šių sąlygų. Pvz., bet kuris periodinis signalas yra neribotas laike, t.y., netenkina pirmosios sąlygos. Idealiai stačiakampių impulsų periodinė seka netenkina pirmųjų trijų sąlygų, tačiau toks modelis dažnai naudojamas praktikoje.

2.7.1. Ėmimo teorema

Skaitmeninėje ryšių sistemoje be iškraipymų įmanoma perduoti tik riboto dažnio informacinius signalus. Taip yra todėl, kad skaitmeninėse ryšių sistemose yra perduodamos informacinio signalo vertės *diskrečiais* laiko momentais. Šių diskrečių verčių atranka vadinama signalo ***ėmimu*** (*sampling*), atrankos dažnis vadinamas ***ėmimo sparta*** (*sampling rate*), o kiekviena diskrečioji vertė vadinama ***imtimi*** (*sample*). Norint, kad imtuvas galėtų tiksliai atstatyti pradinio (tolydžiojo) informacinio signalo pavidalą, signalo verčių ėmimo sparta turi būti didesnė už dvigubą informacinio signalo ribinį dažnį. Šis teiginys vadinamas ***ėmimo teorema***. Matematine prasme, ėmimo teorema yra vienas iš ortogonaliųjų eilučių pritaikymų. Ėmimo teoremos pilnąją formuluotę sudaro du teiginiai:

1. Bet kurį fizikinį signalą $w(t)$ intervale $-\infty < t < \infty$ galima išreikšti eilute

$$w(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} a_n \frac{\sin\{\pi f_s[t-(n/f_s)]\}}{\pi f_s[t-(n/f_s)]}, \tag{2.7.3}$$

kur

$$a_n = f_s \int_{-\infty}^{\infty} w(t) \frac{\sin\{\pi f_s[t-(n/f_s)]\}}{\pi f_s[t-(n/f_s)]} dt, \tag{2.7.4}$$

o f_s yra kažkoks teigiamas dažnis.

2. Jeigu signalo $w(t)$ ribinis dažnis yra B hercų, tuomet (2.7.3) eilutė tiksliai aprašo signalą $w(t)$ tik tuo atveju, kai parametras f_s tenkina nelygybę

$$f_s \geq 2B. \tag{2.7.5}$$

Be to, šiuo atveju (2.7.3) eilutės koeficientai a_n sutampa su signalo $w(t)$ vertėm, išmatuotom kas $1/f_s$ sekundžių:

$$a_n = w(n/f_s). \tag{2.7.6}$$

Norint įrodyti pirmąją ėmimo teoremos dalį, pakanka įrodyti, kad funkcijos

$$\varphi_n(t) = \frac{\sin\{\pi f_s[t-(n/f_s)]\}}{\pi f_s[t-(n/f_s)]} \tag{2.7.7}$$

yra ortogonalios intervale $-\infty < t < \infty$ ir kad kiekvienos funkcijos kvadrato integralas nuo $-\infty$ iki $+\infty$ lygus $1/f_s$ (žr. ortogonaliųjų funkcijų ir ortogonaliosios eilutės apibrėžimus (2.4.1) ir (2.4.5) ÷ (2.4.6)). Šis teiginys įrodomas, įrašius $\varphi_n(t)$ išraišką (2.7.7) į integralą (2.4.1) ($a = -\infty$, $b = +\infty$) ir pasinaudojus Parsevalio teorema (2.2.9) bei tuo, kad funkcijos $\varphi_n(t)$ (2.7.7) Furjė transformacija lygi

$$\Phi_n(f) = \frac{1}{f_s} \Pi\left(\frac{f}{f_s}\right) e^{-j2\pi(nf/f_s)} \tag{2.7.8}$$

(žr. B-2 lentelę ir vėlinimo teoremą B-1 lentelėje).

Įrodysime antrąją ėmimo teoremos dalį. Pasinaudojus Parsevalio teorema (2.2.9), integralą (2.7.4) galima užrašyti šitaip:

$$a_n = f_s \int_{-\infty}^{\infty} W(f)\Phi_n^*(f) df, \tag{2.7.9}$$

kur $W(f)$ yra signalo $w(t)$ Furjė transformacija, o $\Phi_n(f)$ yra funkcijos $\varphi_n(t)$ (2.7.7) Furjė transformacija (2.7.8). Įrašę (2.7.8) išraišką į integralą (2.7.9) ir atsižvelgę į tai, kad stačiakampio impulso funkcija $\Pi(f/f_s)$ lygi vienetui dažnių intervale $-f_s/2 < f < f_s/2$ ir lygi nuliui už šio intervalo ribų (žr. (2.2.29)), randame

$$a_n = \int_{-f_s/2}^{f_s/2} W(f) e^{j2\pi(nf/f_s)} df. \tag{2.7.10}$$

Vadinasi, jeigu netenkinama (2.7.5) sąlyga, tuomet, skaičiuojant koeficientus a_n, prarandama informacija apie signalo spektro dalį, kuri yra dažnių intervale $f_s/2 < f < B$. Kadangi signalo spektras $W(f)$ suteikia lygiai tiek pat informacijos apie signalą $w(t)$, kiek ir paties signalo matematinė išraiška, tai tuo atveju, kai netenkinama (2.7.5) sąlyga, (2.7.3) eilutė negali tiksliai aprašyti signalo $w(t)$. Jeigu f_s tenkina (2.7.5) sąlygą, tuomet, skaičiuojant integralą (2.7.10), integruojama visame dažnių intervale, kuriame $W(f) \neq 0$, todėl signalo išraiška eilutės pavidalu (2.7.3) yra tiksli. Be to, turint omenyje, kad $W(f) = 0$, kai $|f| > B$, šiuo atveju integravimo sritį galima išplėsti iki $(-\infty, \infty)$, nekeičiant integralo vertės. Tokiu būdu gautas integralas – tai funkcijos $W(f)$ atvirkštinė Furjė transformacija taške $t = n/f_s$ (plg. su atvirkštinės Furjė transformacijos apibrėžimu (2.2.5)). Taigi, gaunama (2.7.6) lygybė, kurią ir reikėjo įrodyti.

Iš (2.7.10) išplaukia, kad mažiausia ėmimo sparta, kuri reikalinga tiksliam ribotos dažnių juostos informacinio signalo atkūrimui imtuve, yra lygi dvigubam signalo ribiniam dažniui:

$$(f_s)_{\min} = 2B. \tag{2.7.11}$$

Šis dažnis vadinamas ***Naikvisto dažniu*** (*Nyquist frequency*).

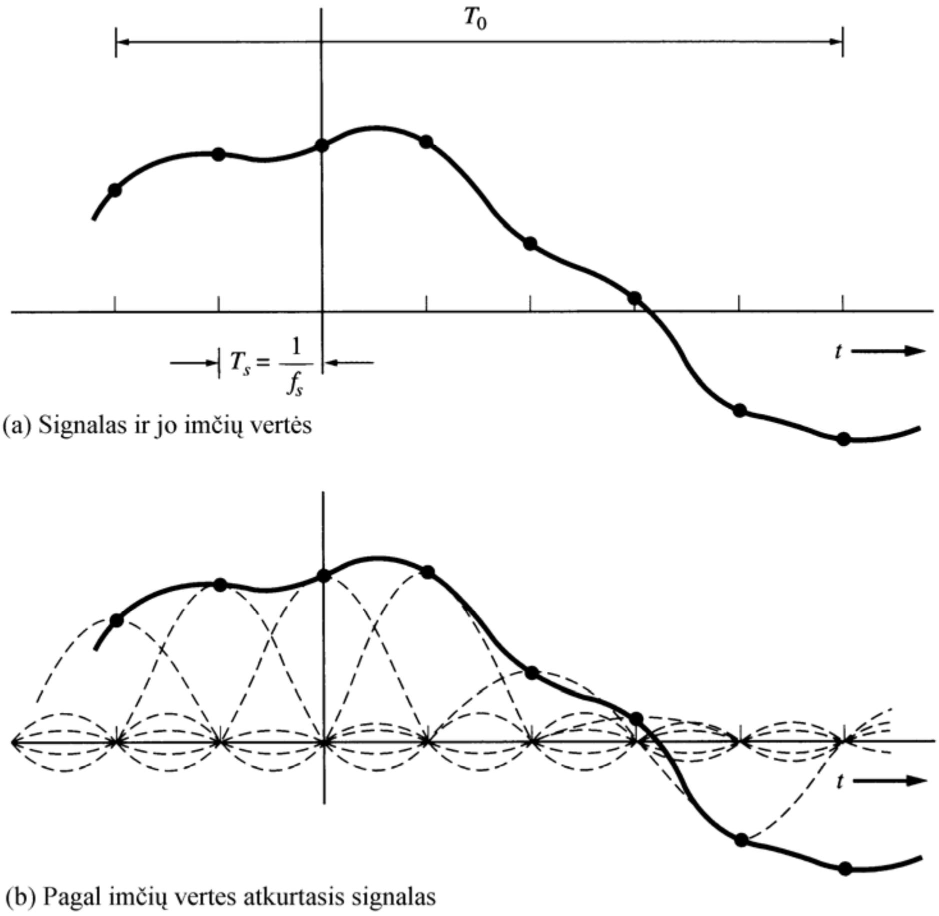
Imties teorema yra ypač svarbi skaitmeninėse ryšio sistemose, nes ji nusako optimaliąją ėmimo spartą (2.7.11) ir signalo atkūrimo taisyklę, kai yra žinomos jo vertės atskirais laiko momentais (žr. (2.7.3)). Tačiau (2.7.3) eilutė yra begalinė, o praktikoje siųstuvas gali perduoti tik baigtinį verčių skaičių. Todėl praktikoje naudojamasi tuo, kad signalą $w(t)$ duotajame baigtinio pločio laiko intervale galima aproksimuoti baigtine suma

$$w(t) \approx \sum_{n=n_1+1}^{n=n_1+N} a_n \varphi_n(t), \tag{2.7.12}$$

kurią sudaro N dėmenų. Šiuos dėmenis reikia parinkti taip, kad atitinkamų funkcijų $\varphi_n(t)$ maksimumai priklausytų tiriamajam laiko intervalui (žr. 2.7.1 pav.). Vadinasi, norint išsaugoti arba perduoti informaciją apie signalo $w(t)$ kitimą baigtinės trukmės intervale, pakanka išmatuoti jo vertes tame intervale kas $1/(f_s)_{\min} = 1/(2B)$ sekundžių, o po to išsaugoti tas vertes skaitmeninio kompiuterio atmintyje arba perduoti jas skaitmenine ryšių sistema. Bet kuriuo atveju patį signalą galima vėliau atkurti, naudojantis (2.7.12) lygybe. Signalo verčių skaičius, kuris reikalingas signalo atkūrimui, turi tenkinti sąlygą

$$N \geq N_{\min} = \frac{T_0}{1/(f_s)_{\min}} = 2BT_0, \tag{2.7.13}$$

kur T_0 yra laiko intervalo, kuriame reikia atkurti signalą, plotis, o B yra signalo ribinis dažnis.



2.7.1 pav. Ėmimo teorema.

2.7.2. Impulsinis ėmimas

Signalo atkūrimo metodo, kuris remiasi ortogonaliąja eilute (2.7.12), trūkumas yra tas, kad, norint jį pritaikyti, reikia turėti atkuriamojo signalo vertes visame laiko intervale, kurį siekiama atkurti. Tai reiškia, kad atkurtasis signalas yra užvėlintas atžvilgiu perduodamojo signalo atkuriamojo intervalo trukme T_0 (žr. 2.7.1 pav.). Jeigu siekiama, kad šio vėlinimo nebūtų (t.y., kad signalo atkūrimas vyktų lygiagrečiai su jo diskrečių verčių perdavimu), naudojamas žemiau aprašytasis impulsinis ėmimas.

Naudojant ***impulsinį ėmimą***, informacinis signalas $w(t)$ padauginamas iš vienetinio ploto impulsų sekos – suformuojamas ***ėmimo signalas*** (*sampled waveform*) $w_s(t)$. Matematiškai vienetinio ploto („vienetinio svorio“) impulsų seką galima modeliuoti δ funkcijų suma (žr. δ funkcijos apibrėžimą (2.2.14). T.y., ėmimo signalas lygus

$$w_s(t) = w(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w(nT_s)\delta(t-nT_s)\,. \qquad (2.7.14)$$

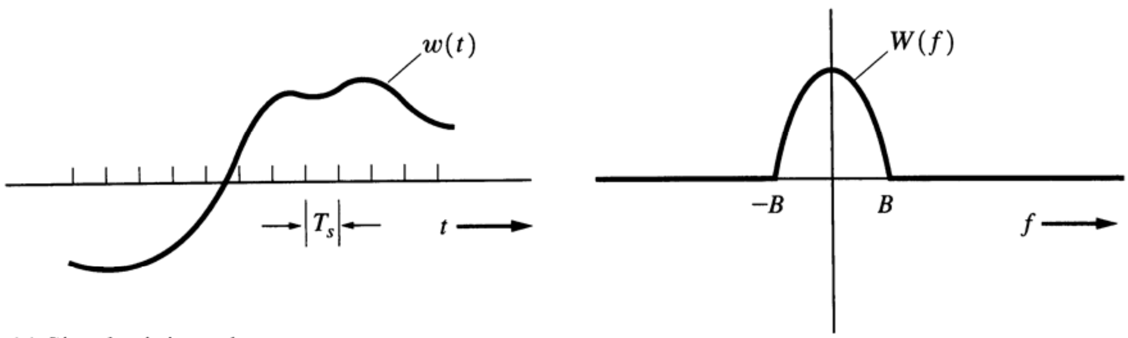
Čia $T_s = 1/f_s$, kur f_s yra ėmimo sparta. Tokią informacinio signalo transformaciją iliustruoja 2.7.2 pav. Šiame paveiksle kiekvienos rodyklės ilgis nusako impulso kreivės ribojamą plotą (***impulso svorį***). Rasime ėmimo signalo spektrą $W_s(f)$. Pasinaudoję tuo, kad dviejų funkcijų sandaugos Furjė transformacija lygi jų Furjė transformacijų sąsūkai, bei Puasono sumos formule (2.5.25), randame

$$W_s(f) = W(f) * F\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)\right] = \frac{1}{T_s}W(f) * \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f-nf_s) \equiv$$

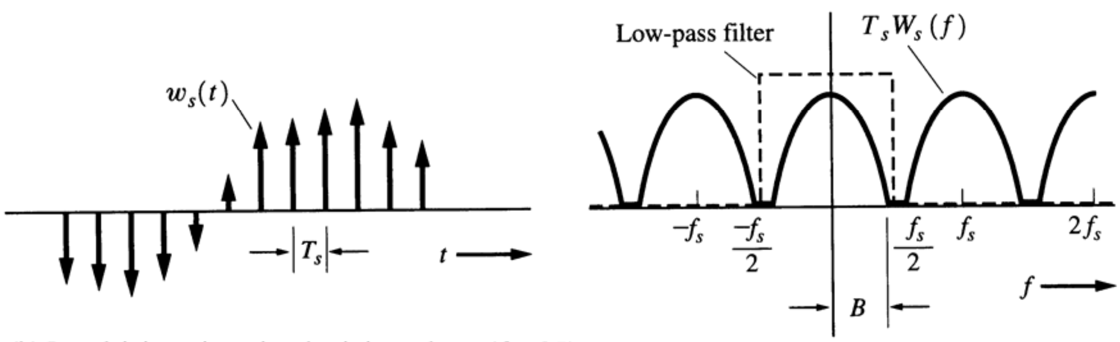
$$\equiv \frac{1}{T_s}\int_{-\infty}^{\infty} W(\lambda)\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f-\lambda-nf_s)\right]d\lambda = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} W(\lambda)\delta(f-\lambda-nf_s)d\lambda.$$

Pasinaudoję δ funkcijos savybe (2.2.15b), randame

$$W_s(f) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} W(f-nf_s)\,. \qquad (2.7.15)$$



(a) Signalas ir jo spektras

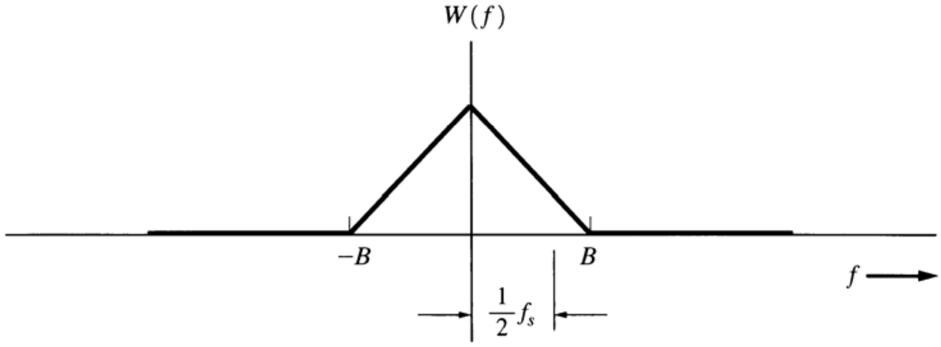


(b) Impulsinio ėmimo signalas ir jo spektras ($f_s > 2B$)

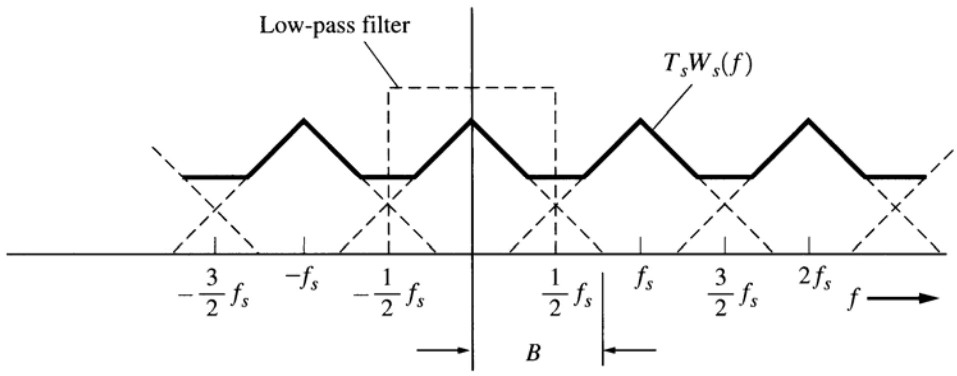
2.7.2 pav. Impulsinis ėmimas.

Taigi, ėmimo signalo spektrą sudaro pradinio informacinio signalo spektro “kopijos”, kurios pasislinkusios viena kitos atžvilgiu f_s Hz. Kaip akivaizdu 2.7.2 pav., tuo atveju, kai $f_s \geq 2B$, šios “kopijos” nepersikloja ir pradinio signalo spektrą galima atkurti, “nupjovus” $W_s(f)$ dalį, kuri yra virš $f_s/2$, t.y., praleidus $w_s(t)$ pro idealųjį žemųjų dažnių filtrą, kurio ribinis dažnis yra $f_c = f_s/2$. Jeigu $f_s < 2B$, tuomet pradinio spektro “kopijos” persikloja tarpusavyje (žr. 2.7.3 pav.), todėl vien filtravimu neįmanoma atstatyti pradinio spektro. Šis reiškinys vadinamas ***spektrų sanklota*** (*aliasing*, *spectral folding*).

Vadinasi, vėl gavome tą patį pagrindinį rezultatą, kuris suformuluotas ėmimo teoremoje: mažiausią ėmimo spartą, kuri reikalinga tiksliam signalo atkūrimui pagal jo diskrečių verčių rinkinį, nusako Naikvisto dažnis (2.7.11).



(a) Pradinio signalo spektras



(b) Impulsinio ėmimo signalo spektras ($f_s < 2B$)

2.7.3 pav. Spektrų sanklota.

2.8. Dažnių juostos plotis

Dažnių juostos pločio sąvoka yra svarbi dėl dviejų priežasčių. Visų pirma, radijo dažnių vartotojų skaičius nuolat auga, todėl svarbu tiksliai įvertinti kiekvienam vartotojui skiriamą dažnių intervalą, kad skirtingų vartotojų dažnių juostos nepersiklotų. Be to, į signalo dažnių juostos plotį reikia atsižvelgti, projektuojant elektrinius įrenginius, kurie apdoros tą signalą: šių įrenginių dažnių juostos plotis turi atitikti signalo dažnių juostos plotį.

Yra žinoma, kad realiojo signalo amplitudžių spektras yra dvipusis, t.y., sudarytas iš dviejų dalių, kurios yra simetriškos atžvilgiu nulinio dažnio (žr. (2.2.7)). Tas pats teiginys galioja ir galios spektriniam tankiui, nes jis proporcingas signalo amplitudžių spektro kvadratui (žr. (2.3.4)). Tačiau praktikoje, kalbant apie juostos plotį, turima omenyje tik teigiamųjų dažnių juosta. T.y., bendruoju atveju dažnių juostos plotis – tai dviejų teigiamų dažnių skirtumas $f_2 - f_1$, kur $f_2 > f_1 \geq 0$.

Jeigu signalas yra baigtinės trukmės, tuomet jo dažnių juostos plotis yra atvirkščiai proporcingas signalo trukmei. Šį teiginį iliustruoja 2.2.2 pav.: pavienio impulso spektro plotis yra atvirkščiai proporcingas impulso trukmei T.

Egzistuoja keletas dažnių juostos pločio apibrėžimų. Beveik visi jie signalo dažnių juostos plotį tiesiogiai arba netiesiogiai sieja su signalo galios spektrinio tankio $P_w(f)$ mažėjimo sparta, tolstant nuo maksimumo dažnio: kuo greičiau mažėja $P_w(f)$, tuo mažesnis signalo dažnių juostos plotis. Jeigu kalbama apie elektrinio įtaiso (keturpolio) dažnių juostos plotį, tuomet vietoj galios spektrinio tankio turima omenyje to keturpolio galios perdavimo funkcija. Tiesinio keturpolio atveju galios perdavimo funkcija yra lygi dažninės amplitudės charakteristikos kvadratui $|H(f)|^2$ (žr. (2.6.19)). Todėl, norint pritaikyti kurį nors signalo dažnių juostos apibrėžimą tiesiniam keturpoliui, pakanka signalo galios spektrinį tankį $P_w(f)$ pakeisti dažninės amplitudės charakteristikos kvadratu $|H(f)|^2$.

Keli konkretūs dažnių juostos pločio apibrėžimai pateikti žemiau:

1. ***3 dB lygio juostos plotis*** arba ***pusės galios juostos plotis*** – tai dažnių skirtumas $f_2 - f_1$, kur f_2 ir f_1 parinkti taip, kad intervale $f_1 < f < f_2$ galios spektrinis tankis būtų nemažesnis už pusę maksimalaus galios spektrinio tankio. Pvz., 2.6.2c pav. pavaizduoto žemųjų dažnių RC filtro galios spektro 3 dB lygio dažnių juostos plotis lygus filtro ribiniam dažniui $f_0 = 1/(2\pi RC)$.
2. ***Pirmojo nulio juostos plotis*** (*null-to-null bandwidth*; *zero-crossing bandwidth*) – tai dažnių skirtumas $f_2 - f_1$, kur f_2 yra pirmasis amplitudžių spektro nulis virš šio spektro maksimumo dažnio, o f_1 yra artimiausias amplitudžių spektro nulis žemiau maksimumo dažnio. Jeigu žemiau maksimumo iki pat nulinio dažnio amplitudžių spektras neturi nulių arba maksimumas yra ties nuliniu dažniu, tuomet $f_1 = 0$. Pvz., T trukmės stačiakampio impulso pirmojo nulio dažnių juostos plotis lygus $1/T$ (žr. 2.2.2a pav.).
3. ***Absoliutinis juostos plotis*** – tai dažnių skirtumas $f_2 - f_1$, kur f_2 ir f_1 parinkti taip, kad spektras būtų lygus nuliui už intervalo $f_1 < f < f_2$ ribų. Pvz., $\sin(x)/x$ pavidalo impulso absoliutinis dažnių juostos plotis yra atvirkštinis impulso trukmei “nuo nulio iki nulio” (žr. 2.2.2b pav.).
4. ***Riboto spektro juostos plotis*** (*bounded spectrum bandwidth*) – tai dažnių skirtumas $f_2 - f_1$, kur f_2 ir f_1 parinkti taip, kad už intervalo $f_1 < f < f_2$ ribų galios spektrinis tankis būtų ne didesnis už tam tikrą lygį, pvz., bent 50 dB žemiau galios spektrinio tankio maksimumo.
5. ***Galios juostos plotis*** (*power bandwidth*) – tai dažnių skirtumas $f_2 - f_1$, kur f_2 ir f_1 parinkti taip, kad intervale $f_1 < f < f_2$ būtų sutelkti 99 % viso signalo galios.
6. ***Ekvivalentusis juostos plotis*** (*equivalent bandwidth*; *equivalent noise bandwidth*) – tai tariamojo stačiakampio spektro plotis, kuriame sutelkta tokia pati galia, kaip ir tikrojo signalo teigiamųjų dažnių srityje, laikant, kad šio stačiakampio spektro aukštis yra lygus duotojo signalo didžiausiam galios spektriniam tankiui. Taigi, laikant, kad f_0 yra signalo $w(t)$ galios spektrinio tankio maksimumo dažnis, ekvivalentusis juostos plotis lygus

$$B_{eq} = \frac{1}{P_w(f_0)} \int_0^{\infty} P_w(f)df\,; \tag{2.8.1}$$

čia $P_w(f)$ yra signalo $w(t)$ galios spektrinis tankis.

2.9. Uždavinių sprendimo pavyzdžiai

Pavyzdys Nr. 1

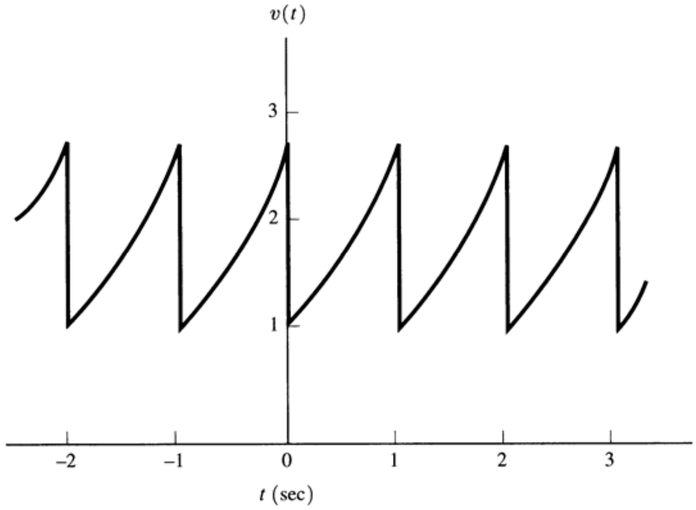
$\upsilon(t)$ yra periodinis signalas, kuris pavaizduotas 2.9.1 pav. Šio signalo periodas lygus $T = 1$ s. Laiko intervale $0 < t < 1$ $\upsilon(t) = e^t$. Apskaičiuokite šio signalo vidurkį $V_{dc} = \langle \upsilon(t) \rangle$ ir efektinį vidurkį $V_{rms} = \sqrt{\langle \upsilon^2(t) \rangle}$.

Sprendimas

Bendruoju atveju vidurkis skaičiuojamas pagal formulę (2.1.3). Tačiau periodinės funkcijos atveju pakanka integruoti tik vieno periodo atžvilgiu:

$$V_{dc} = \langle \upsilon(t) \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \upsilon(t)dt = \int_0^1 e^t dt = e^1 - e^0 = e - 1 = 1.72 \text{ V}.$$

Analogiškai apskaičiuojamas ir kvadrato vidurkis:



2.9.1 pav.

$$V_{rms}^2 = \langle \upsilon^2(t) \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \upsilon^2(t)dt = \int_0^1 (e^t)^2 dt = \frac{1}{2}(e^2 - e^0) = 3.19 \text{ V}^2.$$

Vadinasi,

$$V_{rms} = \sqrt{3.19} = 1.79 \text{ V}.$$

Pavyzdys Nr. 2

Periodinė įtampa, kuri pavaizduota 2.9.1 pav., yra prijungta prie 600 Ω varžinės apkrovos. Šio signalo periodas lygus $T = 1$ s, o laiko intervale $0 < t < 1$ $\upsilon(t) = e^t$. Apskaičiuokite vidutinę srovės galią apkrovoje ir išreiškite ją dBm vienetais (decibelai 1 mW atžvilgiu).

Sprendimas

Pagal formulę (2.1.4),

$$P = \frac{V_{rms}^2}{R} = \frac{(1.79)^2}{600} = 5.32 \text{ mW}.$$

Išreiškus šią galią dBm vienetais,

$$10\lg\left(\frac{P}{10^{-3}}\right) = 10\lg\left(\frac{5.32\cdot 10^{-3}}{10^{-3}}\right) = 7.26\ \text{dBm}\,.$$

Pastaba: Didžiausioji momentinė galia lygi

$$\max[p(t)] = \max[\upsilon(t)i(t)] = \max\left[\frac{\upsilon^2(t)}{R}\right] = \frac{(e)^2}{600} = 12.32\ \text{mW}\,.$$

Pavyzdys Nr. 3

Apskaičiuokite signalo

$$w(t) = \Pi\left(\frac{t-5}{10}\right) + 8\sin(6\pi t)$$

spektrą $W(f)$.

Sprendimas

Signalo $w(t)$ spektras yra stačiakampio impulso ir sinusoidės spektrų suma. Pagal lentelę B-2 (žr. priedą), centruotojo stačiakampio impulso $\Pi(t/10)$ spektras yra

$$F\left[\Pi\left(\frac{t}{10}\right)\right] = 10\,\text{Sa}(10\pi f) \equiv 10\frac{\sin(10\pi f)}{10\pi f)}\,.$$

Funkcija $\Pi\left(\frac{t-5}{10}\right)$ gaunama, užvėlinus centruotąjį impulsą $\Pi\left(\frac{t}{10}\right)$ dydžiu $T_d = 5$. Pagal vėlinimo teoremą (žr. priedo lentelę B-1),

$$F\left[\Pi\left(\frac{t-5}{10}\right)\right] = F\left[\Pi\left(\frac{t}{10}\right)\right]e^{-j2\pi f5} = 10\frac{\sin(10\pi f)}{10\pi f)}e^{-j10\pi f}\,.$$

Dėmenį $8\sin(6\pi t)$ galima užrašyti šitaip:

$$8\sin(6\pi t) = 8\cos\left(6\pi t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Pagal lenteles B-1 ir B-2, šios funkcijos spektras lygus

$$F\left[8\cos\left(6\pi t - \frac{\pi}{2}\right)\right] = 8F\left[\cos\left(6\pi t - \frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{8}{2}\left[e^{-j\pi/2}\delta(f-3) + e^{j\pi/2}\delta(f+3)\right].$$

Atsižvelgus į tai, kad $e^{\pm j\pi/2} = \pm j$,

$$F\left[8\sin(6\pi t)\right] = j4[\delta(f+3) - \delta(f-3)]\,.$$

Taigi,

$$W(f) = 10\frac{\sin(10\pi f)}{10\pi f)}e^{-j10\pi f} + j4[\delta(f+3) - \delta(f-3)]\,.$$

Pavyzdys Nr. 4

Apskaičiuokite signalo

$$w(t) = 5 - 5e^{-2t}u(t)$$

spektrą $W(f)$.

Sprendimas

Pagal Furjė transformacijos apibrėžimą (2.2.1),

$$W(f)=\int_{-\infty}^{\infty} w(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty} 5e^{-j2\pi ft}dt-\int_{-\infty}^{\infty} 5e^{-2t}e^{-j2\pi ft}dt\,.$$

Pagal δ funkcijos integralinę išraišką (2.2.16), pirmasis integralas lygus $5\delta(f)$. Antrasis integralas lygus

$$\int_{-\infty}^{\infty} 5e^{-2t}e^{-j2\pi ft}dt=5\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(1+j\pi f)t}dt=5\left.\frac{e^{-2(1+j\pi f)t}}{-2(1+j\pi f)}\right|_{0}^{\infty}=\frac{5}{2+j2\pi f}\,.$$

Taigi,

$$W(f)=5\delta(f)-\frac{5}{2+j2\pi f}\,.$$

<u>*Pavyzdys Nr. 5*</u>

Įrodykite, kad funkcijos $\varphi_1(t)=\Pi(t)$ ir $\varphi_2(t)=\sin 2\pi t$ yra ortogonalios intervale $-0.5<t<0.5$.

Sprendimas

Reikia įrodyti, kad funkcijų $\varphi_1(t)$ ir $\varphi_2(t)$ sandaugos integralas nuo $a=-0.5$ iki $b=0.5$ yra lygus nuliui (žr. ortogonalumo sąlygą (2.4.1)). Šis integralas lygus

$$\int_a^b \varphi_1(t)\varphi_2(t)dt=\int_{-0.5}^{0.5} 1\cdot\sin(2\pi t)dt=-\left.\frac{\cos 2\pi t}{2\pi}\right|_{-0.5}^{0.5}=-\frac{1}{2\pi}[\cos\pi-\cos(-\pi)]=0\,.$$

Pastaba: Analogiškai galima įsitikinti, kad šios dvi funkcijos nėra ortogonalios intervale $0<t<1$. Taip yra todėl, kad $\Pi(t)=0$, kai $t>0.5$. Vadinasi, šiuo atveju funkcija $\sin(2\pi t)$ integruojama nuo 0 iki 0.5, o šis integralas nėra lygus nuliui.

<u>*Pavyzdys Nr. 6*</u>

Apskaičiuokite 2.9.1 pav. pavaizduoto signalo kompleksinės Furjė eilutės koeficientus c_n ir šio signalo galios spektrinį tankį. Šio signalo periodas lygus $T=1$ s, o laiko intervale $0<t<1$ $\upsilon(t)=e^t$.

Sprendimas

Kompleksinė Furjė eilutė apibrėžiama sąryšiu (2.5.2), o jos koeficientai skaičiuojami pagal formulę (2.5.3). Kadangi šiuo atveju signalas yra periodinis, Furjė eilutės parametras T_0 sutampa su signalo periodu $T=1$, o integralo (2.5.3) reikšmė nepriklauso nuo apatinio integravimo rėžio a. Laikysime, kad $a=0$. Tuomet, turint omenyje, kad $\omega_0=2\pi f_0=2\pi/T_0=$ $=2\pi$,

$$c_n=\int_0^1 \upsilon(t)e^{-jn2\pi t}dt=\int_0^1 e^te^{-jn2\pi t}dt=\left.\frac{e^{(1-j2\pi n)t}}{1-j2\pi n}\right|_0^1=\frac{e-1}{1-j2\pi n}=1.72\frac{1}{1-j6.28n}\,.$$

Taigi,

$$\upsilon(t)=1.72\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{1-j6.28n}e^{j2\pi nt}\,.$$

Bet kurio periodinio signalo galios spektrinis tankis skaičiuojamas pagal formulę (2.5.31). Įrašę gautąją c_n išraišką į (2.5.31), randame

$$P(f)=2.95\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{1-39.48n^2}\delta(f-n)\,.$$

Uždaviniai

2.1. Įrodykite, kad harmoninio signalo, kurio amplitudė A, o dažnis f_0, efektinis vidurkis lygus $A/\sqrt{2}$.

2.2. Įtampos kritimas apkrovoje yra lygus $\upsilon(t) = A_0 \cos\omega_0 t$, o srovės stipris apkrovoje yra teigiamų ir neigiamų stačiakampių impulsų seka

$$i(t) = I_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\Pi\left(\frac{t - nT_0}{T_0/2}\right) - \Pi\left(\frac{t - nT_0 - (T_0/2)}{T_0/2}\right) \right],$$

kur $\omega_0 = 2\pi/T_0$, $T_0 = 1$ s, $A_0 = 10$ V, o $I_0 = 5$ mA.

(a) Raskite momentinės galios prieklausos nuo laiko išraišką ir pavaizduokite ją grafiškai.
(b) Apskaičiuokite vidutinę galią.

2.3. Stiprintuvo įėjime prijungtas harmoninės srovės šaltinis, kurio srovės efektinis vidurkis lygus $I_{\text{rms}} = 0.5$ mA, o stiprintuvo išėjime prijungta $50\ \Omega$ apkrova. Stiprintuvo įėjimo varža lygi $2\ \text{k}\Omega$, o išėjimo varža lygi $10\ \Omega$. Apskaičiuokite ir išreiškite decibelais šio grandyno stiprinimo koeficientą.

2.4. Apskaičiuokite šio signalo spektrą: $w(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

2.5. Apskaičiuokite Gauso funkcijos pavidalo signalo

$$w(t) = e^{-\pi(t/T)^2}$$

spektrą $W(f)$ (dydis T turi įeiti į $W(f)$ išraišką kaip parametras). Kaip keičiasi funkcijų $w(t)$ ir $W(f)$ plotis, didėjant parametrui T?
Pastaba: Sprendžiant šį uždavinį, reikia pasinaudoti sąryšiu (A-75).

2.6. Apskaičiuokite dviejų skirtingo dažnio harmoninių signalų sandaugos

$$w(t) = \sin 2\pi f_1 t \cdot \cos 2\pi f_2 t$$

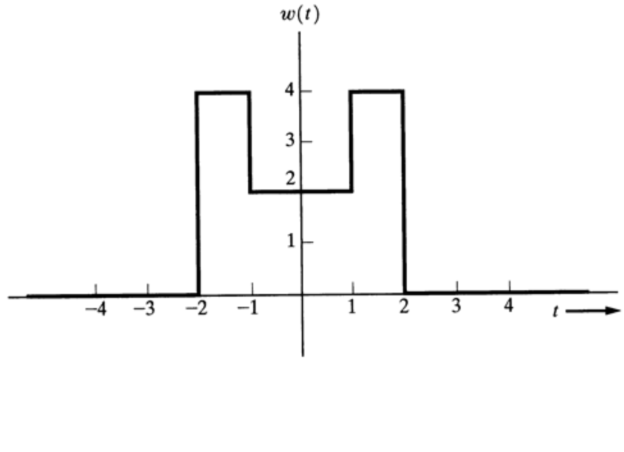
spektrą (skaičiuojant, reikia pasinaudoti lentele B-1).

2.7. Apskaičiuokite trikampio signalo

$$s(t) = \begin{cases} At, & 0 < t < T \\ 0, & t \leq 0 \text{ arba } t \geq T \end{cases}$$

spektrą $W(f)$ (dydžiai A ir T turi įeiti į $W(f)$ išraišką kaip parametrai).

2.8. Apskaičiuokite žemiau pavaizduoto signalo spektrą.



2.9. Yra žinomas signalo $w(t)$ spektras:

$$W(f) = \frac{j2\pi f}{1 + j2\pi f}.$$

Raskite žemiau pateiktų signalų $x(t)$ spektrus $X(f)$:

(a) $x(t) = w(2t + 2)$.

(b) $x(t) = e^{-jt} w(t - 1)$; čia j yra menamasis vienetas.

(c) $x(t) = 2\dfrac{dw}{dt}$.

(d) $x(t) = w(1 - t)$.

2.10. Įrodykite, kad:

(a) Jeigu $w(t)$ yra realioji lyginė laiko funkcija, jos Furjė transformacija $W(f)$ yra realioji funkcija.

(b) Jeigu $w(t)$ yra realioji nelyginė laiko funkcija, jos Furjė transformacija $W(f)$ yra menamoji funkcija.

2.11. Įrodykite, kad dviejų signalų sandaugos $w(t) = w_1(t)w_2(t)$ spektras lygus

$$W(f) = \int_{-\infty}^{\infty} W_1(\lambda) W_2(f - \lambda) d\lambda;$$

čia $W_1(f)$ ir $W_2(f)$ yra signalų $w_1(t)$ ir $w_2(t)$ Furjė transformacijos (spektrai).

2.12. Apskaičiuokite signalo $w(t) = A\Pi(t/T)\sin\omega_0 t$ spektrą.

2.13. Duotas signalas $w(t) = 5 + 12\cos\omega_0 t$; čia $\omega_0 = 2\pi f_0$, o $f_0 = 10$ Hz.

(a) Apskaičiuokite šio signalo autokoreliacijos funkciją $R_w(\tau)$.

(b) Apskaičiuokite šio signalo galios spektrinį tankį $P_w(f)$.

2.14. Duotas signalas $s(t) = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$. Raskite šio signalo efektinį vidurkį, kaip parametrų A_1 ir A_2 funkciją, šiais atvejais:

(a) $\omega_1 = \omega_2$ ir $\varphi_1 = \varphi_2$.

(b) $\omega_1 = \omega_2$ ir $\varphi_1 = \varphi_2 + \pi/2$.

(c) $\omega_1 = \omega_2$ ir $\varphi_1 = \varphi_2 + \pi$.

(d) $\omega_1 = 2\omega_2$ ir $\varphi_1 = \varphi_2$.

(e) $\omega_1 = 2\omega_2$ ir $\varphi_1 = \varphi_2 + \pi$.

2.15. Įrodykite, kad begalinės δ funkcijos pavidalo impulsų sekos

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0)$$

spektras yra

$$f_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kf_0);$$

čia $f_0 = 1/T_0$. *Pastaba*: sprendžiant šį uždavinį, reikia pirmąją sumą išreikšti Furjė eilute, o po to apskaičiuoti jos Furjė transformaciją.

2.16. Žemiau pateiktuose grafikuose yra pavaizduotos trys funkcijos.
(a) Įrodykite, kad šios funkcijos yra ortogonalios intervale -4 < t < 4.
(b) Raskite atitinkamą ortonormuotųjų funkcijų rinkinį.
(c) Išreiškite signalą

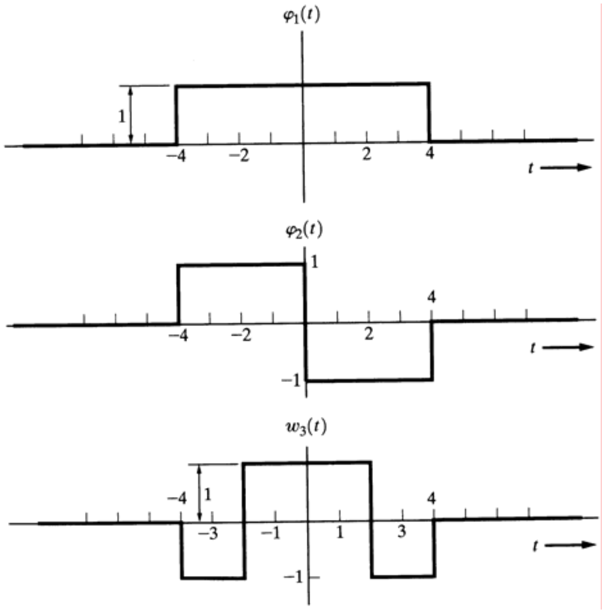
$$w(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 4 \\ 0, & t < 0 \text{ arba } t > 4 \end{cases}$$

ortogonaliąja eilute, naudodami gautąsias ortonormuotąsias funkcijas.
(d) Apskaičiuokite gautosios ortogonaliosios eilutės vidutinį kvadratinį nuokrypį nuo signalo $w(t)$. Šiuo atveju vidutinį kvadratinį nuokrypį reikia skaičiuoti pagal formulę

$$\varepsilon = \sqrt{\left\langle \left[w(t) - \sum_{k=1}^{3} a_k \varphi_k(t) \right]^2 \right\rangle} \equiv \sqrt{\frac{1}{8} \int_{-4}^{4} \left[w(t) - \sum_{k=1}^{3} a_k \varphi_k(t) \right]^2 dt} \; .$$

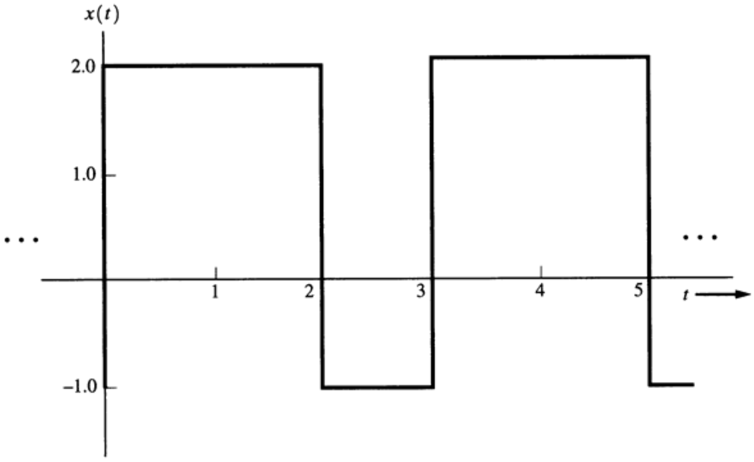
(e) Pakartokite punktus (c) ir (d) signalui

$$w(t) = \begin{cases} \cos(\pi t / 4), & 0 \le t \le 4 \\ 0, & t < 0 \text{ arba } t > 4 \end{cases}$$



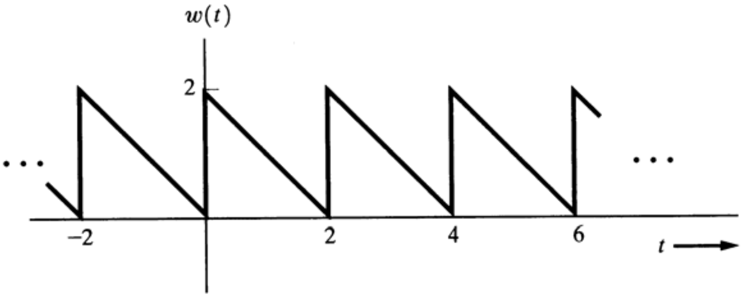
2.17. Įrodykite, kad kvadratūrinės Furjė eilutės (2.5.9) bazinės funkcijos $\cos(n\omega_0 t)$ ir $\sin(n\omega_0 t)$ yra ortogonalios intervale $a < t < a + T_0$; čia $\omega_0 = 2\pi/T_0$.

2.18. Raskite žemiau pavaizduoto signalo kompleksinės Furjė eilutės koeficientų išraišką.



2.19. Periodinis signalas, kuris pavaizduotas 2.18 uždavinio sąlygoje, yra praleidžiamas pro tiesinį filtrą, kurio impulsinis atsakas yra $h(t) = e^{-\alpha t}u(t)$; čia $t > 0$, $\alpha > 0$, o $u(t)$ yra vienetinio šuolio funkcija (žr. lentelę B-2).
(a) Raskite filtro išėjimo signalo $y(t) = x(t) * h(t)$ kompleksinės Furjė eilutės koeficientus.
(b) Raskite išėjimo signalo $y(t)$ vidutinę normuotąją galią.

2.20. Išreiškite žemiau pavaizduotąjį signalą
(a) kompleksine Furjė eilute,
(b) kvadratūrine Furjė eilute.



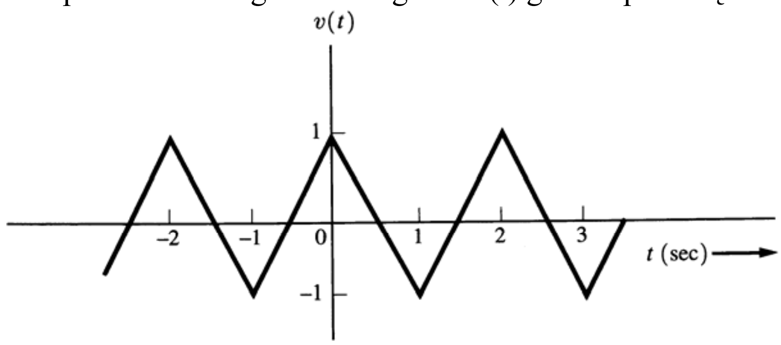
2.21. Duotas periodinis signalas $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(t - nT_0)$, kur

$$p(t) = \begin{cases} At, & 0 < t < T; \\ 0, & t \le 0 \text{ arba } t \ge T; \end{cases}$$

o $T \le T_0$.
(a) Raskite kompleksinės Furjė eilutės koeficientus c_n.
(b) Raskite kvadratūrinės Furjė eilutės koeficientus $\{x_n, y_n\}$.
(c) Raskite polinės Furjė eilutės koeficientus $\{D_n, \varphi_n\}$.

2.22. Įrodykite kompleksinės ir kvadratūrinės Furjė eilučių koeficientų sąryšį (2.5.12).

2.23. $\upsilon(t)$ yra trikampis periodinis signalas, kuris pavaizduotas žemiau.
(a) Raskite kompleksinę Furjė eilutę, kuri atitinka signalą $\upsilon(t)$.
(b) Apskaičiuokite normuotąją vidutinę galią.
(c) Apskaičiuokite ir pavaizduokite grafiškai signalo $\upsilon(t)$ amplitudžių spektrą.
(d) Apskaičiuokite ir pavaizduokite grafiškai signalo $\upsilon(t)$ galios spektrinį tankį.



2.24. Naudodamiesi sinuso ir kosinuso apibrėžimais

$$\sin z \equiv \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} \quad \text{ir} \quad \cos z \equiv \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2},$$

įrodykite šias trigonometrines tapatybes:

(a) $\cos z_1 \cos z_2 = \frac{1}{2}\cos(z_1 - z_2) + \frac{1}{2}\cos(z_1 + z_2)$,

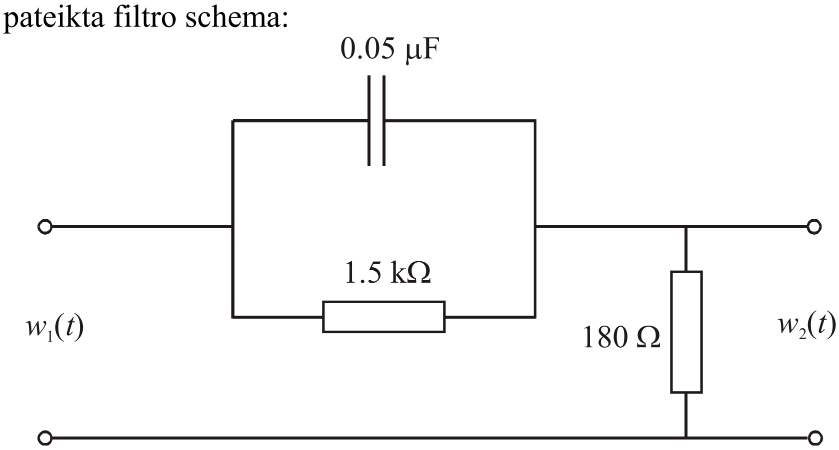
(b) $\sin z_1 \sin z_2 = \frac{1}{2}\cos(z_1 - z_2) - \frac{1}{2}\cos(z_1 + z_2)$,

(c) $\sin z_1 \cos z_2 = \frac{1}{2}\sin(z_1 - z_2) + \frac{1}{2}\sin(z_1 + z_2)$.

2.25. Duoti du kompleksiniai skaičiai $c_1 = x_1 + jy_1$ ir $c_2 = x_2 + jy_2$; čia x_1, x_2, y_1 ir y_2 yra realieji skaičiai. Įrodykite, kad

$$\mathrm{Re}(c_1)\mathrm{Re}(c_2) = \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}(c_1 c_2^*) + \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}(c_1 c_2).$$

2.26. Žemiau pateikta filtro schema:

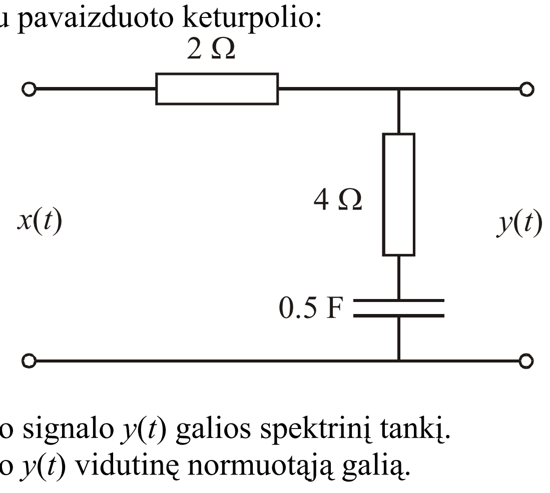


(a) Raskite šio filtro perdavimo funkciją.
(b) Grafiškai pavaizduokite amplitudžių ir fazių spektrus.
(c) Raskite šio filtro galios perdavimo funkciją.
(d) Nubraižykite galios perdavimo funkcijos grafiką.

2.27. Signalas $x(t)$, kurio galios spektrinis tankis

$$P_x(f) = \frac{2}{(1/4\pi)^2 + f^2},$$

yra prijungtas prie žemiau pavaizduoto keturpolio:



(a) Apskaičiuokite išėjimo signalo $y(t)$ galios spektrinį tankį.
(b) Apskaičiuokite signalo $y(t)$ vidutinę normuotąją galią.

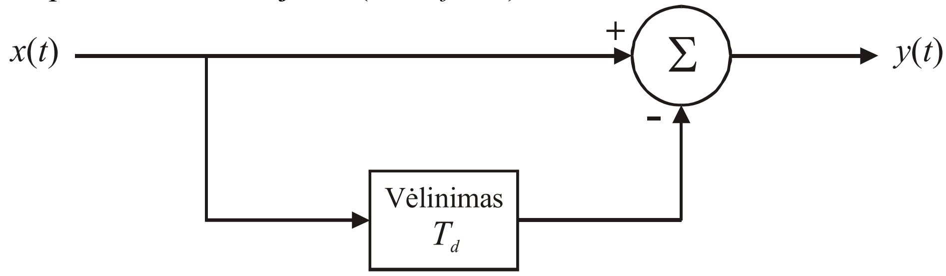
2.28. Signalo $x(t)$ galios spektrinis tankis lygus

$$P_x(f) = \frac{K}{[1 + (2\pi f / B)^2]^2};$$

čia K ir B yra teigiamos konstantos.
(a) Išreiškite šio signalo 3-dB lygio dažnių juostos plotį.
(b) Išreiškite šio signalo ekvivalentųjį dažnių juostos plotį.

2.29. Signalas $x(t) = 0.5 + 1.5\cos\left(\frac{2}{3}\pi t\right) + 0.5\sin\left(\frac{2}{3}\pi t\right)\mathrm{V}$ yra praleidžiamas pro žemųjų dažnių *RC* filtrą (žr. 2.6.2a pav.), kurio $R = 1\ \Omega$, o $C = 1$ F.
(a) Apskaičiuokite įėjimo signalo $x(t)$ galios spektrinį tankį $P_x(f)$.
(b) Apskaičiuokite išėjimo signalo $y(t)$ galios spektrinį tankį $P_y(f)$.
(c) Apskaičiuokite išėjimo signalo vidutinę normuotąją galią P_y.

2.30. Žemiau pateikta ***keterinio filtro*** (*comb filter*) struktūrinė schema.



Vėlinimas lygus $T_d = 0.1$.
(a) Grafiškai pavaizduokite šio filtro dažninę amplitudės charakteristiką.
(b) Grafiškai pavaizduokite šio filtro išėjimo signalo $y(t)$ amplitudžių spektrą $|Y(f)|$, kai įėjimo signalas yra $x(t) = \Pi(t/T)$, kur $T = 1$.

2.31. Duotas trikampio impulso formos signalas:

$$s(t) = \Lambda(t/T).$$

(a) Raskite šio signalo absoliutinį dažnių juostos plotį.
(b) Išreiškite šio signalo 3 dB lygio juostos plotį.
(c) Išreiškite šio signalo ekvivalentųjį juostos plotį.
(d) Išreiškite šio signalo pirmojo nulio juostos plotį.

3. SKAITMENINIŲ IMPULSINIŲ SIGNALŲ PERDAVIMAS

Šiame skyriuje bus kalbama apie tai, kaip užkoduoti analoginį signalą impulsų seka, kaip tą impulsų seką paversti skaitmeniniu signalu ir kaip apdoroti skaitmeninį signalą, kad jo dažnių juostos plotis būtų kuo mažesnis.

Skaitmeniniai signalai yra plačiai naudojami dėl palyginti žemos skaitmeninių grandinių kainos ir dėl to, kad skaitmeninius duomenis iš skaitmeninių informacijos šaltinių galima apjungti su užkoduotais skaitmeniniu pavidalu duomenim, kurie gauti iš analoginių informacijos šaltinių, ir tokiu būdu sukurti bendros paskirties telekomunikacijų sistemą.

Šio skyriaus pagrindinės temos yra šios:

- Analoginių signalų keitimas skaitmeniniais signalais.
- Skaitmeninių signalų spektro skaičiavimas.
- Filtravimo įtaka impulsinio signalo kokybei.
- Kelių skaitmeninių duomenų srautų laikinis sutankinimas į vieną skaitmeninį srautą.

3.1. Impulsų amplitudės moduliavimas

Impulsų amplitudės moduliavimu (*pulse amplitude modulation*, ***PAM***) vadinamas analoginio signalo keitimas impulsiniu signalu, kuriame analoginę informaciją nusako impulsų amplitudės. Šį PAM signalą galima pakeisti skaitmeniniu signalu, kuris moduliuoja nešlį arba tiesiogiai perduodamas kanalu. Todėl analoginio signalo keitimas PAM signalu yra pirmasis žingsnis, perduodant analoginį signalą skaitmenine ryšių sistema.

Naudojant impulsų amplitudės moduliavimą, perduodamasis analoginis informacinis signalas pakeičiamas kitokio pavidalo signalu, kuris yra impulsų pavidalo, tačiau turi visą informaciją, kuri buvo pradiniame signale. Tokio tipo signalo keitimas jau buvo minimas 2.7.2 poskyryje, kur buvo kalbama apie analoginio signalo keitimą δ funkcijos pavidalo impulsų seka. Naudojant bendrojo pavidalo (t.y., baigtinio pločio) impulsus, taip pat galioja išvada, kuri buvo suformuluota 2.7.2 poskyryje ir 2.7.1 poskyryje (imties teorema): kad PAM signalas pilnai nusakytų pradinį analoginį informacinį signalą, impulsų dažnis f_s turi būti nemažesnis už Naikvisto dažnį (2.7.11), t.y., $f_s \geq 2B$, kur B yra analoginio signalo ribinis dažnis (žemadažnio signalo atveju ribinis dažnis sutampa su signalo dažnių juostos pločiu).

Egzistuoja du PAM signalų gavimo būdai: natūralusis ėmimas ir momentinis ėmimas. ***Natūraliojo ėmimo*** atveju PAM signalo kitimas impulso metu tiksliai atitinka pradinio signalo kitimą tame laiko intervale (žr. 3.1.1 pav.). ***Momentinio ėmimo*** atveju visi PAM signalo impulsai yra stačiakampiai, o jų amplitudės nusako pradinio signalo vertes diskrečiais laiko momentais (žr. 3.1.5 pav.). Stačiakampių impulsų seką lengviau paversti skaitmeniniu signalu, tačiau natūraliojo ėmimo PAM signalą lengviau generuoti.

3.1.1. Natūralusis ėmimas

Natūraliojo ėmimo PAM signalo generavimui pakanka paprasto elektroninio jungiklio (žr. 3.1.2 pav.).

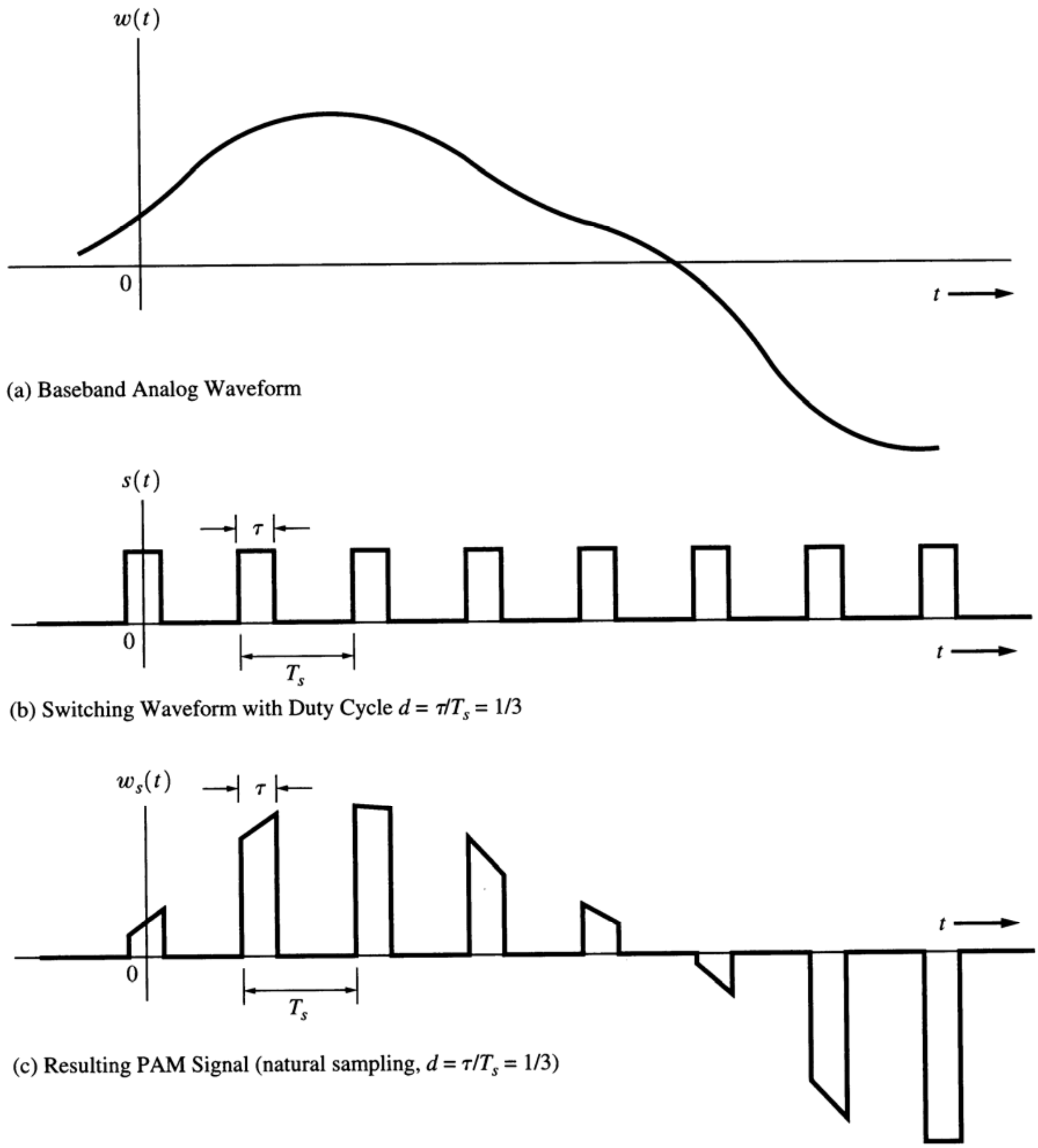
Natūraliojo ėmimo PAM signalą $w_s(t)$ matematiškai apibrėžia lygybė

$$w_s(t) = w(t)s(t), \tag{3.1.1}$$

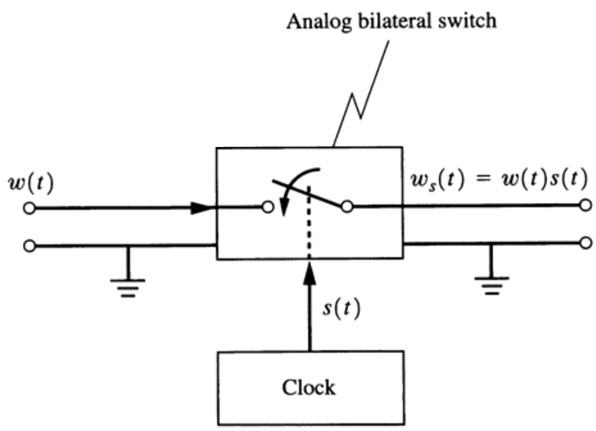
kur $s(t)$ yra ***perjungimo signalas*** (*switching signal*). Natūraliojo ėmimo atveju perjungimo signalas yra periodinė stačiakampių τ trukmės impulsų seka (žr. 3.1.1b pav.)

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{t-kT_s}{\tau}\right), \tag{3.1.2}$$

kurios periodas $T_s = 1/f_s \leq 1/(2B)$.



3.1.1 pav. Natūraliojo ėmimo PAM signalas. a – pradinis signalas, b – perjungimo signalas, c – galutinis natūraliojo ėmimo PAM signalas.



3.1.2 pav. Natūraliojo ėmimo PAM signalo generavimas.

Rasime natūraliojo ėmimo PAM signalo (3.1.1) spektrą. Funkcijų sandaugos (3.1.1) Furjė transformacija yra lygi jų spektrų sąsūkai (žr. B-1 lentelę):

$$W_s(f) = W(f) * S(f), \tag{3.1.3}$$

kur $S(f)$ yra perjungimo signalo (3.1.2) spektras. Kadangi $s(t)$ yra periodinė funkcija, jos spektrą galima skaičiuoti pagal (2.5.21) formulę, kur $f_0 = f_s$:

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n \delta(f - nf_s), \tag{3.1.4}$$

o c_n yra Furjė eilutės (2.5.2) koeficientai:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n e^{jn\omega_s t}, \tag{3.1.5}$$

kur $\omega_s = 2\pi f_s$ (žr. periodinių signalo Furjė eilučių aprašymą 2.5.1 poskyryje). Įrašę (3.1.4) į (3.1.3) ir pasinaudoję tuo, kad funkcijos $W(f)$ ir δ funkcijos sąsūka sutampa su $W(f)$ (žr. (2.2.15b)), randame

$$W(f) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n W(f - nf_s). \tag{3.1.6}$$

Periodinės funkcijos Furjė eilutės koeficientus c_n galima apskaičiuoti pagal (2.5.28) formulę, kur $H(f)$ yra vieno periodo spektras, $f_0 = f_s$, o $T_0 = T_s$:

$$c_n = f_s H(nf_s). \tag{3.1.7}$$

Kadangi šiuo atveju taškas $t = 0$ atitinka impulso centrą (žr. 3.1.1b pav.), tai $H(f)$ sutampa su centruotojo stačiakampio τ trukmės impulso Furjė transformacija (2.2.32), kur $T = \tau$. Vadinasi,

$$c_n = f_s \tau \frac{\sin(\pi n \tau f_s)}{\pi n \tau f_s} \equiv d \frac{\sin(\pi n d)}{\pi n d} = \frac{\sin(\pi n d)}{\pi n}, \tag{3.1.8}$$

kur d yra impulso trukmės ir impulsų periodo santykis:

$$d \equiv \tau / T_s = \tau \cdot f_s. \tag{3.1.9}$$

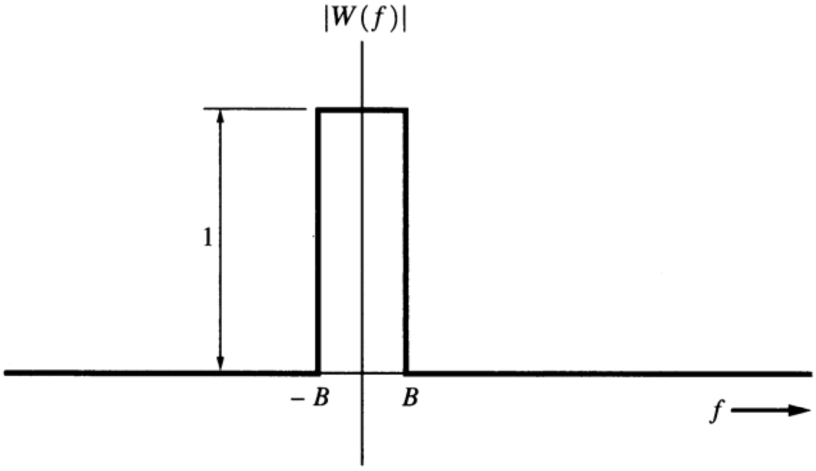
Įrašę (3.1.8) į (3.1.6), randame

$$W_s(f) = F[w_s(t)] = d \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi n d}{\pi n d} W(f - nf_s). \tag{3.1.10}$$

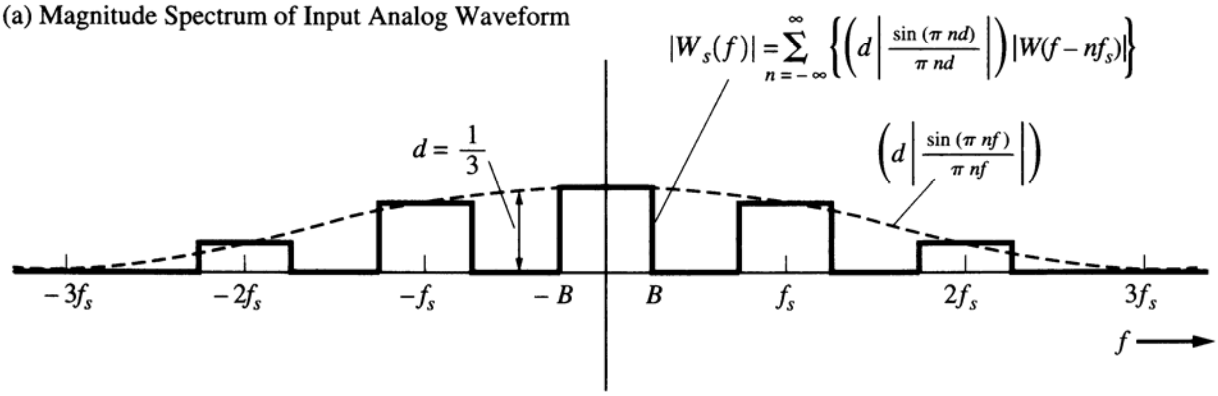
Vadinasi, natūraliojo ėmimo PAM signalo spektras skiriasi nuo nulio atskiruose dažnių intervaluose, kurių kiekvieno plotis lygus dvigubam pradinio signalo dažnių juostos pločiui $2B$ ir kurie pasislinkę vienas kito atžvilgiu impulsų dažniu f_s (žr. 3.1.3b pav.). Be to, n-tajame dažnių intervale ($nf_s - B < f < nf_s + B$) spektras yra lygus pradinio signalo spektrui, padaugintam iš pastovaus daugiklio $d \dfrac{\sin(\pi n d)}{\pi n d}$.

3.1.3 pav. matyti, kad PAM signalo spektro plotis yra žymiai didesnis už pradinio analoginio signalo spektro plotį. Pvz., spektro pirmojo nulio padėtis sutampa su dažnio funkcijos $\dfrac{\sin(\pi \tau f)}{\pi \tau f}$ pirmojo nulio padėtimi $1/\tau$. Vadinasi, jeigu, pvz., $d = 1/3$, tuomet PAM signalo spektro pirmojo nulio dažnis yra $1/(dT_s) = 3/T_s = 3f_s \geq 6B$.

Priėmus PAM signalą, pradinį analoginį signalą galima atstatyti, praleidus PAM signalą pro žemųjų dažnių filtrą, kurio ribinis dažnis f_r tenkina nelygybę $B < f_r < f_s - B$ (žr. 3.1.3b pav.). Priimtasis signalas skirsis nuo pradinio signalo tik pastoviu daugikliu $d = \tau / T_s$ (kai $n = 0$, $d \dfrac{\sin \pi n d}{\pi n d} = d$), kurį galima kompensuoti, naudojant stiprintuvą. Be to, 3.1.3b pav. matyti, kad priimtajame signale nėra iškraipymų tik tuo atveju, kai $f_s \geq 2B$, nes priešingu



(a) Magnitude Spectrum of Input Analog Waveform

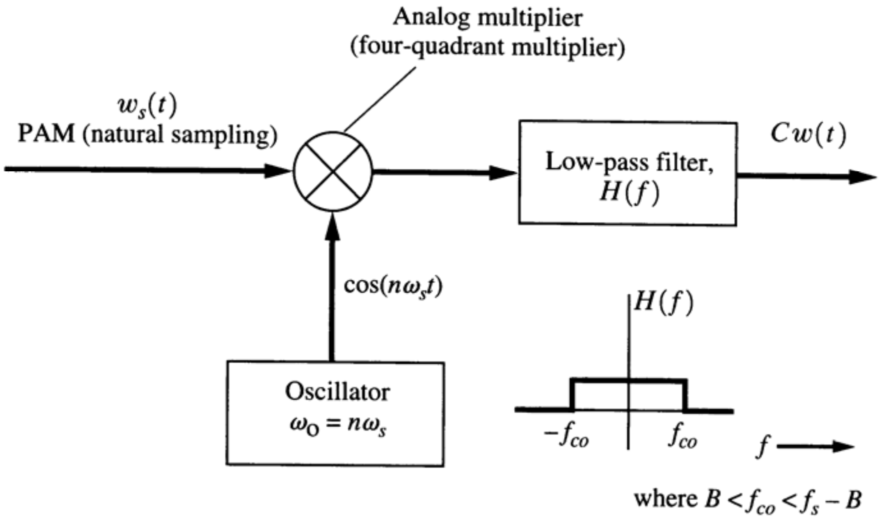


(b) Magnitude Spectrum of PAM (natural sampling) with $d = 1/3$ and $f_s = 4$ B

3.1.3 pav. Natūraliojo ėmimo PAM signalo spektras. a – įėjimo signalo amplitudžių spektras, b – atitinkamo natūraliojo ėmimo PAM signalo amplitudžių spektras.

atveju pradinio signalo spektro "kopijos" persikloja (žr. 2.7.2 poskyrį). Tai yra dar vienas Naikvisto ėmimo spartos (2.7.11) reikalavimo pavyzdys. Praktikoje visiškai išvengti spektrų sanklotos neįmanoma, nes visi realieji signalai yra baigtinės trukmės, todėl jų *absoliutinis* dažnių juostos plotis yra begalinis (žr. 2.7 poskyrį). Siekiant sumažinti tokio pobūdžio signalų iškraipymus, prieš PAM signalo formavimą analoginis informacinis signalas dažniausiai praleidžiamas pro žemųjų dažnių filtrą, kurio ribinis dažnis yra nedidesnis už $f_s/2$.

Pradinį analoginį signalą galima atkurti ne tik pagal "centrinę" jo spektro kopiją PAM signalo spektre (t.y., pagal PAM signalo spektro dalį, kuri yra dažnių intervale nuo 0 iki B), bet ir pagal bet kurią kitą PAM signalo spektro dalį. Kartais tokiu būdu atkurtas signalas yra mažiau iškraipytas, negu signalas, kuris gautas iš "centrinės" dalies. Taip yra dėl žemųjų dažnių triukšmo PAM signale. Pvz., maitinimo įtampos pulsacijos arba įrenginio mechaninė vibracija gali sukelti triukšmą, kurio spektras persikloja su PAM signalo žemųjų dažnių sritimi, tačiau neturi įtakos toms spektro sritims, kurios atitinka $n = 1$, 2 ir t.t. Tokiais atvejais priimtasis PAM signalas apdorojamas tokiu būdu, kad jo spektras "pasislinktų" į žemųjų dažnių pusę atstumu nf_s ($n = 1, 2, \ldots$). Tuo tikslu PAM signalas padauginamas iš sinusoidės pavidalo signalo, kurio dažnis lygus nf_s ($n = 1, 2, \ldots$) (žr. realiojo signalo dažnio poslinkio teoremą B-1 lentelėje; apie tokios signalo transformacijos įtaką signalo spektrui taip pat kalbama 4 skyriuje). Tokiu būdu suformuoto signalo spektro dalis, kuri yra dažnių intervale $-B < f < B$, sutampa su priimtojo PAM signalo spektro dalimi, kuri yra dažnių intervale $nf_s - B < f < nf_s + B$. Ši spektro dalis išskiriama, naudojant žemųjų dažnių filtrą (žr. 3.1.4 pav.).



3.1.4 pav. Natūraliojo ėmimo PAM signalo demoduliavimas.

3.1.2. Momentinis ėmimas

Analoginį signalą galima paversti PAM signalu, kuriame kiekvieno impulso amplitudė sutampa su analoginio signalo verte tam tikru laiko momentu. Pvz., 3.1.5 pav. kiekvieno impulso amplitudė sutampa su analoginio signalo $w(t)$ verte laiko momentu, atitinkančiu impulso centrą. Toks analoginio signalo keitimas PAM signalu vadinamas ***momentiniu ėmimu***. Matematiškai momentinio ėmimo signalas $w_s(t)$ apibrėžiamas šitaip:

$$w_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w(kT_s)h(t-kT_s), \qquad (3.1.11)$$

kur $T_s = 1/f_s$ yra impulsų periodas, o $h(t)$ nusako centruotąjį stačiakampį $\tau < T_s$ trukmės vienetinį impulsą:

$$h(t) = \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1, & |t| < \tau/2; \\ 0, & |t| > \tau/2. \end{cases} \qquad (3.1.12)$$

Kaip ir natūraliojo ėmimo atveju, momentinio ėmimo sparta f_s turi būti nemažesnė už Naikvisto dažnį $2B$.

Rasime momentinio ėmimo PAM signalo (3.1.11) spektrą. Visų pirma signalo išraišką (3.1.11) perrašysime, pasinaudoję tuo, kad bet kurią funkciją galima pakeisti tos funkcijos ir δ funkcijos sąsūka (žr. (2.2.15b)):

$$w_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w(kT_s)h(t) * \delta(t-kT_s) = h(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} w(kT_s)\delta(t-kT_s) = h(t) * \left[w(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT_s) \right]. \qquad (3.1.13)$$

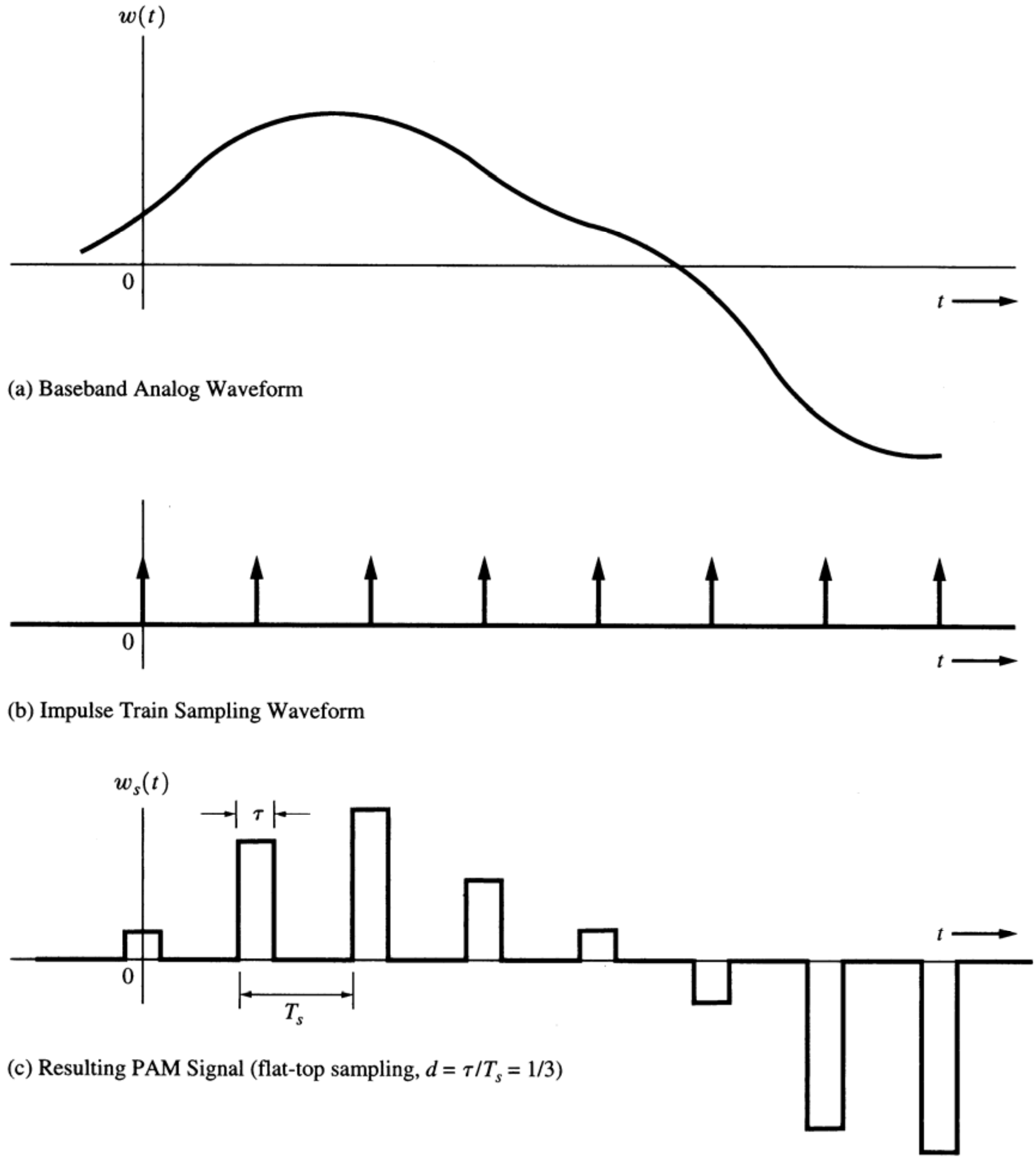
Atsižvelgę į tai, kad: 1) sąsūkos spektras lygus spektrų sandaugai, 2) sandaugos spektras lygus spektrų sąsūkai, 3) δ funkcijos spektras lygus vienetinei funkcijai (žr. (2.2.16)), ir pasinaudoję vėlinimo teorema (žr. B-1 lentelę), gauname tokią ėmimo signalo (3.1.13) spektro išraišką:

$$W_s(f) = H(f)\left[W(f) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f kT_s} \right], \qquad (3.1.14)$$

kur $H(f)$ yra stačiakampio τ trukmės impulso spektras (žr. (2.2.32)):

$$H(f) = \tau \frac{\sin(\pi\tau f)}{\pi\tau f} = \frac{\sin(\pi\tau f)}{\pi f}. \qquad (3.1.15)$$

Suma (3.1.14) lygybės dešiniojoje pusėje – tai Furjė eilutė, kurios argumentas yra dažnis f, o visi koeficientai lygūs vienetui. Kadangi (3.1.14) lygybė galioja, esant visiems dažniams, tai



3.1.5 pav. Momentinio ėmimo PAM signalas. a – pradinis analoginis signalas, b –imties signalas, c – galutinis momentinio ėmimo PAM signalas.

ši suma yra periodinės dažnio funkcijos, kurios periodas lygus $1/T_s \equiv f_s$, išraiška Furjė eilute (žr. 2.5.1 poskyrį). Žinome, kad periodinės funkcijos Furjė koeficientus galima išreikšti vieno periodo spektru pagal (2.5.28) formulę. Vadinasi, vienas periodas šiuo atveju – tai dažnio funkcija, kurios Furjė transformacija lygi konstantai $f_s \equiv 1/T_s$. Konstantos atvirkštinė Furjė transformacija – tai δ funkcija, padauginta iš tos konstantos (žr. (2.2.16)). Vadinasi, suma lygybės (3.1.14) dešiniojoje pusėje – tai periodinė δ funkcijų seka:

$$F\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT_s)\right]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-j2\pi fkT_s}=\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(f-kf_s). \qquad (3.1.16)$$

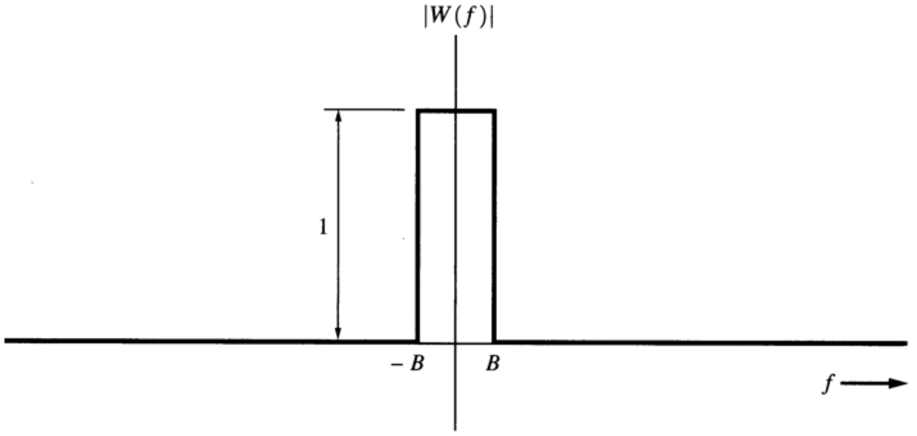
(antroji lygybė – tai Puasono sumos formulė (2.5.25)). Įrašę (3.1.16) į (3.1.14), randame

$$W_s(f)=\frac{1}{T_s}H(f)\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}W(f)*\delta(f-kf_s)\right]=\frac{1}{T_s}H(f)\sum_{k=-\infty}^{\infty}W(f-kf_s). \qquad (3.1.17)$$

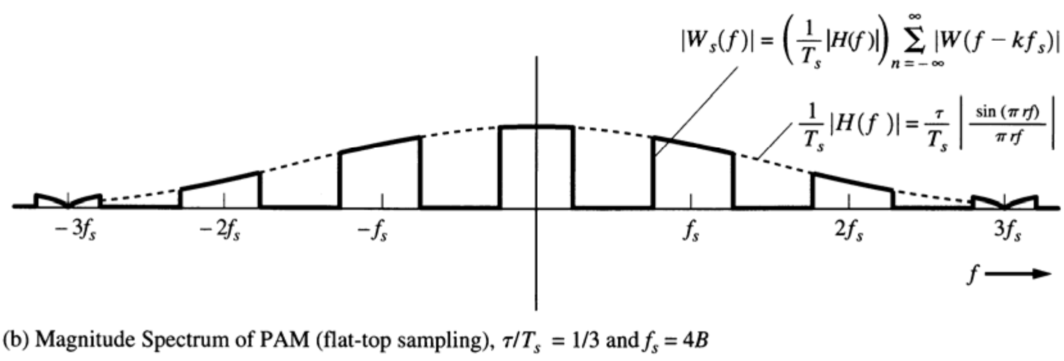
Atskiru atveju, kai $h(t)$ yra δ funkcijos pavidalo, (3.1.17) lygybė virsta impulsinio ėmimo signalo spektro išraiška (2.7.15).

Momentinio ėmimo PAM spektras, kai pradinio signalo spektras yra stačiakampis, pavaizduotas 3.1.6b pav. Palyginus su natūraliojo ėmimo PAM signalo spektru (3.1.10) (žr. 3.1.3b pav.), matyti, kad šiuo atveju kiekviena pradinio signalo spektro "kopija" dauginama ne iš pastovaus daugiklio $d\dfrac{\sin \pi nd}{\pi nd}$, o iš dažnio funkcijos $H(f)$. Todėl momentinio ėmimo signalo spektro dalys, esančios spektro srityse $nf_s - B < f < nf_s + B$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), savo pavidalu šiek tiek skiriasi nuo pradinio analoginio signalo spektro $W(f)$. Pvz., jeigu pradinis signalas atkuriamas, naudojant žemųjų dažnių filtrą, kurio ribinis dažnis f_r tenkina nelygybę $B < f_r < f_s - B$, tuomet priimtajame signale santykinis aukštųjų dažnių indėlis yra šiek tiek sumažintas, lyginant su pradiniu signalu. Šiuos nuostolius galima sumažinti, naudojant mažesnę impulsų trukmę τ arba naudojant specialų žemųjų dažnių filtrą, kurio perdavimo funkcija yra proporcinga $1/H(f)$. Toks filtras vadinamas ***išlyginimo filtru***.

Analoginio signalo, kuris atkurtas pagal PAM signalą, naudojant žemųjų dažnių filtrą, amplitudė yra T_s/τ kartų sumažinta, lyginant su pradiniu signalu. Tai galioja ir natūraliajai imčiai (žr. (3.1.10)), ir momentinei imčiai (žr. (3.1.17) ir (3.1.15)). Todėl impulso trukmė τ dar vadinama ***apertūra***.



(a) Magnitude Spectrum of Input Analog Waveform



(b) Magnitude Spectrum of PAM (flat-top sampling), $\tau/T_s = 1/3$ and $f_s = 4B$

3.1.6 pav. Momentinio ėmimo PAM signalo spektras. a – pradinio signalo amplitudžių spektras, b – atitinkamo momentinio ėmimo PAM signalo amplitudžių spektras.

Momentinio ėmimo PAM signalo spektro plotis yra toks pats, kaip ir natūraliojo ėmimo PAM signalo spektro plotis: pirmojo nulio dažnis lygus $1/\tau$ (žr. 3.1.6b pav.). Dėl mažos impulso trukmės τ PAM signalo perdavimas kanalu reikalauja labai plačios dažnių juostos. Ši dažnių juosta yra žymiai platesnė už pradinio analoginio signalo dažnių juostą. Be to, triukšmas priimtajame PAM signale negali būti mažesnis už tą triukšmą, kuris atsirastų, jeigu pradinis analoginis signalas būtų perduodamas tiesiogiai. Todėl PAM signalas nėra tinkamas tiesioginiam perdavimui dideliais atstumais. Pagrindinė impulsų amplitudės moduliavimo paskirtis – paruošti analoginį informacinį signalą transformavimui į kodinio impulsinio moduliavimo signalą. Be to, impulsų amplitudės moduliavimas suteikia galimybę suskaidyti signalą į laiko intervalus. Į atsiradusius “laisvus” laiko tarpus galima “įterpti” kitų šaltinių signalus ir tokiu būdu vienu metu perduoti informaciją iš kelių šaltinių. Ši kanalo sutankinimo metodika vadinama ***laikiniu sutankinimu***. Apie laikinį sutankinimą bus smulkiau kalbama 3.8 poskyryje.

3.2. Kodinis impulsinis moduliavimas

Kodinis impulsinis moduliavimas (*pulse code modulation*, ***PCM***) – tai toks analoginio signalo keitimo skaitmeniniu signalu būdas, kai informacija apie analoginio signalo vertes diskrečiais laiko momentais yra perduodama skaitmeninių žodžių pavidalu nuosekliajame bitų sraute.

Laikant, kad kiekvienas skaitmeninis žodis – tai dvejetainis skaičius, kuris sudarytas iš n dvejetainių skaitmenų, egzistuoja $M = 2^n$ skirtingų kodinių žodžių, ir kiekvienas kodinis žodis nusako tam tikrą analoginio signalo vertę. Tačiau analoginio signalo vertės gali būti kiek norima artimos viena kitai, todėl nebūtinai sutampa su kodinių žodžių nusakomom vertėm. Tokiais atvejais naudojamas tas kodinis žodis, kurio nusakoma vertė yra artimiausia tikrajai analoginio signalo vertei. Šis procesas vadinamas ***kvantavimu***. T.y., tikroji imties vertė $w(kT_s)$ pakeičiama artimiausia leistina verte, kurių kiekviena atitinka vieną kodinį žodį. Šios vertės vadinamos ***kvantavimo lygiais***.

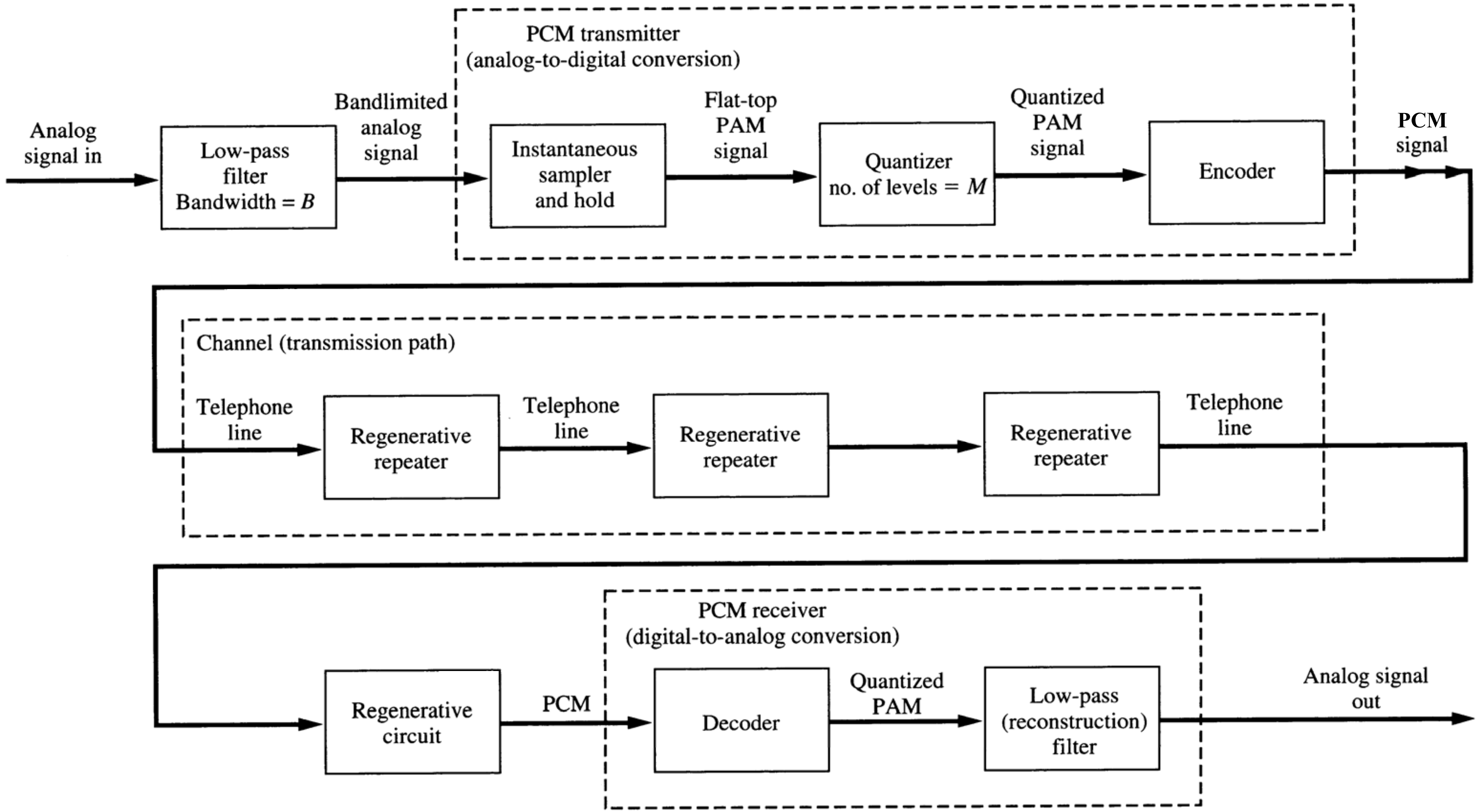
Kodinis impulsinis moduliavimas yra plačiai naudojamas dėl šių priežasčių:

- PCM sistemų pagrindą sudaro palyginti pigios skaitmeninės grandinės.
- PCM signalus, kurie suformuoti iš įvairių analoginių šaltinių signalų, galima apjungti su duomenų signalais (pvz., skaitmeninių kompiuterių signalais) ir perduoti viena greitaeige skaitmenine duomenų sistema, naudojant laikinį sutankinimą.
- Didelio nuotolio skaitmeninėse telefono ryšių sistemose, kuriose naudojami retransliatoriai, kiekvieno retransliatoriaus išėjime galima atkurti neiškraipytą PCM signalą, nors įėjimo signalas yra iškraipytas triukšmo. Tačiau triukšmas įėjime gali sąlygoti bitų klaidas atkurtajame PCM signale.
- Skaitmeninių sistemų atsparumas triukšmui yra didesnis, lyginant su analoginėm sistemom.

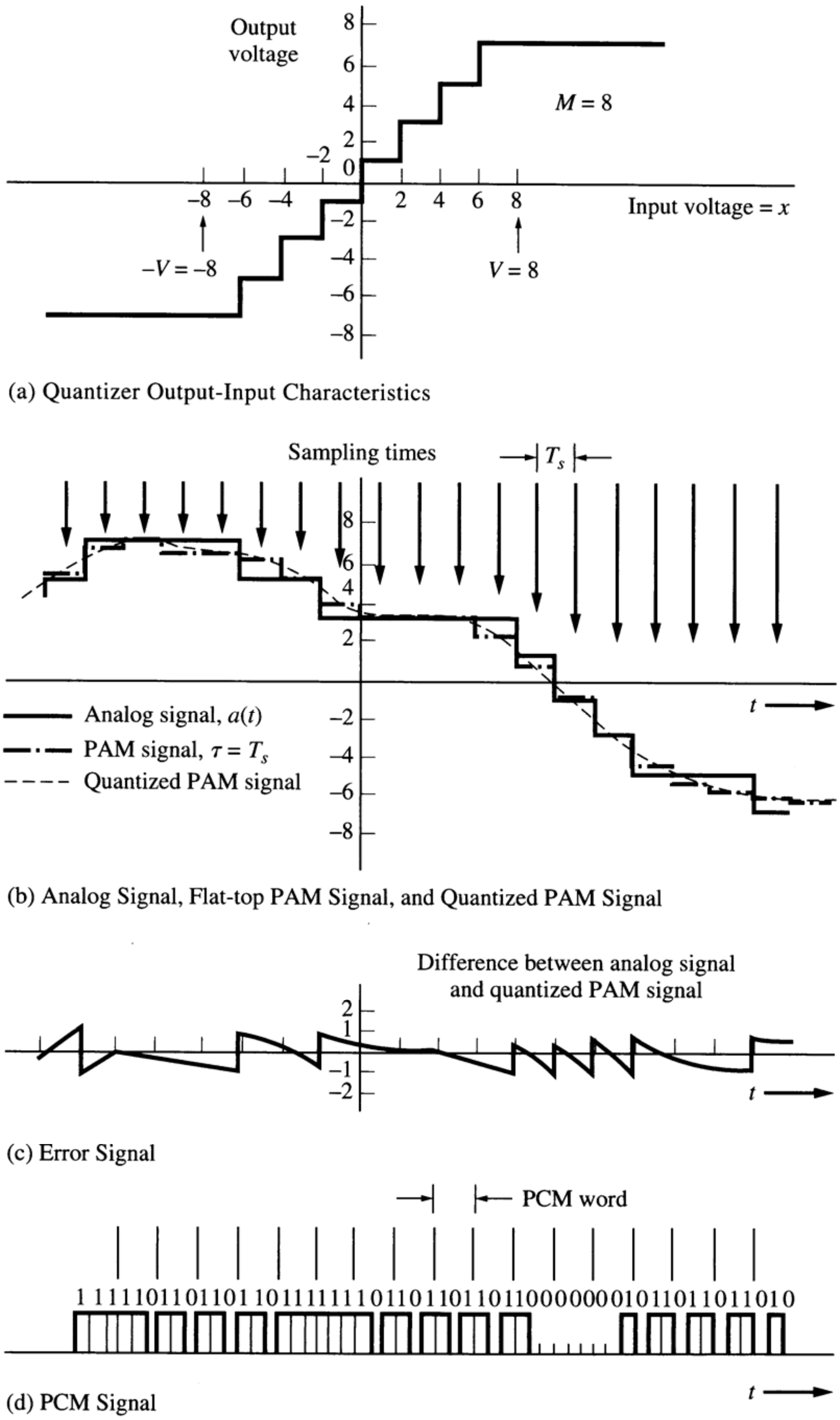
Šie kodinio impulsinio moduliavimo pranašumai dažniausiai yra svarbesni už pagrindinį jo trūkumą: PCM signalo dažnių juostos plotis yra žymiai didesnis už atitinkamo analoginio signalo dažnių juostos plotį.

3.2.1. Ėmimas, kvantavimas ir kodavimas

PCM signalas generuojamas trim etapais: ėmimas, kvantavimas ir kodavimas. Visą PCM signalo perdavimo procesą iliustruoja 3.2.1 pav. Visų pirma analoginis signalas praleidžiamas pro žemųjų dažnių filtrą, siekiant sumažinti PAM signalo iškraipymus dėl spektrų sanklotos efekto (žr. 2.7.2 poskyrį). Po to signalas patenka į diskretizatorių, kuris generuoja stačiakampių impulsų pavidalo momentinio ėmimo PAM signalą. Kvantuotuvas šį signalą pakeičia impulsais, kurių amplitudės atitinka skaitmeninius žodžius. Šis ***kvantuotasis*** PAM signalas perduodamas į koduotuvą, kuris kiekvieną impulsą pakeičia kodinių impulsų seka, t.y., generuoja galutinį PCM signalą. Jeigu signalas perduodamas dideliu atstumu, kanale gali būti keli regeneraciniai retransliatoriai, kurie “išvalo” triukšmo iškraipytą PCM signalą. Regeneravimo grandinė yra ir imtuvo įėjime. Imtuvo dekoderis dekoduoja priimtąjį PCM signalą, t.y., paverčia jį kvantuotuoju PAM signalu. Šis signalas praleidžiamas pro žemųjų dažnių filtrą, ir tokiu būdu atstatomas pradinis signalas (žr. 3.1.1 poskyrį).



3.2.1 pav. PCM sistemos schema



3.2.2 pav. Signalai PCM sistemoje. a – kvantuotuvo charakteristika, b – pradinis analoginis signalas, momentinio ėmimo PAM signalas ir kvantuotasis PAM signalas, c – kvantavimo paklaidos signalas, d – galutinis PCM signalas.

Pagal kvantuotąjį PAM signalą atkurtas analoginis signalas visuomet šiek tiek skiriasi nuo pradinio analoginio signalo, nes kvantuotojo PAM signalo impulsų amplitudės šiek tiek skiriasi nuo tikrųjų pradinio signalo verčių atitinkamais laiko momentais. Tai akivaizdu 3.2.2 pav., kuris iliustruoja kvantavimo operaciją, kai kvantavimo lygių skaičius lygus $M = 8$. 3.2.2a pav. pavaizduota ***kvantuotuvo charakteristika***, t.y., kvantuotuvo išėjimo įtampos priklausomybė nuo įėjimo įtampos. Įėjimo įtampos verčių intervalas tarp gretimų charakteristikos "laiptelių" vadinamas ***kvantavimo žingsniu*** (pvz., 3.2.2a pav. kvantavimo žingsnis lygus 2 V). Dėl tokios charakteristikos tolydusis įėjimo signalas pakeičiamas laiptiniu signalu (žr. 3.2.2b pav.). T.y., dėl kvantavimo atsiranda ***kvantavimo triukšmas*** arba ***paklaidos signalas***, kurį nusako pradinio momentinio ėmimo PAM signalo ir kvantuotuvo išėjimo signalo skirtumas (žr. 3.2.2c pav.). Kvantavimo triukšmas – tai apvalinimo paklaida. Šios paklaidos didžiausia vertė lygi pusei kvantuotuvo išėjimo įtampos mažiausio pokyčio (3.2.2 pav. atveju šis pokytis lygus yra 2 V, todėl kvantavimo paklaida neviršija ± 1 V).

PCM signalas gaunamas iš kvantuotojo PAM signalo, užkoduojant kiekvieno impulso amplitudę skaitmeninio žodžio pavidalu. Praktikoje naudojami įvairūs kodai. Pvz., 3.2.1 lentelėje pateiktas ***Grėjaus kodas*** aštuonių kvantavimo lygių atvejui (4 teigiami lygiai ir 4 priešingi lygiai). Kaip matome, priešingi lygiai vaizduojami ***papildomuoju kodu***, t.y.:

1) ženklą nusako pirmasis (kairysis) bitas,
2) kiekvieną kodinį žodį galima gauti iš priešingą lygį nusakančio žodžio, pakeitus visus vienetus nuliais, o nulius – vienetais (įskaitant ženklo bitą), ir pridėjus vienetą (neįskaitant ženklo bito).

Grėjaus kodo privalumas yra tas, kad, dėl kanalo triukšmo pasikeitus bet kuriam dvejetainio žodžio bitui, išskyrus ženklo bitą, kvantuotojo PAM signalo vertė virsta gretima to paties ženklo verte, t.y., paklaida yra mažiausia. 3.2.2d pav. pateiktas PCM signalas, atitinkantis 3.2.2b pav. pavaizduotą analoginį signalą, kai naudojamas Grėjaus kodas.

3.2.1 lentelė. Trijų bitų Grėjaus kodas (kvantavimo lygių skaičius $M = 2^3 = 8$)

Kvantavimo lygis (V)	+7	+5	+3	+1	-1	-3	-5	-7
Kodinis žodis	110	111	101	100	000	011	001	010

Bendruoju atveju PCM signalą gali sudaryti ir kito pagrindo (ne dvejetainiai) skaitmeniniai žodžiai, t.y., signalas gali būti ne dvilygis, o daugialygis. Daugialygių signalų dažnių juostos plotis žymiai mažesnis, negu dvilygių, tačiau jų generavimui reikalinga žymiai sudėtingesnė aparatūra (apie daugialygius signalus smulkiau kalbama 3.3.3 poskyryje).

3.2.2. Kodinio impulsinio moduliavimo signalo dažnių juostos plotis

3.1 poskyryje PAM signalo spektras buvo išreikštas įėjimo analoginio signalo spektru (žr. (3.1.10) ir (3.1.17)). Tokia išraiška buvo galima dėl to, kad PAM signalas yra įėjimo analoginio signalo tiesinė funkcija, t.y., PAM signalą galima išreikšti įėjimo signalo ir kažkokios kitos funkcijos sandauga (žr. (3.1.1) ir (3.1.11)). PCM signalas yra *netiesinė* įėjimo analoginio signalo funkcija, todėl jo spektro neįmanoma tiesiogiai išreikšti įėjimo signalo spektru.

PCM signalo dažnių juostos plotis priklauso nuo bitų spartos ir impulso formos. ***Bitų sparta*** – tai perduodamų bitų skaičius per laiko vienetą. Šis skaičius lygus ėmimo spartos (f_s) ir bitų skaičiaus viename PCM žodyje (įskaitant ir lyginumo bitus) sandaugai:

$$R = nf_s. \tag{3.2.1}$$

Jeigu iš anksto žinoma tik bitų sparta, tačiau nežinoma PCM signalo impulso forma, tuomet galima įvertinti tik dažnių juostos pločio apatinę ribą:

$$B_{\text{PCM}} \geq \frac{1}{2} R = \frac{1}{2} n f_s . \qquad (3.2.2)$$

T.y., PCM signalo dažnių juostos plotis yra nemažesnis už pusę bitų spartos. Be to, f_s turi tenkinti nelygybę $f_s \geq 2B$, kur B yra įėjimo analoginio signalo dažnių juostos plotis (žr. 3.1.1 poskyrį). Vadinasi,

$$B_{\text{PCM}} \geq nB. \qquad (3.2.3)$$

Konkreti dažnių juostos pločio vertė priklauso nuo impulsų formos. Mažiausias dažnių juostos plotis ($0.5R = 0.5nf_s$) pasiekiamas tuomet, kai naudojami $(\sin x)/x$ pavidalo impulsai (žr. 2.2.2b pav.). Reikia atkreipti dėmesį į tai, kad $(\sin x)/x$ pavidalo impulsų atveju bito trukmę nusako *pusė* laiko intervalo tarp arčiausiai pagrindinio maksimumo esančių nulių, t.y., laiko intervalas, kurio metu sinuso argumentas pakinta dydžiu π (žr. eilutę (2.7.3) ir 2.7.1b pav.). Jeigu vienetus ir nulius atitinka vienodo didumo, tačiau priešingo poliarumo stačiakampiai impulsai, kurių trukmė sutampa su vieno bito trukme, tuomet pirmojo nulio dažnių juostos plotis yra du kartus didesnis:

$$B_{\text{PCM}} = R = nf_s \geq 2nB. \qquad (3.2.4)$$

Vadinasi, esant mažiausiai ėmimo spartai ($f_s = 2B$) ir naudojant 16 bitų kodinius žodžius, tokio tipo PCM signalo dažnių juostos plotis yra 32 kartus didesnis už įėjimo analoginio signalo dažnių juostos plotį. Šio dažnių juostos pločio negalima sumažinti, naudojant žemųjų dažnių filtrą, nes priešingu atveju impulsai išplis ir persiklos, todėl imtuvo detektorius negalės jų išskirti. Šis reiškinys vadinamas ***tarpženkline interferencija*** (*intersymbol interference*, ***ISI***).

Reikia turėti omenyje, kad (3.2.1) ÷ (3.2.4) formulėse n yra *pilnasis* perduodamo kodinio žodžio ilgis (įskaitant ir lyginumo bitus).

3.2.3. Triukšmas PCM sistemos išėjimo analoginiame signale

Egzistuoja du veiksniai, kurie sąlygoja triukšmą analoginiame informaciniame signale, kuris priimamas PCM sistemoje:

- Kvantavimo triukšmas, kurį sąlygoja kvantavimo žingsnio baigtinė vertė (žr. 3.2.1 poskyrį).
- Bitų klaidos priimtajame PCM signale. Bitų klaidas sąlygoja kanalo triukšmas ir netinkamas signalo filtravimas, dėl kurio gali pasireikšti tarpženklinė interferencija.

Be to, kaip minėta 3.1.1 poskyryje, jeigu įėjimo analoginio signalo absoliutinis dažnių juostos plotis yra begalinis, tuomet išėjimo analoginis signalas yra papildomai iškraipomas dėl spektrų sanklotos efekto.

Statistinės radiofizikos metodais įrodoma, kad tuo atveju, kai imtuvo įėjimo analoginio signalo didžiausioji ir mažiausioji vertės sutampa su didžiausiuoju ir mažiausiuoju kvantavimo lygiais, o visos vertės šiame intervale yra vienodai tikėtinos, PCM sistemoje priimtojo analoginio signalo *maksimalios* galios ir *vidutinės* triukšmo galios santykis lygus

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{max out}} = \frac{3M^2}{1 + 4(M^2 - 1)P_e}, \qquad (3.2.5a)$$

kur $M = 2^n$ yra PCM sistemoje naudojamų kvantavimo lygių skaičius (čia n yra *informacinių* bitų skaičius kodiniame žodyje), o P_e yra klaidingų bitų dažnis signale, kurį priima imtuvo analoginis skaitmenų keitiklis. *Vidutinės* signalo galios ir vidutinės triukšmo galios santykis yra 3 kartus mažesnis:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}} = \frac{M^2}{1+4(M^2-1)P_e}. \quad (3.2.5b)$$

Klaidingų bitų dažnį P_e galima sumažinti, naudojant kanalo kodavimą (žr. 1.5 poskyrį). Todėl daugumoje praktinių PCM sistemų klaidingų bitų dažnį P_e galima laikyti lygiu nuliui. Tuomet vietoj (3.2.5) gauname

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{max out}} = 3M^2, \quad (3.2.6a)$$

ir

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}} = M^2. \quad (3.2.6b)$$

Pastarosios dvi formulės galioja tuo atveju, kai egzistuoja tik kvantavimo triukšmas.

Lygybės (3.2.5) ir (3.2.6) išvestos, laikant, kad PCM koduotuvo įėjimo analoginis signalas su vienoda tikimybe įgyja visas vertes tarp didžiausiojo ir mažiausiojo kvantavimo lygių, kuriems apskaičiuotas kvantuotuvas (pvz., kvantuotuvo, kurio charakteristika pavaizduota 3.2.2a pav., ribiniai kvantavimo lygiai yra +8 V ir –8 V). Jeigu įėjimo analoginis signalas netenkina šios sąlygos, tuomet gali atsirasti kitokio pobūdžio kvantavimo triukšmas. Iš viso skiriamos keturios kvantavimo triukšmo rūšys: perkrovos triukšmas, atsitiktinis triukšmas, grūdėtasis triukšmas ir lygio neapibrėžtumo triukšmas.

Perkrovos triukšmas (*overload noise*) atsiranda tada, kai kvantuotuvo įėjimo signalas viršija didžiausią kvantavimo lygį, kuriam apskaičiuotas kvantuotuvas. Tuomet analoginio signalo dalis, kuri išeina už kvantavimo intervalo ribų, yra "nupjaunama", ir PCM sistemos išėjime atkurtasis analoginis signalas turi plokščius maksimumus.

Atsitiktinį triukšmą (*random noise*) sukelia atsitiktinės kvantavimo paklaidos PCM sistemoje normaliomis veikimo sąlygomis, kai įėjimo signalo ribinės vertės sutampa su ribiniais kvantavimo lygiais arba yra tik nežymiai mažesnės už juos. (3.2.6) formulės galioja tuomet, kai egzistuoja tik atsitiktinis triukšmas. Garso signale atsitiktinis triukšmas pasireiškia nuolatiniu šnypštimu, panašiu į baltąjį triukšmą.

Jeigu įėjimo signalo amplitudė yra tik kelis kartus didesnė už kvantavimo žingsnį, tuomet kvantavimo paklaidos nustoja būti atsitiktinės. Garso signale toks kvantavimo triukšmas pasireiškia šiurkščiu garsu, panašiu į byrančio žvyro garsą. Toks triukšmas vadinamas ***grūdėtuoju triukšmu*** (*granular noise*). Grūdėtąjį triukšmą galima paversti atsitiktiniu (ir tuo pačiu sumažinti jo galią), didinant kvantavimo lygių skaičių M. Tačiau tuomet reikėtų didinti ir bitų spartą, t.y., signalo juostos plotį. Kitas būdas sumažinti grūdėtąjį triukšmą yra netolyginis kvantavimas, apie kurį kalbama 3.2.4 poskyryje.

Ketvirtasis kvantavimo triukšmo tipas yra ***lygio neapibrėžtumo triukšmas*** (*hunting noise*). Toks triukšmas pasireiškia tuomet, kai įėjimo signalas yra beveik pastovus, o jo vertė artima vertikaliajam "laipteliui" kvantuotuvo charakteristikoje (žr. 3.2.2a pav.). Šiomis sąlygomis kvantuotuvo išėjimo impulsų amplitudės gali osciliuoti tarp dviejų kaimyninių kvantavimo lygių. Tai pasireiškia pašaliniu harmoniniu signalu, kurio dažnis lygus $0.5f_s$. Lygio neapibrėžtumo triukšmas gali būti sumažintas, naudojant užtvarinį filtrą, kuris pašalina šį harmoninį signalą. Be to, šio tipo triukšmo galima išvengti, naudojant tokį kvantuotuvą, kurio charakteristika neturi vertikalaus laiptelio ties "pastoviosiomis" įėjimo signalo vertėmis. Pvz., vertikaliojo laiptelio neturi būti kvantuotuvo charakteristikos pradžioje (žr. 3.2.2a pav.), kad lygio neapibrėžtumo triukšmo nebūtų, kai įėjime nėra jokio signalo (t.y., kai signalas yra nulinis).

Kadangi $M = 2^n$, signalo ir triukšmo galių santykio (3.2.6a) arba (3.2.6b) išraiška decibelais yra šitokia:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{dB}} = 6.02n + \alpha\,, \tag{3.2.7}$$

kur n yra bitų skaičius PCM žodyje, $\alpha = 4.77$ maksimalaus santykio atveju (3.2.6a) ir $\alpha = 0$ vidurkių santykio atveju (3.2.6b). Iš šios lygybės išplaukia, kad *PCM žodžio papildymas vienu bitu padidina signalo ir triukšmo galių santykį 6 dB*. Todėl (3.2.7) lygybė vadinama ***6 dB taisykle***. 6 dB taisyklė (3.2.7) galioja, esant įvairaus pavidalo įėjimo signalams ir įvairioms kvantuotuvo charakteristikoms (tačiau α vertė priklauso nuo šių veiksnių). Be to, laikoma, kad nėra klaidingų bitų ir kad egzistuoja tik atsitiktinis kvantavimo triukšmas (žr. aukščiau). Jeigu įėjimo signalas su didesne tikimybe įgyja mažas vertes, negu dideles vertes, tuomet 6 dB taisyklė reikia galioti, tačiau pasikeičia dėmuo α (žr. 3.2.5 poskyrį).

3.2.4. PCM sistemų projektavimo pavyzdžiai

Tarkime, reikia perduoti garsinio dažnio signalą, kuris užima dažnių juostą nuo 300 Hz iki 3400 Hz, dvejetaine PCM sistema. Vadinasi, ėmimo sparta turi būti nemažesnė už 2×3.4 = 6.8 kHz. Praktikoje ėmimo sparta visuomet būna šiek tiek didesnė už dvigubą signalo dažnių juostos plotį. Pvz., skaitmeninėse telefono ryšių sistemose standartinė ėmimo sparta yra 8 kHz.

Tarkime, kad kiekvieną kodinį žodį sudaro 7 informaciniai bitai ir vienas lyginumo bitas (žr. 1.5.1 poskyrį). Tuomet PCM signalo bitų sparta yra

$$R = nf_s = (8\ \text{bitai/žodyje})(8\text{k žodžių}/s) = 64\ \text{kb/s}. \tag{3.2.8}$$

Vadinasi, pagal (3.2.2) nelygybę, PCM signalo dažnių juostos pločio teorinis minimumas yra lygus

$$(B)_{\min} = \frac{1}{2}R = 32\ \text{kHz}\,. \tag{3.2.9}$$

Šis mažiausias juostos plotis pasiekiamas tuo atveju, kai naudojami $(\sin x)/x$ pavidalo impulsai. Jeigu nulius ir vienetus atitinka priešingo poliarumo stačiakampiai impulsai, tuomet, pagal (3.2.4) formulę, pirmojo nulio juostos plotis lygus

$$(B)_{\text{null}} = R = 64\ \text{kHz}. \tag{3.2.10}$$

Vadinasi, norint perduoti 4 kHz dažnių juostos pločio garso signalą, reikalingas 64 kHz juostos pločio skaitmeninis PCM signalas.

Didžiausią signalo ir kvantavimo triukšmo galių santykį nusako (3.2.6a) formulė, kurioje $M = 2^7$, arba (3.2.7) formulė, kurioje n yra informacinių bitų skaičius ($n = 7$), o $\alpha = 4.77$. Tokiu būdu randame:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{max out}} = 3(2^7)^2 = 6.02\cdot 7 + 4.77 = 46.9\ \text{dB}\,. \tag{3.2.11}$$

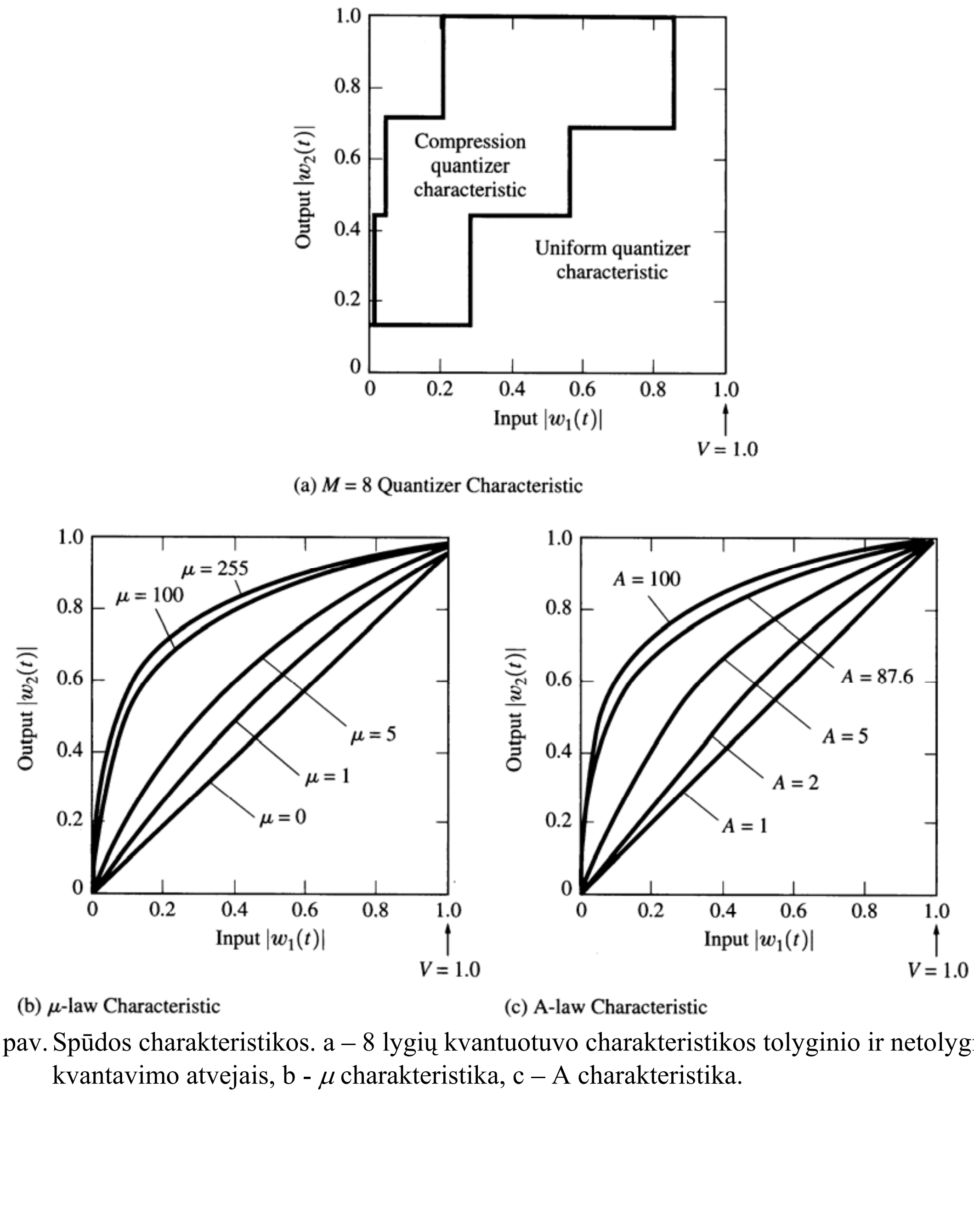
Taigi, lyginumo bitas neturi įtakos kvantavimo triukšmui. Tačiau kanalo kodavimas (lyginumo bitai) mažina bito klaidų, kurias sukelia kanalo triukšmas arba tarpženklinė interferencija, tikimybę P_e. Šiame pavyzdyje buvo laikoma, kad $P_e = 0$.

Kitas pavyzdys: tarkime, kad reikia suprojektuoti PCM sistemą, kurios dinaminis diapazonas, perduodant aukštos kokybės garso signalus, yra 90 dB. Dinaminis diapazonas apibrėžiamas kaip didžiausios ir mažiausios perduodamo signalo verčių santykis ir yra apytiksliai lygus signalo ir triukšmo vidutinių galių santykiui (3.2.6b) arba (3.2.7), kur $\alpha = 0$. Iš (3.2.7) formulės išplaukia, kad, norint pasiekti 90 dB signalo ir triukšmo vidutinių galių santykį, reikia naudoti bent $90/6.02 \approx 15$ bitų ilgio kodinius žodžius (neįskaitant lyginumo bitų). Aukštos kokybės analoginio garso signalo dažnių juostos plotis yra 20 kHz. Vadinasi, jeigu PCM signalą sudaro priešingo poliarumo stačiakampiai impulsai, jo dažnių juostos plotis pagal (3.2.4) turi būti nemažesnis už 2×15×20 kHz = 600 kHz. Siekiant išvengti bito klaidų, kurias sukelia triukšmas ir tarpženklinė interferencija, ir atsižvelgiant į tai, kad ėmimo sparta yra šiek tiek didesnė už 2×20 kHz = 40 kHz, ir į tai, kad stereofoninių signalų perdavimui reikalingi du kanalai (kairysis ir dešinysis), bendrasis reikalingas ryšių kanalo dažnių juostos plotis turėtų būtų dar didesnis – maždaug 1.5 MHz. Todėl aukštos kokybės skaitmeninių garso signalų įrašymui ir atkūrimui reikalingi vaizdo magnetofonų tipo įrenginiai arba kompaktiniai diskai. Kompaktinis diskas naudoja 16 bitų ilgio PCM žodį ir 44.1 kHz ėmimo spartą kiekviename iš dviejų garso kanalų.

3.2.5. Netolyginis kvantavimas

Garso signalai su didesne tikimybe įgyja artimas nuliui vertes, negu vertes, kurios artimos ribinėms kvantuotuvo vertėms. Siekiant sumažinti grūdėtąjį triukšmą (žr. 3.2.3 poskyrį) tokiuose signaluose, kvantavimo žingsnis sumažinamas mažoms įėjimo signalo vertėms ir padidinamas didelėms įėjimo signalo vertėms. Toks kvantavimo būdas vadinamas ***netolyginiu kvantavimu***. Netolyginio kvantavimo charakteristikos pavyzdys pateiktas 3.2.3a pav.

Netolyginis kvantavimas gali būti realizuotas, iš pradžių praleidus analoginį signalą pro netiesinį stiprintuvą, o po to – pro PCM grandinę, kuri naudoja tolyginį kvantavimą. Siekiant, kad mažàs signalo vertes atitiktų daugiau kvantavimo lygių, o dideles vertes atitiktų



3.2.3 pav. Spūdos charakteristikos. a – 8 lygių kvantuotuvo charakteristikos tolyginio ir netolyginio kvantavimo atvejais, b - μ charakteristika, c – A charakteristika.

mažiau kvantavimo lygių, tokio stiprintuvo stiprinimo koeficientas turi būti didesnis už vienetą, esant mažoms įėjimo signalo vertėms, ir mažesnis už vienetą, esant didelėms įėjimo signalo vertėms. Toks netiesinis signalo stiprinimas siųstuvo įėjime vadinamas signalo ***spūda***, o netiesinio stiprintuvo išėjimo signalo priklausomybė nuo įėjimo įtampos vadinama ***spūdos charakteristika***.

Skaitmeninėse telefonų sistemose naudojamos dviejų tipų signalo spūdos charakteristikos. Pvz., JAV naudojama μ ***charakteristika***, kuri apibrėžiama tokiu būdu:

$$\frac{w_2(t)}{w_1(t)} = \frac{\ln\left(1 + \mu \dfrac{|w_1(t)|}{w_{\max}}\right)}{\ln(1+\mu)}, \tag{3.2.12}$$

kur $w_1(t)$ ir $w_2(t)$ yra stiprintuvo įėjimo ir išėjimo signalai, $w_{\max}$ yra įėjimo (ir išėjimo) signalo maksimali vertė (t.y., kvantuotuvo ribinis lygis), o μ yra teigiamas parametras. Kuo didesnė μ vertė, tuo labiau spūdos charakteristika skiriasi nuo tiesės (žr. 3.2.3b pav.). JAV, Kanadoje ir Japonijoje naudojama vertė $\mu = 255$.

Europoje naudojama ***A charakteristika***, kuri apibrėžiama šitaip:

$$\frac{w_2(t)}{w_1(t)} = \begin{cases} \dfrac{A\,|w_1(t)|/w_{\max}}{1+\ln A}, & 0 \le \dfrac{|w_1(t)|}{w_{\max}} \le \dfrac{1}{A}; \\ \dfrac{1+\ln(A\,|w_1(t)|/w_{\max})}{1+\ln A}, & \dfrac{1}{A} \le \dfrac{|w_1(t)|}{w_{\max}} \le 1, \end{cases} \tag{3.2.13}$$

kur A yra didesnė už vienetą konstanta, o kiti žymėjimai turi tą pačią prasmę, kaip ir (3.2.12) lygybėje. Spūdos charakteristika (3.2.13) yra tiesinė, kai $|w_1|/w_{\max} < 1/A$, ir logaritminė, kai $1/A < |w_1|/w_{\max} \le 1$. Kuo labiau skiriasi A vertė nuo vieneto, tuo netiesiškesnė spūdos charakteristika (žr. 3.2.3c pav.). Tipiška parametro A vertė yra 87.6.

Jeigu siųstuvo įėjime signalas yra suspaudžiamas, tai siųstuvo išėjime jis turi būti "išplėstas", siekiant atstatyti pradinį signalo pavidalą. ***Plėtros charakteristika*** yra atvirkštinė spūdos charakteristikai.

Kai įėjimo signalo ribinės vertės yra mažesnės už kvantuotuvo ribinius lygius, ir tolyginio, ir netolyginio kvantavimo atveju lieka galioti 6 dB taisyklė (3.2.7), tačiau reikia šiek tiek modifikuoti dėmenį α:

a) tolyginio kvantavimo atveju

$$\alpha = 4.77 - 20\log(V/x_{\text{rms}}); \tag{3.2.14a}$$

b) μ dėsnis, kai įėjimo lygis pakankamai didelis,

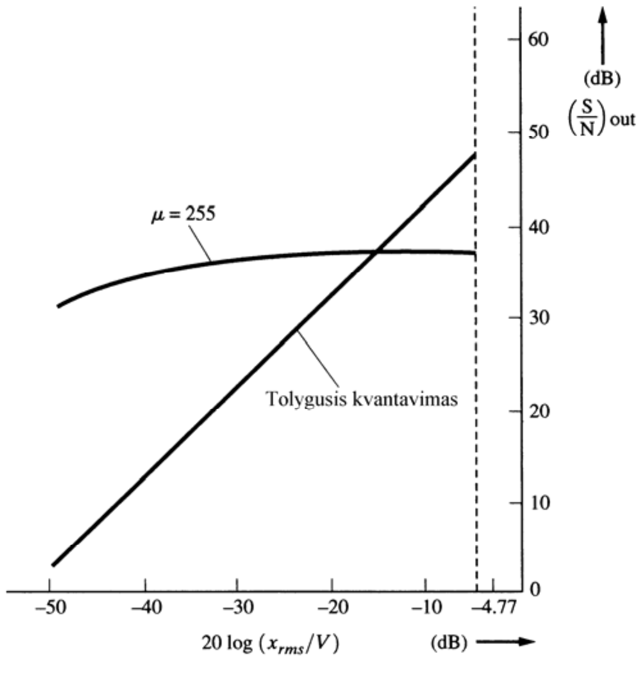
$$\alpha \approx 4.77 - 20\log[\ln(1+\mu)]; \tag{3.2.14b}$$

c) A dėsnis, kai įėjimo lygis pakankamai didelis,

$$\alpha \approx 4.77 - 20\log[1+\ln A]. \tag{3.2.14c}$$

Čia V yra didžiausias kvantavimo lygis, o x_{rms} yra siųstuvo įėjimo signalo efektinis vidurkis. Formulės (3.2.14a–c) galioja tuo atveju, kai skaičiuojamas didžiausias signalo ir triukšmo santykis. Jeigu skaičiuojamas vidutinis signalo ir triukšmo santykis, vietoj 4.77 reikia naudoti 0.

Taigi, imtuvo išėjimo signalo ir triukšmo santykis yra signalo didumo funkcija tolyginio kvantavimo atveju, tačiau beveik nepriklauso nuo signalo vertės signalo spūdos-plėtros atveju (žr. 3.2.4 pav.). Santykis V/x_{rms} vadinamas ***apkrautumo faktoriumi*** (*loading factor*).



3.2.4 pav. 8 bitų PCM sistemos išėjimo signalo ir triukšmo santykis, naudojant tolygųjį kvantavimą ir μ tipo netolygųjį kvantavimą

Praktikoje, siekiant išvengti perkrovos triukšmo, signalo amplitudė dažnai parenkama taip, kad apkrautumo faktorius būtų lygus 4, t.y., 12 dB. Kaip išplaukia iš (3.2.14) formulių, kai signalas yra silpnas (apkrautumo faktorius didesnis už 10 = 20 dB), signalo spūda leidžia žymiai padidinti signalo ir triukšmo santykį imtuvo išėjime. Mažiausia apkrautumo faktoriaus vertė yra 4.77 dB = $\sqrt{2}$, nes, toliau didinant x_{rms}, pradeda sparčiai augti perkrovos triukšmas (pagal (2.3.16), sinusoidės amplitudė lygi $\sqrt{2}x_{\text{rms}}$).

3.3. Skaitmeninių signalų matematinė analizė

3.3.1. Skaitmeninio signalo bendrasis pavidalas

Bendruoju atveju perduodamieji skaitmeniniai duomenys nebūtinai yra dvejetainiai, t.y., duomenų simbolių (skaitmenų) skaičius gali skirtis nuo duomenų bitų skaičiaus. Todėl duomenų perdavimo spartai apibūdinti naudojamos dvi sąvokos:

- ***simbolių sparta*** – per laiko vienetą perduotų simbolių skaičius:
$$D = N/T_0 \text{ simbolių/s}, \tag{3.3.1}$$
kur N yra simbolių skaičius, kuris buvo perduotas per T_0 s;
- ***bitų sparta*** – per laiko vienetą perduotų duomenų bitų skaičius:
$$R = n/T_0 \text{ bits/s}, \tag{3.3.2}$$
kur n yra bitų skaičius, kuris buvo perduotas per T_0 s.

Skaitmeninį signalą, kaip ir analoginį signalą, galima išreikšti ortogonaliųjų funkcijų eilute (2.4.5). Tačiau skaitmeninio signalo atveju ortogonaliąsias funkcijas $\varphi_k(t)$ patogiausia apibrėžti taip, kad kiekviena ortogonalioji funkcija atitiktų kažkurį perduodamojo skaitmeninio žodžio skaitmenį (simbolį). Tuomet, jeigu laiko intervale $0 < t < T_0$ buvo perduoti N simbolių, skaitmeninį signalą šiame laiko intervale galima išreikšti šitaip:

$$w(t) = \sum_{k=1}^{N} w_k \varphi_k(t), \qquad 0 < t < T_0, \tag{3.3.3}$$

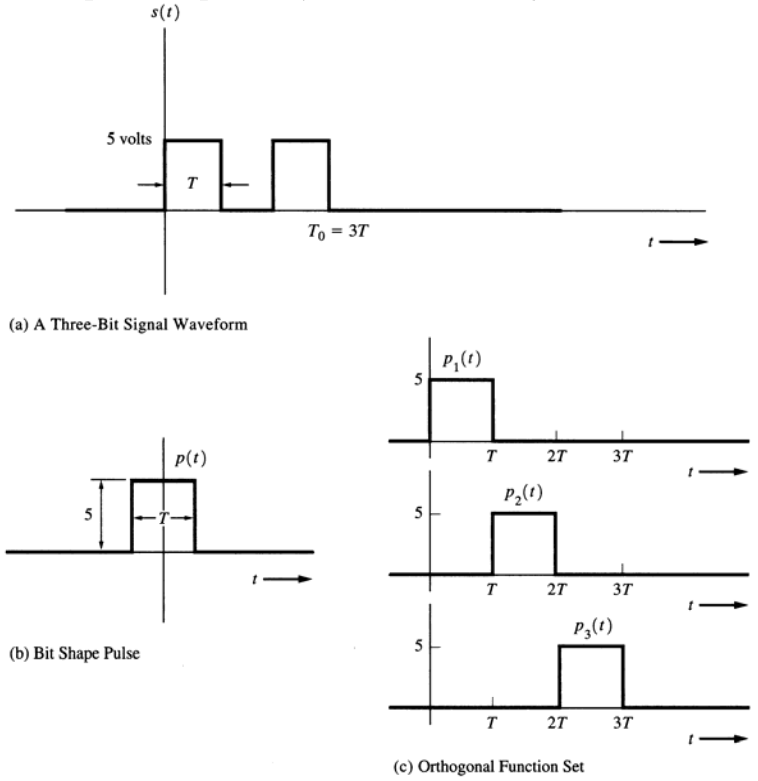
kur w_k yra perduodamieji skaitmenys, o $\varphi_k(t)$ ($k = 1, 2, \ldots, N$) yra ortogonaliosios funkcijos. Kiekviena ortogonalioji funkcija $\varphi_k(t)$ – tai impulsas, kurio centras sutampa su duotojo simbolio perdavimo laiko intervalo centru. T.y.,

$$\varphi_k(t) = f(t - kT_s), \tag{3.3.4}$$

kur $f(t)$ yra vieno impulso pavidalą nusakanti funkcija (pvz., stačiakampis impulsas arba $\sin(x)/x$ pavidalo impulsas), o T_s yra vieno simbolio perdavimo trukmė (impulso plotis).

Jeigu duomenys perduodami dvejetainiu pavidalu, tuomet koeficientai w_k (3.3.3) eilutėje gali įgyti tik dvi reikšmes, pvz., 0 arba 1. Tuomet signalas $w(t)$ vadinamas ***dvilygiu signalu***. Dvilygio signalo atveju $n = N$, $R = D$. Jeigu w_k gali įgyti daugiau negu dvi reikšmes (t.y., perduodamieji skaičiai nėra dvejetainiai), signalas $w(t)$ vadinamas ***daugialygiu signalu***. Reikia atkreipti dėmesį, kad sąvoka "lygių skaičius" reiškia ne paties signalo galimų verčių skaičių, o (3.3.3) eilutės *koeficientų* galimų verčių skaičių. *Signalo* galimų verčių skaičius priklauso nuo naudojamų ortogonaliųjų funkcijų $\varphi_k(t)$ pavidalo. Bendruoju atveju signalo galimų verčių skaičius yra didesnis už lygių skaičių. Pvz., naudojant $\sin(x)/x$ pavidalo impulsus (žr. 2.2.2b pav.), skaitmeninis signalas yra tolydus, t.y., jo galimų verčių skaičius yra begalinis. Kai ortogonaliosios funkcijos $\varphi_k(t)$ yra stačiakampių impulsų pavidalo, signalo galimų verčių skaičius yra lygus eilutės (3.3.3) koeficientų galimų verčių skaičiui (žr. sekančią pastraipą).

Dvilygio signalo išraišką ortogonaliąja eilute iliustruoja 3.3.1 pav. Šiame pavyzdyje perduodamas dvejetainis skaičius 101. Vienetą atitinka 5 V lygis, o nulį – 0 V lygis (žr. 3.3.1a pav.). Ortogonaliosios funkcijos p_j ($j = 1, 2, 3$), kurios atitinka kiekvieną skaitmenį – tai 5 V amplitudės stačiakampiai impulsai. Kiekvieno impulso plotis ir padėtis laiko ašyje atitinka laiko intervalą, kuriame perduodamas atitinkamas skaitmuo (žr. 3.3.1c pav.). Šios funkcijos yra ortogonalios, nes impulsai nepersikloja (žr. (2.4.1) integralą).



3.3.1 pav. Dvilygio signalo išraiška ortogonaliąja eilute. a – trijų bitų dvilygis signalas, b – ortogonaliųjų funkcijų pavidalas (stačiakampiai impulsai), c – ortogonaliųjų funkcijų tarpusavio išsidėstymas laiko ašyje.

Vienas iš būdų detektuoti skaitmeninius duomenis priimtajame skaitmeniniame signale yra paremtas ortogonaliosios eilutės koeficientų apibrėžimu (2.4.6). T.y., imtuvas turi apskaičiuoti integralus

$$w_k = \frac{1}{K_k}\int_0^{T_0} w(t)\varphi_k^*(t)dt\,, \quad k = 1, 2, \ldots, N. \tag{3.3.5}$$

Čia $w(t)$ yra imtuvo įėjimo signalas, o $\varphi_k(t)$ ($k = 1, 2, \ldots, N$) yra žinomos ortogonaliosios funkcijos, kurios buvo panaudotos priimtojo signalo generavimui.

Tuo atveju, kai ortogonaliosios funkcijos $\varphi_k(t)$ yra stačiakampiai impulsai (kaip 3.3.1 pav.), kiekvieno impulso plotis yra lygus simbolio perdavimo trukmei T_s, o w_k sutampa su signalo $w(t)$ verte k-tojo impulso metu. Tuo atveju, kai ortogonaliosios funkcijos yra $\sin(x)/x$ impulsai (žr. 2.2.2b pav.), kiekvieno impulso maksimumo plotis “nuo nulio iki nulio” yra lygus $2T_s$, o w_k sutampa su signalo $w(t)$ verte k-tojo impulso centre (žr. ėmimo teoremą (2.7.3) ir (2.7.6)).

3.3.2. Skaitmeninio signalo dažnių juostos plotis

Skaitmeninio signalo (3.3.3) dažnių juostos plotis B tenkina nelygybę

$$B \geq \frac{N}{2T_0} = \frac{1}{2T_s} = \frac{1}{2}D\ \text{Hz}\,, \tag{3.3.6}$$

kur T_s yra vieno simbolio trukmė, o $D = 1/T_s$ yra simbolių sparta (3.3.1). Šis teiginys – tai (3.2.2) nelygybės apibendrinimas daugialygiams signalams (žr. 3.3.3 poskyrį). Mažiausias juostos plotis ($0.5D$) pasiekiamas tuomet, kai ortogonaliosios funkcijos $\varphi_k(t)$ yra $\sin(x)/x$

pavidalo. Naudojant kitokios formos (pvz., stačiakampius) impulsus, signalo dažnių juostos plotis visuomet bus didesnis. (3.3.6) sąryšis yra naudingas tais atvejais, kai reikia iš anksto numatyti skaitmeninio signalo dažnių juostos plotį.

3.3.3. Daugialygiai signalai

Daugialygių signalų panaudojimo praktinė nauda išplaukia iš to, kad (3.3.6) nelygybės dešiniojoje pusėje yra *simbolių* sparta D. Kaip žinome, *bitų* sparta R lygi ėmimo spartos f_s ir kvantavimo lygių skaičiaus dvejetainio logaritmo n sandaugai (3.2.1). Nė vieno iš šių dviejų dydžių negalima sumažinti žemiau tam tikros ribos: ėmimo sparta turi būti didesnė už įėjimo analoginio signalo dvigubą dažnių juostos plotį (žr. 2.7 poskyrį), o kodavimo lygių skaičius $M = 2^n$ turi būti pakankamai didelis, siekiant sumažinti kvantavimo triukšmą (žr. 3.2.1 ir 3.2.3 poskyrius). Tačiau *simbolių* spartą galima sumažinti, apjungiant du arba daugiau bitų, įeinančių į vieną skaitmeninį žodį, į vieną simbolį (skaitmenį). Jeigu mes apjungiame l bitų į vieną skaitmenį, tuomet to skaitmens galimų reikšmių skaičius yra $L = 2^l$. Vadinasi, ortogonaliosios eilutės (3.3.3) koeficientai w_k gali įgyti $L = 2^l > 2$ verčių. Toks skaitmeninis signalas $w(t)$ vadinamas ***daugialygiu signalu***. Daugialygio signalo bitų sparta R ir simbolių sparta D susiję sąryšiu

$$R = lD, \tag{3.3.7}$$

kur l yra bitų skaičius, kuris reikalingas, norint nusakyti vieną simbolį.

Pvz., tarkime, kad reikia perduoti dvejetainį skaičių, naudojant keturlygį skaitmeninį signalą. Keturiems lygiams išreikšti reikalingi $l = 2$ bitai. Vadinasi, kiekvieną bitų porą turi atitikti apibrėžta signalo vertė. Šių keturių signalo lygių generavimui galima panaudoti $l = 2$ bitų analoginį skaitmenų keitiklį. l bitų ***analoginis skaitmenų keitiklis*** (***ASK***) kiekvieną įėjimo dvilygio signalo l bitų seką pakeičia viena iš 2^l išėjimo signalo verčių. Pvz., 2 bitų ASK galėtų generuoti signalo vertes, kurios pateiktos 3.3.1 lentelėje.

3.3.1 lentelė. 2 bitų analoginio skaitmenų keitiklio kodas

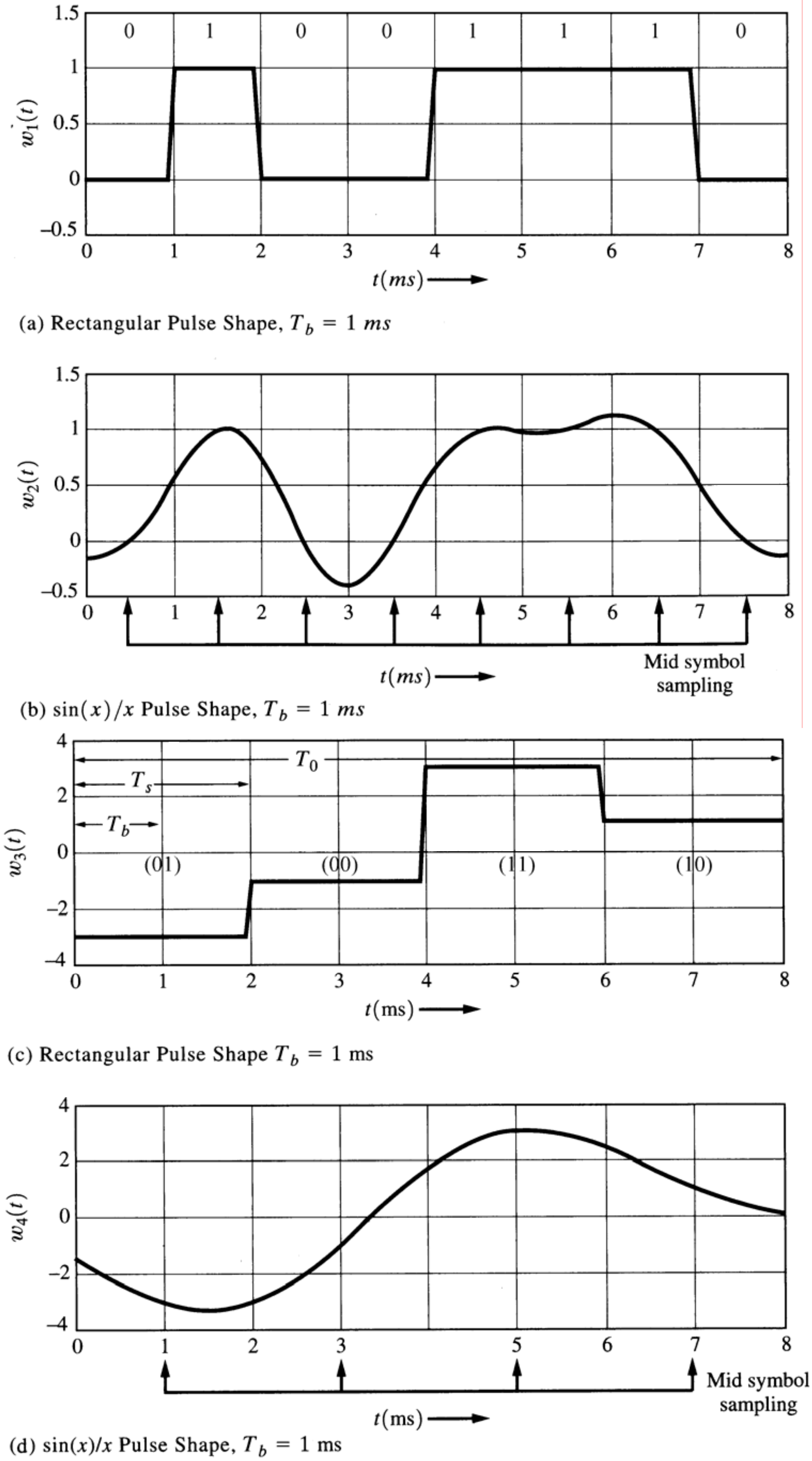
Dvejetainis įėjimo signalas (l = 2 bitai)	11	10	00	01
Išėjimo įtampos lygis (V)	+3	+1	-1	-3

Jeigu 3.3.1 lentelėje apibrėžto analoginio skaitmenų keitiklio įėjime yra dvejetainis signalas 01001110, tuomet išėjimo signalo lygių seka bus -3, -1, +3, +1 (žr. 3.3.2c pav.).

Apjungus l bitų į vieną simbolį, bitų sparta R nepasikeičia, tačiau simbolių sparta D sumažėja l kartų (žr. (3.3.7)), todėl tiek pat kartų sumažėja ir signalo dažnių juostos plotis (3.3.6). Šį sumažėjimą galima suprasti, remiantis (3.3.3) eilutės pavidalu. Kiekviena ortogonalioji funkcija φ_k šioje eilutėje atitinka vieną simbolį (o ne bitą). Apjungus l bitų į vieną simbolį, simbolio trukmė išauga l kartų. Vadinasi, atitinkama ortogonalioji funkcija “išsiplečia” l kartų išilgai laiko ašies. Pagal mastelio pakeitimo teoremą (žr. B-1 lentelę), toks funkcijos “išplitimas” reiškia, kad jos spektras “susispaudžia” l kartų išilgai dažnio ašies.

Daugialygio skaitmeninio signalo dažnių juostos sumažėjimą, lyginant su dvilygiu signalu, iliustruoja 3.3.2 pav. 3.3.2a pav. pavaizduotas dvilygis signalas, kuris nusako dvejetainį skaičių 01001110, naudojant stačiakampius impulsus, o 3.3.2b pav. pavaizduotas dvilygis signalas, kuris perduoda tą patį skaičių, naudojant $\sin(x)/x$ pavidalo ortogonaliąsias funkcijas:

$$\varphi_k(t) = \frac{\sin\left\{\dfrac{\pi}{T_s}[t-(kT_s)]\right\}}{\dfrac{\pi}{T_s}[t-(kT_s)]}. \tag{3.3.8}$$



(a) Rectangular Pulse Shape, $T_b = 1\ ms$

(b) $\sin(x)/x$ Pulse Shape, $T_b = 1\ ms$

(c) Rectangular Pulse Shape $T_b = 1$ ms

(d) $\sin(x)/x$ Pulse Shape, $T_b = 1$ ms

3.3.2 pav. Dvilygio ir daugialygio signalų palyginimas, kai perduodamas dvejetainis skaičius 01001110. a, b – dvilygis signalas, c, d – keturlygis signalas. a, c – ortogonaliosios funkcijos yra stačiakampių impulsų pavidalo, b, d – ortogonaliosios funkcijos yra sin(x)/x pavidalo.

3.3.2c pav. pavaizduotas keturlygis signalas, kuris perduoda tą patį skaičių, naudojant dviejų bitų analoginį skaitmenų keitiklį, kurio veikimą nusako 3.3.1 lentelė. 3.3.2d pav. pavaizduotas keturlygis signalas, kuris perduoda tą pačią informaciją, naudojant (3.3.8) pavidalo ortogonaliąsias funkcijas. 3.3.2a,b pav. simbolio trukmė T_s sutampa su bito trukme $T_b = 1$ ms, o 3.3.2c,d pav. simbolio trukmė yra dvigubai didesnė: $T_s = 2T_b = 2$ ms. Visais atvejais perduodamo lygio vertę nusako signalo vertė kiekvieno simbolio intervalo centre (t.y., laiko momentais $t = (k - 1/2)T_s$, kur $k = 1, 2, \ldots, 8$ dvilygio signalo atveju ir $k = 1, 2, 3, 4$ keturlygio signalo atveju). Kad keturlygio signalo dažnių juostos plotis yra mažesnis už dvilygio signalo juostos plotį, akivaizdu vien iš pavaizduotųjų kreivių pavidalo: keturlygis signalas yra “glodesnis”, t.y., tame pačiame laiko intervale turi mažiau maksimumų ir minimumų, negu dvilygis signalas.

3.4. Linijos kodai ir jų spektrai

3.4.1. Dvilygiai linijos kodai

Dvejetainiai vienetai ir nuliai gali būti pavaizduoti, naudojant įvairios formos signalus. Taisyklė, pagal kurią suformuojamas dvejetainį vienetą arba nulį atitinkantis dvilygis signalas, vadinama ***linijos kodu*** (*line code*) arba ***kodavimo formatu*** (*encoding format*). Formaliai linijos kodą apibrėžia ortogonaliųjų funkcijų $\varphi_k(t)$, kurios naudojamos signalo išraiškoje (3.3.3), pavidalas. Kai kurie linijos kodai pavaizduoti 3.4.1 pav. Egzistuoja dvi linijos kodų grupės: grįžties prie nulio (*return-to-zero*, ***RZ***) linijos kodai ir negrįžties prie nulio (*nonreturn-to-zero*, ***NRZ***) linijos kodai. Naudojant ***grįžties prie nulio*** linijos kodą, signalas kiekvieno bito perdavimo metu grįžta prie nulinės vertės tam tikram laiko tarpui, kuris dažniausiai lygus pusei bito perdavimo trukmės T_b (žr. 3.4.1c,d pav.). Naudojant ***negrįžties prie nulio*** linijos kodą, signalo vertė kiekvieno bito metu yra pastovi (žr. 3.4.1a,b pav.) arba signalas tampa lygus nuliui tik atskirais laiko momentais, kai pakinta signalo ženklas (žr. 3.4.1e pav.).

Be to, linijos kodus galima suklasifikuoti pagal tai, kuriais atvejais duomenų bitą nusakančio impulso amplitudė yra teigiama, neigiama arba lygi nuliui:

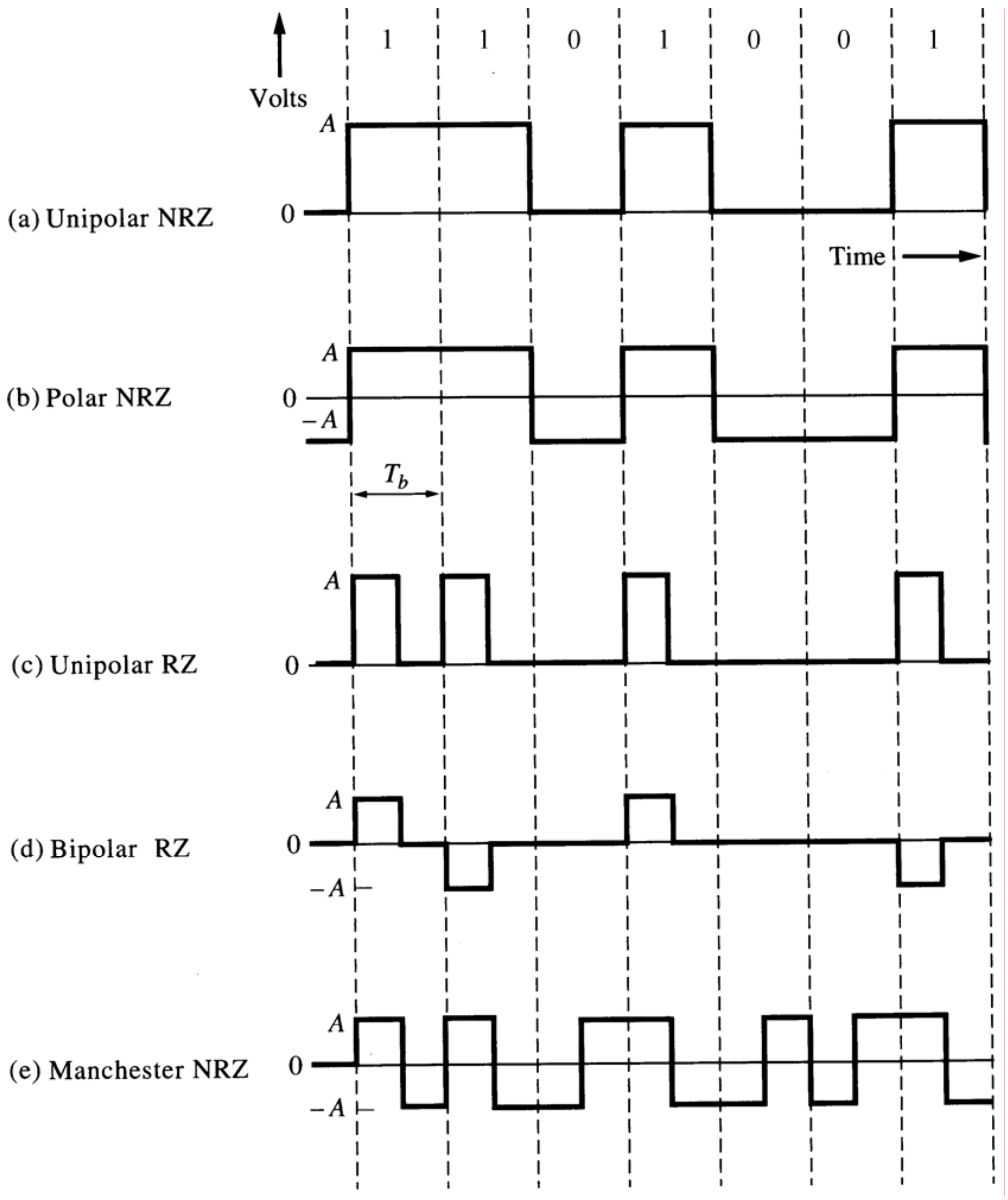
Vienpoliai linijos kodai. Naudojant teigiamos logikos vienpolį linijos kodą, dvejetainį vienetą atitinka teigiamas įtampos lygis (+A voltų), o dvejetainį nulį – nulinis įtampos lygis (žr. 3.4.1a,c pav.).

Poliniai linijos kodai. Dvejetainius vienetus ir nulius atitinka vienodo didumo, tačiau priešingų ženklų įtampos vertės (žr. 3.4.1b pav.).

Dvipoliai (pseudo-trilygiai) linijos kodai. Dvejetainiai vienetai vaizduojami pakaitom teigiamom arba neigiamom vertėm, o dvejetainiai nuliai – nuline verte (žr. 3.4.1d pav.).

Mančesterio linijos kodai. Kiekvieną dvejetainį vienetą atitinka teigiamas pusės bito trukmės impulsas, po kurio seka neigiamas pusės bito trukmės impulsas. Kiekvieną dvejetainį nulį atitinka neigiamas pusės bito trukmės impulsas, po kurio seka teigiamas pusės bito trukmės impulsas (žr. 3.4.1e pav.). Nors oficialaus Mančesterio kodo standarto nėra, tačiau praktikoje dažniausiai naudojamas atvirkščias vieneto ir nulio apibrėžimas (vienetą atitinka teigiamas šuolis bito intervalo centre, o nulį – neigiamas šuolis). Šis linijos kodas naudojamas vietiniuose tinkluose (LAN).

Toliau vienpoliai NRZ signalai kartais bus vadinami tiesiog ***vienpoliais*** signalais, poliniai NRZ – tiesiog ***poliniais*** signalais, o dvipoliai RZ signalai – tiesiog ***dvipoliais*** signalais.



3.4.1 pav. Dvilygiai linijos kodai.

Kiekvienas iš linijos kodų, kurie pavaizduoti 3.4.1 pav., turi savo privalumus ir trūkumus. Pvz., vienpolių NRZ signalų privalumas yra tas, kad jų generavimui galima naudoti grandines, kurios naudoja tik vieną įtampos šaltinį. Tačiau šių signalų nuolatinė dedamoji nėra lygi nuliui, todėl tuo atveju, kai toks signalas perduodamas tiesiogiai (o ne moduliuoja sinusoidės pavidalo analoginį signalą), perdavimo linija turi praleisti nuolatinę srovę. Nuolatinė dedamoji sukuria papildomus energijos nuostolius. Poliniai NRZ signalai nereikalauja linijos laidumo nuolatinei dedamajai, *su sąlyga*, kad perduodamieji dvejetainiai duomenys pakankamai dažnai persijungia iš nulio į vienetą ir atgal. Tačiau grandinėms, kurios generuoja polinius NRZ signalus, reikalingi teigiamos ir neigiamos įtampos šaltiniai. Mančesterio NRZ linijos kodo privalumas yra tas, kad jo nuolatinė dedamoji visuomet lygi nuliui. Tačiau, lyginant su vienpoliu arba poliniu NRZ linijos kodais, Mančesterio linijos kodo impulsų trukmė yra du kartus mažesnė, todėl dažnių juostos plotis yra du kartus didesnis.

Praktikoje pageidautina, kad linijos kodas turėtų šias savybes:

- ***Sinchronizavimasis***. Tai reiškia, kad sinchronizavimo signalas, pagal kurį imtuvas nustato kiekvieno bito pradžios momentą, gali būti atkurtas tiesiog pagal priimtąją bitų seką.
- *Mažas klaidingų bitų dažnis*. Tai reiškia, kad įmanoma sukurti imtuvus, kurie atkurtų dvejetainius duomenis tais atvejais, kai imtuvo įėjimo signalas yra iškraipytas triukšmo arba tarpženklinės interferencijos.
- *Spektras, kuris atitinka duotąjį kanalą*. Pvz., jeigu kanalas nėra laidus nuolatinei srovei, signalo galios spektras turi būti lygus nuliui, esant nuliniam dažniui.
- *Signalo dažnių juostos plotis* turi būti kuo mažesnis. Siekiant išvengti tarpženklinės interferencijos, signalo dažnių juostos plotis turi būti mažesnis už kanalo juostos plotį.
- *Galimybė aptikti ir ištaisyti klaidas*. Šis savybė turi būti lengvai įgyvendinama, naudojant kanalo kodavimą (žr. 1.5 poskyrį), arba turėtų būti realizuota pačiame linijos kode. Pvz., Mančesterio kodo atveju bito klaidą galima aptikti pagal tai, kad nėra signalo šuolio bito intervalo centre.
- ***Kodo skaidrumas***. Tai reiškia, kad imtuvas gali priimti ir teisingai dekoduoti *bet kokią įmanomą* bitų seką ir kad sinchronizavimo signalas gali būti atkurtas, esant bet kokiai bitų sekai. Pvz., visi 3.4.1 pav. pavaizduoti kodai, išskyrus Mančesterio NRZ kodą, nėra skaidrūs, nes, perduodant ilgą nulių seką, prarandamas sinchronizavimo signalas.

Įvairių linijos kodų privalumai ir trūkumai yra smulkiau aprašomi 3.4.2 poskyryje

3.4.2. Įvairių linijos kodų galios spektrinis tankis

Skaitmeninio signalo galios spektrinį tankį galima apskaičiuoti dviem būdais – determinuotųjų procesų metodu arba statistiniu metodu. Pirmuoju atveju suformuojama kažkokia konkreti skaitmeninių duomenų seka, pasirenkamas linijos kodas, ir galios spektras apskaičiuojamas, naudojantis jo apibrėžimu (2.3.4) arba (jeigu signalas yra periodinis) pagal (2.5.31). Naudojant statistinį metodą, užduodamas ne konkretus skaitmeninis signalas, o įvairių signalo lygių (simbolių) tikimybės. Praktikoje sutinkamų skaitmeninių signalų perduodama informacija yra atsitiktinė duomenų seka, todėl statistinis metodas yra tinkamesnis už determinuotųjų procesų metodą.

Pagal (3.3.3) ir (3.3.4), bendroji skaitmeninio signalo išraiška yra

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n f(t - nT_s)\,, \tag{3.4.1}$$

kur $f(t)$ yra vieno impulso formą nusakanti funkcija, T_s yra vieno simbolio perdavimo trukmė, o koeficientai $\{a_n\}$ nusako perduodamus duomenis (pvz., įtampos lygius). Dvejetainių duomenų atveju $T_s = T_b$, kur T_b yra vieno bito perdavimo trukmė. Daugialygio signalo atveju $T_s = lT_b$, kur l yra bitų skaičius, kuris reikalingas vieno simbolio atvaizdavimui dvejetainiu pavidalu.

Naudojant statistinį metodą, duomenų rinkinys $\{a_n\}$ laikomas atsitiktiniu. Bendroji skaitmeninio signalo (3.4.1) galios spektrinio tankio išraiška, kuri gaunama statistiniu metodu, yra šitokia:

$$P_s(f) = \frac{|F(f)|^2}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R(k) e^{j2\pi k f T_s}\,, \tag{3.4.2a}$$

kur $F(f)$ yra pavienio impulso $f(t)$ Furjė transformacija, o $R(k)$ yra duomenų ***autokoreliacija***, kuri apibrėžiama taip:

$$R(k) = \sum_{i=1}^{I} (a_n a_{n+k})_i P_i\,. \tag{3.4.2b}$$

Čia I yra dviejų lygių galimų derinių skaičius, o P_i yra i-tojo derinio tikimybė.

Iš (3.4.2a) išplaukia, kad skaitmeninio signalo galios spektras priklauso nuo vieno impulso amplitudės spektro $F(f)$ ir nuo duomenų autokoreliacijos $R(k)$. Duomenų autokoreliacija priklauso nuo linijos kodo ir nuo duomenų statistinių savybių. Pvz., rasime dvilygio polinio NRZ signalo duomenų autokoreliaciją, kai vieneto ir nulio tikimybės yra vienodos ir kai visi bitai yra nepriklausomi. Šiuo atveju dauginamųjų a_n ir a_{n+k} galimos vertės yra $+A$ ir $-A$. Vadinasi, kai $k = 0$, galimi tik du variantai: $a_n = \pm A$. Kadangi abiejų variantų tikimybės lygios 1/2, tai, kai $k = 0$,

$$R(0) = A^2 \frac{1}{2} + (-A)^2 \frac{1}{2} = A^2 .$$

Kai $k \neq 0$, galimi keturi variantai: 1) $a_n = A$, $a_{n+k} = A$; 1) $a_n = A$, $a_{n+k} = -A$; 1) $a_n = -A$, $a_{n+k} = A$; 1) $a_n = -A$, $a_{n+k} = -A$. Kadangi bitai nepriklausomi, tai kiekvieno iš šių variantų tikimybę galima apskaičiuoti pagal nepriklausomų įvykių tikimybių sandaugos teoremą. Kadangi vieneto ir nulio tikimybės yra lygios 1/2, gauname, kad kiekvieno varianto tikimybė lygi (1/2)·(1/2) = 1/4. Vadinasi, kai $k \neq 0$,

$$R(k) = \sum_{i=1}^{4} (a_n a_{n+k})_i P_i = A^2 \frac{1}{4} + (A)(-A)\frac{1}{4} + (-A)(A)\frac{1}{4} + (-A)^2 \frac{1}{4} = 0 .$$

Taigi, šiuo atveju sumoje (3.4.2a) lieka tik vienas dėmuo, kuris atitinka $k = 0$:

$$P_{\text{polar}}(f) = A^2 \frac{|F(f)|^2}{T_b} ; \qquad (3.4.3a)$$

čia T_b yra vieno bito trukmė. Vienetinio stačiakampio impulso spektrą $F(f)$ nusako formulė (2.2.32). Įrašę šią išraišką į (3.4.3a), randame

$$P_{\text{polar}}(f) = A^2 T_b \left(\frac{\sin \pi f T_b}{\pi f T_b} \right)^2 . \qquad (3.4.3b)$$

3.4.2 pav. pateikti reiškinio (3.4.2a) skaičiavimo rezultatai penkių tipų linijos kodams, kurie pavaizduoti 3.4.1 pav. Čia maksimalus įtampos lygis A (žr. 3.4.1 pav.) parinktas taip, kad vidutinė normuotoji signalo galia būtų lygi vienetui. Remiantis šiomis dažninėmis priklausomybėmis, galima padaryti šias išvadas apie skirtingų tipų linijos kodus:

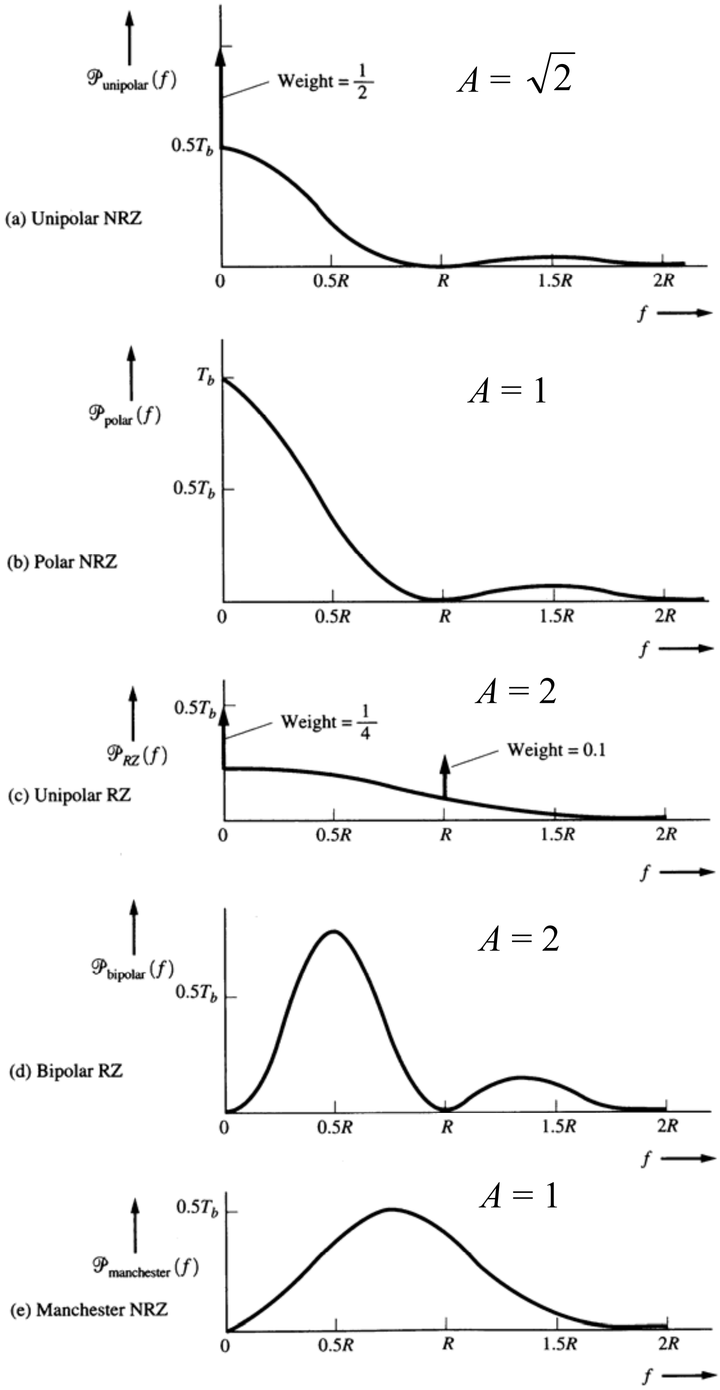
Vienpolių NRZ signalų galios spektrinio tankio dažninė priklausomybė turi δ funkcijos pavidalo maksimumą ties nuliniu dažniu (žr. 3.4.2a pav.; $A = \sqrt{2}$). Šio maksimumo plotas lygus 1/2. Tai reiškia, kad pusė signalo galios yra išeikvojama nuolatinei dedamajai. Tai yra pagrindinis vienpolio NRZ linijos kodo trūkumas. Šio kodo privalumas yra tas, kad grandinės, kurios generuoja tokius signalus, yra palyginti paprastos.

Polinių NRZ signalų galios spektrinis tankis ties nuliniu dažniu neturi δ funkcijos pavidalo maksimumo, tačiau neartėja į nulį (žr. 3.4.2b pav.; $A = 1$). Tai reiškia, kad nuolatinė dedamoji lygi nuliui, tačiau tokio signalo perdavimui be iškraipymų taip pat reikalingas kanalas, kuris praleidžia dažnius, kurie yra žymiai mažesni už bitų spartą R. Polinių *NRZ* signalų privalumas yra tas, kad juos palyginti lengva generuoti, nors reikalingos dviejų poliarumų maitinimo įtampos. Be to, polinio NRZ kodo atveju klaidingų bitų dažnis yra mažesnis, negu naudojant kitus skaitmeninės informacijos perdavimo būdus.

Vienpoliai RZ signalai skiriasi nuo vienpolių NRZ signalų tuo, kad jų impulso trukmė yra du kartus mažesnė (plg. 3.4.1c pav. ir 3.4.1a pav.). Todėl vienpolio RZ signalo pirmojo nulio dažnių juostos plotis yra du kartus didesnis, negu vienpolio NRZ signalo atveju (žr. 3.4.2c pav.; $A = 2$). Be to, vienpolio RZ signalo galios spektre yra papildomi δ funkcijos pavidalo maksimumai ties dažniais, kurie lygūs R, $3R$, $5R$ ir t.t. (žr. 3.4.2c pav.). Maksimumo ties dažniu R plotas lygus 0.1. Tai reiškia, kad vienpolis RZ signalas turi dažnio R dedamąją, kurios galia lygi 0.1 viso signalo galios. Šią dedamąją galima panaudoti bitų sinchronizavimui. Tačiau, kaip ir vienpolio NRZ signalo atveju, signalas turi nuolatinę dedamąją. Kitas šio linijos kodo trūkumas yra tas, kad, norint išsaugoti tokį patį klaidingų bitų dažnį, kaip ir polinio NRZ kodo atveju, reikalinga 3 dB didesnė signalo galia.

Dvipolių RZ signalų galios spektrinis tankis lygus nuliui, esant nuliniam dažniui (žr. 3.4.2d pav.; $A = 2$). Tai reiškia, kad signalą galima perduoti grandine, kuri nepraleidžia nuolatinės dedamosios. Bitų sinchronizavimo signalą galima atkurti, pavertus dvipolį RZ signalą vienpoliu RZ signalu, kurio galios spektras turi δ funkcijos pavidalo maksimumą ties bitų sparta R (žr. 3.4.2c pav.). Norint atlikti tokią signalo transformaciją, pakanka visus neigiamus impulsus paversti teigiamais (žr. 3.4.1d pav. ir 3.4.1c pav.). Dvipolio RZ kodo trūkumas yra tas, kad imtuvas turi sugebėti atskirti tris signalo lygius ($+A$, $-A$ ir 0) vietoj dviejų, kaip anksčiau minėtuose koduose. Klaidos tikimybė yra tokia pati, kaip ir vienpolio signalo, t.y., didesnė, negu polinio.

Mančesterio NRZ signalų pirmojo nulio dažnių juostos plotis yra du kartus didesnis, negu polinio, dvipolio arba vienpolio NRZ kodo atveju (žr. 3.4.2e pav.; $A = 1$). Tačiau tokių signalų privalumai yra tie, kad jų nuolatinė dedamoji visuomet lygi nuliui, ir jokiomis sąlygomis neprarandamas sinchronizavimo signalas.



3.4.2 pav. Įvairių linijos kodų galios spektrinis tankis.

3.4.3. Diferencialinis kodavimas

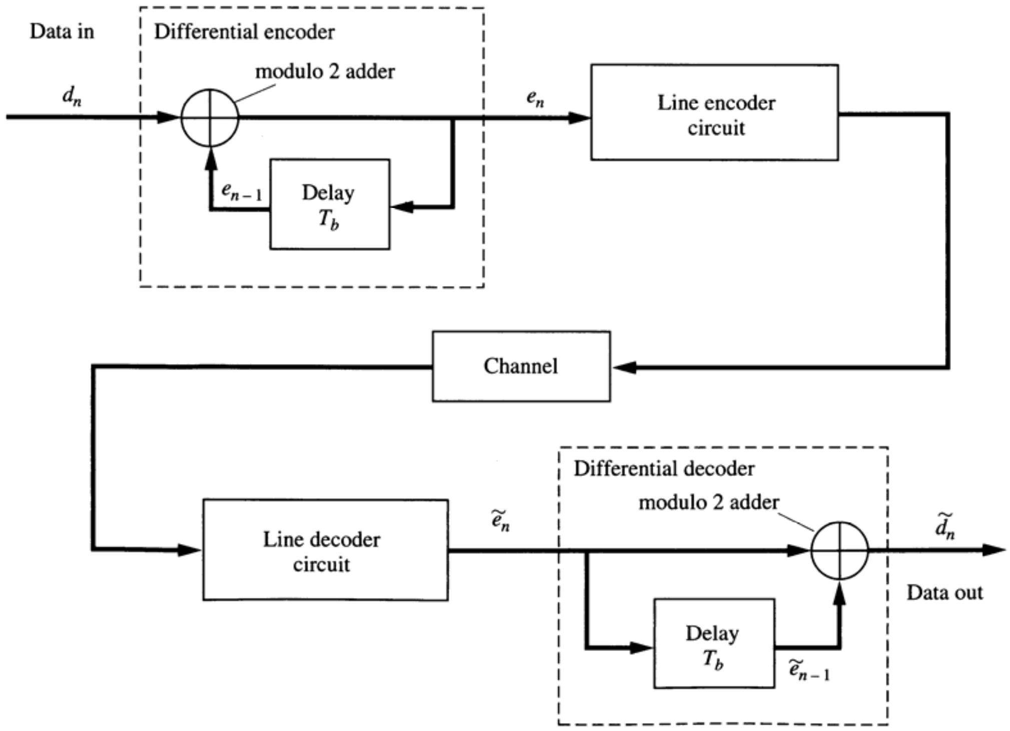
Kai kuriuose linijos koduose svarbus yra signalo vertės ženklas. Pvz., poliniame NRZ linijos kode teigiami impulsai atitinka vienetus, o neigiami – nulius (žr. 3.4.1b pav.) Kai duomenys perduodami dideliu skaičiumi grandinių, kurios sudaro ryšio sistemą, gali atsitikti, kad kuriame nors sujungimo taške laidai bus sukeisti vietomis ir signalas bus invertuotas (t.y., signalo ženklas pasikeis į priešingą). Tokiu atveju vietoj dvejetainių nulių gali būti priimti vienetai, o vietoj vienetų – nuliai (tai negalioja dvipoliam signalui: žr. 3.4.1 poskyrį ir 3.4.1d pav.). Siekiant to išvengti, dažnai naudojamas diferencialinis kodavimas, kurį iliustruoja 3.4.3 pav. Naudojant ***diferencialinį kodavimą***, užkoduoti duomenys apibrėžiami šitaip:

$$e_n = d_n \oplus e_{n-1}, \tag{3.4.4}$$

kur d_n yra pradinių duomenų n-tasis bitas, o e_n ir e_{n-1} yra užkoduotųjų ***diferencialinių duomenų*** n-tasis ir n-1-asis bitai. T.y., diferencialinių duomenų bitas yra lygus atitinkamo pradinių duomenų bito ir ankstesniojo diferencialinių duomenų bito sumai. Suma moduliu 2, kuri įeina į (3.4.4), realizuojama, naudojant vėlinimo grandinę, kurios vėlinimo trukmė lygi vieno bito trukmei T_b (žr. 3.4.3 pav.). Imtuvas diferencialinius duomenis dekoduoja tokiu būdu:

$$\tilde{d}_n = \tilde{e}_n \oplus \tilde{e}_{n-1}, \tag{3.4.5}$$

kur tildos ženklas "~" nurodo, kad turimi omenyje priimtieji duomenys. T.y., duomenų bitas yra lygus atitinkamo diferencialinių duomenų bito ir ankstesniojo diferencialinių duomenų bito sumai. Pradinių ir atitinkamų diferencialinių duomenų pavyzdys pateiktas 3.4.1 lentelėje. Akivaizdu, kad, invertavus užkoduotus duomenis, priimtoji dekoduotoji bitų seka nepasikeičia.



3.4.3 pav. Diferencialinio kodavimo sistema.

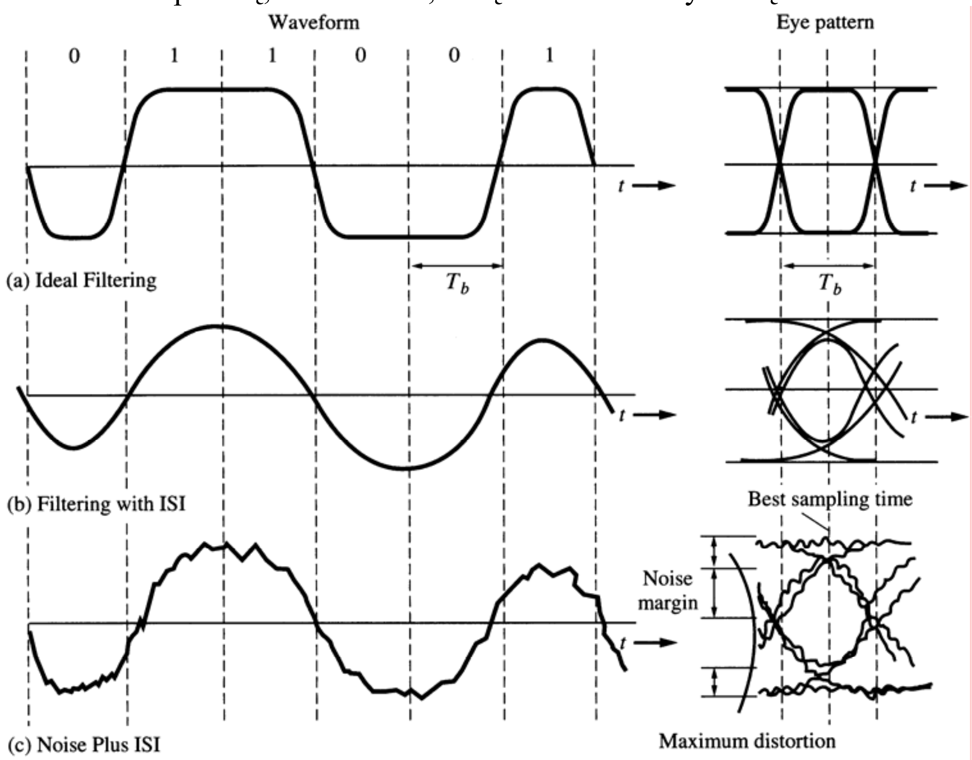
3.4.1 lentelė. Diferencialinio kodavimo pavyzdys

Encoding									
Input sequence	d_n		1	1	0	1	0	0	1
Encoded sequence	e_n	1	0	1	1	0	0	0	1
Reference digit ⟶		↑							
Decoding (with correct channel polarity)									
Received sequence (correct polarity)	$\tilde{e}_n$	1	0	1	1	0	0	0	1
Decoded sequence	$\tilde{d}_n$		1	1	0	1	0	0	1
Decoding (with inverted channel polarity)									
Received sequence (inverted polarity)	$\tilde{e}_n$	0	1	0	0	1	1	1	0
Decoded sequence	$\tilde{d}_n$		1	1	0	1	0	0	1

3.4.4. *Filtravimo ir triukšmo efektų matavimas*

Kanalo filtravimo ir triukšmo poveikį skaitmeniniam signalui galima įvertinti, stebint priimtąjį linijos kodą oscilografo ekrane. 3.4.4 pav. kairiojoje pusėje pavaizduotas linijos kodo pavidalas, kai (a) kanalo dažnių juostos plotis yra žymiai didesnis už linijos kodo dažnių pirmojo nulio juostos plotį (idealus atvejis), (b) kanalo dažnių juosta yra mažesnė už linijos kodo pirmojo nulio juostos plotį, todėl pasireiškia tarpženklinė interferencija (žr. 3.2.2 poskyrį), (c) be tarpženklinės interferencijos, signalą iškraipo kanalo triukšmas. 3.4.4 pav. dešiniojoje pusėje pavaizduotas tų pačių linijos kodų vaizdas oscilografe. Skleistinė sinchronizuojama bitų sinchronizavimo grandine (t.y., impulsais, kurių periodas lygus bito trukmei T_b), o skleistinės trukmė yra šiek tiek didesnė už bito trukmę T_b. Šie vaizdai vadinami ***akies diagramomis*** (*eye patterns*), nes jie savo pavidalu panašūs į žmogaus akį. Normaliomis veikimo sąlygomis (kai nėra bito klaidų), ši “akis” yra atvira. Jeigu signalas yra stipriai iškraipytas triukšmo arba tarpženklinės interferencijos, akis “užsimerkia”; tai reiškia, kad imtuvo išėjime neišvengiamos bitų klaidos. Akies diagrama suteikia galimybę įvertinti priimtojo linijos kodo kokybę. Kaip parodyta 3.4.4 pav., akies diagrama pateikia tokią informaciją:

- ***Sinchronizavimo paklaida*** – tai didžiausias leistinas bitų sinchronizavimo grandinės impulso vėlinimas atžvilgiu optimalaus ėmimo momento (t.y., atžvilgiu bito intervalo centro). Sinchronizavimo paklaidą nusako “akies” plotis horizontaliąja kryptimi.
- Jautris sinchronizavimo paklaidai – tai “akies” krašto polinkis (krypties koeficientas) prie sankirtos su t ašimi.
- ***Triukšmo atsarga*** – tai “akies” aukštis. Triukšmo atsarga nusako didžiausią triukšmo amplitudę, kuriai esant, dar įmanoma ištaisyti bitų klaidas.



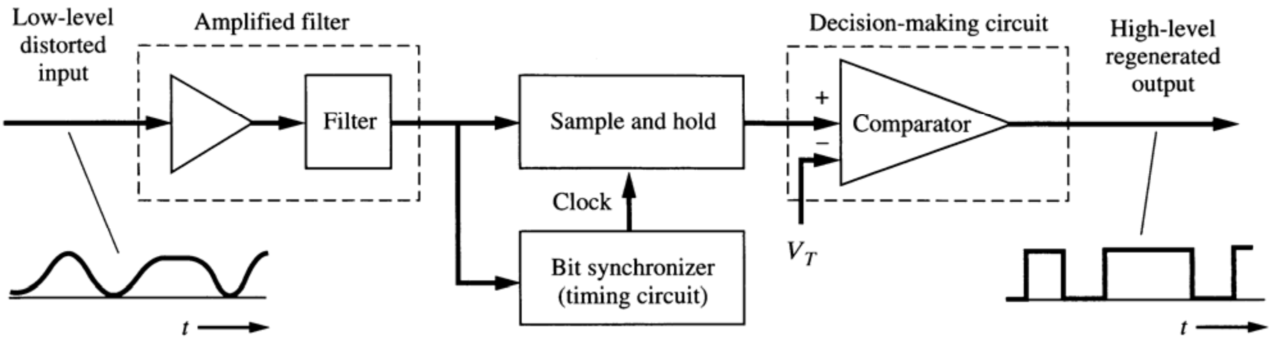
3.4.4 pav. Kairioji pusė: linijos kodo pavidalas, kai (a) kanalo dažnių juostos plotis yra žymiai didesnis už linijos kodo dažnių pirmojo nulio juostos plotį (idealusis atvejis), (b) kanalo dažnių juosta yra mažesnė už linijos kodo pirmojo nulio juostos plotį, todėl pasireiškia tarpženklinė interferencija, (c) signalą iškraipo ne tik tarpženklinė interferencija, bet ir kanalo triukšmas. Dešinioji pusė: tų pačių linijos kodų vaizdas oscilografe.

3.4.5. Regeneraciniai retransliatoriai

Perduodant skaitmeninį signalą laidų pora, koaksialiniu kabeliu, bangolaidžiu arba šviesolaidžiu, signalas yra silpninamas, filtruojamas ir iškraipomas triukšmo. Todėl didelio nuotolio ryšio linijose imtuvas gali atkurti duomenis tik tuo atveju, kai linijoje naudojami retransliatoriai (žr. 3.2.1 pav.), kurie signalą periodiškai sustiprina ir “išvalo”. Jeigu signalas būtų ne skaitmeninis, o analoginis, galima būtų naudoti tik tiesinius stiprintuvus, nes reikėtų išsaugoti amplitudžių santykines vertes. Tuomet signalo iškraipymai kauptųsi nuo vieno stiprintuvo prie kito. Tai yra vienas iš analoginio signalo trūkumų. Tačiau tuo atveju, kai perduodamas skaitmeninis signalas, jį galima apdoroti netiesiškai ir tokiu būdu atkurti signalą, kuriame jau nebūtų triukšmo. Įrenginys, kuris atkuria neiškraipytą skaitmeninį signalą, vadinamas ***regeneraciniu retransliatoriumi***. Regeneracinio retransliatoriaus, kuris naudojamas vienpolio NRZ signalo atkūrimui, supaprastinta struktūrinė schema pateikta 3.4.5 pav. Stiprintuvas atstato pradinio signalo amplitudę, filtras dalinai kompensuoja signalo iškraipymus dėl filtravimo kanale ir tokiu būdu sumažina tarpženklinę interferenciją (žr. 3.5 poskyrį). Bitų sinchronizatorius generuoja impulsus laiko momentais, kurie atitinka “akies diagramos” maksimumą (žr. 3.4.4 poskyrį). Tie impulsai valdo imties ir laikymo grandinę: kai bitų sinchronizatorius generuoja impulsą, imties ir laikymo grandinė išmatuoja signalo momentinę vertę, ir iki sekančio valdymo impulso ta signalo vertė būna komparatoriaus įėjime. Komparatorius generuoja aukštą įtampos lygį (dvejetainį vienetą) tik tuo atveju, kai išmatuotoji signalo vertė yra didesnė už slenkstinę įtampą V_T. Slenkstinė įtampa V_T dažniausiai parenkama taip, kad ji būtų apytiksliai lygi skaitmeninio signalo didžiausios ir mažiausios verčių vidurkiui. Jeigu triukšmas ir tarpženklinė interferencija įėjimo signale yra pakankamai maži, komparatoriaus išėjime aukštasis įtampos lygis bus tik tuo atveju, kai įėjimo signale yra dvejetainio vieneto lygis. Tokiu būdu vienpolis NRZ linijos kodas “išvalomas” nuo triukšmo, išskyrus bito klaidas, kurios gali atsirasti, jeigu triukšmo amplitudė viršija slenkstinės įtampos ir dvejetainio nulio arba vieneto skirtumą.

Didelio nuotolio skaitmeninėse ryšių sistemose gali būti daug nuosekliai sujungtų regeneracinių retransliatorių (žr. 3.2.1 pav.). Atstumas tarp retransliatorių priklauso nuo signalo energijos nuostolių ir nuo triukšmo padidėjimo kelio vienete. Retransliatorius reikalingas tame taške, kuriame signalo ir triukšmo galių santykis pasidaro mažesnis už vertę, kuri reikalinga, norint išlaikyti reikiamą klaidingų bitų dažnį. Jeigu vieno retransliatoriaus klaidingų bitų dažnis P_e yra žymiai mažesnis už vienetą, tuomet klaidingų bitų dažnis sistemoje su m retransliatorių (įskaitant ir imtuvo regeneravimo grandinę) yra lygus

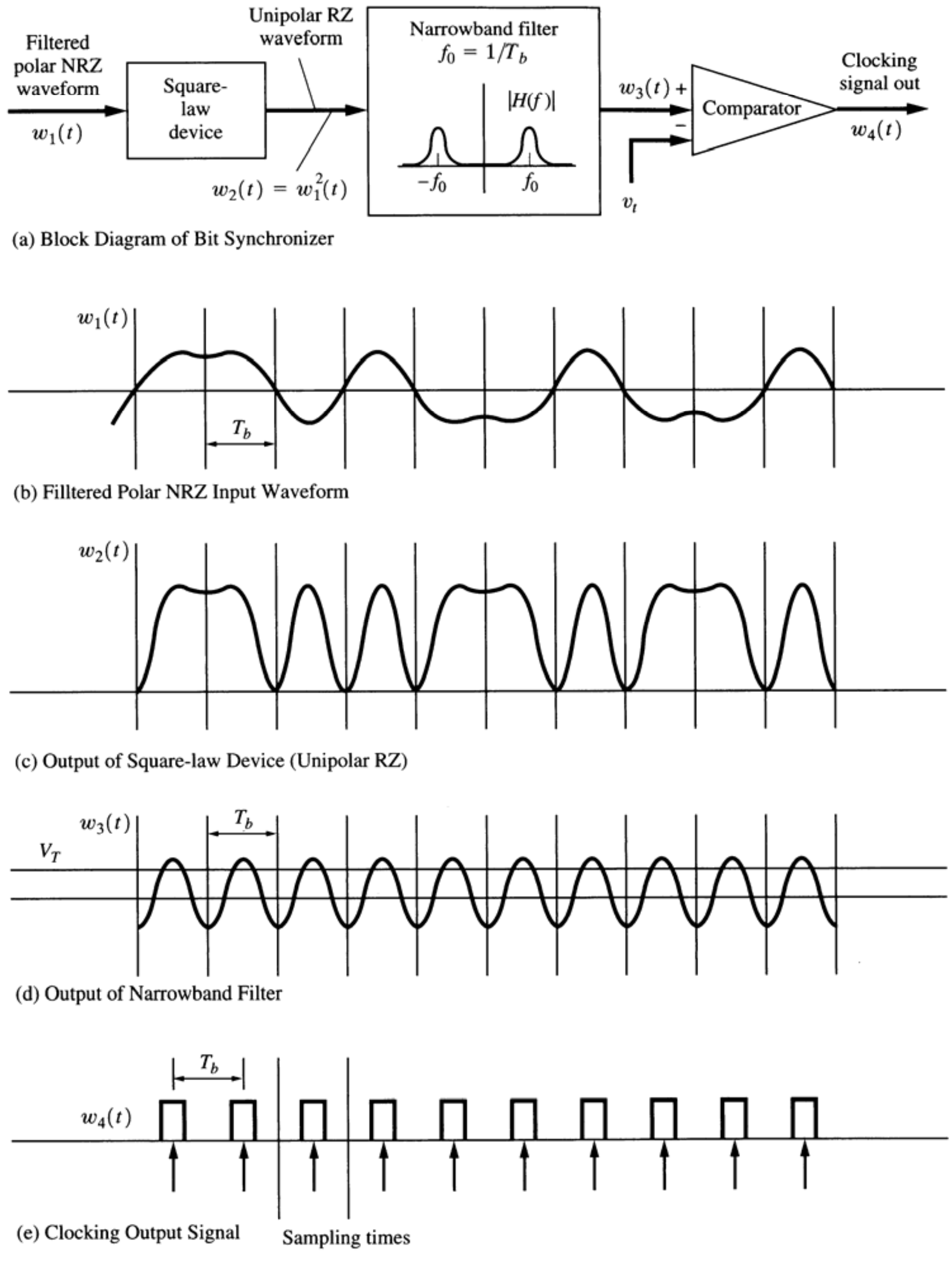
$$P_{me} \approx mP_e. \tag{3.4.6}$$



3.4.5 pav. Regeneracinio retransliatoriaus schema vienpolio NRZ signalo atvejui.

3.4.6. Bitų sinchronizavimas

Bitų sinchronizavimo signalai – tai impulsai, pagal kuriuos imtuvas atskiria vieną bito intervalą nuo kito. T.y., kiekvienas bitų sinchronizavimo impulsas nurodo laiko momentą, kai imtuvas turi matuoti priimtojo skaitmeninio signalo vertę. Bitų sinchronizavimo signalą galima perduoti atskiru kanalu, tačiau patogiau jį atkurti tiesiog pagal priimtąjį skaitmeninį signalą. Bitų sinchronizavimo grandinės sudėtingumas priklauso nuo naudojamo linijos kodo. Bitų sinchronizatorius yra paprasčiausias tuo atveju, kai naudojamas vienpolis RZ linijos kodas (žr. 3.4.1c pav.), nes šio kodo galios spektrinio tankio funkcija turi δ funkcijos pavidalo maksimumą ties bitų sparta $f = R$ (žr. 3.4.2c pav.). Todėl, norint gauti stačiakampių impulsų pavidalo bitų sinchronizavimo signalą, pakanka priimtąjį signalą praleisti pro siaurajuostį filtrą, kuris suderintas dažniui $f_0 = R = 1/T_b$, o po to – pro komparatorių (žr. 3.4.6d,e pav.). Atitinkama sinchronizatoriaus grandinė gaunama iš 3.4.6a pav., išmetus kvadratinio dėsnio įrenginį. Jeigu naudojamas polinis NRZ linijos kodas, šį kodą visų pirma reikia transformuoti į vienpolį RZ linijos kodą. Tai atliekama, naudojant kvadratinio dėsnio įrenginį (žr. 3.4.6a pav.). 3.4.6c pav pateiktas šio įrenginio išėjimo signalas, atitinkantis 3.4.6b pav. pavaizduotą polinį NRZ kodą. Šis signalas panašus į vienpolį RZ kodą, kuris sudarytas tik iš dvejetainių vienetų (žr. 3.4.1c pav.). Todėl tokio signalo galios spektre yra δ funkcijos pavidalo maksimumas ties bitų sparta $f = R$, ir sinchronizavimo signalą galima gauti, naudojant siaurajuostį filtrą ir komparatorių (žr. 3.4.6a pav.).



3.4.6 pav. Bitų sinchronizavimas polinio NRZ signalo atveju, naudojant kvadratinio dėsnio įrenginį.

Jeigu signalas neturi δ funkcijos pavidalo maksimumo ties bitų sparta $f = R$, tuomet bitų sinchronizavimo signalą galima gauti, naudojantis paties linijos kodo laikinės simetrijos savybe. “Akies diagramoje”, kuri pavaizduota 3.4.4 pav. ir 3.4.7 pav., matyti, kad polinio NRZ signalo vidutinės vertės laiko momentais, kurie yra simetriški atžvilgiu bito intervalo centro, sutampa. T.y.,

$$| w_1(\tau_0 + nT_b - \Delta) | \approx | w_1(\tau_0 + nT_b + \Delta) |, \tag{3.4.7}$$

kur $w_1(t)$ žymi NRZ linijos kodą po filtravimo, T_b yra bito trukmė, $0 < \Delta < T_b/2$, τ yra laiko intervalas nuo n+1-ojo bito pradžios momento iki bitų sinchronizavimo impulso momento, τ_0 yra optimalioji τ vertė, kuri atitinka didžiausią “akies” aukštį (žr. 3.4.7 pav.), n+1 yra bito, kurio metu matuojamas signalas, numeris. Signalo vertė $w_1(\tau + nT_b - \Delta)$ vadinama ***ankstesniąja imtimi***, o vertė $w_1(\tau + nT_b + \Delta)$ – ***vėlesniąja imtimi***. Jeigu $0 < \tau < \tau_0$, tuomet ankstesniosios imties absoliutinė vertė yra mažesnė už vėlesniosios imties absoliutinę vertę, o jeigu $\tau_0 < \tau < T_b$, tuomet ankstesniosios imties absoliutinė vertė yra didesnė už vėlesniosios imties absoliutinę vertę (žr. 3.4.4 pav.). Todėl skirtumo

$$w_2(t) = | w_1(\tau + nT_b - \Delta) | - | w_1(\tau + nT_b + \Delta) | \tag{3.4.8}$$

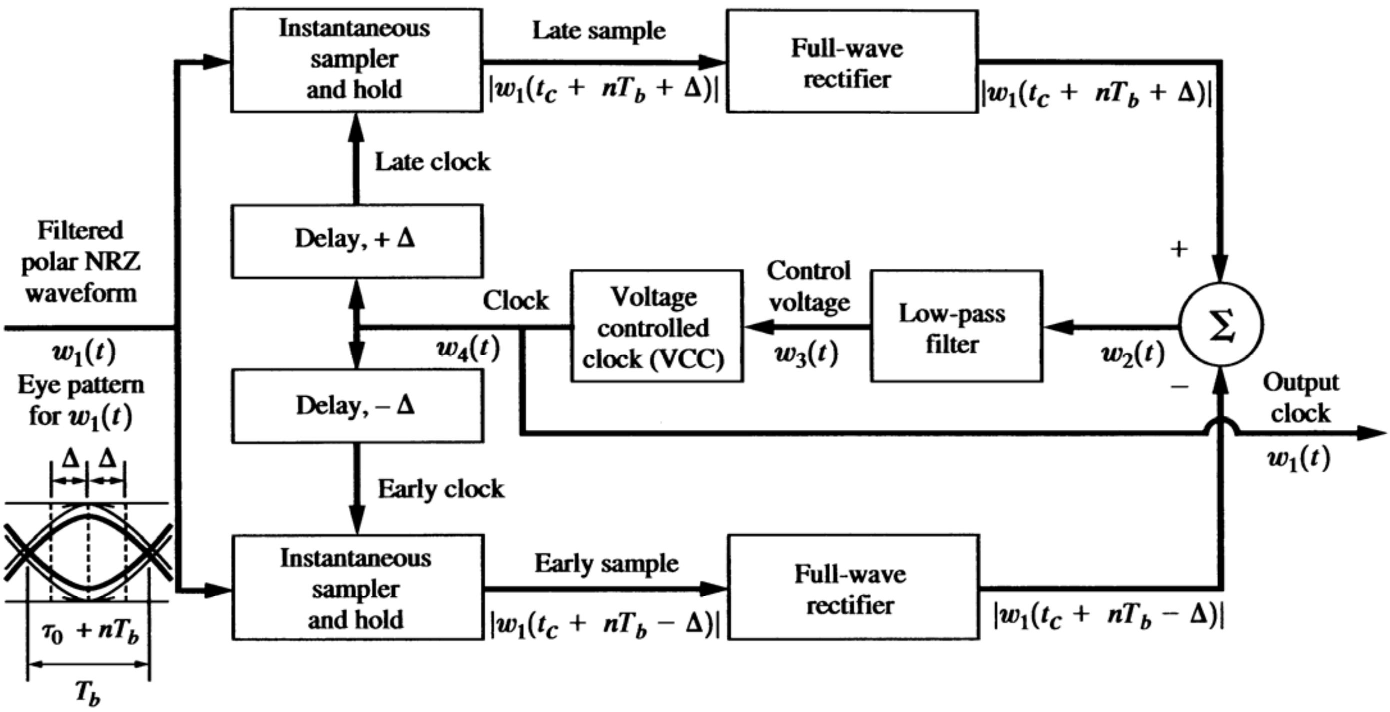
laikinį vidurkį

$$w_3(t) = \langle w_2(t) \rangle \tag{3.4.9}$$

galima panaudoti automatiniam sinchronizavimo signalo dažnio reguliavimui: dažnis yra optimalus, kai $\tau = \tau_0$, t.y., kai $w_3(t) = 0$. Vidurkinimo operacija reikalinga tam, kad bitų sinchronizatorius veiktų ir tuo atveju, kai dvejetainis skaitmuo nesikeičia kas T_b sekundžių.

Polinio NRZ signalo bitų sinchronizatoriaus, kuriame įgyvendintas aukščiau aprašytasis metodas, struktūrinė schema pateikta 3.4.7 pav. Sinchronizavimo impulsus generuoja valdomo dažnio generatorius, kurio dažnį valdo įtampa $w_3(t)$ (žr. (3.4.9)). Ši įtampa suformuojama tokiu būdu. Naudojant vėlinimo grandines, suformuojamas dydžiu Δ užvėlintas sinchronizavimo signalas ir tiek pat “paskubintas” signalas (paskuba $-\Delta$ ir vėlinimas $+\Delta$ yra tapatūs vėlinimams $T_b - \Delta$ ir $T_b + \Delta$). Šie signalai valdo imties grandines, kurios atitinkamais laiko momentais ($\tau + nT_b - \Delta$ ir $\tau + nT_b + \Delta$) užfiksuoja įėjimo signalo vertes. Lygintuvai šias vertes pakeičia jų absoliutinėmis vertėmis. Sumavimo įrenginys atima jas vieną iš kitos (t.y., apskaičiuoja $w_2(t)$ (3.4.8)), o žemųjų dažnių filtras išskiria šio skirtumo žemadažnę dedamąją, t.y., laikinį vidurkį $w_3(t)$. Jeigu sinchronizavimo impulsai yra laiko momentais $\tau_0 + nT_b$, t.y., jeigu $\tau = \tau_0$, tuomet dažnio valdymo įtampa $w_3(t) = 0$. Jeigu sinchronizavimo impulsai vėluoja ($\tau > \tau_0$), tuomet $w_3(t) > 0$ ir dažnis padidinamas. Jeigu sinchronizavimo impulsai skuba ($\tau < \tau_0$), tuomet $w_3(t) < 0$ ir dažnis sumažinamas. Todėl bitų sinchronizatoriaus generuojamas signalas $w_4(t)$ – tai siauri impulsai laiko momentais $t = \tau_0 + nT_b$.

Vienpoliai, poliniai ir dvipoliai bitų sinchronizatoriai veikia tik tuo atveju, kai priimamuose duomenyse dvejetainius vienetus pakankamai dažnai keičia dvejetainiai nuliai ir atvirkščiai. Egzistuoja du būdai išvengti sinchronizavimo signalo praradimo, kai priimama ilga vienetų arba nulių seka. Vienas būdas – tai duomenų šifravimas (*scrambling*). Jo esmė yra ta, kad siųstuvas perduodamuosius bitus “sumaišo”, t.y., sukeičia vietomis pagal tam tikrą taisyklę. Imtuvas atlieka atvirkščią operaciją, t.y., atstato pradinę bitų tvarką. Laiko intervalas tarp sukeičiamų vietomis bitų turi būti bent kelis kartus didesnis už tipišką vienetų arba nulių sekos trukmę. Tokiu atveju imtuvo įėjime nebūna ilgų vienų ir nulių sekų, todėl galima naudoti vienpolį, polinį arba dvipolį linijos kodą. Kitas būdas – naudoti linijos kodą, kuriame ilgos vienetų arba nulių sekos netrukdo sinchronizavimui. Pvz., galima panaudoti Mančesterio NRZ linijos kodą (žr. 3.4.1e pav.), tačiau tuomet bus reikalingas kanalas, kurio dažnių juostos plotis bent du kartus didesnis už tą, kuris reikalingas poliniam NRZ linijos kodui.



3.4.7 pav. Paskubos-vėlinimo bitų sinchronizatorius polinio NRZ signalo atvejui.

3.4.7. Daugialygių signalų galios spektrinis tankis

3.3.3 poskyryje jau buvo minėta, kad daugialygio signalo dažnių juostos plotis yra mažesnis už tos pačios bitų spartos dvilygio signalo dažnių juostos plotį. Dabar šį teiginį pagrįsime matematiškai.

3.4.8 pav. parodyti 3 bitų analoginio skaitmenų keitiklio įėjimo ir išėjimo signalai. Šiuo atveju įėjimo signalas yra dvilygis, o išėjimo signalas yra 8-lygis. Jeigu vienam daugialygio signalo simboliui išreikšti reikalingi l bitų, tuomet daugialygio signalo lygių skaičius yra $L = 2^l$. Daugialygio signalo simbolių sparta D susijusi su bitų sparta R sąryšiu

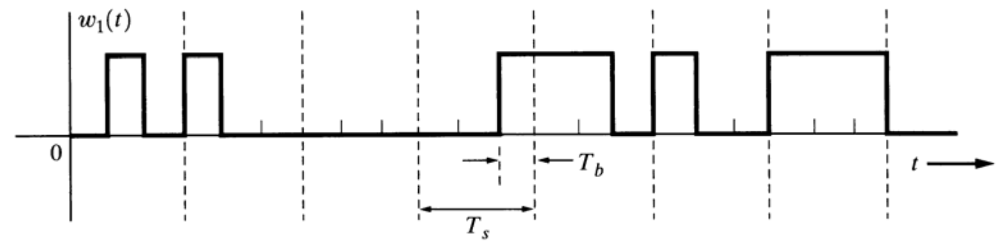
$$D \equiv \frac{1}{T_s} = \frac{1}{lT_b} = \frac{R}{l}, \tag{3.4.10}$$

kur T_s yra simbolio trukmė, o T_b yra bito trukmė. Pvz., 3.4.8b pav. atveju simbolių sparta yra 3 kartus mažesnė už bitų spartą.

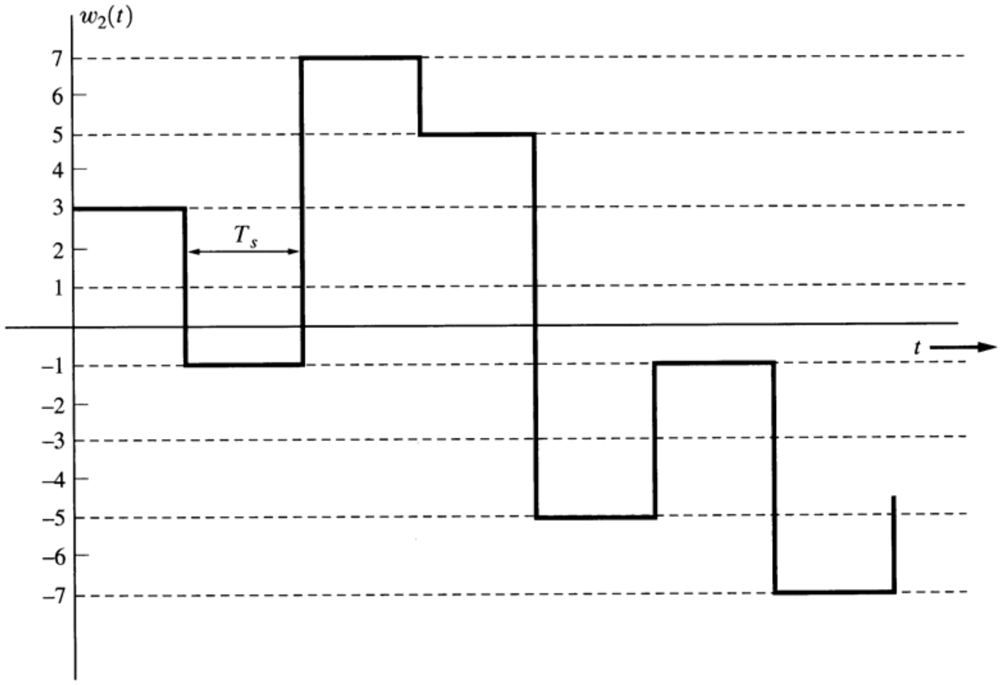
Daugialygio signalo galios spektrinį tankį galima apskaičiuoti pagal (3.4.2a) formulę, kuri buvo panaudota 3.4.2 poskyryje, skaičiuojant dvilygio signalo galios spektrą. Ši formulė įgyja ypač paprastą pavidalą tuo atveju, kai daugialygio signalo autokoreliacija (3.4.2b) skiriasi nuo nulio tik taške $k = 0$. Tokio signalo pavyzdys – tai daugialygis polinis NRZ signalas, kuriame visos lygių vertės yra vienodai tikėtinos. 8 lygių polinio NRZ signalo pavyzdys pateiktas 3.4.8b pav. Atitinkamas 3 bitų ASK kodas pateiktas 3.4.2 lentelėje.

3.4.2 lentelė. 3 bitų analoginio skaitmenų keitiklio kodas

Skaitmeninis žodis	000	001	010	011	100	101	110	111
Išėjimo lygis (a_n)	+7	+5	+3	+1	-1	-3	-5	-7



(a) Input Binary Waveform, $w_1(t)$



(b) $L = 8 = 2^3$ Level Polar NRZ Waveform Out

3.4.8 pav. 3 bitų analoginio skaitmenų keitiklio įėjimo (a) ir išėjimo (b) signalai.

Jeigu intervalas tarp bitų (k) yra nelygus nuliui, tuomet aukščiau minėtomis sąlygomis autokoreliacijos išraiškoje (3.4.2b) kiekvienam dėmeniui $(a_n a_{n+k})P_i$ galima surasti kitą dėmenį, kurio vertė priešinga. Todėl $R(k) = 0$, kai $k \neq 0$ (dvilygio signalo atveju šis teiginys įrodytas 3.4.2 poskyryje). Pavyzdyje, kuris pavaizduotas 3.4.8b pav., lygio kvadratas $(a_n)^2$ gali įgyti 4 vertes: 1, 9, 25 ir 49, o kiekvienos iš jų tikimybė (P_i) lygi 1/4. Todėl

$$R(0) = \sum_{i=1}^{4} (a_n)_i^2 P_i = 21$$

ir, pagal (3.4.2a),

$$P_{w2}(f) = 21 \frac{|F(f)|^2}{T_s}.$$

Pasinaudoję stačiakampio impulso amplitudžių spektro išraiška (2.2.32) ir atsižvelgę į tai, kad $T_s = 3T_b$, randame

$$P_{w2}(f) = 63T_b \left(\frac{\sin 3\pi f T_b}{3\pi f T_b} \right)^2.$$

Palyginimui – polinio NRZ signalo (žr. 3.4.1b pav.), kuriame dvejetainio vieneto ir nulio tikimybės yra vienodos, galios spektrinis tankį nusako reiškinys (3.4.3b) (ši dažnio funkcija, kai $A = 1$, pavaizduota 3.4.2b pav.). Vadinasi, 8-lygio polinio NRZ signalo pirmojo nulio dažnių juostos plotis yra $B_{\text{null}} = 1/(3T_b) = R/3$, t.y., 3 kartus mažesnis už tos pačios bitų spartos dvilygio polinio NRZ, vienpolio NRZ arba dvipolio RZ signalo pirmojo nulio juostos plotį ir 6 kartus mažesnis už dvilygio vienpolio RZ arba Mančesterio NRZ signalo pirmojo nulio juostos plotį (žr. 3.4.2 pav.).

Bendruoju atveju, kai lygių skaičius yra $L = 2^l$, daugialygio signalo su stačiakampiais impulsais galios spektrinis tankis lygus

$$P_{\text{multilevel NRZ}}(f) = K\left(\frac{\sin l\pi f T_b}{l\pi f T_b}\right)^2, \tag{3.4.11}$$

kur K yra konstanta, o pirmojo nulio dažnių juostos plotis lygus

$$B_{\text{null}} = R/l. \tag{3.4.12}$$

Taigi, daugialygių signalų panaudojimas leidžia sumažinti skaitmeninio signalo dažnių juostos plotį, lyginant su dvilygiu signalu. Praktikoje daugialygiai signalai dažniausiai ne tiesiogiai perduodami kanalu, o moduliuoja nešlį. Tokiu būdu suformuojamas palyginti siaurajuostis skaitmeninis signalas.

3.4.8. Skaitmeninio signalo spektro panaudojimo efektyvumas

Skaitmeninio signalo ***spektro panaudojimo efektyvumas*** η – tai bitų skaičius per sekundę, tenkantis vienam dažnių juostos hercui:

$$\eta = \frac{R}{B}(\text{bits/s})/\text{Hz}, \tag{3.4.13}$$

kur R yra bitų sparta, o B yra signalo dažnių juostos plotis.

Praktikoje, kuriant ryšių sistemą, pagrindinis tikslas yra pasiekti kuo didesnį spektro panaudojimo efektyvumą, tenkinant duotuosius sistemos kainos ir klaidos tikimybės sistemos išėjime apribojimus. Teorinė spektro panaudojimo efektyvumo riba išplaukia iš Šenono teoremos (1.4.1):

$$\eta_{\max} = \frac{C}{B} = \log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right), \tag{3.4.14}$$

kur S/N yra signalo ir triukšmo galių santykis imtuvo įėjime.

Daugialygio NRZ signalo spektro panaudojimo efektyvumas randamas, įrašius signalo pirmojo nulio dažnių juostos plotį (3.4.12) į η apibrėžimą (3.4.13):

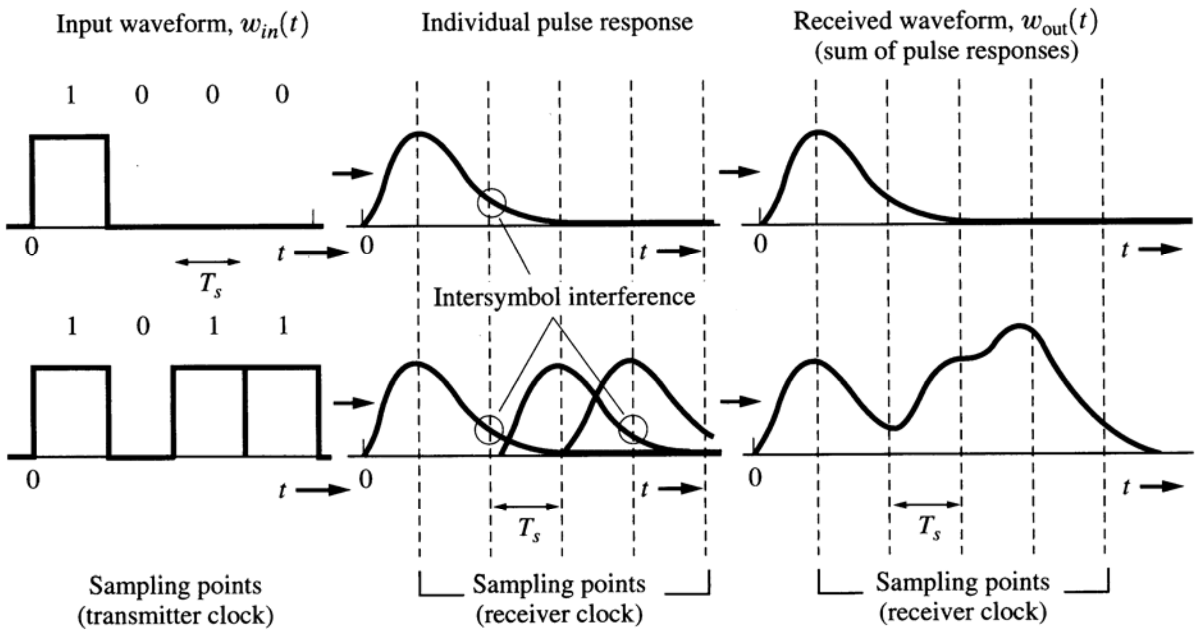
$$\eta = l\ (\text{bits/s})/\text{Hz} \qquad (\text{multilevel NRZ}), \tag{3.4.15}$$

kur l yra ASK bitų skaičius. Tačiau, didinant l, spektro panaudojimo efektyvumas negalės viršyti teorinio maksimumo (3.4.15).

Visų minėtųjų linijos kodų spektro panaudojimo efektyvumai pateikti 3.4.3 lentelėje. Kaip matome, visų dvilygių linijos kodų $\eta \le 1$. Naudojant daugialygius signalus, galima žymiai padidinti spektro panaudojimo efektyvumą, tačiau daugialygių signalų generavimo ir apdorojimo grandinės yra žymiai brangesnės.

3.4.3 lentelė. Įvairių linijos kodų spektro panaudojimo efektyvumai

Linijos kodo tipas	Pirmojo nulio juostos plotis (Hz)	Spektro panaudojimo efektyvumas $\eta = R/B$
Vienpolis NRZ	R	1
Polinis NRZ	R	1
Vienpolis RZ	$2R$	1/2
Dvipolis RZ	R	1
Mančesterio NRZ	$2R$	1/2
Daugialygis NRZ	R/l	l



3.5.1 pav. Tarpženklinės interferencijos pavyzdžiai dvilygių signalų atveju.

3.5. Tarpženklinė interferencija

3.5.1. Pagrindinės sąvokos

Kaip minėta 2.8 poskyryje, impulso dažnių juostos plotis yra atvirkščiai proporcingas impulso trukmei. Vadinasi, jeigu kanalo, kuriuo perduodamas impulsas, juostos plotis yra mažesnis už impulso dažnių juostos (pirmojo nulio) plotį arba jeigu kanale naudojami pernelyg siaurajuosčiai filtrai, tuomet impulsas, sklisdamas kanalu arba praėjęs pro filtrą, išplis. Tokiu būdu kaimyniniai impulsai gali persikloti, ir juos bus sunku išskirti (žr. 3.5.1 pav.). Šis reiškinys vadinamas ***tarpženkline interferencija*** (*intersymbol interference*, ***ISI***). Visiškai išvengti stačiakampių impulsų išplitimo neįmanoma, nes stačiakampio impulso *absoliutinis* dažnių juostos plotis yra begalinis (žr. (2.2.32) ir 2.2.2a pav.), o kanalo juostos plotis visuomet yra baigtinis. Dėl to praktikoje impulsai visuomet turi "užapvalintus kampus". Egzistuoja trys būdai pasiekti, kad impulsų filtravimas nesukeltų tarpženklinės interferencijos. Šie trys būdai aprašyti žemiau. Tačiau visų pirma uždavinį suformuluosime matematiškai.

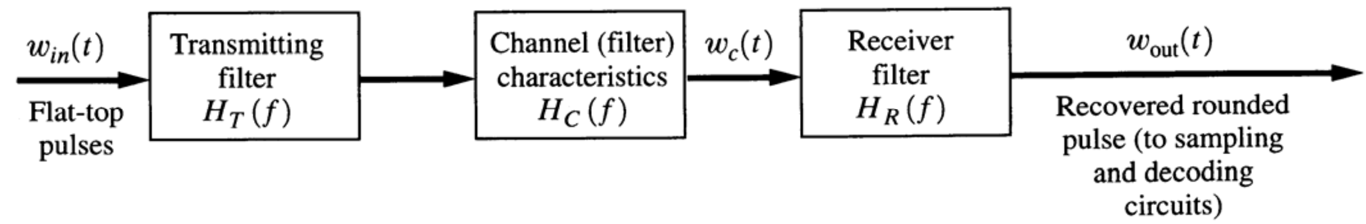
Tarkime, duota skaitmeninė ryšių sistema, kurios kanalu perduodamas daugialygis skaitmeninis signalas, kurį sudaro stačiakampiai impulsai (pvz., žr. 3.4.8b pav.):

$$w_{\text{in}}(t) = \sum_n a_n h(t - nT_s), \tag{3.5.1}$$

kur a_n yra signalo lygiai (perduodamieji duomenys), T_s yra vieno simbolio perdavimo trukmė, o $h(t)$ yra T_s trukmės stačiakampis vienetinis impulsas:

$$h(t) = \Pi\left(\frac{t}{T_s}\right). \tag{3.5.2}$$

(žr. funkcijos $\Pi(x)$ apibrėžimą (2.2.29)). Impulsai, kurie patenka į kanalą, niekuomet nebūna idealiai stačiakampiai (žr. aukščiau). Galima laikyti, kad realūs impulsai – tai pro tiesinį filtrą praėję stačiakampiai impulsai. 3.5.2 pav. šio filtro dažninė charakteristika (impulsinio atsako spektras) pažymėta $H_T(f)$. Kanalas papildomai iškraipo (filtruoja) impulsus. Šiuos iškraipymus atspindi kanalo dažninė charakteristika $H_C(f)$ (žr. 3.5.2 pav.). Imtuvas, prieš matuodamas impulsų amplitudes, turi transformuoti impulsus taip, kad jie būtų kuo panašesni į stačiakampius impulsus (siekiant minimizuoti ISI). Atitinkamo filtro dažninę charakteristiką žymėsime $H_R(f)$ (žr. 3.5.2 pav.).



3.5.2 pav. Stačiakampių impulsų perdavimo sistema.

Pagal superpozicijos ir laikinio invariantiškumo savybes (žr. 2.6.1 poskyrį), imtuvo filtro išėjimo signalas bus tokio pavidalo:

$$w_{\text{out}}(t) = \sum_n a_n h_e(t - nT_s), \tag{3.5.3}$$

kur $h_e(t)$ yra imtuvo filtro išėjimo signalas, kai siųstuvo filtro įėjime yra vienetinis stačiakampis impulsas $h(t)$.

Žinome, kad tiesinės sistemos išėjimo signalas lygus įėjimo signalo ir sistemos impulsinio atsako sąsūkai (žr. (2.6.5)). Siųstuvo filtro išėjimo signalas – tai kanalo įėjimo signalas, o kanalo išėjimo signalas – tai imtuvo filtro įėjimo signalas. Vadinasi, norint gauti imtuvo filtro išėjimo signalą $h_e(t)$, kai siųstuvo filtro įėjime yra impulsas $h(t)$, reikia tris kartus nuosekliai atlikti sąsūkos operaciją:

$$h_e(t) = h(t) * h_T(t) * h_C(t) * h_R(t), \tag{3.5.4}$$

kur $h_T(t)$, $h_C(t)$ ir $h_R(t)$ yra atitinkamai siųstuvo filtro, kanalo ir imtuvo filtro impulsiniai atsakai. Kadangi sąsūkos spektras lygus spektrų sandaugai, tai signalo $h_e(t)$ spektras lygus

$$H_e(f) = H(f)H_T(f)H_C(f)H_R(f), \tag{3.5.5}$$

kur $H(f)$ yra vienetinio stačiakampio T_s trukmės impulso $h(t)$ spektras (žr. (2.2.32)):

$$H(f) = F\left[\Pi\left(\frac{t}{T}\right)\right] = T_s \frac{\sin(\pi T_s f)}{\pi T_s f}. \tag{3.5.6}$$

Spektras $H_e(f)$ (3.5.5) vadinamas sistemos ***ekvivalentine perdavimo funkcija*** (sąvokos “impulsinis atsakas” ir “perdavimo funkcija” vartojamos, ne tik kalbant apie atsaką į δ funkciją, bet ir kalbant apie atsaką į vienetinį stačiakampį impulsą).

Tikslas – rasti tokią ekvivalentinę perdavimo funkciją $H_e(f)$, kad tarpženklinė interferencija būtų mažiausia. Radus tokią funkciją, ją būtų galima realizuoti, atitinkamai parinkus siųstuvo ir imtuvo filtrų dažnines charakteristikas $H_T(f)$ ir $H_R(f)$ (žr. (3.5.5)). Kanalo perdavimo funkcija $H_C(f)$ dažniausiai būna duota iš anksto, ir jos pakeisti negalima. Jeigu duota siųstuvo filtro dažninė charakteristika $H_T(f)$, reikalingoji ekvivalentinė perdavimo funkcija $H_e(f)$ realizuojama, parinkus imtuvo filtro dažninę charakteristiką $H_R(f)$ tokiu būdu:

$$H_R(f) = \frac{H_e(f)}{H(f)H_T(f)H_C(f)}. \tag{3.5.7}$$

Jeigu $H_e(f)$ yra parinkta taip, kad tarpženklinė interferencija būtų mažiausia, tuomet imtuvo filtras, kurio dažninė charakteristika $H_R(f)$ tenkina (3.5.7) lygybę, vadinamas ***išlyginimo filtru***.

Parenkant $H_e(f)$ pavidalą, reikia turėti omenyje, kad šiuo atveju svarbi tik išėjimo signalo *forma*, o signalo vėlinimas ir jo amplitudė gali būti įvairūs. Vėlinimas T_d pasireiškia daugikliu $\exp(-j2\pi f T_d)$ signalo spektro išraiškoje (žr. B-1 lentelę), o signalo stiprinimas arba silpninimas pasireiškia pastoviu realiuoju daugikliu. Vadinasi, siųstuvo ir imtuvo filtrų dažnines charakteristikas $H_T(f)$ ir $H_R(f)$ visuomet galima padauginti iš daugiklio $K\exp(-j2\pi f T_d)$, kur K yra bet koks patogus stiprinimo koeficientas, o T_d yra bet koks patogus vėlinimas. Praktikoje šie parametrai parenkami taip, kad filtrus būtų lengviau pagaminti, o teoriniuose skaičiavimuose – taip, kad formulės būtų paprastesnės.

3.5.2. Pirmasis Naikvisto metodas tarpženklinei interferencijai sumažinti

Tarpženklinės interferencijos panaikinimo ***pirmasis Naikvisto metodas*** remiasi tuo, kad imtuvas skaitmeninį signalą matuoja diskrečiais laiko momentais – kas T_s sekundžių, kur T_s yra simbolio trukmė (žr. 3.3.1 poskyrį). Vadinasi, norint išvengti tarpženklinės interferencijos, pakanka pasiekti, kad jos nebūtų tik signalo vertės matavimo momentais $kT_s + \tau$, kur k yra simbolio numeris, o τ yra sistemos vėlinimas. T.y., laiko momentu $kT_s + \tau$ visų impulsų, išskyrus k-tąjį, indėlis į skaitmeninį signalą turi būti lygus nuliui. Tai reiškia, kad ekvivalentinis impulsinis atsakas (imtuvo filtro išėjimo impulsas, atitinkantis $k = 0$) turi tenkinti šią sąlygą:

$$h_e(kT_s + \tau) = \begin{cases} C, & k = 0; \\ 0, & k \neq 0. \end{cases} \tag{3.5.8}$$

Čia C yra nenulinė konstanta (kaip minėta 3.5.1 poskyryje, konkrečios C ir τ vertės neturi reikšmės). Jeigu tenkinama (3.5.8) lygybė ir jeigu k-tojo stačiakampio impulso, kuris perduodamas į siųstuvo filtro įėjimą, amplitudė lygi a, tuomet laiko momentu $t = kT_s + \tau$ imtuvo filtro išėjimo signalo vertė bus lygi aC, t.y., proporcinga pradinio impulso amplitudei. Vadinasi, jeigu imtuvas matuos signalo vertes laiko momentais $t = kT_s + \tau$, tuomet tarpženklinė interferencija nepasireikš. Reikalavimas (3.5.8) vadinamas ***pirmuoju Naikvisto kriterijumi***.

Pvz., laikant, kad $\tau = 0$, (3.5.8) reikalavimą tenkina $\sin(x)/x$ pavidalo funkcija

$$h_e(t) = \frac{\sin \pi D t}{\pi D t}, \tag{3.5.9}$$

kur D yra atvirkštinė simbolio trukmė (simbolių sparta): $D = 1/T_s$. Impulso (3.5.9) spektras yra stačiakampio impulso pavidalo (žr. (2.2.33)):

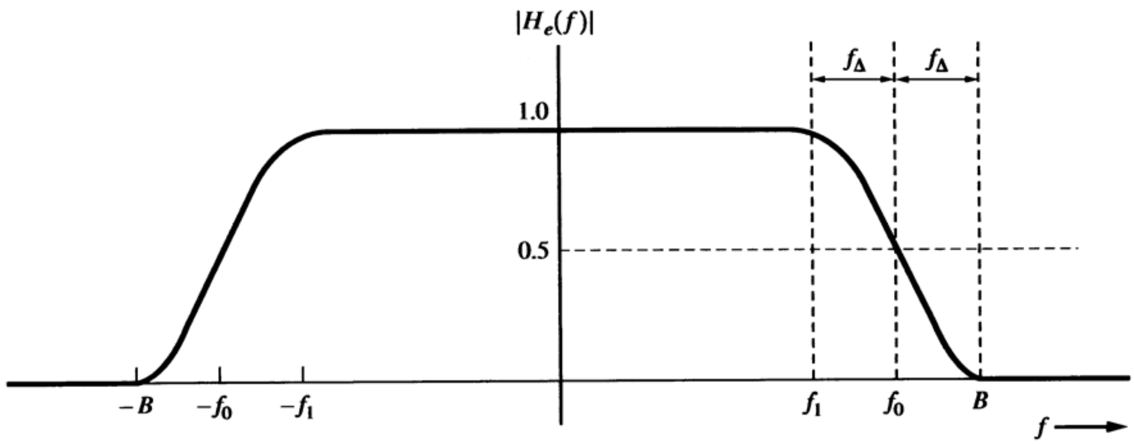
$$H_e(f) = \frac{1}{D}\Pi\left(\frac{f}{D}\right). \tag{3.5.10}$$

Vadinasi, jeigu siųstuvo ir imtuvo filtrai suprojektuoti taip, kad pilnoji perdavimo funkcija būtų (3.5.10) pavidalo, tuomet tarpženklinės interferencijos nebus. Be to, skaitmeninio signalo, kurį sudaro (3.5.9) pavidalo impulsai, dažnių juostos plotis sutampa su pavienio impulso dažnių juostos pločiu, kuris lygus $D/2$ (žr. (3.5.10)). Iš (3.3.6) nelygybės išplaukia, kad tai yra mažiausias dažnių juostos plotis, kuris gali būti pasiektas, esant duotai simbolių spartai D. Todėl signalo filtravimas, kurį nusako (3.5.10) lygybė, yra optimalus. Tačiau tokią sistemą sunku realizuoti praktikoje dėl to, kad, tolstant nuo funkcijos $\sin(x)/x$ pagrindinio maksimumo, antrinių maksimumų aukštis mažėja palyginti lėtai – $1/x$ dėsniu. Tai reiškia, kad šios funkcijos polinkis nulių taškuose yra palyginti didelis. Vadinasi, net mažas ėmimo momentų nuokrypis nuo optimaliųjų verčių ($kT_s + \tau$) gali sukelti tarpženklinę interferenciją. T.y., net jeigu būtų įmanoma realizuoti (3.5.10) pavidalo perdavimo funkciją, išvengti tarpženklinės interferencijos būtų gana sudėtinga, nes tam reikėtų praktiškai idealaus dekodavimo grandinės sinchronizavimo.

3.5.3. Tarpženklinės interferencijos sumažinimas, naudojant pakelto kosinuso formos kryčio filtrą

Pakelto kosinuso formos kryčio filtro (*raised cosine-rolloff filter*) išėjimo signalo spektras, kai įėjime yra vienetinis stačiakampis impulsas (3.5.2), kurio trukmė $T_s = 1/(2f_0)$, yra tokio pavidalo:

$$H_e(f) = \begin{cases} 1, & |f| < f_1; \\ \dfrac{1}{2}\left\{1 + \cos\left[\dfrac{\pi(|f| - f_1)}{2 f_\Delta}\right]\right\}, & f_1 < |f| < B; \\ 0, & |f| > B, \end{cases} \tag{3.5.11}$$



3.5.3 pav. Pakelto kosinuso formos kryčio filtro dažninė amplitudės charakteristika.

kur B yra filtro absoliutinis dažnių juostos plotis, o parametrai f_1 ir f_Δ apibrėžiami sąryšiais

$$f_\Delta \equiv B - f_0, \tag{3.5.12}$$

$$f_1 \equiv f_0 - f_\Delta. \tag{3.5.13}$$

f_0 yra filtro 6 dB lygio dažnių juostos plotis. ***Kryčio koeficientas*** (*rolloff factor*) apibrėžiamas sąryšiu

$$r = \frac{f_\Delta}{f_0}. \tag{3.5.14}$$

Dažninė amplitudės charakteristika $|H_e(f)|$ pavaizduota 3.5.3 pav. Tokio filtro išėjimo signalas, kai įėjime yra $1/(2f_0)$ trukmės vienetinis stačiakampis impulsas, yra lygus spektro (3.5.11) atvirkštinei Furjė transformacijai:

$$h_e(t) = F^{-1}[H_e(f)] = 2f_0\left(\frac{\sin 2\pi f_0 t}{2\pi f_0 t}\right)\left[\frac{\cos 2\pi f_\Delta t}{1-(4f_\Delta t)^2}\right]. \tag{3.5.15}$$

Šios funkcijos nuliai yra taškuose $t = k/(2f_0)$, kur $k \neq 0$ yra bet koks nenulinis sveikasis skaičius. Vadinasi, jeigu simbolių sparta $(1/T_s)$ lygi

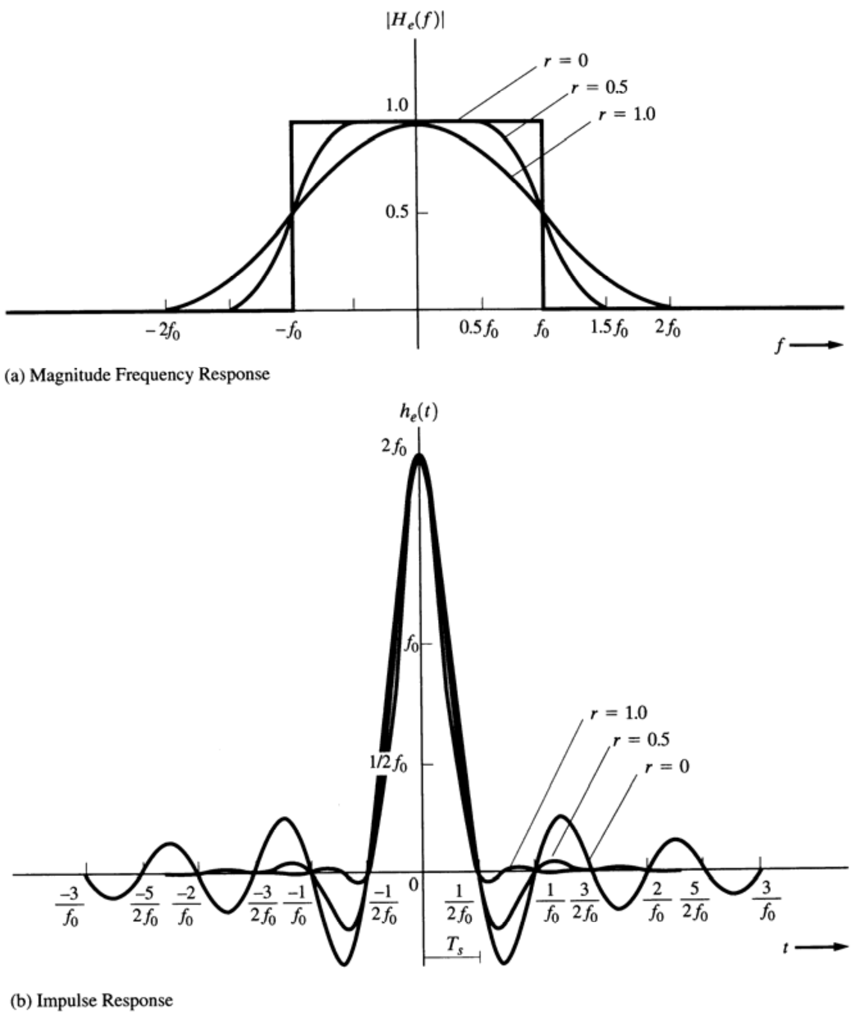
$$D = 2f_0, \tag{3.5.16}$$

tuomet pakelto kosinuso kryčio filtras tenkina pirmąjį Naikvisto kriterijų (3.5.8), kur $\tau = 0$. Formulė (3.5.16) nusako didžiausią leistiną impulsų spartą. Pirmasis Naikvisto kriterijus tenkinamas ir tuo atveju, kai simbolių sparta yra sveiką skaičių kartų mažesnė už tą, kurią nusako formulė (3.5.16). Šio filtro pranašumus, lyginant su stačiakampiu filtru (3.5.10), iliustruoja 3.5.4 pav. 3.5.4a pav. pavaizduotos dažninės amplitudės charakteristikos, esant trims kryčio koeficiento vertėms $r = 0$, $r = 0.5$ ir $r = 1.0$. 3.5.4b pav. pavaizduoti atitinkami impulsiniai atsakai. Kai $r = 0$ ($f_\Delta = 0$), dažninė charakteristika (3.5.11) yra stačiakampė, o impulsinis atsakas (3.5.15) yra $\sin(x)/x$ pavidalo, t.y., atitinka 3.5.2 poskyryje aprašytą atvejį. Didinant f_Δ ir nekeičiant f_0, kryčio koeficientas r ir išėjimo signalo absoliutinis dažnių juostos plotis B auga (žr. (3.5.12) ir 3.5.4a pav.). 3.5.4a pav. akivaizdu, kad, padidėjus kryčio koeficientui r (ir absoliutiniam dažnių juostos pločiui B), dažninės amplitudės charakteristikos polinkis pereinamojoje srityje sumažėja, t.y., tokį filtrą lengviau pagaminti. 3.5.4b pav. akivaizdu, kad, padidėjus kryčio koeficientui r (ir absoliutiniam dažnių juostos pločiui B), impulsinio atsako antrinių maksimumų santykinės amplitudės sumažėja, t.y., sumažėja reikalavimai ėmimo momentų sinchronizavimui dekodavimo grandinėje (žr. 3.5.2 poskyrį).

Iš (3.5.12) ir (3.5.14) išplaukia

$$f_0 = \frac{B}{1+r}. \tag{3.5.17}$$

Įrašę (3.5.17) į (3.5.16), randame simbolių spartą, kuri turi būti naudojama sistemoje su tokia filtravimo charakteristika:



3.5.4 pav. Pakelto kosinuso formos kryčio filtro dažninės amplitudės charakteristikos, esant trims kryčio koeficiento r vertėms (a) ir atitinkami impulsiniai atsakai (b).

$$D = \frac{2B}{1+r}. \tag{3.5.18}$$

Pakelto kosinuso kryčio filtras yra vienas iš taip vadinamų Naikvisto filtrų. ***Naikvisto filtras*** – tai filtras, kurio atsako į vienetinį T_s trukmės centruotąjį stačiakampį impulsą spektras yra

$$H_e(f) = \begin{cases} \Pi\left(\dfrac{f}{2f_0}\right) + Y(f), & |f| < 2f_0; \\ 0, & |f| \geq 2f_0, \end{cases} \tag{3.5.19}$$

kur $Y(f)$ yra realioji funkcija, kuri yra lyginė atžvilgiu nulinio dažnio ir nelyginė atžvilgiu $f = f_0$. T.y.,

$$Y(-f) = Y(f), \qquad |f| < 2f_0; \tag{3.5.20}$$

$$Y(-f+f_0) = -Y(f+f_0), \qquad |f| < f_0. \tag{3.5.21}$$

Galima įrodyti, kad dažnio funkcijos (3.5.19) atvirkštinė Furjė transformacija lygi nuliui laiko momentais $t = k/(2f_0)$, kur $k \neq 0$. Vadinasi, Naikvisto filtras tenkina pirmąjį Naikvisto kriterijų (3.5.8), jeigu simbolių sparta tenkina (3.5.16) lygybę.

3.5.4. Antrasis ir trečiasis Naikvisto metodai tarpženklinei interferencijai sumažinti

Antrasis Naikvisto metodas remiasi tuo, kad, iš anksto žinant imtuvo filtro išėjimo impulsų formą, impulsus galima atskirti vieną nuo kito net ir tuo atveju, kai jie persikloja.

Panaikinant tarpženklinę interferenciją šiuo metodu, visų pirma dirbtinai sukeliama tarpženklinė interferencija, o po to, remiantis žinomais jos dėsningumais, imtuvas ją pašalina.

Naudojant ***trečiąjį Naikvisto metodą***, imtuvas matuoja ne signalo vertes diskrečiais laiko momentais, o *plotą* po $h_e(t)$ pavidalo impulsu kiekviename T_s trukmės simbolio intervale. $h_e(t)$ pavidalas parenkamas taip, kad plotas po $h_e(t)$ būtų nelygus nuliui *tik duotojo* simbolio intervale ir būtų lygus nuliui visų kitų simbolių intervaluose.

3.8. Laikinis tankinimas

3.8.1. Laikinio tankinimo sąvoka

Kanalo ***laikiniu tankinimu*** (*time-division multiplexing*, ***TDM***) vadinamas imčių iš kelių šaltinių perdavimas pakaitom vienu ryšių kanalu. 3.8.1 pav. iliustruoja TDM sąvoką tam atvejui, kai trijų analoginių šaltinių generuojami signalai vienu metu perduodami PCM sistema. Visi trys signalai periodiškai pakaitom prijungiami prie linijos, naudojant elektroninį komutatorių – ***multipleksorių***. Šiame pavyzdyje multipleksoriaus išėjime yra TDM PAM signalas (žr. 3.8.1 pav.), kurio impulso trukmė yra $T_s/3 = 1/(3f_s)$, kur f_s yra ėmimo sparta, t.y., komutatoriaus ciklų ("sukimosi") dažnis. Praleidus TDM PAM signalą pro kvantuotuvą ir koduotuvą (žr. 3.2.1 pav.), suformuojamas galutinis TDM PCM signalas, kuriame kiekvienas $T_s/3$ trukmės impulsas pakeičiamas n bitų dvilygiu arba daugialygiu skaitmeniniu žodžiu (žr. 3.2 poskyrį). Šio TDM PCM signalo impulso trukmė yra $T_s/(3n)$. Kiekvieno signalo ėmimo sparta turi būti nemažesnė už to signalo dvigubą dažnių juostos plotį (Naikvisto ėmimo sparta; žr. 3.1.1 poskyrį). Jeigu kiekvienas informacijos šaltinis prijungtas tik prie vieno multipleksoriaus įėjimo, tuomet visų signalų ėmimo spartos sutampa ir yra lygios multipleksoriaus ciklų dažniui. Jeigu skirtingų signalų dažnių juostų pločiai stipriai skiriasi, tuomet plačiajuosčius šaltinius galima prijungti prie kelių komutatoriaus įėjimų: tuomet šių šaltinių signalo ėmimo sparta tampa atitinkamą skaičių kartų didesnė už multipleksoriaus ciklų dažnį.

Multipleksoriaus įėjimuose gali būti ne tik analoginiai, bet ir dvilygiai arba daugialygiai skaitmeniniai signalai (žr., pvz., 3.8.4 pav. ir 3.8.5 pav.). Tokiu atveju multipleksorius periodiškai atrenka kiekvieno įėjimo simbolius (bitus) ir įterpia juos tarp kitų įėjimų simbolių (bitų). Tokiu būdu suformuojamas TDM PCM signalas. Kiekvieno signalo ėmimo sparta turi būti lygi jo simbolių spartai (arba nežymiai didesnė už pastarąją: žr. 3.8.3 poskyrį). Jeigu sutankinamų skaitmeninių šaltinių simbolių spartos stipriai skiriasi, tuomet didelės simbolių spartos šaltinius galima prijungti prie kelių komutatoriaus įėjimų (kaip ir analoginių signalų atveju: žr. aukščiau).

Imtuve TDM PCM signalas yra dekoduojamas, t.y., vėl paverčiamas TDM PAM signalu, ir perduodamas į imtuvo komutatorių – ***demultipleksorių***, kuris periodiškai prijungia liniją prie kiekvieno iš savo išėjimų (žr. 3.8.1 pav.). Demultipleksorius turi būti sinchronizuotas su priimamuoju signalu, kad kiekviename jo išėjime atsirastų tik vieno apibrėžto šaltinio PAM ėmimo signalas. Pradiniai analoginiai signalai atkuriami pagal atitinkamus PAM signalus, naudojant žemųjų dažnių filtrus (žr. 3.1.1 poskyrį).

Jeigu siųstuvo multipleksorius sutankino jau užkoduotus PCM signalus, tuomet demultipleksavimas atliekamas prieš dekodavimą. Tokiu atveju demultipleksorius turi būti sinchronizuotas taip, kad kiekvieno jo išėjimo prijungimo prie linijos momentas sutaptų su vieno apibrėžto šaltinio bito momentu. Toks sinchronizavimas vadinamas bitų grupių sinchronizavimu (*frame synchronization*).

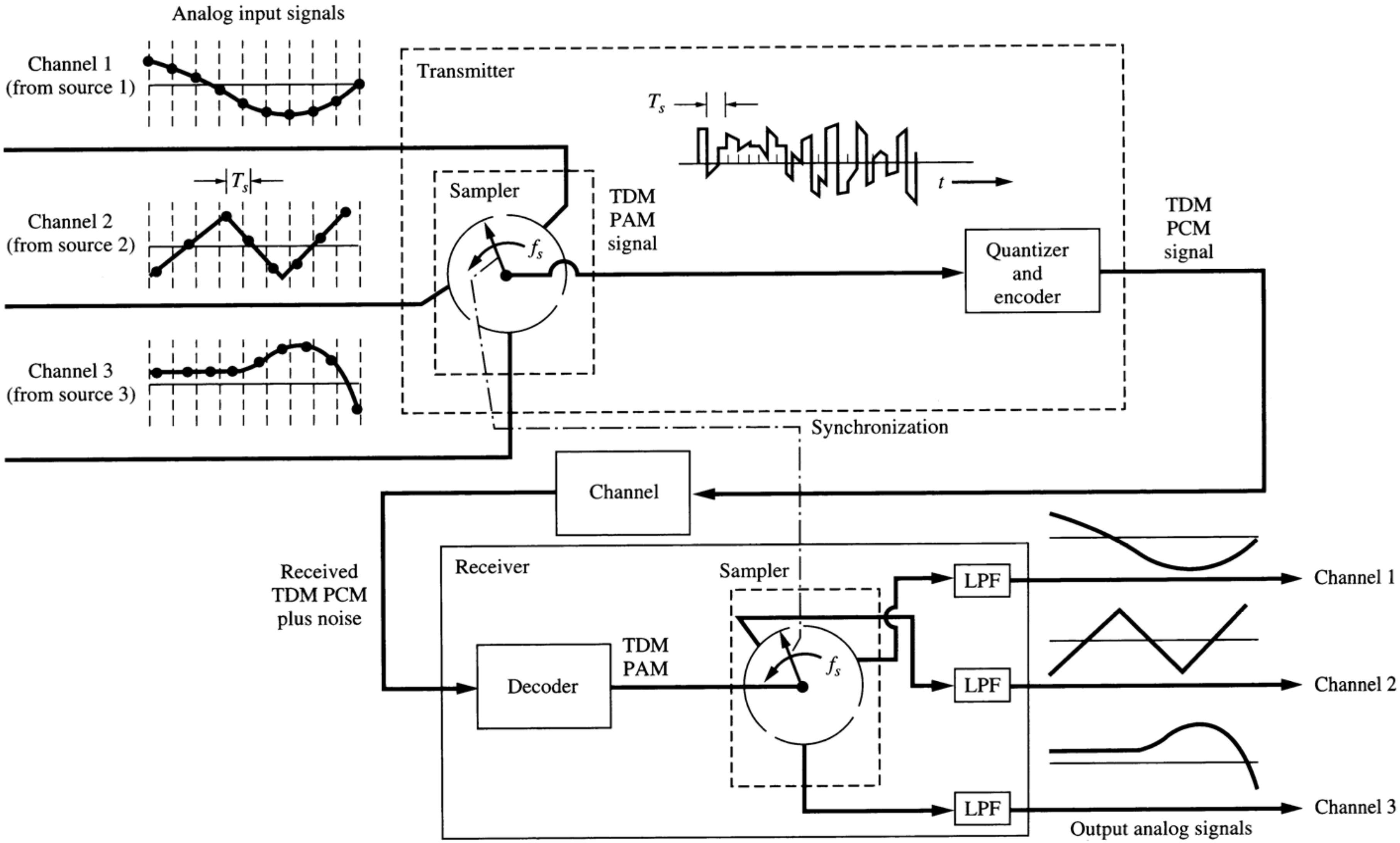


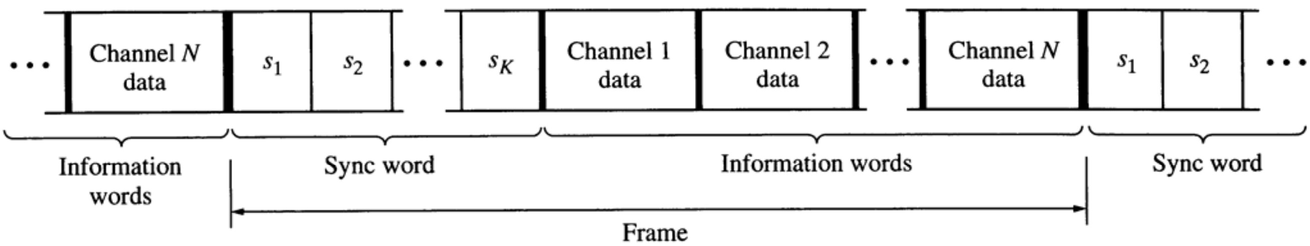
Figure 3–35 Three-channel TDM PCM system.

3.8.1 pav. Trijų kanalų laikinio tankinimo PCM sistema.

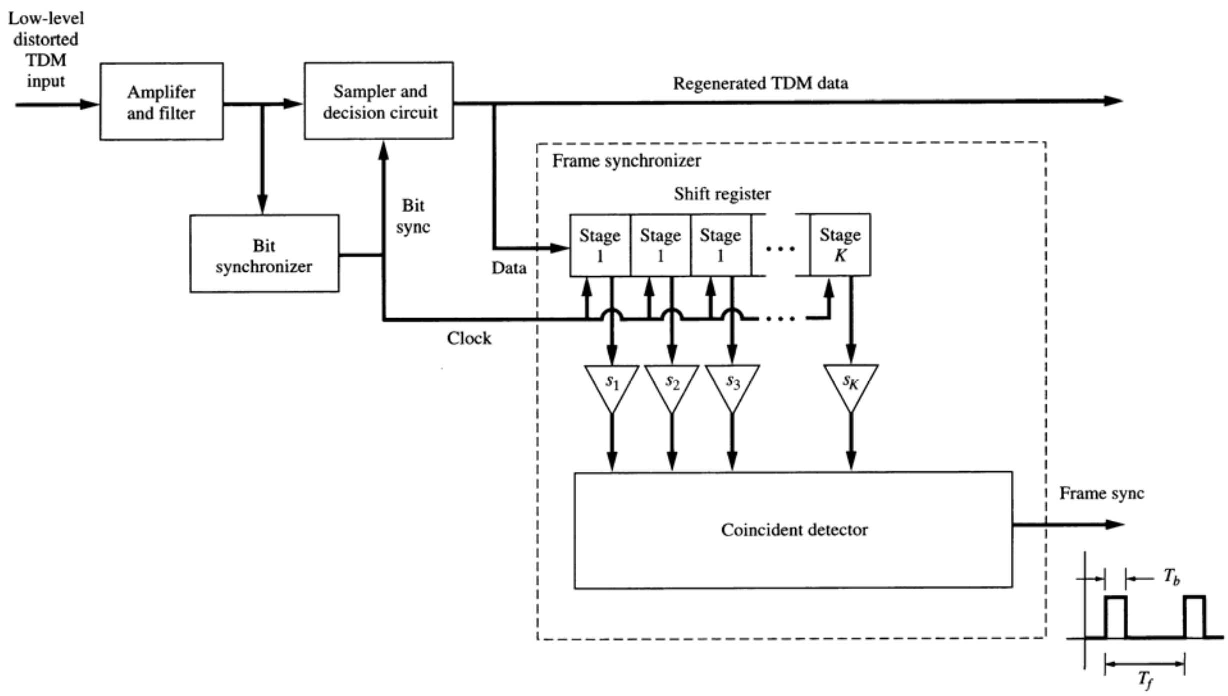
3.8.2. Bitų grupių sinchronizavimas

Bitų grupė (*frame*) – tai yra skaitmeniškai užkoduotas multipleksoriaus išėjimo signalas, kuris suformuojamas per vieną multipleksoriaus komutavimo ciklą. Bitų grupėje kiekvieną informacijos šaltinį atitinka bent vienas daugialygio arba dvilygio skaitmeninio signalo informacinis žodis. ***Informacinis žodis*** – tai skaitmeniškai užkoduota informacinio signalo vertė, kuri išmatuojama per laiko tarpą tarp dviejų persijungimų nuo vieno multipleksoriaus įėjimo prie kito. T.y., ***informacinis žodis*** – tai vieno informacijos šaltinio perduodama duomenų seka, kuri nėra skaidoma į smulkesnes duomenų sekas laikinio tankinimo metu. Jeigu sutankinimas atliekamas prieš skaitmeninį kodavimą, t.y., jeigu sutankinami PAM signalai (kaip 3.8.1 pav.), tuomet kiekvienas informacinis žodis nusako atitinkamo PAM signalo impulso amplitudę (t.y., sutampa su kodiniu žodžiu). Jeigu sutankinimas atliekamas po skaitmeninio kodavimo, t.y., jeigu sutankinami dvilygiai arba daugialygiai PCM signalai, tuomet kiekvienas informacinis žodis sutampa su atitinkamo PCM signalo bitu arba simboliu (t.y., gali ne tik sutapti su kodiniu žodžiu, bet ir būti tik kodinio žodžio dalis). Vieną informacijos šaltinį bitų grupėje gali atitikti keli informaciniai žodžiai. Taip yra tuo atveju, kai informacinis signalas prijungtas prie kelių multipleksoriaus įėjimų (žr. 3.8.1 poskyrį).

Kad imtuvas galėtų išrūšiuoti skirtingus informacinius žodžius pagal informacijos šaltinius, jis turi būti valdomas ***bitų grupių sinchronizavimo*** impulsais, kurie nusako kiekvienos grupės pradžios momentą. Grupių sinchronizavimo signalas gali būti perduodamas atskiru kanalu arba gali būti atkurtas pagal patį TDM signalą. Pastaruoju atveju grupių sinchronizavimo signalo atkūrimui galima panaudoti specialų K bitų sinchronizavimo žodį kiekvienos bitų grupės pradžioje (žr. 3.8.2 pav.). Atitinkamo grupių sinchronizatoriaus struktūrinė schema pateikta 3.8.3 pav. Pirmieji trys šios schemos komponentai – išlyginimo filtras, bitų sinchronizatorius ir signalo regeneravimo grandinė – buvo aprašyti atitinkamai 3.5, 3.4.5 ir 3.4.6 poskyriuose. Bitų grupių sinchronizatorius nuolat lygina paskutiniuosius K regeneruoto signalo bitų su atitinkamais sinchronizavimo žodžio bitais (s_1, s_2, …, s_K). Tam panaudojamas K skilčių postūmio registras, kurio skiltys prijungtos prie loginio "IR" (loginės sandaugos) elemento įėjimų. Registre nuolat saugomi paskutinieji K signalo bitų. 3.8.3 pav. trikampiai su užrašais "s_1", "s_2", …, "s_K" nusako signalo invertoriaus buvimą arba nebuvimą: jeigu duotasis sinchronizavimo žodžio bitas lygus 0, tuomet tarp atitinkamos registro skilties ir loginio dauginimo elemento įėjimo turi būti invertorius, o jeigu duotasis bitas lygus 1, tuomet invertoriaus neturi būti. Loginio "IR" elemento išėjime impulsas atsiranda tik tuomet, kai visuose jo įėjimuose yra vienetai, t.y., kai priimamas grupių sinchronizavimo žodis. Tokiu būdu atkuriamas grupių sinchronizavimo signalas.



3.8.2 pav. Sinchronizavimo žodžių panaudojimas bitų grupių sinchronizavimui TDM sistemoje.



3.8.3 pav. Bitų grupių sinchronizatoriaus struktūrinė schema.

Klaidingas grupių sinchronizavimo impulsas atsiranda tuomet, kai K informacinių bitų seka atsitiktinai sutampa su sinchronizavimo žodžiu. Jeigu TDM signale visi bitai yra nepriklausomi, o vieneto ir nulio tikimybės yra vienodos ir lygios 1/2, tuomet tokio įvykio tikimybė lygi

$$P_f = \left(\frac{1}{2}\right)^K = 2^{-K}. \tag{3.8.1}$$

3.8.3. Sinchroninės, asinchroninės ir kvazisinchroninės sistemos

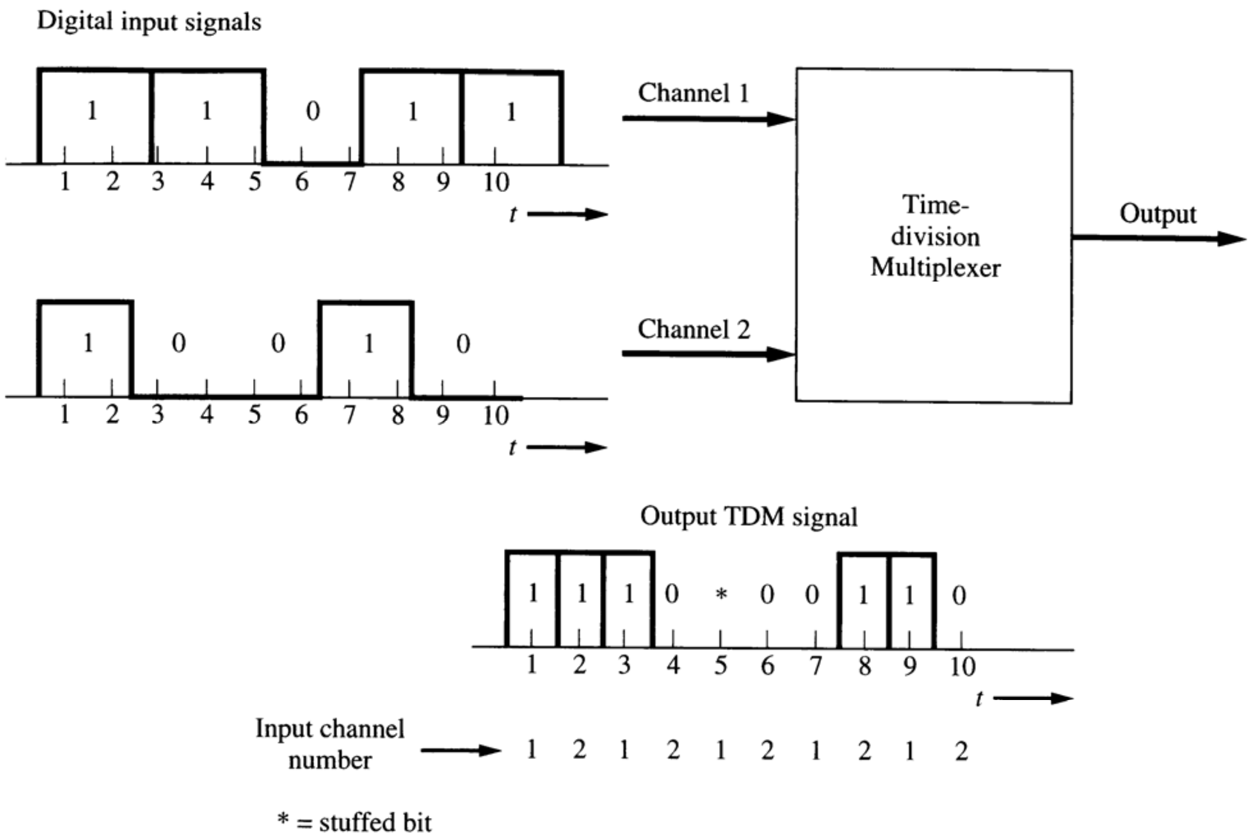
Duomenų bitų, kuriuos perduoda skirtingi informacijos šaltiniai, laiko momentai gali būti sinchronizuoti arba nesinchronizuoti tarpusavyje. Atitinkamai, duomenų perdavimo sistemos gali būti sinchroninės arba asinchroninės.

Sinchroninėje sistemoje visi įrenginiai sinchronizuojami vienu ***sistemos laikrodžiu***. Šio laikrodžio impulsai gali būti perduodami atskira linija arba atkuriami pagal duomenų signalą (žr. 3.4.6 poskyrį). Be to, sinchroninėse TDM sistemose reikalinga ir aukštesniojo lygio sinchronizacija, kad imtuvas galėtų nustatyti duomenų blokų pradžios ir pabaigos momentus (žr. 3.8.2 poskyrį).

Asinchroninėje sistemoje sinchronizuojami tik vieno simbolio arba informacinio žodžio bitai. Tokiu atveju kiekvienas simbolis prasideda “pradžios bitu”, kuris startuoja imtuvo sinchronizavimo laikrodį, ir pasibaigia vienu arba dviem “pabaigos bitais”, kurie sustabdo sinchronizavimo laikrodį. Todėl imtuvo sinchronizavimo laikrodis yra startuojamas neperiodiškai ir nėra būtina jį sinchronizuoti su sistemos laikrodžiu. Tokia sistema yra ypač tinkama klaviatūros terminalams, nes simbolių priėmimo iš klaviatūros sparta kinta laike. Tokie asinchroniniai terminalai dažnai naudoja 7 bitų ASCII kodą, o visas simbolis susideda iš vieno pradžios bito, 7 ASCII kodo bitų, vieno lyginumo bito ir vieno pabaigos bito. T.y., pilnasis simbolio ilgis yra 10 bitų. Asinchroninėse TDM sistemose informaciniai žodžiai (žr. 3.8.2 poskyrį) yra asinchroninio kodo simboliai (pvz., aukščiau aprašytieji 10 bitų simboliai), o ne bitai.

Kvazisinchroninėje sistemoje duomenų šaltiniai yra sinchronizuoti tik apytiksliai. Tuomet multipleksoriaus išėjimo signalo (imties) dažnis turi būti šiek tiek padidintas. Jeigu imties momentu kuriame nors multipleksoriaus įėjime nėra naujo bito (yra senasis bitas), tuomet į TDM išėjimo duomenų srautą įterpiamas ***tariamasis bitas*** (*stuff bit*). Tariamieji bitai gali būti dvejetainiai vienetai arba nuliai arba gali sudaryti kažkokią vienetų ir nulių seką. Šį procesą iliustruoja 3.8.4 pav. Šiame pavyzdyje komutuojami du dvilygiai skaitmeniniai signalai, kurių bitų trukmės šiek tiek skiriasi: pirmojo signalo bito trukmė yra maždaug 20 % didesnė už antrojo signalo bito trukmę. Komutavimo ciklo trukmė lygi trumpiausiajai bito trukmei, kad antrajame įėjime kiekvienu imties momentu būtų naujas duomenų bitas. T.y., intervalas tarp dviejų komutavimų (imties momentų) lygus pusei trumpiausios bito trukmės. Nelyginiais momentais priimamas pirmasis signalas, o lyginiais – antrasis. Todėl, jeigu abiejų signalų pirmųjų bitų pradžios momentai sutampa, tuomet penktuoju imties momentu (t.y., trečiojo komutavimo ciklo pradžioje) pirmajame įėjime dar bus antrasis bitas (žr. 3.8.4 pav.). Tokiu atveju multipleksorius įterpia į įėjimo bitų srautą tariamąjį bitą (3.8.4 pav. jis pažymėtas "žvaigždute").

Sinchroninis duomenų perdavimas yra efektyvesnis už asinchroninį, nes nenaudoja pradžios ir pabaigos bitų. Tačiau sinchroniniam duomenų perdavimui reikalingas sinchronizavimo signalo perdavimas kartu su duomenimis.



3.8.4 pav. Duomenų sinchronizavimas dviejų kanalų laikinio tankinimo sistemoje, kai duomenų šaltiniai nėra tiksliai sinchronizuoti.

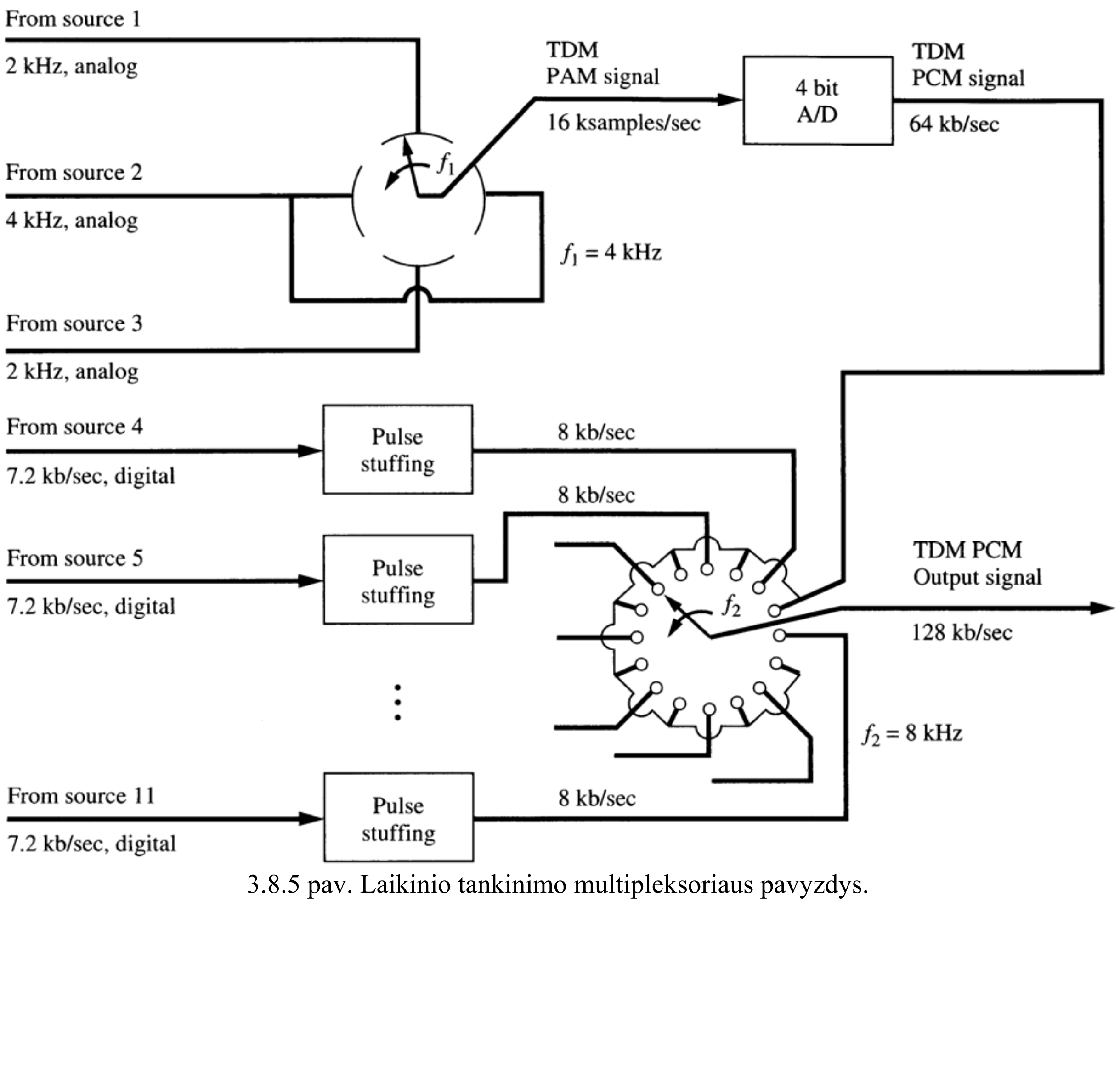
3.8.4. Laikinio tankinimo multipleksoriaus projektavimo pavyzdys

Tarkime, kad reikia suprojektuoti multipleksorių, kuris sutankintų 11 šaltinių perduodamą informaciją. Laikysime, kad šaltinių charakteristikos yra šios:

I šaltinis yra analoginis, dažnių juostos plotis lygus 2 kHz;
II šaltinis yra analoginis, dažnių juostos plotis lygus 4 kHz;
III šaltinis yra analoginis, dažnių juostos plotis lygus 2 kHz;
IV – XI šaltiniai yra skaitmeniniai, dvilygiai, sinchroniniai, vieno šaltinio bitų sparta lygi 7200 bits/s.

Be to, laikysime, kad analoginių šaltinių informaciją reikia perduoti 4 bitų dvilygių PCM žodžių pavidalu. TDM sistemoje yra naudojamos sinchroninės linijos, o grupių sinchronizavimo signalas perduodamas atskiru kanalu.

Siekiant patenkinti Naikvisto ėmimo spartos reikalavimą (žr. (2.7.11)), pirmojo, antrojo ir trečiojo šaltinių ėmimo sparta turi būti atitinkamai 4, 8 ir 4 kHz. Kaip parodyta 3.8.5 pav., tai galima pasiekti, pasirinkus multipleksoriaus ciklų dažnį $f_1 = 4$ kHz ir matuojant antrojo šaltinio signalą du kartus kiekviename cikle. Vadinasi, vieno ciklo metu išmatuojamos 4 imtys. Kiekviena imtis išreiškiama 4 bitų PCM žodžiu, naudojant 4 bitų skaitmeninį analogo keitiklį. Šio keitiklio išėjime yra 64 kb/s spartos dvilygis TDM PCM signalas ((4 kHz) × (4 imtys) × (4 bitai) = 64 kb/s). Po to į šį signalą reikia “įterpti” skaitmeninių informacijos šaltinių bitus. Tuo tikslu panaudojamas antrasis multipleksorius. Jeigu skaitmeninių duomenų šaltiniai nėra tiksliai sinchronizuoti, tuomet jų signalų ėmimo sparta turi būti šiek tiek didesnė už bitų spartą, pvz., 8 kHz. Tokiu būdu, naudojant “tariamuosius” bitus (žr. 3.8.3 poskyrį), suformuojami 8 dvilygiai signalai, kurių kiekvieno bitų sparta 8 kb/s. Šiuos aštuonis signalus galima sutankinti, naudojant 8 įėjimų multipleksorių, kurio ciklų dažnis lygus 8 kHz. Kiekvieno skaitmeninio šaltinio signalas patenka į vieną šio multipleksoriaus įėjimą. Kadangi pirmojo multipleksoriaus išėjimo signalo bitų sparta yra aštuonis kartus didesnė (64 kb/s), tai antrajame multipleksoriuje šį signalą turi atitikti 8 kartus daugiau įėjimų, negu atitinka vieną skaitmeninį signalą. T.y., turi būti dar aštuoni įėjimai, į kuriuos patenka pirmojo multipleksoriaus išėjimo signalas. Todėl antrasis multipleksorius turi 16 įėjimų: lyginiais (nelyginiais) momentais šis multipleksorius perduoda skaitmeninių šaltinių signalus, o nelyginiais (lyginiais) momentais – pirmojo multipleksoriaus išėjimo signalą (žr. 3.8.5 pav.).



3.8.5 pav. Laikinio tankinimo multipleksoriaus pavyzdys.

3.9. Uždavinių sprendimo pavyzdžiai

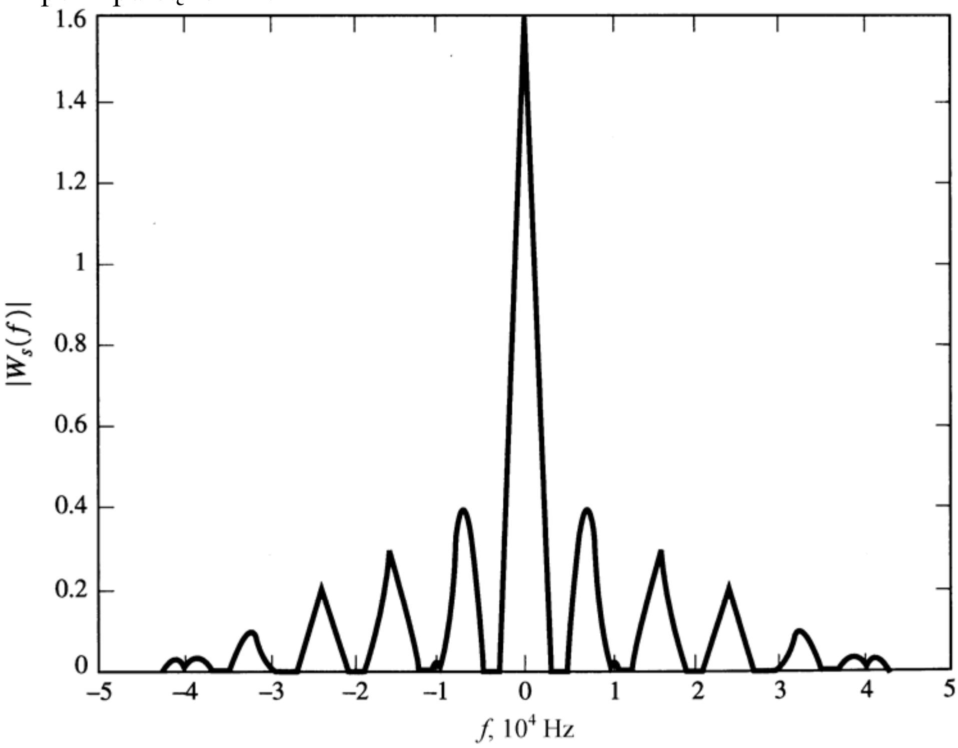
Pavyzdys Nr. 1

Analoginis signalas $w(t)$ paverčiamas momentinio ėmimo PAM signalu (žr. 3.1.5 pav.). Ėmimo sparta lygi 8 kHz, o impulso plotis yra 100 μs. Signalo $w(t)$ spektras yra trikampio formos: $W(f) = 2\Lambda(f/B)$ (žr. (2.2.31)), o jo absoliutinis dažnių juostos plotis lygus B = 3 kHz.

(a) Apskaičiuokite ir pavaizduokite grafiškai PAM signalo amplitudžių spektrą.
(b) Apskaičiuokite PAM signalo pirmojo nulio juostos plotį

Sprendimas

(a) PAM signalo spektras gaunamas, įrašius sąlygoje duotąją analoginio signalo spektro išraišką $W(f) = 2\Lambda(f/B)$ į PAM signalo spektro išraišką (3.1.17). Gautasis PAM signalo amplitudžių spektras pavaizduotas 3.9.1 pav. Šiame grafike matome, kad PAM signalo spektras sudarytas iš pradinio analoginio signalo spektro kopijų, kurios pasislinkusios viena kitos atžvilgiu ėmimo sparta 8 kHz ir padaugintos iš funkcijos $\tau \dfrac{\sin \pi\tau f}{\pi\tau f}$, kurią sąlygoja stačiakampė impulsų forma.



3.9.1 pav. Pavyzdžio Nr. 1 sprendimas

(b) PAM signalo spektro pirmojo nulio dažnis yra lygus pradinio signalo absoliutiniam juostos pločiui, t.y., 3 kHz. Tačiau šiuo atveju 3 kHz nėra tinkamas juostos pločio matas, nes aukštesniuose dažniuose amplitudžių spektras vėl tampa didelis. Praktikoje, įvertinant PAM signalo dažnių juostos plotį, dažniausiai naudojamas jo spektro *gaubtinės* pirmojo nulio juostos plotis. Spektro gaubtinė – tai funkcija $\left|\tau \dfrac{\sin \pi\tau f}{\pi\tau f}\right|$. Šios funkcijos pirmojo nulio dažnis yra $B_{null} = 1/\tau = 1/(100\ \mu s) = 10$ kHz.

Pavyzdys Nr. 2

Balso dažnio signalas, kurio dažnių juostos plotis 3200 Hz, yra paverčiamas kodinio impulsinio moduliavimo (PCM) signalu, naudojant ėmimo spartą 7000 s^{-1} ir 64 lygių tolygųjį kvantuotuvą. PCM formato dvejetainiai duomenys perduodami kanalu, kuriame dėl triukšmo klaidingų bitų dažnis siekia 10^{-4}.

(a) Koks yra PCM signalo pirmojo nulio juostos plotis, jeigu naudojamas polinis linijos kodas (žr. 3.4.1b pav.)?
(b) Koks yra vidutinis signalo ir triukšmo santykis imtuvo išėjime?

Sprendimas

(a) $M = 64$ kvantavimo lygių atitinka $n = 6$ bitų PCM žodžius, nes $M = 2^n$. Pagal formulę (3.2.4), polinio linijos kodo atveju pirmojo nulio juostos plotis lygus

$$B_{null} = nf_s = 6 \cdot 7000 = 42\,\text{kHz}.$$

Pastaba: Jeigu būtų naudojami sin$x$/x pavidalo impulsai, tuomet PCM signalo juostos plotis būtų du kartus mažesnis ir lygus 21 kHz.

(b) Pagal formulę (3.2.5b), kai $M = 64$ ir $P_e = 10^{-4}$, signalo ir triukšmo santykis imtuvo išėjime lygus

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}} = \frac{M^2}{1+4(M^2-1)P_e} = \frac{4096}{1+1.64} = 1552 = 31.9\,\text{dB}.$$

Pastaba: Pirmasis vienetas vardiklyje atitinka kvantavimo triukšmą, o dėmuo 1.64 atitinka triukšmą, kuris atsiranda dėl klaidingų bitų. Šiame pavyzdyje abiejų šių efektų indėlis į pilnutinį triukšmą yra beveik vienodas. Jeigu klaidingų bitų dažnis būtų mažesnis už 10^{-5}, vyrautų kvantavimo triukšmas, o jeigu klaidingų bitų dažnis būtų klaidingų bitų dažnis būtų didesnis už 10^{-3}, vyrautų klaidingų bitų sąlygotas triukšmas.

Pavyzdys Nr. 3

Vienpolio NRZ formato (žr. 3.4.1a pav.) dvilygis signalas transformuojamas į daugialygį signalą. Daugialygio signalo galimų lygių skaičius lygus 32, jo impulsai yra stačiakampiai, impulso trukmė 0.3472 ms.

(a) Kokia yra daugialygio signalo simbolių sparta?
(b) Kokia yra daugialygio signalo bitų sparta?
(c) Koks yra daugialygio signalo pirmojo nulio juostos plotis?
(d) Pakartokite punktus (a) – (c) pradiniam dvilygiui signalui.

Sprendimas

(a) Pagal simbolių spartos apibrėžimą (3.3.1),

$$D = N/T_0 = 1/(0.3472\,\text{ms}) = 2880\,\text{s}^{-1}.$$

(b) Kadangi lygių skaičius L ir vieną lygį atitinkantis bitų skaičius l susiję sąryšiu $L = 2^l$, tai, kai $L = 32$, $l = 5$. Vadinasi, pagal (3.3.7), bitų sparta lygi

$$R = lD = 5 \cdot 2880 = 14400\ \text{b/s}.$$

(c) Pagal (3.4.12), pirmojo nulio juostos plotis lygus

$$B_{\text{null}} = R/l = D = 2880\ \text{Hz}.$$

(d) Dvilygio signalo atveju $L = 2$, $l = 1$, todėl $D = R = 14400$ s^{-1}, $B_{null} = R = D = 14400$ Hz.

Pavyzdys Nr. 4

Kompiuterio nuoseklioji prieiga RS-232 perduoda polinio NRZ formato (žr. 3.4.1b pav.) duomenis 38400 b/s sparta. Dvejetainio 1 ir dvejetainio 0 pasikartojimo dažniai yra vienodi. Apskaičiuokite ir pavaizduokite grafiškai šio RS-232 signalo galios spektrinio tankio prieklausą nuo dažnio. Šiame grafike galios spektrinis tankis turi būti išreikštas decibelais ir normuotas taip, kad maksimumas atitiktų 0 dB. Apskaičiuokite šio signalo 30 dB lygio dažnių juostos plotį (t.y., dažnį, virš kurio galios spektrinis tankis yra mažesnis už -30 dB). Apskaičiuokite 30 dB lygio juostos plotį, kuris gaunamas, kai šis signalas praleidžiamas pro pakelto kosinuso kryčio filtrą, kurio kryčio koeficientas $r = 0.5$ (žr. formulę (3.5.11) ir 3.5.4a pav.).

Sprendimas

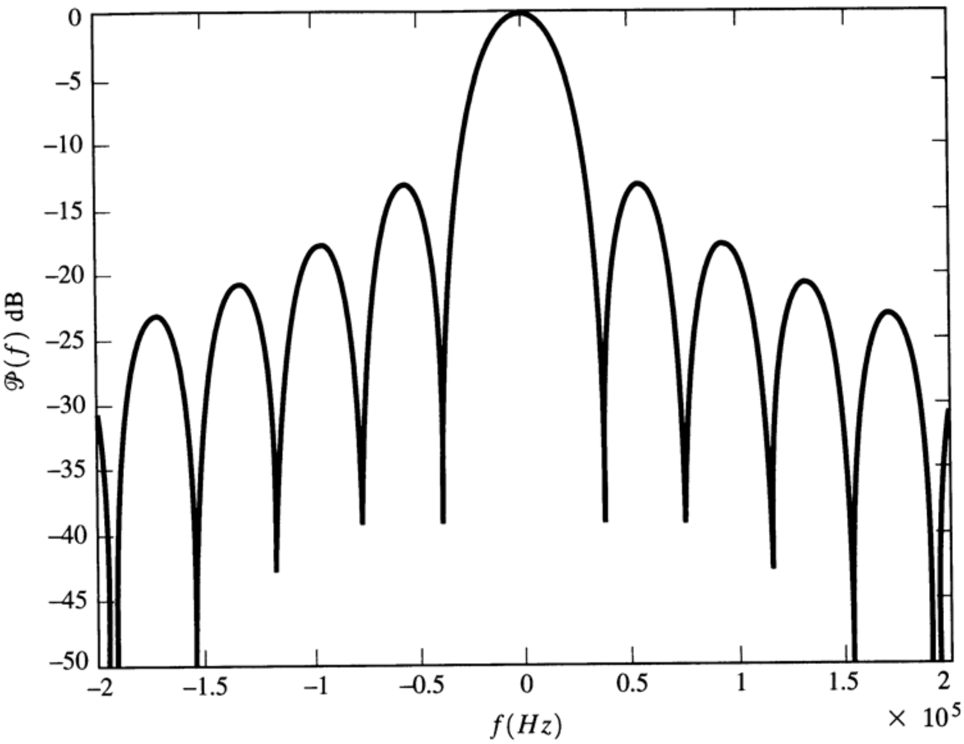
Pagal formulę (3.4.3b), dvilygio signalo su priešingo poliarumo stačiakampiais impulsais ir vienodai tikėtinais 1 ir 0 galios spektrinis tankis lygus

$$P(f) = \left(\frac{\sin \pi f T_b}{\pi f T_b}\right)^2;$$

čia daugiklis prieš skliaustus lygus 1, nes sąlygoje reikalaujama, kad, esant nuliniam dažniui, galios spektrinis tankis būtų lygus 1 (t.y., 0 dB). T_b yra vieno bito trukmė, t.y., $T_b = 1/R = (1/38400)$ s. Išreiškus šį galios spektrinį tankį decibelais,

$$P_{\text{dB}}(f) = 10\log\left[\left(\frac{\sin \pi f T_b}{\pi f T_b}\right)^2\right].$$

Pastaroji funkcija yra pavaizduota 3.9.2 pav. Matome, kad 30 dB lygio spektro plotis yra žymiai didesnis už bitų spartą: net esant 200 kHz dažniui, galios spektrinis tankis yra didesnis už -30 dB (nors egzistuoja siauri dažnių intervalai, kuriuose jis nukrenta žemiau šios ribos).



3.9.2 pav. 38400 b/s spartos RS-232 signalo galios spektrinis tankis

Tokio pavidalo spektro juostos plotis apibrėžiamas, naudojant spektro gaubtinę. Ją nusako galios spektrinio tankio vertės taškuose, kurie atitinka funkcijos $|\sin \pi f T_b|$ maksimumus, išskyrus dažnius $f = \pm 0.5/T_b$. Šie taškai apytiksliai sutampa su galios spektrinio tankio maksimumais. Kadangi šiuose taškuose $|\sin \pi f T_b| = 1$, tai galios spektrinio tankio gaubtinė lygi

$$P_{\text{dB gaubt}}(f) = 10\log\frac{1}{(\pi f T_b)^2} = -20\log(\pi f T_b).$$

Įrašę T_b vertę ir laikydami, kad dažnis f išreikštas Hz, randame:

$$P_{\text{dB gaubt}}(f) = -20(-4.09 + \log f) = 81.7 - 20\log f.$$

Vadinasi, dažnis, kuriame $P_{\text{dB gaubt}} = -30$ dB, yra lygus

$$f = 10^{(81.7+30)/20} = 10^{5.587} = 387\,\text{kHz} = 10.1\,R.$$

Taigi, norint perduoti visas dažnines dedamąsias, kurios yra aukščiau -30 dB lygio, reikalingas kanalas, kurio juostos plotis yra maždaug 10 kartų didesnis už bitų spartą. Šis pavyzdys iliustruoja bendrąjį teiginį, kuris buvo suformuluotas 3.1 poskyryje: jeigu naudojami stačiakampiai impulsai, tuomet impulsinio signalo spektras yra platus.

Jeigu siekiama perduoti PCM signalą kanalu, kurio juostos plotis yra mažesnis už PCM signalo spektrą, PCM signalą reikia filtruoti. Filtravimas turi būti toks, kad, iš vienos pusės, sumažintų signalo juostos plotį iki kanalo juostos pločio, o iš kitos pusės, leistų išvengti tarpženklinės interferencijos (žr. 3.5 poskyrį). Tokio filtro pavyzdys – pakelto kosinuso formos kryčio filtras (žr. 3.5.3 poskyrį). Kai šio filtro įėjime yra $1/D$ trukmės vienetinis stačiakampis impulsas, išėjimo signalo absoliutinis juostos plotis B skaičiuojamas pagal formulę (3.5.18):

$$B = \tfrac{1}{2}(1+r)D;$$

čia r yra kryčio koeficientas, o D yra simbolių sparta, kuri šiuo atveju sutampa su bitų sparta $R = 38400$ b/s. Kai $r = 0.5$, $B = \tfrac{1}{2}(1+0.5)38400 = 28800\,\text{kHz} = 0.75\,R$. Toks pats yra ir polinio signalo, kuris naudoja tokios formos impulsus, absoliutinis juostos plotis (nes, pagal formulę (3.4.3a), dvilygio polinio signalo galios spektrinis tankis yra proporcingas pavienio impulso amplitudžių spektro kvadratui). Dažnis, kuris atitinka galios spektrinio tankio vertę -30 dB, randamas pagal formulę (3.5.11). Kadangi $H_e(0) = 1$, tai galios spektrinis tankis, kuris normuotas į vienetą, esant nuliniam dažniui, yra lygus tiesiog $H_e^2(f)$. Lygis -30 dB atitinka galios spektrinio tankio sumažėjimą 1000 kartų. Vadinasi, ieškomasis 30 dB lygio juostos plotis yra šios lygties sprendinys:

$$H_e^2(f) = 0.001.$$

Filtro parametrų f_1 ir f_Δ vertės randamos pagal formules (3.5.12) ir (3.5.13), turint omenyje, kad $B = 0.75R$ (žr. aukščiau), o $f_0 = R/2$ (žr. (3.5.16)). Taigi, $f_\Delta = R/4$ ir $f_1 = R/4$. Todėl filtro išėjimo signalo spektras kryčio srityje lygus

$$H_e(f) = \frac{1}{2}\left\{1+\cos\left[\frac{\pi(f-f_1)}{2f_\Delta}\right]\right\} = \frac{1}{2}\left\{1+\cos\left[\frac{\pi(f-R/4)}{R/2}\right]\right\} = \frac{1}{2}\left[1+\cos\left(\frac{2\pi f}{R}-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(1+\sin\frac{2\pi f}{R}\right).$$

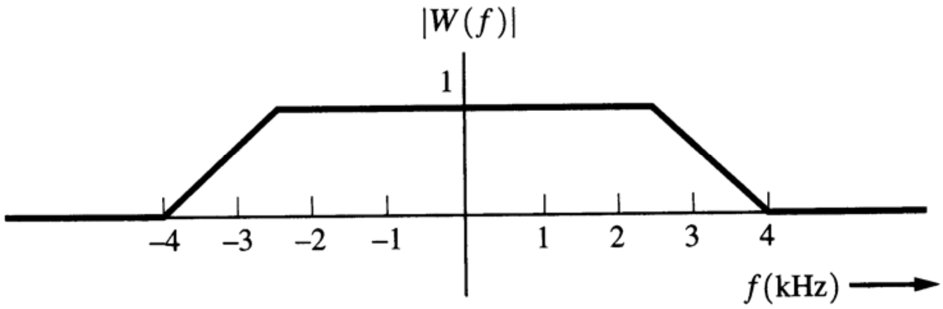
30 dB lygio juostos plotis – tai dažnis, kuriam esant, šis reiškinys lygus $\sqrt{0.001} = 0.0316$. Vadinasi,

$$f = \frac{R}{2\pi}[\pi + \arcsin(1 - 2\cdot 0.0316)] = 0.693\,R \approx 26600\ \text{Hz}.$$

Šis juostos plotis yra beveik 15 kartų mažesnis už tą, kuris reikalingas stačiakampių impulsų perdavimui (žr. aukščiau).

Uždaviniai

3.1. Analoginis signalas, kurio spektras pavaizduotas žemiau, turi būti perduotas kintamos srovės linija, kuri nepraleidžia nuolatinės įtampos. Todėl vietoj pavienių stačiakampių impulsų naudojami Mančesterio tipo impulsai, t.y., teigiamo ir neigiamo impulsų pora (žr. 3.4.1e pav):



$$f(t) = \Pi\left(\frac{t+\tau/4}{\tau/2}\right) - \Pi\left(\frac{t-\tau/4}{\tau/2}\right).$$

Imties dažnis $f_s = 10$ kHz, impulso trukmė $\tau = 50$ μs. Apskaičiuokite ir pavaizduokite grafiškai tokio momentinio ėmimo PAM signalo amplitudžių spektrą.

3.2. Raskite mažiausią bitų skaičių n impulsinio kodinio moduliavimo (PCM) žodyje, kuris reikalingas, kad kvantavimo paklaida neviršytų $\pm 0.01P\,(w_{max} - w_{min})$; čia $w_{max} - w_{min}$ yra analoginio signalo didžiausios ir mažiausios verčių skirtumas, o P yra procentais išreikštas didžiausios kvantavimo paklaidos ir minėtojo skirtumo santykis.

3.3. Informaciją, kurią nusako analoginė įtampa, reikia perduoti PCM sistema ±0.1 % tikslumu. Analoginio signalo absoliutinis dažnių juostos plotis lygus $B = 100$ Hz. Raskite šiuos sistemos parametrus:

a) mažiausią ėmimo spartą f_s,
b) mažiausią bitų skaičių PCM žodyje n,
c) mažiausią PCM signalo bitų spartą R,
d) mažiausią kanalo dažnių juostos plotį B_{PCM}, kuris reikalingas šio PCM signalo perdavimui.

3.4. 850 MB talpos kietajame diske saugomi PCM formato dvejetainiai duomenys, kurie nusako garsinio dažnio signalo diskrečias vertes, kurios buvo išmatuotos $f_s = 8$ kHz dažniu. Laikinėje priklausomybėje, kuri bus atkurta pagal šiuos duomenis, signalo ir kvantavimo triukšmo vidutinių galių santykis turi būti nemažesnis už $(S/N)_{dB} = 30$ dB. Kiek minučių informacijos galima išsaugoti šiame kietajame diske?

3.5. 4.2 MHz juostos pločio analoginis signalas turi būti paverstas dvejetainiu PCM signalu ir perduotas kanalu. Didžiausias signalo ir kvantavimo triukšmo santykis imtuvo išėjime turi būti nemažesnis už 55 dB.
(a) Laikant, kad klaidingų bitų dažnis $P_e = 0$ ir nėra tarpženklinės interferencijos, kokie turėtų būti skaitmeninio žodžio ilgis ir kvantavimo žingsnių skaičius?
(b) Kokia yra šio PCM signalo bitų sparta?
(c) Laikant, kad naudojami stačiakampiai impulsai, koks yra šio signalo pirmojo nulio juostos plotis?

3.6. Signalo ir triukšmo santykio išraiškos (3.2.6a) ir (3.2.6b) yra gautos, laikant, kad nėra tarpženklinės interferencijos ir klaidingų bitų (t.y., $P_e = 0$). Kadangi klaidingų bitų dažnis P_e niekada nebūna tiksliai lygus nuliui, formulės (3.2.6a,b) yra apytikslės. Koks turi būti klaidingų bitų dažnis P_e, kad reiškinių (3.2.6a,b) paklaida neviršytų 0.1%, jeigu kvantavimo lygių skaičius lygus: a) $M = 4$, b) $M = 8$, c) $M = 16$?

3.7. PCM sistemoje bito klaidos tikimybė dėl kanalo triukšmo lygi 10^{-4}. Atkurtajame analoginiame signale didžiausias signalo ir triukšmo galių santykis turi būti nemažesnis už $(S/N)_{\text{dB peak}} = 30$ dB.

(a) Raskite mažiausią PCM žodžio bitų skaičių n.

(b) Jeigu pradinio analoginio signalo absoliutinis dažnių juostos plotis lygus $B = 2.7$ kHz ir naudojamas polinis NRZ linijos kodas, koks yra PCM signalo pirmojo nulio dažnių juostos plotis B_{null}?

3.8. Daugialygė skaitmeninė telekomunikacijų sistema perduoda vieną iš 16 galimų lygių kanalu kas 0.8 ms.

(a) Kiek bitų atitinka kiekvieną lygį?

(b) Kokia yra simbolių sparta?

(c) Kokia yra bitų sparta?

3.9. Daugialygė skaitmeninė ryšių sistema turi veikti, esant bitų spartai $R = 9600$ bits/s.

(a) Koks yra mažiausias kanalo dažnių juostos plotis B, jeigu kiekvienas signalo lygis nusako $l = 4$ bitų skaitmeninį žodį?

(b) Pakartokite a) dalį, kai $l = 8$.

3.10. Duota periodinė dvejetainių duomenų seka, kuri sudaro pakaitom vienetai ir nuliai (101010...). Išreiškite signalo amplitudžių spektrą, kai naudojamas vienas iš šių dviejų kodavimo formatų:

(a) Vienpolis NRZ (žr. 3.4.1a pav.).

(b) Vienpolis RZ (žr. 3.4.1c pav.), kuriame impulso trukmė $\tau = \frac{3}{4}T_b$; čia T_b yra bito trukmė.

Abiem atvejais bito trukmė T_b turi įeiti į funkcijos išraišką kaip parametras. Kaip pasikeistų kiekvienas iš šių spektrų, jeigu dvejetainiai vienetai ir nuliai būtų perduodami po keturis (1111000011110000...)?

3.11. Duota atsitiktinė dvejetainių duomenų seka, kurioje vienetų ir nulių tikimybės sutampa ir yra lygios 1/2. Išreiškite signalo galios spektrinį tankį, kai naudojamas vienas iš šių dviejų kodavimo formatų:

(a) Vienpolis NRZ (žr. 3.4.1a pav.).

(b) Vienpolis RZ (žr. 3.4.1c pav.), kuriame impulso trukmė $\tau = \frac{3}{4}T_b$; čia T_b yra bito trukmė.

Abiem atvejais bito trukmė T_b turi įeiti į funkcijos išraišką kaip parametras. Koks yra spektro panaudojimo efektyvumas kiekvienu iš šių dviejų atvejų?

3.12. Išreiškite dvipolio RZ signalo (žr. 3.4.1d pav.) galios spektrinį tankį, laikant, kad dvejetainio vieneto ir nulio tikimybės yra vienodos, o bitai yra nepriklausomi. Impulso plotis lygus $T_b/2$; čia T_b yra bito trukmė. T_b turi įeiti į galios spektrinio tankio išraišką kaip parametras.

3.13. Išreiškite Mančesterio NRZ signalo (žr. 3.4.1e pav.) galios spektrinį tankį, laikant, kad dvejetainio vieneto ir nulio tikimybės yra vienodos, o bitai yra nepriklausomi. Impulso plotis lygus $T_b/2$; čia T_b yra bito trukmė. T_b turi įeiti į galios spektrinio tankio išraišką kaip parametras.

3.14. Naudodamiesi formulėmis (3.4.2a,b), suformuluokite sąlygas, kuri turi būti patenkintos, kad dvilygio signalo galios spektrinis tankis turėtų delta funkcijos pavidalo dėmenis ties nenuliniais dažniais (pasinaudokite Puasono sumos formule (2.5.25)).

3.15. Dvejetainiai duomenys užkoduoti, naudojant sinusoidės pusperiodžio pavidalo impulsus:

$$f(t) = \begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi t}{T_b}\right), & |t| < T_b/2 \\ 0, & |t| \geq T_b/2 \end{cases}$$

Čia T_b yra vieno bito (impulso) trukmė. Dvejetainį vienetą atitinka teigiamas impulsas ($+f(t)$), o dvejetainį nulį – neigiamas impulsas ($-f(t)$). Dvejetainio vieneto ir nulio tikimybės yra vienodos, o bitai yra nepriklausomi.

(a) Pavaizduokite tokio signalo pavyzdį ($8 \div 12$ bitų).
(b) Išreiškite ir pavaizduokite grafiškai šio signalo galios spektrinį tankį.
(c) Koks yra tokio dvejetainio signalo spektro panaudojimo efektyvumas?

3.16. Diferencialinio koduotuvo įėjimo duomenų seka yra 01101000101. Priklausomai nuo pradinės koduotuvo būsenos (1 arba 0), raskite dvi galimas diferencialinių duomenų sekas.

3.17. Analoginis signalas, kurio dažnių juostos plotis yra B = 2700 Hz, visų pirma užkoduojamas PCM signalo pavidalu, o po to paverčiamas 8-lygiu signalu, kuris perduodamas kanalu. Imtuvo išėjime analoginio signalo paklaida turi būti nedidesnė už 1 %. Apskaičiuokite šiuos sistemos parametrus:

a) PCM signalo mažiausią bitų spartą R,
b) daugialygio signalo mažiausią simbolių spartą D,
c) mažiausią absoliutinį kanalo dažnių juostos plotį B, kuris reikalingas šio daugialygio signalo perdavimui.

3.18. Reikia ištirti 64 lygių vienpolio RZ signalo (žr. 3.4.1c pav.) spektro savybes. Impulsai yra stačiakampiai, vieno impulso trukmė lygi $T_s/2$; čia T_s yra simbolio trukmė.
(a) Išreiškite galios spektrinį tankį, laikydami, kad visi lygiai yra vienodai tikėtini, o didžiausias lygis yra +10 V (mažiausias lygis yra 0 V).
(b) Koks yra šio signalo pirmojo nulio juostos plotis?
(c) Koks yra šio signalo spektro panaudojimo efektyvumas?

3.19. Dvejetainėje ryšių sistemoje naudojamas polinis kodavimo formatas. Impulso formą imtuvo filtro išėjime nusako formulė (3.5.9), todėl nėra tarpženklinės interferencijos. Bitų sparta lygi $R = f_s$ = 300 b/s.
(a) Koks yra šio signalo absoliutinis juostos plotis?
(b) Pavaizduokite signalą sistemos išėjime, kai įėjimo duomenų seka yra 01100101. Ar įmanoma pagal šį grafiką vizualiai nustatyti duomenų seką?

3.20. Įrodykite, kad pakelto kosinuso kryčio filtro atsaką į vienetinį stačiakampį impulsą, kurio trukmė lygi $1/(2f_0)$, nusako formulė (3.5.15). *Pastaba*: Reikia pasinaudoti formule (3.5.11).

3.21. Išreiškite pakelto kosinuso kryčio filtro, kurio kryčio koeficientas r = 0.5, išėjimo signalo galios spektrinį tankį, kai filtro įėjime yra polinis NRZ signalas (žr. 3.4.1b pav.). Laikykite, kad dvejetainio vieneto ir nulio tikimybės yra vienodos, o bitai yra nepriklausomi. Vieno bito trukmė lygi $1/(2f_0)$; čia f_0 yra filtro parametras (žr. formulę (3.5.11)).

3.22. Analoginis signalas turi būti paverstas PCM signalu, kuris naudoja polinį NRZ linijos kodą (žr. 3.4.1b pav.). Šis signalas perduodamas kanalu, kurio absoliutinis juostos plotis yra 4 kHz. PCM kvantuotuvas turi 16 lygių, o sistemos atsako į vienetinį $1/(2f_0)$ trukmės stačiakampį impulsą spektras yra (3.5.11).
(a) Apskaičiuokite didžiausią PCM bitų spartą, kuri gali būti pasiekta šioje sistemoje, išvengiant tarpženklinės interferencijos.
(b) Apskaičiuokite didžiausią analoginio signalo juostos plotį.

3.23. Išspręskite uždavinį 3.22 daugialygio polinio NRZ signalo atveju, kai lygių skaičius lygus 4.

3.24. Daugialygiai duomenys perduodami kanalu, naudojant 4 lygių linijos kodą. Bitų sparta lygi 2400 b/s; siųstuvo išėjimo impulsai yra stačiakampiai. Visa sistema (t.y., siųstuvas, kanalas ir imtuvas) turi pakelto kosinuso formos kryčio filtravimo charakteristiką, kurios kryčio koeficientas lygus $r = 0.5$.
(a) Apskaičiuokite priimtojo signalo simbolių spartą.
(b) Apskaičiuokite šios sistemos 6 dB lygio juostos plotį.
(c) Apskaičiuokite šios sistemos absoliutinį dažnių juostos plotį.

3.25. Pirmojo analoginio signalo $w_1(t)$ absoliutinis dažnių juostos plotis yra 3 kHz, o antrojo analoginio signalo $w_2(t)$ absoliutinis juostos plotis yra 9 kHz. Šie du signalai turi būti perduodami laikinio tankinimo (TDM) sistema.
(a) Apskaičiuokite kiekvieno signalo mažiausią ėmimo spartą ir suprojektuokite atitinkamus multipleksorių ir demultipleksorių.
(b) Nubraižykite signalų $w_1(t)$ ir $w_2(t)$ pavyzdžius bei atitinkamą TDM PAM signalą.

3.26. 23 analoginiai signalai, kurių kiekvieno dažnių juostos plotis 3.4 kHz, yra diskretizuojami, naudojant 8 kHz ėmimo spartą, ir multipleksuojami kartu su sinchronizavimo signalu (8 kHz). Šis PAM signalas perduodamas kanalu, kuris turi pakelto kosinuso formos kryčio filtravimo charakteristiką su kryčio koeficientu $r = 0.75$.
(a) Nubraižykite šios sistemos struktūrinę schemą, kurioje nurodyti multipleksoriaus ciklų dažnis (kaip 3.8.5 pav.) ir TDM PAM signalo pilnutinis impulsų dažnis.
(b) Apskaičiuokite reikalingą kanalo absoliutinį juostos plotį.

3.27. Išspręskite uždavinį 3.26, kai TDM PAM signalas yra kvantuojamas ir užkoduojamas 8 bitų dvejetainių žodžių pavidalu, o po šis dvejetainis PCM signalas perduodamas kanalu.

3.28. Suprojektuokite TDM PCM sistemą, kuri naudoja keturis 300 b/s spartos sinchroninius skaitmeninius įėjimo signalus ir vieną analoginį įėjimo signalą, kurio juostos plotis 500 Hz. Analoginio signalo imtys užkoduojamos 4 bitų PCM žodžių pavidalu. Nubraižykite šios sistemos struktūrinę schemą, kurioje nurodytos duomenų perdavimo spartos įvairiuose taškuose (kaip 3.8.5 pav.). Paaiškinkite šios sistemos veikimą.

3.29. Suprojektuokite TDM PCM sistemą, kuri naudoja du 2400 b/s spartos sinchroninius skaitmeninius įėjimo signalus ir vieną analoginį įėjimo signalą, kurio juostos plotis 2700 Hz. Analoginio signalo ėmimo sparta yra 10/9 kartų didesnė už Naikvisto spartą, o imtys užkoduojamos 4 bitų PCM žodžių pavidalu. Nubraižykite šios sistemos struktūrinę schemą, kurioje nurodytos duomenų perdavimo spartos įvairiuose taškuose (kaip 3.8.5 pav.). Paaiškinkite šios sistemos veikimą.

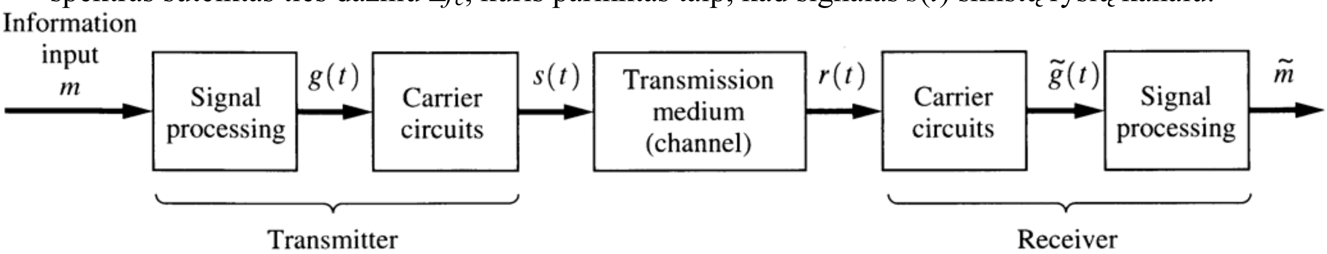
4. JUOSTINIŲ SIGNALŲ PERDAVIMO PRINCIPAI IR GRANDINĖS

4.1. Juostinių signalų kompleksinė išraiška

4.1.1. Pagrindinės sąvokos: žemadažnis signalas, juostinis signalas, moduliavimas

Žemadažniu signalu vadinamas signalas, kurio amplitudžių spektras nėra lygus nuliui ties nuliniu dažniu ($f = 0$) ir mažėja, augant dažniui. ***Juostiniu signalu*** vadinamas signalas, kurio spektras skiriasi nuo nulio tik vienoje dažnių juostoje, kuri yra aukštojo dažnio $f = \pm f_c$ aplinkoje. Dažnis f_c vadinamas ***nešlio dažniu***.

Telekomunikacijų uždaviniuose informacinis signalas ($m(t)$) dažniausiai būna žemadažnis signalas, pvz., loginio tranzistorinio-tranzistorinio (TTL) grandyno išėjimo signalas arba mikrofono generuojamas analoginis signalas. Telekomunikacijų specialisto darbas yra sukurti sistemą, kuri perduotų signale $m(t)$ esančią informaciją į duotąjį priėmimo tašką. Kaip parodyta 4.1.1 pav., tokiam perdavimui dažniausiai prireikia juostinio signalo $s(t)$. Šio signalo spektras sutelktas ties dažniu $\pm f_c$, kuris parinktas taip, kad signalas $s(t)$ sklistų ryšių kanalu.



4.1.1 pav. Telekomunikacijų sistema.

Moduliavimu vadinamas šaltinio perduodamos informacijos perkėlimas į juostinį signalą, pakeičiant dažnio f_c nešlio amplitudę arba fazę. Tuomet šis juostinis signalas vadinamas ***moduliuotuoju signalu*** $s(t)$, o informacijos šaltinio generuojamas žemadažnis signalas vadinamas ***moduliavimo signalu***. Informacinis signalas gali būti arba tiesiogiai panaudojamas moduliavimui, arba transformuojamas į kitokio pavidalo žemadažnį signalą $g(t)$ (žr. 4.1.1 pav.). Tokios transformacijos pavyzdys – analoginio signalo keitimas skaitmeniniu signalu arba atvirkščiai.

Moduliuotajam signalui sklindant kanalu, triukšmas jį iškraipo. Todėl imtuvo įėjime yra juostinio signalo ir triukšmo suma $r(t)$ (žr. 4.1.1 pav.). Imtuvo užduotis yra pabandyti atkurti informaciją, kuri buvo siunčiama. Šio atkūrimo metu suformuojamas iškraipytasis informacinis signalas $\tilde{m}(t)$.

4.1.2. Juostinio signalo kompleksinės gaubtinės sąvoka

Visus juostinius signalus, nepriklausomai nuo jų kilmės, galima išreikšti tokiu pavidalu:

$$\upsilon(t) = \mathrm{Re}\{g(t)e^{j\omega_c t}\}. \tag{4.1.1a}$$

Čia funkcija $g(t)$ vadinama signalo $\upsilon(t)$ ***kompleksine gaubtine***, o ω_c yra nešlio ciklinis dažnis: $\omega_c = 2\pi f_c$. (4.1.1a) lygybė yra juostinio signalo kompleksinė išraiška. Juostinį signalą (4.1.1a) galima užrašyti dar dviem tapačiais pavidalais: polinė išraiška

$$\upsilon(t) = R(t)\cos[\omega_c t + \theta(t)] \tag{4.1.1b}$$

ir kvadratūrinė išraiška

$$\upsilon(t) = x(t)\cos\omega_c t - y(t)\sin\omega_c t, \tag{4.1.1c}$$

kur

$$g(t) = x(t) + jy(t) \equiv R(t)e^{j\theta(t)}, \tag{4.1.2}$$

$$x(t) = \mathrm{Re}\{g(t)\} \equiv R(t)\cos\theta(t), \tag{4.1.3a}$$

$$y(t) = \mathrm{Im}\{g(t)\} \equiv R(t)\sin\theta(t), \tag{4.1.3b}$$

$$R(t) \equiv |g(t)| \equiv \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}, \tag{4.1.4a}$$

$$\theta(t) \equiv \arctan\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right). \tag{4.1.4b}$$

Funkcija $R(t)$ vadinama signalo $\upsilon(t)$ ***realiąja gaubtine***, o funkcija $\theta(t)$ vadinama signalo $\upsilon(t)$ ***pradine faze***. Pradinė fazė $\theta(t)$ apibūdina ne tik moduliuotos fazės signalą, bet ir moduliuoto dažnio signalą (žr. 5.5.1 poskyrį). Laiko atskaitos momentas dažniausiai parenkamas taip, kad $\theta(t)$ laikinis vidurkis būtų lygus nuliui. Tuomet, kai signalo dažnis ir pradinė fazė nekinta laike, $\theta(t) \equiv 0$ (pvz., žr. sandaugos detektoriaus analizę 4.10.2 poskyryje). Formulėje (4.1.2) akivaizdu, kad $x(t)$ yra kompleksinės gaubtinės realioji dalis, o $y(t)$ – menamoji dalis. Pirmasis (4.1.1c) reiškinio dėmuo vadinamas juostinio signalo ***sinfazine dedamąja***, o antrasis – ***kvadratūrine dedamąja***.

Funkcijų $g(t)$, $x(t)$, $y(t)$, $R(t)$ ir $\theta(t)$ spektrai sutelkti ties nuliniu dažniu, t.y., šios funkcijos yra žemadažniai signalai. Žemiau pateiktas pastarojo teiginio ir (4.1.1a) lygybės įrodymas.

Bet kurią laiko funkciją $\upsilon(t)$ galima pakeisti jos spektro atvirkštine Furjė transformacija (2.2.5):

$$\upsilon(t) = \int_{-\infty}^{\infty} V(f)e^{j2\pi ft}df. \tag{4.1.5}$$

Jeigu $\upsilon(t)$ yra realioji laiko funkcija, tuomet, pagal (2.2.7),

$$\upsilon(t) = 2\,\mathrm{Re}\left[\int_0^{\infty} V(f)e^{j2\pi ft}df\right] \equiv 2\,\mathrm{Re}\left[\left(\int_0^{\infty} V(f)e^{j2\pi(f-f_c)t}df\right)e^{j2\pi f_c t}\right], \tag{4.1.6}$$

kur f_c yra bet koks dažnis. Vadinasi, gavome (4.1.1a) pavidalo lygybę, kurioje

$$g(t) \equiv 2\int_0^{\infty} V(f)e^{j2\pi(f-f_c)t}df = 2\int_{-f_c}^{\infty} V(f+f_c)e^{j2\pi ft}df. \tag{4.1.7}$$

(užrašant paskutiniąją lygybę, buvo atlikti integravimo kintamojo pakeitimai $f \to f_1 \equiv f - f_c$ ir $f_1 \to f$). Reiškinys (4.1.7) yra atvirkštinė Furjė transformacija funkcijos, kuri intervale $f < -f_c$ lygi nuliui, o intervale $f > -f_c$ sutampa su padaugintu iš 2 ir paslinktu į neigiamųjų dažnių pusę signalo $\upsilon(t)$ spektru. Poslinkio dydis lygus f_c. Jeigu f_c sutampa su juostinio signalo $\upsilon(t)$ nešlio dažniu, tuomet, pagal juostinio signalo apibrėžimą, funkcija $V(f+f_c)$ skiriasi nuo nulio tik arti dažnių $f = 0$ ir $f = -2f_c$. Tačiau pastarasis dažnis nepriklauso integralo (4.1.7) integravimo intervalui. Vadinasi, funkcijos $g(t)$ spektras skiriasi nuo nulio tik arti nulinio dažnio $f = 0$, ką ir reikėjo įrodyti.

4.2. Moduliuotojo signalo matematinė išraiška

Kaip minėta 4.1.1 poskyryje, moduliavimas yra informacijos $m(t)$ (moduliavimo signalo) perkėlimas į juostinį signalą $s(t)$ (moduliuotąjį signalą). Vadinasi, moduliuotasis signalas yra atskiras juostinio signalo atvejis. Todėl moduliuotąjį signalą taip pat galima išreikšti (4.1.1a) pavidalu:

$$s(t) = \mathrm{Re}\{g(t)e^{j\omega_c t}\}, \tag{4.2.1}$$

kur $\omega_c = 2\pi f_c$. f_c yra nešlio dažnis. Moduliuotojo signalo kompleksinė gaubtinė $g(t)$ yra moduliavimo signalo $m(t)$ funkcija, t.y.,

$$g(t) = g[m(t)]. \tag{4.2.2}$$

Priedo C lentelėje C-1 pateikti keli priklausomybės (4.2.2) pavyzdžiai ir atitinkamos prieklausos $x(t)$, $y(t)$, $R(t)$ ir $\theta(t)$: amplitudės moduliavimas (***AM***), dvipusė šalinė juosta su numalšintuoju nešliu (*double-sideband suppressed carrier*, ***DSB-SC***), fazės moduliavimas (*phase modulation*, ***PM***), dažnio moduliavimas (*frequency modulation*, ***FM***), vienpusės šalinės juostos amplitudės moduliavimas su numalšintuoju nešliu (*single-sideband AM suppressed carrier*, ***SSB-AM-SC***), vienpusės šalinės juostos fazės moduliavimas (***SSB-PM***) ir vienpusės šalinės juostos dažnio moduliavimas (***SSB-FM***). Reikia turėti omenyje, kad, nepriklausomai nuo pasirinktosios funkcinės priklausomybės $g[m]$, moduliavimo signalas $m(t)$ gali būti ir analoginis, ir skaitmeninis. C-1 lentelėje matyti, kad pradinė fazė $\theta(t)$ nusako ne tik PM signalą, bet ir FM signalą: PM atveju $\theta(t)$ proporcinga moduliavimo signalui $m(t)$, o FM atveju $\theta(t)$ proporcinga $m(t)$ *integralui*, t.y., momentinio dažnio nuokrypis $d\theta/dt$ proporcingas $m(t)$.

4.3. Juostinio signalo spektras, galios spektrinis tankis ir normuotoji galia

4.3.1. Juostinio signalo spektro ir galios bendrosios išraiškos

Iš (4.1.1a) išplaukia, kad juostinį signalą vienareikšmiškai nusako jo kompleksinė gaubtinė $g(t)$ ir nešlio dažnis f_c. Vadinasi, juostinio signalo spektrą (Furjė transformaciją) turi vienareikšmiškai nusakyti jo kompleksinės gaubtinės spektras ir nešlio dažnis f_c. Rasime juostinio signalo spektro bendrąją išraišką.

Juostinį signalą

$$\upsilon(t) = \mathrm{Re}\{g(t)e^{j\omega_c t}\} \tag{4.3.1}$$

galima užrašyti tokiu pavidalu:

$$\upsilon(t) = \mathrm{Re}\{g(t)e^{j\omega_c t}\} = \frac{1}{2}g(t)e^{j\omega_c t} + \frac{1}{2}g^*(t)e^{-j\omega_c t}. \tag{4.3.2}$$

Vadinasi, juostinio signalo spektras yra

$$V(f) = F[\upsilon(t)] = \frac{1}{2}F[g(t)e^{j\omega_c t}] + \frac{1}{2}F[g^*(t)e^{-j\omega_c t}]. \tag{4.3.3}$$

Šios lygybės dešiniąją pusę galima užrašyti kitokiu pavidalu, pasinaudojus šiom dviem Furjė transformacijos savybėm (žr. B-1 lentelę): 1) laiko funkcijos $g(t)$ daugyba iš $\exp(j2\pi f_c t)$ yra tapati jos spektro $G(f)$ poslinkiui išilgai dažnių ašies dydžiu f_c; 2) kompleksiškai jungtinės laiko funkcijos spektras lygus pradinės funkcijos kompleksiškai jungtiniam spektrui, kuriame dažnio ženklas pakeistas į priešingą. Tokiu būdu gauname:

$$V(f) = \frac{1}{2}[G(f - f_c) + G^*(-f - f_c)]. \tag{4.3.4}$$

Iš (4.3.4) išplaukia, kad juostinio signalo spektre galima išskirti dvi sritis: viena sritis – tai atstumu f_c teigiamųjų dažnių kryptimi paslinktas kompleksinės gaubtinės spektras, o kita sritis gaunama iš kompleksinės gaubtinės spektro $G(f)$, atlikus tris veiksmus: 1) apskaičiavus gaubtinės spektro kompleksiškai jungtinį dydį $G^*(f)$, 2) atspindėjus gautąjį spektrą atžvilgiu tiesės $f = 0$, 3) paslinkus gautąjį spektrą atstumu $-f_c$ (t.y., atstumu f_c neigiamųjų dažnių kryptimi). Jeigu kompleksinės gaubtinės absoliutinis dažnių juostos plotis B yra mažesnis už nešlio dažnį f_c, tuomet šios dvi spektro sritys nepersikloja.

Juostinio signalo (4.3.1) galios spektrinį tankį apskaičiuosime pagal Vinerio ir Chinčino teoremą (2.3.10), t.y., visų pirma rasime signalo autokoreliacijos funkciją, o po to apskaičiuosime jos Furjė transformaciją. Pagal autokoreliacijos funkcijos apibrėžimą (2.3.8),

$$R_\upsilon(\tau) = \langle \upsilon(t)\upsilon(t+\tau)\rangle = \langle \mathrm{Re}\{g(t)e^{j\omega_c t}\}\,\mathrm{Re}\{g(t+\tau)e^{j\omega_c (t+\tau)}\}\rangle. \tag{4.3.5}$$

Pasinaudoję tapatybe

$$\mathrm{Re}(c_2)\,\mathrm{Re}(c_1) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(c_2^* c_1) + \frac{1}{2}\mathrm{Re}(c_2 c_1), \tag{4.3.6}$$

kur $c_2 = g(t)e^{j\omega_c t}$, o $c_1 = g(t+\tau)e^{j\omega_c (t+\tau)}$, gauname

$$R_v(\tau) = \frac{1}{2}\left\langle \mathrm{Re}\{g^*(t)g(t+\tau)e^{-j\omega_c t}e^{j\omega_c(t+\tau)}\}\right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \mathrm{Re}\{g(t)g(t+\tau)e^{j\omega_c t}e^{j\omega_c(t+\tau)}\}\right\rangle.$$

Kadangi $\langle\ \rangle$ ir Re{ } yra tiesiniai operatoriai, juos galima sukeisti vietomis:

$$R_v(\tau) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\langle g^*(t)g(t+\tau)\rangle e^{j\omega_c\tau}\} + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\langle g(t)g(t+\tau)e^{j2\omega_c t}\rangle e^{j\omega_c\tau}\}.$$

Pirmasis vidurkis šiame reiškinyje yra kompleksinės gaubtinės $g(t)$ autokoreliacijos funkcija $R_g(\tau)$. Antrasis vidurkis yra artimas nuliui, nes, pagal juostinio signalo apibrėžimą, funkcijos $g(t)$ kitimo dažnis yra žymiai mažesnis už nešlio dažnį f_c. T.y., $g(t)g(t+\tau)e^{j2\omega_c t}$ yra dideliu dažniu $2f_c$ osciliuojanti laiko funkcija, kurios amplitudė kinta lėtai. Tokių funkcijų laikinis vidurkis artimas nuliui. Vadinasi,

$$R_v(\tau) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{R_g(\tau)e^{j\omega_c\tau}\}. \tag{4.3.7}$$

Skaičiuodami funkcijos $R_v(\tau)$ Furjė transformaciją, atsižvelgiame į tai, kad reiškinio (4.3.7) matematinis pavidalas yra toks pats, kaip reiškinio (4.3.1). Vadinasi, reiškinio (4.3.7) Furjė transformaciją galima skaičiuoti pagal (4.3.4) formulę, kurioje vietoj $G(f)$ yra kompleksinės gaubtinės autokoreliacijos funkcijos $R_g(\tau)$ Furjė transformacija (kompleksinės gaubtinės galios spektrinis tankis) $P_g(f)$, padauginta iš daugiklio 1/2. Atsižvelgę į tai, kad galios spektrinis tankis yra realioji funkcija (žr. (2.3.6)), gauname tokią juostinio signalo galios spektrinio tankio išraišką:

$$P_v(f) = \frac{1}{4}[P_g(f-f_c) + P_g(-f-f_c)]. \tag{4.3.8}$$

Remiantis (4.3.7), juostinio signalo normuotąją galią galima nesunkiai susieti su jo kompleksinės gaubtinės normuotąja galia. Tuo tikslu pasinaudojame paskutiniąja (2.3.11) lygybe:

$$P = R_v(0) = \frac{1}{2}\langle |g(t)|^2\rangle. \tag{4.3.9}$$

Vadinasi, juostinio signalo vidutinė normuotoji galia lygi pusei jo kompleksinės gaubtinės vidutinės normuotosios galios (2.1.9). Atskiru atveju, kai kompleksinės gaubtinės absoliutinė vertė $|g(t)|$ (t.y., juostinio signalo amplitudė: žr. (4.1.4a) ir (4.1.1b)) yra pastovi, (4.3.9) lygybė virsta gerai žinomu teiginiu, kad sinusoidės vidutinė normuotoji galia lygi pusei amplitudės kvadrato (žr. (2.3.16)). Remiantis šiuo teiginiu, galima nesunkiai paaiškinti (4.3.9) lygybę. Kadangi nešlio dažnis visuomet būna žymiai didesnis už gaubtinės spektro plotį, tai juostinio signalo amplitudė $|g(t)|$ beveik nekinta kelių nešlio periodų pločio laiko intervale. Todėl juostinio signalo vidutinė normuotoji galia šiame intervale lygi pusei amplitudės kvadrato $|g(t)|^2/2$. Vadinasi, galios vidurkis visoje laiko ašyje lygus šio dydžio vidurkiui $\langle|g(t)|^2\rangle/2$.

Praktikoje siųstuvo galios apibūdinimui dar naudojama ***didžiausioji gaubtinės galia*** (*peak envelope power*, ***PEP***) – vidutinė juostinio signalo galia, kuri būtų gauta tuo atveju, jeigu jo kompleksinės gaubtinės absoliutinė vertė $|g(t)|$ būtų pastovi ir lygi maksimaliai vertei. Iš (4.3.9) išplaukia, kad normuotoji PEP yra lygi

$$P_{\mathrm{PEP}} = \frac{1}{2}[\max|g(t)|]^2. \tag{4.3.10}$$

4.3.2. Moduliuotos amplitudės signalo spektras ir galia

Kaip pavyzdį, apskaičiuosime moduliuotosios amplitudės (AM) signalo spektrą. Pagal C-1 lentelę, AM signalo kompleksinė gaubtinė yra

$$g(t) = A_c[1+m(t)], \tag{4.3.11}$$

kur $m(t)$ yra realusis moduliavimo signalas. Įrašę (4.3.11) į (4.2.1), randame AM signalo bendrąją išraišką:

$$s(t) = A_c[1 + m(t)]\cos\omega_c t\,. \qquad (4.3.12)$$

Gaubtinės (4.3.11) spektras, atsižvelgus į δ funkcijos savybę (2.2.17), yra

$$G(f) = A_c\delta(f) + A_c M(f)\,, \qquad (4.3.13)$$

kur $M(f)$ yra moduliavimo signalo $m(t)$ spektras. Įrašę (4.3.13) į (4.3.4), gauname:

$$S(f) = \frac{1}{2}A_c[\delta(f - f_c) + M(f - f_c) + \delta(-f - f_c) + M^*(-f - f_c)]\,.$$

Kadangi δ funkcija yra lyginė, tai $\delta(-f - f_c) = \delta(f + f_c)$. Kadangi moduliavimo signalas $m(t)$ yra realus, tai $M^*(-f - f_c) = M(f + f_c)$ (žr. (2.2.6)). Vadinasi,

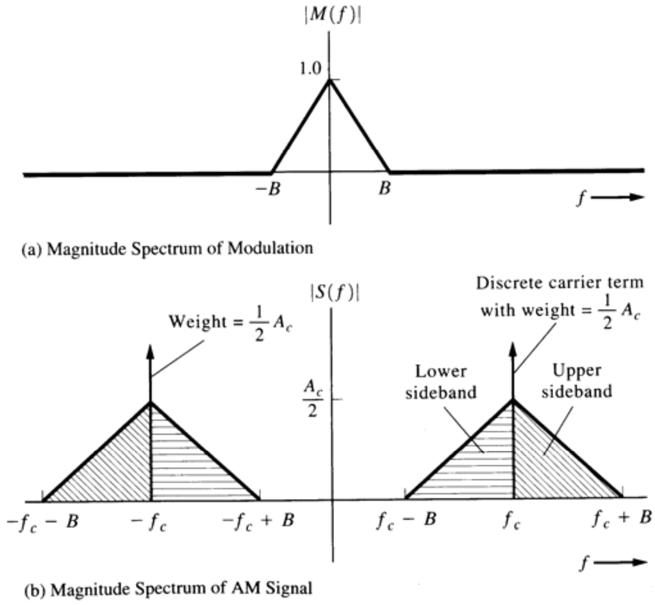
$$S(f) = \frac{1}{2}A_c[\delta(f - f_c) + M(f - f_c) + \delta(f + f_c) + M(f + f_c)]\,. \qquad (4.3.14a)$$

Tarkime, kad moduliavimo signalo spektras $M(f)$ yra trikampės funkcijos pavidalo (žr. 4.3.1a pav.). Atitinkamas AM signalo amplitudžių spektras, kuris išplaukia iš (4.3.14a), pavaizduotas 4.3.1b pav. Kadangi šiuo atveju spektro sritys $G(f - f_c)$ ir $G(-f - f_c)$ nepersikloja, tai (4.3.14a) lygybės dešiniojoje pusėje nelygūs nuliui tik du dėmenys: kai $f > 0$, nelygūs nuliui tik du pirmieji dėmenys, o kai $f < 0$ – trečiasis ir ketvirtasis dėmenys. Todėl (4.3.14a) lygybę galima pakeisti dviem paprastesnėm lygybėm, kurių viena galioja teigiamiems dažniams, o kita – neigiamiems dažniams:

$$|S(f)| = \begin{cases} \frac{1}{2}A_c\delta(f - f_c) + \frac{1}{2}A_c\,|M(f - f_c)|, & f > 0; \\ \frac{1}{2}A_c\delta(f + f_c) + \frac{1}{2}A_c\,|M(f + f_c)|, & f < 0. \end{cases} \qquad (4.3.14b)$$

δ funkcijos ties dažniais $f = \pm f_c$ spektre atsiranda dėl pastovaus dėmens A_c kompleksinės gaubtinės išraiškoje (4.3.11).

Vadinasi, AM signalo spektras gaunamas, paslinkus moduliavimo signalo spektrą atstumu f_c ir papildžius jį δ funkcija ties nešlio dažniu f_c. Moduliavimo ir AM signalų spektrų sąryšis yra toks paprastas dėl to, kad gaubtinė yra proporcinga moduliavimo signalui (žr. (4.3.11)). Kitų moduliavimo rūšių atveju gaubtinės priklausomybė nuo moduliavimo signalo yra sudėtingesnė (žr. C-1 lentelę), todėl gaubtinės spektras nėra proporcingas moduliavimo signalo spektrui. Atitinkamai, kaip išplaukia iš moduliuotojo signalo spektro bendrosios išraiškos (4.3.4), moduliuotojo signalo spektras bendruoju atveju nesutampa su paslinktu moduliavimo signalo spektru.



4.3.1 pav. AM signalo spektras. a – moduliavimo signalo amplitudžių spektras, b – atitinkamo AM signalo amplitudžių spektras.

Juostinio signalo spektro dalis, kuri yra dažnių intervale $f > f_c$, vadinama ***viršutine šaline juosta*** (*upper sideband*) o spektro dalis, kuris yra dažnių intervale $0 < f < f_c$, vadinama ***apatine šaline juosta*** (*lower sideband*). Kadangi AM signalo gaubtinė $g(t)$ yra realioji laiko funkcija (žr. (4.3.11)), tai viršutinė ir apatinė šalinės juostos yra simetriškos viena kitai nešlio dažnio f_c atžvilgiu (žr. (2.2.7) ir 4.3.1b pav.).

Įrašę (4.3.11) į (4.3.9), gauname AM signalo vidutinę galią:

$$P = \frac{1}{2}\langle |g(t)|^2\rangle = \frac{1}{2}A_c^2\langle[1 + m(t)]^2\rangle = \frac{1}{2}A_c^2[1 + 2\langle m(t)\rangle + \langle m^2(t)\rangle]\,.$$

Laikant, kad moduliavimo signalo nuolatinė dedamoji $\langle m(t)\rangle$ lygi nuliui (tai pasireiškia tuo, kad moduliavimo signalo spektre $M(f)$ nėra δ funkcijos taške $f = 0$: žr. 4.3.1a pav.),

$$P = \frac{1}{2}A_c^2[1 + \langle m^2(t)\rangle] = \frac{1}{2}A_c^2[1 + P_m] = \frac{A_c^2}{2} + \frac{A_c^2 P_m}{2}, \tag{4.3.15}$$

kur $P_m = \langle m^2(t)\rangle$ yra moduliavimo signalo vidutinė galia, $A_c^2/2$ yra nešlio galia, kurią nusako δ funkcijų ties $f = \pm f_c$ svoris galios spektre, o $A_c^2 P_m/2$ yra AM signalo šalinių juostų galia.

4.4. Juostiniai filtrai ir tiesiniai iškraipymai

4.4.1. Juostinio filtro pakeitimas ekvivalenčiu žemųjų dažnių filtru

2.6.2 ir 2.6.3 poskyryje buvo suformuluota bendroji tiesinių filtrų analizės metodika, kuri remiasi filtro impulsiniu atsaku ir jo spektru (perdavimo funkcija). Dabar įrodysime, kad juostinio filtro įėjimo ir išėjimo signalų *kompleksines gaubtines* (ir jų spektrus) galima susieti sąryšiais, kurie analogiški bendriesiems sąryšiams (2.6.5) ir (2.6.6), tačiau vietoj juostinio filtro impulsinio atsako $h(t)$ ir jo spektro $H(f)$ reikia naudoti funkcijos $h(t)$ kompleksinę gaubtinę $k(t)$ ir jos spektrą $K(f)$, padaugintus iš 1/2.

4.4.1a pav. pavaizduota tipiška juostinio filtro dažninė charakteristika (impulsinio atsako spektras). Remiantis šios charakteristikos pavidalu ir bendruoju juostinio signalo apibrėžimu (žr. 4.1.1 poskyrį), galima teigti, kad juostinio filtro impulsinis atsakas $h(t)$ yra juostinis signalas, t.y., jį galima išreikšti (4.1.1a) pavidalu:

$$h(t) = \mathrm{Re}\{k(t)e^{j\omega_c t}\}, \tag{4.4.1a}$$

kur $\omega_c = 2\pi f_c$ yra ciklinis nešlio dažnis, kuriam suderintas juostinis filtras, o $k(t)$ yra juostinio filtro impulsinio atsako kompleksinė gaubtinė. Kai tokio filtro įėjime yra juostinis signalas

$$\upsilon_1(t) = \mathrm{Re}\{g_1(t)e^{j\omega_c t}\}, \tag{4.4.1b}$$

tuomet išėjimo signalas taip pat yra juostinis, o jo nešlio dažnis taip pat lygus f_c:

$$\upsilon_2(t) = \mathrm{Re}\{g_2(t)e^{j\omega_c t}\}. \tag{4.4.1c}$$

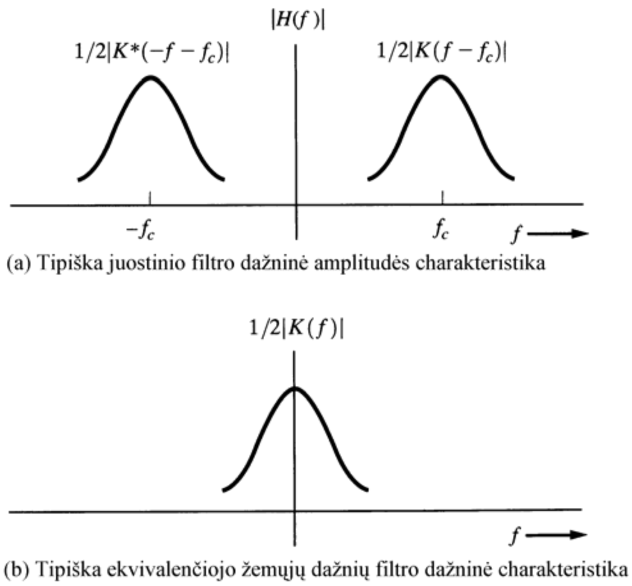
Rasime juostinių signalų $h(t)$, $\upsilon_1(t)$ ir $\upsilon_2(t)$ *gaubtinių* $k(t)$, $g_1(t)$ ir $g_2(t)$ sąryšį ir gaubtinių spektrų sąryšį.

Pagal (2.6.6), išėjimo signalo spektras yra

$$V_2(f) = V_1(f)H(f). \tag{4.4.2}$$

Kadangi $\upsilon_1(t)$, $\upsilon_2(t)$ ir $h(t)$ yra juostiniai signalai, tai jų spektrus galima išreikšti atitinkamų kompleksinių gaubtinių spektrais pagal (4.3.4):

$$\frac{1}{2}[G_2(f - f_c) + G_2^*(-f - f_c)] =$$
$$= \frac{1}{2}[G_1(f - f_c) + G_1^*(-f - f_c)]\frac{1}{2}[K(f - f_c) + K^*(-f - $$
$$= \frac{1}{4}[G_1(f - f_c)K(f - f_c) + G_1^*(-f - f_c)K(f - f_c) +$$
$$+ G_1(f - f_c)K^*(-f - f_c) + G_1^*(-f - f_c)K^*(-f - f_c)]. \tag{4.4.3}$$



4.4.1 pav. Tipiška juostinio filtro (a) ir ekvivalentaus žemųjų dažnių filtro (b) dažninė charakteristika.

Čia $G_1(f)$, $G_2(f)$ ir $K(f)$ yra, atitinkamai, įėjimo signalo, išėjimo signalo ir impulsinio atsako kompleksinių gaubtinių spektrai. Kadangi $g_1(t)$ ir $k(t)$ yra žemadažniai signalai, tai $G_1(f-f_c)$ ir $K(f-f_c)$ skiriasi nuo nulio tik dažnio $f=f_c$ aplinkoje, o $G_1^*(-f-f_c)$ ir $K^*(-f-f_c)$ skiriasi nuo nulio tik dažnio $f=-f_c$ aplinkoje. Vadinasi, sandaugos $G_1^*(-f-f_c)K(f-f_c)$ ir $G_1(f-f_c)K^*(-f-f_c)$ lygios nuliui. Taigi,

$$G_2(f-f_c)+G_2^*(-f-f_c)=\frac{1}{2}[G_1(f-f_c)K(f-f_c)+G_1^*(-f-f_c)K^*(-f-f_c)]. \quad (4.4.4)$$

Ši lygybė gali būti teisinga tik tuomet, kai atitinkami dėmenys abiejose jos pusėse sutampa, t.y., kai galioja sąryšis

$$G_2(f)=G_1(f)\frac{1}{2}K(f) \quad (4.4.5)$$

(plg. su (2.6.6)). (4.4.5) lygybės atvirkštinė Furjė transformacija yra

$$g_2(t)=g_1(t)*\frac{1}{2}k(t) \quad (4.4.6)$$

(plg. su (2.6.5)).

(4.4.5) ir (4.4.6) lygybės rodo, kad juostinį filtrą galima aprašyti ir analizuoti, naudojant ***ekvivalentųjį žemųjų dažnių filtrą***, kurio impulsinis atsakas lygus duotojo juostinio filtro impulsinio atsako kompleksinei gaubtinei, padaugintai iš 1/2, ir kurio įėjime yra įėjimo juostinio signalo kompleksinė gaubtinė, o išėjime yra išėjimo juostinio signalo kompleksinė gaubtinė. 4.4.1b pav. pateikta tipiška ekvivalenčiojo filtro dažninė charakteristika.

4.4.2. Juostinio signalo tiesiniai iškraipymai

2.6.5 poskyryje buvo suformuluotos dvi sąlygos, kurias turi tenkinti tiesinė sistema, kad neiškraipytų signalo: “plokščia” dažninė amplitudės charakteristika (žr. (2.6.29a)) ir tiesiškai mažėjanti dažninė fazės charakteristika (žr. (2.6.29b)). Be to, kadangi dažninė fazės charakteristika yra nelyginė dažnio funkcija (žr. (2.2.8)), tai tiesė, kuri nusako fazės priklausomybę nuo dažnio, turi kirsti fazių ašį taške $\theta=0$. Taip yra idealiuoju atveju, kai filtras neiškraipo *jokių* įėjimo signalų. Tačiau praktikoje pakanka, kad filtras neiškraipytų tik tų signalų, kurių dažnių juosta priklauso filtro dažnių praleidimo juostai. Kaip bus įrodyta žemiau, atitinkami reikalavimai filtro (kanalo) dažninei charakteristikai yra šie:

1) Filtro (kanalo) praleidimo juostoje dažninė amplitudės charakteristika yra konstanta. T.y.,

$$|H(f)|=A, \quad (4.4.7a)$$

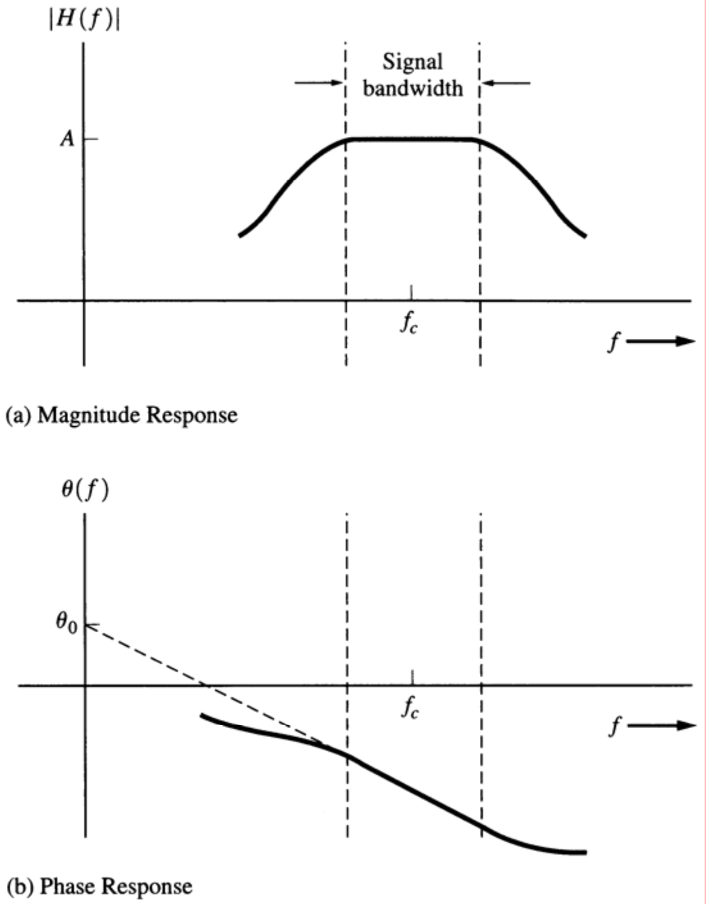
kur A yra realioji teigiama konstanta.

2) Filtro (kanalo) praleidimo juostoje dažninės fazės charakteristikos išvestinė yra neigiama konstanta, t.y., praleidimo juostoje dažninė fazės charakteristika tiesiškai mažėja:

$$-\frac{1}{2\pi}\frac{d\theta(f)}{df}=T_g, \quad (4.4.7b)$$

kur T_g yra realioji teigiama konstanta, kuri vadinama ***gaubtinės vėlinimu*** arba ***grupiniu vėlinimu***.

Kaip matome, reikalavimas dažninei amplitudės charakteristikai (4.4.7a) yra toks pats, kaip ir idealiuoju atveju (žr. (2.6.29a)), tačiau reikalavimas dažninei fazės charakteristikai (4.4.7b) mažiau apriboja jos pavidalą, negu (2.6.29b): nėra reikalaujama, kad dažninės fazės charakteristikos tęsinys kirstų fazių ašį taške $\theta=0$. Juostinio filtro dažninė amplitudės charakteristika ir dažninė fazės charakteristika, kurios tenkina (4.4.7) reikalavimus, pavaizduotos atitinkamai 4.4.2a pav. ir 4.4.2b pav. 4.4.2b pav. akivaizdu, kad dažninės fazės charakteristikos



4.4.2 pav. Juostinio filtro (arba kanalo) be iškraipymų dažninė amplitudės charakteristika (a) ir dažninė fazės charakteristika (b).

tęsinys kerta fazių ašį taške $\theta = \theta_0$, kuris gali būti bet koks. Tačiau akivaizdu ir tai, kad tuo atveju, kai duotasis filtras yra žemųjų dažnių filtras, reikalavimas (4.4.7b) yra tapatus reikalavimui (2.6.29b). Tuomet taškas $f = 0$ yra filtro praleidimo juostoje, todėl tiesė $\theta(f)$ turi kirsti fazių ašį taške $\theta = 0$: priešingu atveju dažninė fazės charakteristika nebūtų nelyginė.

Suintegravę lygtį (4.4.7b), gauname juostinio filtro, kuriame nėra fazinių iškraipymų, dažninę fazės charakteristiką:

$$\theta(f) = -2\pi f T_g + \theta_0 . \tag{4.4.8}$$

θ_0 nusako tašką, kuriame fazių ašį kerta juostinio filtro dažninės fazės charakteristikos tęsinys. Kai $\theta_0 = 0$, (4.4.8) savo pavidalu sutampa su (2.6.29b).

Įsitikinsime, kad tuo atveju, kai juostinio filtro praleidimo juostoje tenkinami reikalavimai (4.4.7a) ir (4.4.7b) (arba (4.4.8)), juostinis signalas perduodamas be iškraipymų (net ir tuo atveju, kai $\theta_0 \neq 0$). Atitinkama filtro perdavimo funkcija *teigiamųjų dažnių* praleidimo juostoje lygi

$$H(f) = Ae^{j(-2\pi f T_g + \theta_0)} = (Ae^{j\theta_0})e^{-j2\pi f T_g} \qquad (f \approx f_c). \tag{4.4.9a}$$

Kadangi tiesinės sistemos dažninė fazės charakteristika yra nelyginė dažnio funkcija, tai *neigiamųjų dažnių* praleidimo juostoje

$$H(f) = Ae^{j(-2\pi f T_g - \theta_0)} = (Ae^{-j\theta_0})e^{-j2\pi f T_g} \qquad (f \approx -f_c). \tag{4.4.9b}$$

Pagal (4.1.1c), filtro įėjimo juostinį signalą galima išreikšti šitaip:

$$v_1(t) = x(t)\cos\omega_c t - y(t)\sin\omega_c t \equiv x(t)\cos\omega_c t - y(t)\cos(\omega_c t - \pi/2) . \tag{4.4.10}$$

Pagal realiojo signalo dažnio postūmio teoremą (žr. B-1 lentelę), šio signalo spektras yra

$$V_1(f) = \frac{1}{2}[X(f-f_c)+X(f+f_c)] + \frac{1}{2}[e^{-j\pi/2}Y(f-f_c)+e^{j\pi/2}Y(f+f_c)]\,. \quad (4.4.11)$$

Įrašę (4.4.9) ir (4.4.11) į (4.4.2) ir atsižvelgę į tai, kad $x(t)$ ir $y(t)$ yra žemadažniai signalai (t.y., $X(f-f_c)$ ir $Y(f-f_c)$ skiriasi nuo nulio tik f_c aplinkoje, o $X(f+f_c)$ ir $Y(f+f_c)$ skiriasi nuo nulio tik $-f_c$ aplinkoje), randame filtro išėjimo signalo spektrą:

$$V_2(f) =$$

$$= e^{-j2\pi f T_g}\left\{\frac{A}{2}[e^{j\theta_0}X(f-f_c)+e^{-j\theta_0}X(f+f_c)] + \frac{A}{2}[e^{j(\theta_0-\pi/2)}Y(f-f_c)+e^{-j(\theta_0-\pi/2)}Y(f+f_c)]\right\}. \quad (4.4.12)$$

Pagal realiojo signalo dažnio postūmio teoremą (žr. B-1 lentelę), (4.4.12) lygybės dešiniojoje pusėje tarp riestinių skliaustų užrašyto reiškinio atvirkštinė Furjė transformacija – tai iš A padaugintas (4.4.10) pavidalo signalas, kurio kosinusoidžių fazės padidintos pastoviu dėmeniu θ_0. Pagal vėlinimo teoremą (žr. B-1 lentelę), spektro daugiklis $e^{-j2\pi f T_g}$ pasireiškia signalo vėlinimu T_g. Vadinasi, filtro išėjimo signalas yra

$$\upsilon_2(t) = Ax(t-T_g)\cos[\omega_c(t-T_g)+\theta_0] - Ay(t-T_g)\sin[\omega_c(t-T_g)+\theta_0]\,. \quad (4.4.13)$$

Apibrėžus naują laiko konstantą

$$T_d = T_g - \frac{\theta_0}{\omega_c}, \quad (4.4.14)$$

(4.4.13) reiškinį galima užrašyti šitaip:

$$\upsilon_2(t) = Ax(t-T_g)\cos[\omega_c(t-T_d)] - Ay(t-T_g)\sin[\omega_c(t-T_d)]\,. \quad (4.4.15)$$

Palyginus išėjimo juostinį signalą (4.4.15) su įėjimo juostiniu signalu (4.4.10), akivaizdu, kad filtravimas pasireiškia moduliavimo signalo ($x(t)$ ir $y(t)$) vėlinimu T_g (***grupiniu vėlinimu***) ir ***nešlio vėlinimu*** T_d. Kadangi $\theta(f_c) = -2\pi f_c T_d$, kur $\theta(f_c)$ yra nešlio fazės pokytis, T_d dar vadinamas ***fazės vėlinimu***. Iš (4.4.14) išplaukia, kad T_d ir T_g sutampa tik tuomet, kai $\theta_0 = 0$. Grupinis ir fazės vėlinimai neiškraipo signalo. Vadinasi, (4.4.7a) ir (4.4.7b) sąlygos yra pakankamos, kad juostinis filtras neiškraipytų signalo. T.y., kad juostinis signalas tiesinėje sistemoje būtų perduodamas be iškraipymų, pakanka, kad signalo dažnių juostoje sistemos dažninė amplitudės charakteristika ir dažninės fazės charakteristikos išvestinė būtų konstantos.

4.5. Juostinio signalo ėmimo teorema

Praktikoje telekomunikacijų sistemos dažnai modeliuojamos kompiuteriu. Tokiam modeliavimui reikia išmatuoti tiriamojo signalo ir triukšmo vertes diskrečiais laiko tarpais. Pagal Naikvisto ėmimo spartos reikalavimą (2.7.5), norint pilnai nusakyti *bet kokio* pavidalo signalą, jo ėmimo sparta turi būti nemažesnė už signalo dvigubą ribinį dažnį (ribinis dažnis sutampa su maksimaliu dažniu signalo spektre). Tačiau praktikoje juostinių signalų ribinis dažnis yra artimas nešlio dažniui, t.y., gali siekti 10^{10} Hz arba daugiau (pvz., palydovinėse ryšių sistemose). Tokia didelė ėmimo sparta yra praktiškai nepasiekiama, be to, ji reikalautų labai didelio skaičiaus imčių (matavimų) ir, atitinkamai, didelės atminties bei labai greitaeigio kompiuterio. Laimei, tuo atveju, kai tiriamasis signalas yra juostinis ir yra bent apytiksliai žinomas jo nešlio dažnis, ėmimo sparta, kuri reikalingas pilnam signalo aprašymui, priklauso tik nuo signalo dažnių juostos pločio (o ne nuo ribinio dažnio). Šį teiginį tiksliai išreiškia ***juostinio signalo ėmimo teorema***, kuri suformuluota žemiau.

Jeigu realiojo juostinio signalo spektras skiriasi nuo nulio tik dažnių intervale

$$f_1 < |f| < f_2 \quad (4.5.1)$$

(***perdavimo juostoje***; *transmission bandwidth*), tuomet signalo ėmimo sparta, kuri reikalinga tiksliam signalo atkūrimui pagal imtis, turi tenkinti sąlygą

$$f_s \geq 2B_T\,, \quad (4.5.2)$$

kur B_T yra signalo perdavimo juostos plotis (absoliutinis dažnių juostos plotis: žr. 2.8 poskyrį):

$$B_T \equiv f_2 - f_1 . \tag{4.5.3}$$

Šią teoremą galima įrodyti, naudojant juostinio signalo kvadratūrinę išraišką (4.1.1c):

$$\upsilon(t) = x(t)\cos\omega_c t - y(t)\sin\omega_c t . \tag{4.5.4}$$

Jeigu nešlio dažnis f_c yra žinomas, tuomet signalo $\upsilon(t)$ pavidalą pilnai nusako funkcijų $x(t)$ ir $y(t)$ pavidalas. Remiantis (4.5.4), funkcijos $x(t)$ vertės – tai signalo $\upsilon(t)$ vertės laiko momentais, kai $\cos\omega_c t = 1$ (ir $\sin\omega_c t = 0$), o funkcijos $y(t)$ vertės – tai signalo $\upsilon(t)$ vertės laiko momentais, kai $\sin\omega_c t = -1$ (ir $\cos\omega_c t = 0$). Norint tiksliai atkurti šių funkcijų pavidalą, kiekvienos iš jų vertės turi būti išmatuotos dažniu, kuris nemažesnis už $2B$, kur B yra didesnysis iš signalų $x(t)$ ir $y(t)$ dažnių juostų pločių. Turint omenyje, kad matuojamos *dvi* nepriklausomos funkcijos, pilnutinė signalo $\upsilon(t)$ ėmimo sparta turi būti dar du kartus didesnė, t.y.,

$$f_s \geq 4B . \tag{4.5.5}$$

Vadinasi, reikia įrodyti, kad mažiausias įmanomas funkcijų $x(t)$ ir $y(t)$ dažnių juostos plotis B yra $B_T/2$ (plg. (4.5.5) ir (4.5.2)). Jeigu signalo $\upsilon(t)$ pavidalas yra žinomas, tuomet funkcijų $x(t)$ ir $y(t)$ pavidalas priklauso tik nuo pasirinktojo nešlio dažnio f_c. Taigi, reikia rasti šių funkcijų dažnių juostos pločio, kaip nešlio dažnio f_c funkcijos, minimumą.

4.3.1 poskyryje buvo įrodyta, kad juostinio signalo (4.3.1) kompleksinės gaubtinės $g(t)$ spektras $G(f)$ yra proporcingas dydžiu f_c neigiamųjų dažnių kryptimi paslinktai signalo $\upsilon(t)$ spektro daliai, esančiai teigiamųjų dažnių srityje $f > 0$. Todėl, jeigu $\upsilon(t)$ amplitudžių spektras skiriasi nuo nulio tik dažnių intervale (4.5.1), tai $G(f)$ skiriasi nuo nulio tik dažnių intervale

$$f_1 - f_c < |f| < f_2 - f_c. \tag{4.5.6}$$

Tačiau $G(f)$ yra funkcijų $x(t)$ ir $y(t)$ spektrų $X(f)$ ir $Y(f)$ tiesinis darinys: $G(f) = X(f) + jY(f)$ (žr. (4.1.2)). Vadinasi, $G(f)$ gali būti nelygus nuliui tik ten, kur bent viena iš funkcijų $X(f)$ ir $Y(f)$ nelygi nuliui. Kadangi funkcijos $X(f)$ ir $Y(f)$ yra nepriklausomos, tai galioja ir atvirkščias teiginys: $X(f)$ ir $Y(f)$ gali skirtis nuo nulio tik dažnių intervale (4.5.6). Kadangi funkcijos $x(t)$ ir $y(t)$ yra realios, tai jų amplitudžių spektrai yra lyginės dažnio funkcijos (žr. (2.2.7)). Pagal (4.5.6), tai reiškia, kad šių funkcijų dažnių juostos plotis yra

$$B = \max(|f_1 - f_c|, |f_2 - f_c|) . \tag{4.5.7}$$

Šio dydžio, kaip f_c funkcijos, minimumas yra taške

$$f_c = \frac{f_1 + f_2}{2} , \tag{4.5.8}$$

o atitinkama B vertė yra

$$B_{\min} = \frac{f_2 - f_1}{2} \equiv \frac{B_T}{2} . \tag{4.5.9}$$

Vadinasi, mažiausia ėmimo sparta lygi $(f_s)_{\min} = 4B_{\min} = 2B_T$, ką ir reikėjo įrodyti (žr. (4.5.2)).

4.6. Netiesiniai iškraipymai

2.6 poskyryje buvo apibrėžta tiesinės grandinės sąvoka: grandinė yra tiesinė, jeigu ji tenkina signalų superpozicijos sąlygą (2.6.1). Matematiniu požiūriu, ši sąlyga reiškia, kad grandinės išėjimo įtampos laikinę priklausomybę nusako diferencialinė lygtis, kurios koeficientai nepriklauso nuo įėjimo ir išėjimo įtampų (tačiau gali priklausyti nuo laiko). Jeigu tiesinės grandinės išėjimo signalas proporcingas užvėlintam įėjimo signalui (žr. (2.6.27), tuomet sakoma, kad grandinė neiškraipo įėjimo signalo. Priešingu atveju signale atsiranda tiesiniai iškraipymai. Tačiau lieka galioti grandinės tiesiškumo savybė (2.6.1). Tai pasireiškia, pvz., tuo, kad, pakeitus įėjimo signalo amplitudę ir nepakeitus jo formos, išėjimo signalo amplitudė pasikeičia tiek pat kartų, o jo forma nepasikeičia. Be to, kai įėjimo signalas yra sinusoidės pavidalo, tiesinės grandinės išėjimo signalas visuomet yra to paties dažnio sinusoidė (žr. (2.6.14)).

Daugumą realių grandinių (pvz., stiprintuvus) galima laikyti tiesinėmis, tik kai įėjimo signalas yra pakankamai silpnas. Didėjant įėjimo signalo amplitudei, išėjimo signale atsiranda ***netiesiniai iškraipymai***, t.y., nustoja galioti lygybė (2.6.1). Pvz., tai pasireiškia tuo, kad, pakeitus įėjimo signalo amplitudę ir nepakeitus jo formos, išėjimo signalo forma pasikeičia, o jo amplitudės santykinis pokytis nėra lygus įėjimo signalo amplitudės santykiniam pokyčiui. Kad būtų paprasčiau, netiesinių iškraipymų analizėje dažniausiai laikoma, kad signalo vėlinimas yra lygus nuliui, o tiesiniame režime signalo iškraipymų nėra. Tuomet, kai įėjimo signalo vertės yra pakankamai mažos, išėjimo signalas $\upsilon_2(t)$ yra tiesiai proporcingas įėjimo signalui $\upsilon_1(t)$:

$$\upsilon_2(t) = K\upsilon_1(t)\,, \qquad (4.6.1)$$

kur K yra realioji konstanta, kuri vadinama ***signalo stiprinimo koeficientu***. Išėjimo signalo priklausomybė nuo įėjimo signalo vadinama ***išėjimo charakteristika***. Stiprėjant įėjimo signalui $\upsilon_1(t)$, netiesiniai iškraipymai pasireiškia tuo, kad stiprinimo koeficientas K pradeda priklausyti nuo įėjimo įtampos $\upsilon_1(t)$, t.y., išėjimo įtampa nustoja būti proporcinga įėjimo įtampai. Praktikoje išėjimo charakteristika visuomet įsisotina, kai įėjimo signalas viršija tam tikrą ribinę vertę (žr. 4.6.1 pav.). Netiesinę išėjimo signalo $\upsilon_2(t)$ priklausomybę nuo įėjimo signalo $\upsilon_1(t)$ galima modeliuoti Teiloro eilute

$$\upsilon_2 = K_0 + K_1\upsilon_1 + K_2\upsilon_1^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} K_n \upsilon_1^n\,, \qquad (4.6.2)$$

kur

$$K_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{d^n\upsilon_2}{d\upsilon_1^n}\right)_{\upsilon_1=0}. \qquad (4.6.3)$$

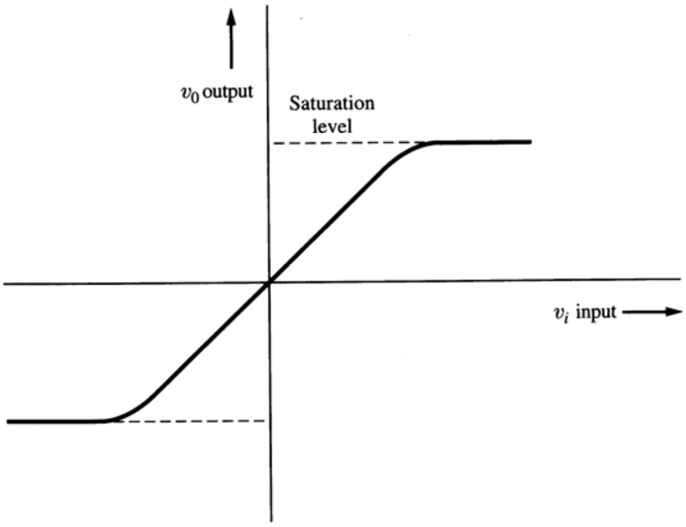
Netiesiniai iškraipymai atsiranda tuomet, kai koeficientai K_2, K_3, … yra nelygūs nuliui.

Jeigu netiesinio stiprintuvo įėjime yra harmoninis signalas

$$\upsilon_1(t) = A_0 \sin\omega_0 t\,, \qquad (4.6.4)$$

tuomet išėjimo signale bendruoju atveju yra ir dažniai, kurie kartotiniai dažniui ω_0 (***aukštesniosios harmonikos***). Aukštesniųjų harmonikų atsiradimas išėjimo signale vadinamas ***harmoniniais iškraipymais***. Pvz., (4.6.2) eilutės antrosios eilės dėmuo yra

$$K_2(A_0 \sin\omega_0 t)^2 = \frac{K_2 A_0^2}{2}(1-\cos 2\omega_0 t)\,. \qquad (4.6.5)$$



4.6.1 pav. Netiesinio stiprintuvo išėjimo charakteristika.

Vadinasi, dėl antrosios eilės iškraipymų išėjimo signale atsiranda papildoma nuolatinė dedamoji $K_2 A_0^2/2$ ir antroji harmonika, kurios amplitudė lygi $K_2 A_0^2/2$. Dėl trečiosios eilės iškraipymų (kuriuos atspindi trečiosios eilės dėmuo (4.6.2) eilutėje) atsiranda papildoma pirmoji harmonika (dažnis ω_0) ir trečioji harmonika (dažnis $3\omega_0$). Bendruoju atveju, kai įėjime yra dažnio ω_0 sinusoidė, išėjimo signalas

$$\upsilon_2(t) = V_0 + V_1\cos(\omega_0 t + \varphi_1) + V_2\cos(2\omega_0 t + \varphi_2) + V_3\cos(3\omega_0 t + \varphi_3) + \ldots\,, \qquad (4.6.6)$$

kur V_n yra dažnio nf_0 dėmens amplitudė. ***Harmoninių iškraipymų koeficientas*** (*total harmonic distortion*, ***THD***) apibrėžiamas šitaip:

$$\mathrm{THD}(\%) = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} V_n^2}}{V_1} \times 100\,. \qquad (4.6.7)$$

Jeigu netiesinio stiprintuvo įėjime yra kelių skirtingų dažnių harmoninių virpesių suma, tuomet stiprintuvo išėjimo signale atsiranda ne tik tų virpesių aukštesnieji laipsniai, bet ir skirtingų dažnių virpesių sandaugos. Šias sandaugas galima išreikšti kombinacinių dažnių virpesių tiesiniais dariniais. ***Kombinacinis dažnis*** – tai dažnis, kuris lygus įėjimo signalo harmoninių komponenčių dažnių tiesiniam dariniui su sveikais koeficientais. Kombinacinių dažnių atsiradimas išėjimo signale vadinamas ***intermoduliaciniais iškraipymais*** (*intermodulation distortion*, ***IMD***). Pvz., jeigu įėjimo signalas yra dviejų sinusoidžių suma

$$\upsilon_1(t) = A_1 \sin\omega_1 t + A_2 \sin\omega_2 t\,, \tag{4.6.8}$$

tuomet antrosios eilės dėmuo (4.6.2) eilutėje yra

$$K_2(A_1 \sin\omega_1 t + A_2 \sin\omega_2 t)^2 = K_2(A_1^2 \sin^2\omega_1 t + 2A_1A_2 \sin\omega_1 t \sin\omega_2 t + A_2^2 \sin^2\omega_2 t)\,. \tag{4.6.9}$$

Pirmasis ir trečiasis dėmenys šios lygybės dešiniojoje pusėje sąlygoja harmoninius iškraipymus, dėl kurių atsiranda papildomi dažniai $2f_1$ ir $2f_2$ ir pasikeičia nuolatinė dedamoji (žr. (4.6.5)). Pirmasis dėmuo atsiranda ir tuo atveju, kai įėjimo signalas yra viena dažnio f_1 sinusoidė, o trečiasis – kai įėjimo signalas yra viena dažnio f_2 sinusoidė. Antrasis dėmuo atsiranda tik tuomet, kai įėjimo signale yra abu šie dažniai. Šis dėmuo atspindi intermoduliacinius iškraipymus. Jį galima užrašyti šitaip:

$$2K_2A_1A_2 \sin\omega_1 t \sin\omega_2 t = K_2A_1A_2\{\cos[(\omega_1 - \omega_2)t] - \cos[(\omega_1 + \omega_2)t]\}\,. \tag{4.6.10}$$

Vadinasi, dėl antrosios eilės intermoduliacinių iškraipymų išėjimo signale atsiranda suminis ir skirtuminis dažniai $\omega_1 + \omega_2$ ir $\omega_1 - \omega_2$.

Kai įėjimo signalas yra (4.6.8), trečiosios eilės dėmuo (4.6.2) eilutėje yra

$$\begin{aligned} K_3\upsilon_1^3 &= K_3(A_1 \sin\omega_1 t + A_2 \sin\omega_2 t)^3 = \\ &= K_3(A_1^3 \sin^3\omega_1 t + 3A_1^2A_2 \sin^2\omega_1 t \sin\omega_2 t + 3A_1A_2^2 \sin\omega_1 t \sin^2\omega_2 t + A_2^3 \sin^3\omega_2 t). \end{aligned} \tag{4.6.11}$$

Pirmasis ir paskutinis dėmenys šios lygybės dešiniojoje pusėje sąlygoja harmoninius iškraipymus, dėl kurių atsiranda papildomi dažniai $3f_1$ ir $3f_2$ ir modifikuojamos dažnių f_1 ir f_2 virpesių amplitudės:

$$K_3A_i^3 \sin^3\omega_i t = \frac{1}{4}K_3A_i^3(3\sin\omega_i t - \sin 3\omega_i t) \qquad (i = 1, 2). \tag{4.6.12}$$

Antrąjį ir trečiąjį dėmenis galima užrašyti šitaip:

$$\begin{aligned} 3K_3A_1^2A_2 \sin^2\omega_1 t \sin\omega_2 t &= \frac{3}{2}K_3A_1^2A_2 \sin\omega_2 t(1 - \cos 2\omega_1 t) = \\ &= \frac{3}{2}K_3A_1^2A_2\left\{\sin\omega_2 t - \frac{1}{2}[\sin(2\omega_1 + \omega_2)t - \sin(2\omega_1 - \omega_2)t]\right\}, \end{aligned} \tag{4.6.13}$$

$$3K_3A_1A_2^2 \sin\omega_1 t \sin^2\omega_2 t = \frac{3}{2}K_3A_1A_2^2\left\{\sin\omega_1 t - \frac{1}{2}[\sin(2\omega_2 + \omega_1)t - \sin(2\omega_2 - \omega_1)t]\right\}. \tag{4.6.14}$$

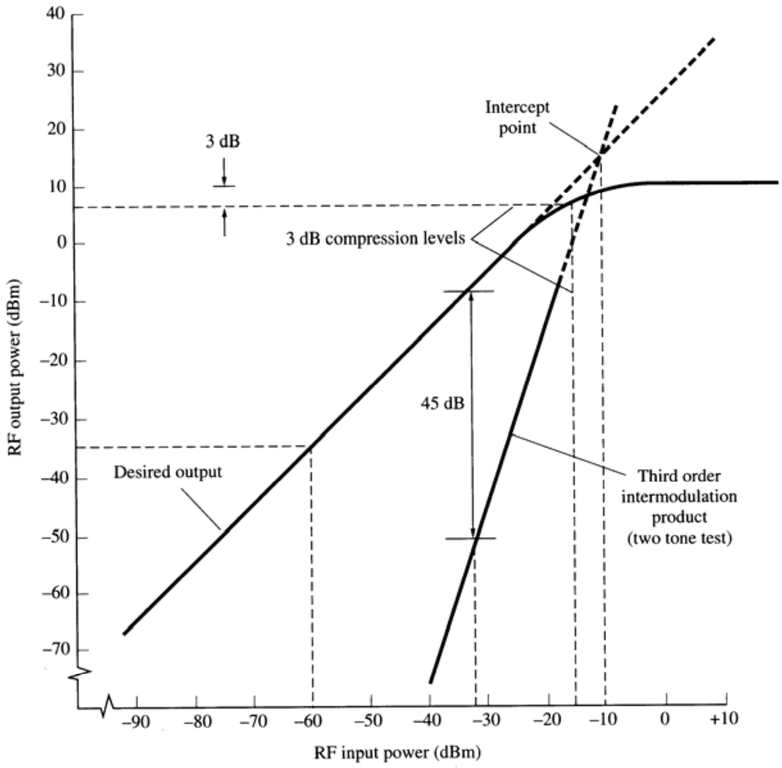
Paskutiniai du dėmenys (4.6.13) ir (4.6.14) lygybių dešiniosiose pusėse atspindi intermoduliacinius iškraipymus. Vadinasi, dėl trečiosios eilės intermoduliacinių iškraipymų išėjimo signale atsiranda keturi kombinaciniai dažniai $2\omega_1 + \omega_2$, $2\omega_1 - \omega_2$, $2\omega_2 + \omega_1$ ir $2\omega_2 - \omega_1$.

Juostinių signalų stiprinimui dažniausiai naudojami juostiniai stiprintuvai, kuriuose suderintos signalo stiprinimo ir filtravimo funkcijos. Visos aukštesniosios harmonikos būna už stiprintuvo pralaidumo juostos ribų, todėl išėjimo signale jų nelieka. Taip pat nuslopinami ir dalis kombinacinių dažnių, pvz., $\omega_1 + \omega_2$, $\omega_1 - \omega_2$, $2\omega_1 + \omega_2$ ir $2\omega_2 + \omega_1$. Intermoduliaciniai iškraipymai juostiniuose stiprintuvuose pagrindinai pasireiškia kombinaciniais dažniais $2\omega_1 - \omega_2$ ir $2\omega_2 - \omega_1$, kurie priklauso pralaidumo juostai.

Reiškiniuose (4.6.13) ir (4.6.14) matyti, kad kombinacinių dažnių $2\omega_1 - \omega_2$ ir $2\omega_2 - \omega_1$ dedamųjų amplitudės yra proporcingos atitinkamai $A_1^2A_2$ ir $A_1A_2^2$. T.y., intermoduliacinių iškraipymų indėlis į stiprintuvo išėjimo signalą auga greičiau už naudingojo signalo indėlį. Kai įėjimo signalo galia viršija tam tikrą ribinę vertę, kombinacinių dažnių dalis išėjimo signalo galioje viršija naudingojo signalo dalį. Ši didžiausioji įėjimo signalo galia praktikoje įvertinama tokiu būdu. Laikoma, kad stiprintuvo įėjime yra (4.6.8) pavidalo signalas, kurio abiejų harmoninių dedamųjų amplitudės sutampa: $A_1 = A_2 = A$. Tuomet šių dedamųjų (naudingojo signalo) amplitudės stiprintuvo išėjimo signale bus lygios $K_1 A$ (žr. (4.6.2)), o kombinacinių dažnių $2\omega_1$ - ω_2 ir $2\omega_2$ - ω_1 dedamųjų amplitudės bus lygios $3K_3A^3/4$ (žr. (4.6.13) ir (4.6.14)). Vadinasi, naudingojo signalo ir intermoduliacinių iškraipymų amplitudžių santykis lygus

$$R_{\mathrm{IMD}} = \frac{4}{3}\left(\frac{K_1}{K_3 A^2}\right). \tag{4.6.15}$$

Šis dydis vadinamas ***intermoduliacinių iškraipymų koeficientu***. Stiprintuvo įėjimo galia, atitinkanti $R_{\mathrm{IMD}} = 1$, vadinama stiprintuvo ***trečiosios eilės sankirtos tašku*** (*third-order intercept point*). Toks pavadinimas atsirado dėl to, kad ši R_{IMD} vertė atitinka įėjimo signalo galią, kuriai esant, stiprintuvo išėjimo naudingojo signalo ir trečiosios eilės intermoduliacinių iškraipymų galios sutampa, jeigu įėjimo signalas yra dviejų vienodos amplitudės sinusoidžių suma (žr. 4.6.2 pav.). Išreiškus galią decibelais (pvz., atžvilgiu 1 mW), šios dvi priklausomybės yra dvi tiesės, kurių vienos polinkis lygus 1 (tiesinė priklausomybė), o kitos – 3 (kubinė priklausomybė). Didėjant įėjimo signalo galiai, išėjimo naudingojo signalo galia įsisotina, nes dėl netiesinių iškraipymų signale atsiranda dėmenys, kurių dažniai sutampa su įėjimo signalo harmoninių dedamųjų dažniais, o ženklas yra priešingas. Pvz., reiškinių (4.6.12) ÷ (4.6.14) pirmųjų dėmenų dažniai sutampa su įėjimo sinusoidžių dažniais, o ženklas yra priešingas, nes $K_3 < 0$. Sankirtos taškas randamas, pratęsus tiesinę priklausomybę iš mažų galių srities (žr. 4.6.2 pav.). Naudingųjų harmoninių dedamųjų ir intermoduliacinių iškraipymų galios matuojamos, naudojant spektro analizatorių. 4.6.2 pav. atveju sankirtos taškas yra –10 dBm (žymėjimas “dBm” reiškia decibelus atžvilgiu 1 mW). Be to, šiame paveiksle iliustruojamos ir kai kurios kitos stiprintuvo charakteristikos. Stiprintuvo stiprinimo koeficientas tiesinėje srityje yra 25 dB. Įėjimo signalo galia, atitinkanti stiprinimo koeficiento sumažėjimą 3 dB, yra –15 dBm (t.y., šiame taške realioji naudingojo signalo galia yra 3 dB mažesnė už tą, kuri gaunama, pratęsus tiesinę priklausomybę iš mažų galių srities). Vadinasi, stiprintuvą galima laikyti tiesiniu, tik kol įėjimo signalo galia yra mažesnė už –15 dBm. Be to, jeigu reikia, kad kombinacinių dažnių $2f_1 - f_2$ ir $2f_2 - f_1$ dedamųjų galios būtų bent 45 dB žemiau naudingojo signalo galios, įėjimo signalo galia turi būti mažesnė už –32 dBm.



4.6.2 pav. Stiprintuvo išėjimo charakteristikos.

Iki šiol buvo laikoma, kad įėjimo signalo harmoninių dedamųjų amplitudės A_1 ir A_2 yra pastovios. Jeigu kurios nors dedamosios amplitudė kinta laike, tuomet išėjimo signale, be intermoduliacinių iškraipymų, pasireiškia ir kito tipo netiesiniai iškraipymai, kuriuos sąlygoja pirmieji dėmenys (4.6.13) ir (4.6.14) reiškiniuose. Šie iškraipymai atsiranda dėl to, kad šių dėmenų amplitudės priklauso nuo *abiejų* harmoninių dedamųjų įėjimo amplitudžių. Todėl, jeigu, pvz., vietoj harmoninio signalo $A_1 \sin \omega_1 t$ įėjimo signale (4.6.8) yra AM signalas $A_1[1+m_1(t)]\sin \omega_1 t$, tuomet iš (4.6.13) išplaukia, kad išėjimo signale atsiranda dėmuo

$$\frac{3}{2} K_3 A_1^2 A_2 [1+m_1(t)]^2 \sin \omega_2 t . \tag{4.6.16}$$

Vadinasi, vienos harmoninės dedamosios (dažnis f_1) amplitudės moduliavimas sąlygoja ir kitų harmoninių dedamųjų (dažnis f_2) papildomą amplitudės moduliavimą. T.y., jeigu netiesinio stiprintuvo įėjime yra du AM signalai, išėjime kiekvienas iš šių signalų bus papildomai moduliuotas kitu moduliavimo signalu. Šis reiškinys vadinamas ***kryžminiu moduliavimu*** (*cross-modulation*).

4.7. Signalo ribotuvai

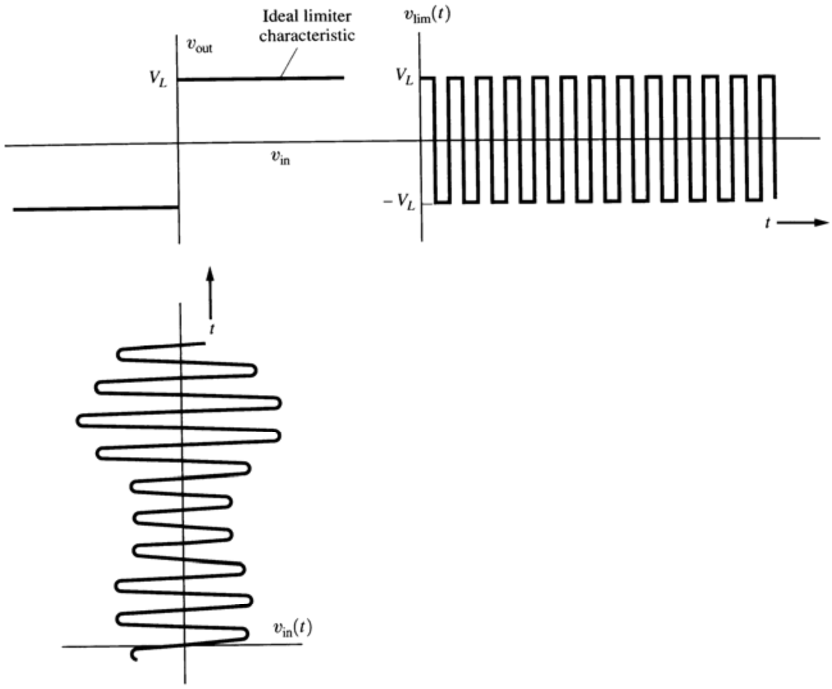
Ribotuvas – tai keturpolis, kurio išėjimo charakteristika turi dvi įsisotinimo sritis, atitinkančias neigiamas ir teigiamas įėjimo signalo vertes. Pereinamoji sritis tarp įsisotinimo sričių turi būti kuo siauresnė. Idealiojo ribotuvo išėjimo charakteristika yra laiptinės funkcijos pavidalo (žr. 4.7.1 pav.). T.y., idealusis ribotuvas veikia kaip komparatorius su nuliniu atraminiu lygiu. Plačiajuostis ribotuvas moduliuotos amplitudės signalą pakeičia vienodos amplitudės stačiakampių impulsų seka (žr. 4.7.1 pav.). ***Juostinis ribotuvas*** – tai plačiajuostis ribotuvas, kurio išėjime yra juostinis filtras. Juostinis filtras išskiria iš stačiakampių impulsų sekos pirmąją harmoniką. Jeigu idealiojo juostinio ribotuvo įėjime yra juostinis signalas

$$\upsilon_1(t) = R(t)\cos[\omega_c t + \theta(t)] \tag{4.7.1}$$

(žr. (4.1.1)), tuomet išėjimo signalas yra

$$\upsilon_2(t) = KV_L \cos[\omega_c t + \theta(t)], \tag{4.7.2}$$

kur V_L yra stačiakampių impulsų sekos pirmosios harmonikos amplitudė, o K yra išėjimo juostinio filtro stiprinimo koeficientas. Vadinasi, ribotuvo poveikis įėjimo signalui pasireiškia tuo, kad pašalinamas signalo amplitudės moduliavimas, išsaugant dažnio arba fazės moduliavimą. Todėl ribotuvai naudojami dažnio ir fazės moduliavimo sistemose, siekiant pašalinti imtuvo įėjimo signalo realiosios gaubtinės pokyčius, kuriuos sukelia kanalo triukšmas ir signalo silpimas.



4.7.1 pav. Idealiojo plačiajuosčio ribotuvo charakteristika bei įėjimo ir išėjimo signalai.

4.8. Signalų maišikliai ir aukštinamieji bei žeminamieji dažnio keitikliai

Maišiklis (*mixer*) – tai elektroninė grandinė, kuri sudaugina du įėjimo signalus. Dažniausiai vienas iš šių signalų yra sinusoidė. Vadinasi, idealusis maišiklis veikia kaip tiesinis įrenginys, kurio stiprinimo koeficientas yra sinusoidė (tačiau, kaip pamatysime žemiau, maišiklio pagrindinė dalis gali būti netiesinis įtaisas). Maišiklius, kurie naudojami telekomunikacijose, nereikia painioti su garsinių signalų maišikliais, kurie *sudeda* du arba daugiau garsinio dažnio signalų.

Dažniausiai maišiklio paskirtis yra įėjimo signalo spektro poslinkis. Tarkime, kad įėjimo signalas yra juostinis signalas, kurio spektras skiriasi nuo nulio tik siauroje juostoje nešlio dažnio f_c aplinkoje. Pagal (4.1.1a), tokį signalą galima išreikšti tokiu pavidalu:

$$v_{\text{in}}(t) = \text{Re}\{g_{\text{in}}(t)e^{j\omega_c t}\}, \qquad (4.8.1)$$

kur $g_{\text{in}}(t)$ yra įėjimo signalo žemadažnė kompleksinė gaubtinė. Jeigu kitame maišiklio įėjime yra dažnio f_0 kosinusoidė, tuomet idealiojo maišiklio išėjimo signalas yra

$$v_1(t) = [\text{Re}\{g_{\text{in}}(t)e^{j\omega_c t}\}]A_0 \cos\omega_0 t = \frac{A_0}{4}[g_{\text{in}}(t)e^{j\omega_c t} + g_{\text{in}}^*(t)e^{-j\omega_c t}](e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) =$$

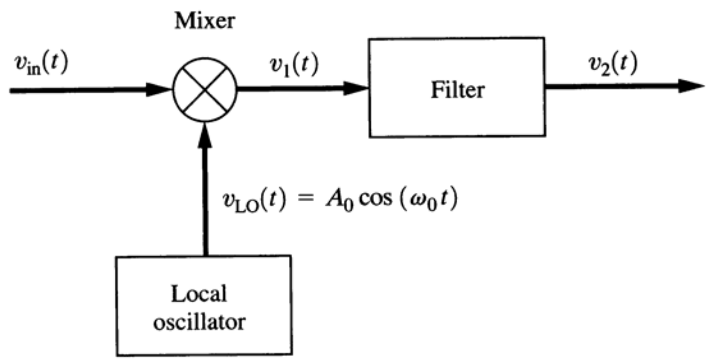
$$= \frac{A_0}{4}[g_{\text{in}}(t)e^{j(\omega_c+\omega_0)t} + g_{\text{in}}^*(t)e^{-j(\omega_c+\omega_0)t} + g_{\text{in}}(t)e^{j(\omega_c-\omega_0)t} + g_{\text{in}}^*(t)e^{-j(\omega_c-\omega_0)t}]$$

arba

$$v_1(t) = \frac{A_0}{2}\text{Re}\{g_{\text{in}}(t)e^{j(\omega_c+\omega_0)t}\} + \frac{A_0}{2}\text{Re}\{g_{\text{in}}(t)e^{j(\omega_c-\omega_0)t}\}. \qquad (4.8.2)$$

Vadinasi, kai idealiojo maišiklio įėjime yra juostinis signalas, tuomet išėjimo signalas yra suma dviejų juostinių signalų, kurių gaubtinės sutampa su įėjimo signalo gaubtine, o nešlio dažnis dydžiu f_0 didesnis arba mažesnis už įėjimo signalo nešlio dažnį f_c. Tai reiškia, kad šių signalų spektrai – tai atitinkamai dydžiu f_0 arba $-f_0$ paslinktas įėjimo signalo spektras (žr. juostinio signalo spektro bendrąją išraišką (4.3.4)). Šis dažnio pokytis vadinamas atitinkamai signalo ***aukštinamuoju dažnio keitimu*** (*up conversion*) ir ***žeminamuoju dažnio keitimu*** (*down conversion*). Kaip parodyta 4.8.1 pav., aukštinamojo arba žeminamojo dažnio keitimo dedamąją galima išskirti, naudojant filtrą. Maišiklis kartu su tokiu filtru vadinamas ***dažnio keitikliu***. Jeigu reikia išskirti aukštinamojo dažnio keitimo dedamąją, reikalingas juostinis filtras. Jeigu reikia išskirti žeminamojo dažnio keitimo dedamąją, tuomet filtro tipas priklauso nuo šios dedamosios dažnio. Jeigu žeminamojo dažnio keitimo dedamosios nešlio dažnis $f_c - f_0$ yra didesnis už gaubtinės $g_{\text{in}}(t)$ dažnių juostos plotį, filtras turi būti juostinis. Priešingu atveju (pvz., kai $f_c - f_0 = 0$), reikalingas žemųjų dažnių filtras. Jeigu $f_c < f_0$, tuomet (4.8.2) antrajame dėmenyje $\omega_c - \omega_0 < 0$. Tačiau juostinio signalo nešlio dažnis negali būti neigiamas. Todėl, kai $f_c < f_0$, (4.8.2) lygybę reikia perrašyti šitaip:

$$v_1(t) = \frac{A_0}{2}\text{Re}\{g_{\text{in}}(t)e^{j(\omega_c+\omega_0)t}\} + \frac{A_0}{2}\text{Re}\{g_{\text{in}}^*(t)e^{j(\omega_0-\omega_c)t}\}. \qquad (4.8.3)$$



4.8.1 pav. Maišiklis su filtru.

Vadinasi, kai $f_c < f_0$, žeminamasis dažnio keitimas pasireiškia signalo gaubtinės kompleksiniu jungimu ir gautojo signalo spektro poslinkiu atstumu $f_c - (f_0 - f_c) = 2f_c - f_0$ į žemųjų dažnių pusę. Jeigu $f_c < f_0/2$, toks poslinkis yra tapatus poslinkiui atstumu $f_0 - 2f_c$ į aukštųjų dažnių pusę. Gaubtinės kompleksinis jungimas yra tapatus jos amplitudžių spektro šalinių juostų sukeitimui vietomis ir fazių spektro invertavimui (žr. B-1 lentelę ir amplitudžių bei fazių spektrų apibrėžimą (2.2.3)).

Taigi, aukštinamojo dažnio keitimo atveju filtro išėjimo signalo gaubtinė yra

$$g_2(t) = \frac{A_0}{2} g_{\text{in}}(t) \tag{4.8.4a}$$

(žr. pirmąjį dėmenį (4.8.2) ir (4.8.3) reiškiniuose), o žeminamojo dažnio keitimo atveju išėjimo signalo gaubtinės pavidalas priklauso nuo to, kuris iš dažnių f_c ir f_0 yra didesnis. Jeigu $f_0 < f_c$, tuomet

$$g_2(t) = \frac{A_0}{2} g_{\text{in}}(t) \tag{4.8.4b}$$

(žr. antrąjį dėmenį (4.8.2) reiškinyje), o jeigu $f_0 > f_c$, tuomet

$$g_2(t) = \frac{A_0}{2} g_{\text{in}}^*(t) \tag{4.8.4c}$$

(žr. antrąjį dėmenį (4.8.3) reiškinyje).

Praktikoje signalų daugybos operacija realizuojama, naudojant vieną iš trijų tipų įtaisą:

1. Valdomo statumo įtaisas (pvz., dvigubos užtūros lauko tranzistorius).
2. Netiesinis įtaisas.
3. Tiesinis įtaisas su priklausančiu nuo laiko diskrečiu stiprinimo koeficientu.

Keturpolio charakteristikos ***statumas*** g – tai išėjimo srovės i_1 išvestinė įėjimo įtampos v_{in} atžvilgiu, esant pastoviai išėjimo įtampos nuolatinei dedamajai:

$$g = \frac{\partial i_1}{\partial v_{\text{in}}}. \tag{4.8.5}$$

Mažo signalo režime išėjimo srovės kintamoji dedamoji i_1 yra proporcinga įėjimo signalo kintamajai dedamajai v_{in}, o proporcingumo koeficientas lygus statumui:

$$i_1 = g v_{\text{in}}. \tag{4.8.6}$$

Jeigu įtaisas turi antrą įėjimą ir jeigu statumas g yra proporcingas įtampai šiame įėjime, tuomet išėjimo srovė i_1 yra proporcinga abiejų įėjimo įtampų sandaugai.

Valdomo statumo įtaiso pavyzdys – bendro emiterio schemos stiprintuvas, kurio emiterinėje grandinėje prijungtas sinusinis signalas (žr. 5.1.2a pav.). Toks įtaisas praktikoje naudojamas kaip mažo galingumo amplitudės moduliatorius: nešlio virpesys atlieka įėjimo signalo vaidmenį, o vietoj sinusinio signalo naudojamas žemadažnis moduliavimo signalas. Šiuo atveju išėjimo srovė i_1 – tai kolektoriaus srovės kintamoji dedamoji, išėjimo įtampa v_1 – tai kolektoriaus įtampos kintamoji dedamoji, o įėjimo įtampa v_{in} – tai bazės įtampos kintamoji dedamoji. Mažo signalo tiesinio stiprinimo režime tokio stiprintuvo charakteristikos statumas yra

$$g = \frac{i_1}{v_{\text{in}}} \approx \frac{i_E}{v_{\text{in}}} \equiv \frac{1}{r_e}, \tag{4.8.7}$$

kur i_E yra emiterio srovės kintamoji dedamoji, o r_e yra emiterinės sandūros (diodo) diferencialinė varža, kuri yra atvirkščiai proporcinga emiterio srovės nuolatinei dedamajai i_{E0}:

$$r_e \approx \frac{kT/q}{i_{E0}} \approx \frac{25\ \text{mV}}{i_{E0}} \tag{4.8.8}$$

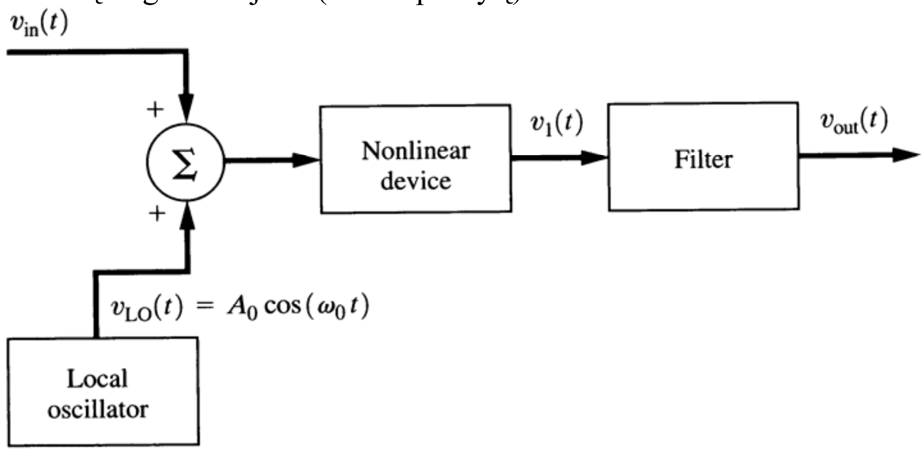
(šis sąryšis išplaukia iš (5.1.14)). Vadinasi, $g \sim i_{E0}$. T.y., išėjimo įtampa yra proporcinga įėjimo įtampos ir emiterio srovės nuolatinės dedamosios sandaugai (žr. (4.8.6)). Emiterio srovės nuolatinę dedamąją valdo žemadažnis moduliavimo signalas v_m: emiterio grandinės rezistoriaus

R_E “nuolatinė” įtampa $i_{E0}R_E$ yra lygi emiterio potencialo ir υ_m skirtumui. Kadangi emiterio potencialas yra praktiškai pastovus (jis lygus bazės potencialo ir atidarytos emiterinės sandūros įtampos skirtumui), tai $i_{E0} = const - (\upsilon_m/R_E)$. T.y., kolektoriaus įtampos “nuolatinė” dedamoji yra proporcinga υ_m, o kolektoriaus įtampos aukštadažnės dedamosios amplitudė yra proporcinga $-\upsilon_m$. Kadangi išėjimo skiriamasis kondensatorius C_2 praleidžia tik aukštadažnę dedamąją, tai stiprintuvo išėjimo įtampa $\upsilon_1(t) \sim -\upsilon_m(t)\upsilon_{\text{in}}(t)$. Šio amplitudės moduliatoriaus schema smulkiau aprašyta 5.1 poskyryje.

Antrojo metodo schema pavaizduota 4.8.2 pav. Čia panaudojamas tas faktas, kad, prijungus prie netiesinio įrenginio dviejų signalų υ_{in} ir υ_{LO} sumą, išėjimo signale atsiranda dėmuo, kuris proporcingas tų signalų sandaugai. Šis dėmuo atsiranda dėl kvadratinio dėmens $K_2(\upsilon_{\text{in}} + \upsilon_{\text{LO}})^2$ išėjimo signalo išraiškoje Teiloro eilute (4.6.2):

$$2K_2\upsilon_{\text{in}}\upsilon_{\text{LO}} = 2K_2A_0\upsilon_{\text{in}}(t)\cos\omega_0 t\,. \qquad (4.8.9)$$

Jeigu $\upsilon_{\text{in}}(t)$ yra juostinis signalas, tuomet žeminamojo arba aukštinamojo dažnio keitimo dedamąją galima išskirti, naudojant juostinį filtrą (žr. 4.8.2 pav.). Tačiau generatoriaus dažnis f_0 ir nešlio dažnis f_c turi būti parinkti taip, kad išskiriamojoje dažnių juostoje nebūtų kitų kombinacinių dažnių ($nf_0 \pm mf_c$) ir aukštesniųjų harmonikų dažnių (nf_0 ir nf_c), kurie taip pat atsiranda netiesinio įrenginio išėjime (žr. 4.6 poskyrį).

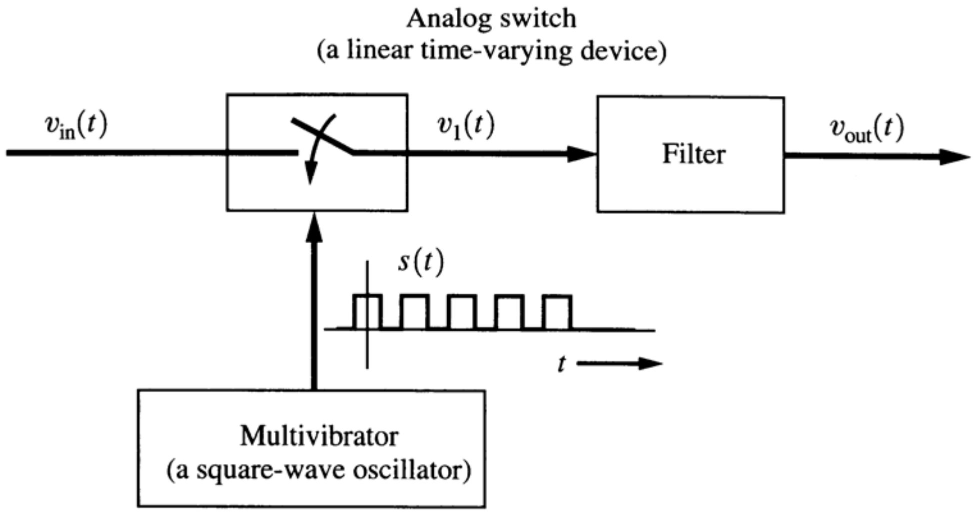


4.8.2 pav. Netiesinio įtaiso panaudojimas maišiklyje.

Naudojant trečiąjį metodą, tiesinio įrenginio su valdomu stiprinimo koeficientu vaidmenį atlieka elektroninis jungiklis arba tokių jungiklių sistema. Tuomet stiprinimo koeficientas gali įgyti tik dvi vertes, ir jo laikinė priklausomybė yra ne sinusoidė, o stačiakampių impulsų seka $s(t)$. Kaip ir kito tipo maišikliuose, aukštinamojo arba žeminamojo dažnio keitimo dedamoji išskiriama iš jungiklio išėjimo signalo, naudojant filtrą. 4.8.3 pav. pavaizduotas paprasčiausias tokio tipo įrenginys. Čia tiesinis įrenginys yra jungiklis, kurį valdo periodinė stačiakampių impulsų seka. Valdymo impulso metu jungiklis prijungia įėjimo signalą prie filtro įėjimo, o laiko tarpuose tarp impulsų atjungia įėjimo signalą nuo filtro įėjimo. T.y., jungiklis veikia kaip tiesinis keturpolis, kurio stiprinimo koeficientas yra periodinė vienetinių stačiakampių impulsų seka $s(t)$. Šio keturpolio išėjimo signalas (filtro įėjimo signalas) yra

$$\upsilon_1(t) = \upsilon_{\text{in}}(t)s(t)\,. \qquad (4.8.10)$$

Šis signalas savo pavidalu sutampa su natūraliojo ėmimo PAM signalu (žr. (3.1.1) ir (3.1.2)). Perjungimo signalo $s(t)$ Furjė eilutės koeficientus nusako (3.1.8) formulė, kurioje d yra impulso trukmės ir signalo $s(t)$ periodo santykis. Įėjimo signalas turi būti padaugintas tik iš tų šios Furjė eilutės dėmenų, kurie atitinka $n = \pm 1$. Todėl d vertė turi būti parinkta taip, kad $s(t)$ išraiškoje Furjė eilute būtų kuo mažiau kitų dėmenų. Optimalioji d vertė yra 1/2: tuomet Furjė eilutėje lieka tik nelyginiai dėmenys ir nuolatinė dedamoji. Laikant, kad $d = 1/2$,



4.8.3 pav. Tiesinio įtaiso su priklausančiu nuo laiko stiprinimo koeficientu panaudojimas maišiklyje.

$$v_1(t) = v_{in}(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin(n\pi/2)}{n\pi}\cos n\omega_0 t\right]. \tag{4.8.11}$$

Dažnio keitimui reikalingas tik dėmuo, kuris atitinka $n = 1$. Šis dėmuo lygus

$$\frac{2}{\pi}v_{in}(t)\cos\omega_0 t\,. \tag{4.8.12}$$

Jeigu v_{in} yra juostinis signalas, tuomet šis dėmuo pasireiškia aukštinamojo ir žeminamojo dažnio keitimo signalais, kurių spektrai yra atitinkamai ties dažniais $f_c + f_0$ ir $f_c - f_0$. Tačiau (4.8.11) reiškinyje akivaizdu, kad, be šių dažnių, jungiklio išėjimo signale yra ir kitos dažnių juostos – ties dažniais $f = |f_c \pm nf_0|$ ($n = 3,\ 5,\ 7$). Be to, jungiklio išėjime yra ir dėmuo $v_{in}(t)/2$, kuris tiesiogiai proporcingas įėjimo signalui. Pašalinius dažnius nuslopina filtras.

Ir tuo atveju, kai maišiklyje naudojamas netiesinis įrenginys (žr. 4.8.2 pav.), ir tuo atveju, kai naudojamas elektroninis jungiklis (žr. 4.8.3 pav.), maišiklio išėjime, be signalų sandaugos (4.8.9) arba (4.8.10), yra daug pašalinių dėmenų. Bendruoju atveju maišiklio išėjimo signalas yra

$$v_1(t) = C_1 v_{in}(t) + C_2 v_0(t) + C_3 v_{in}(t) v_0(t) + \text{kiti dėmenys}. \tag{4.8.13}$$

Filtras išskiria dėmens $C_3 v_{in}(t) v_0(t)$ spektro dalį (aukštinamojo dažnio keitimo juostą arba žeminamojo dažnio keitimo juostą). Tačiau, kadangi idealių filtrų nebūna, pašaliniai dėmenys šiek tiek iškraipo ir filtro išėjimo signalą $v_{out}(t)$. Siekiant, kad filtro išėjimo signalo spektras kuo tiksliau sutaptų su paslinktu išilgai dažnių ašies įėjimo signalo spektru, reikia, kad pašalinių dėmenų amplitudė būtų kuo mažesnė. Maišikliai dažnai klasifikuojami pagal tai, ar jų išėjime yra pašaliniai dėmenys, kurie proporcingi vienam iš dauginamųjų signalų $v_{in}(t)$ ir $v_0(t)$. Jeigu abu koeficientai C_1 ir C_2 nėra lygūs nuliui (žr. (4.8.13)), tuomet maišiklis vadinamas ***nesubalansuotuoju maišikliu***. Nesubalansuotojo maišiklio pavyzdys pavaizduotas 4.8.2 pav. Kadangi šio maišiklio išėjimo charakteristikos išraiškoje Teiloro eilute (4.6.2) yra tiesinis dėmuo $K_1 v_1$, tai netiesinio įrenginio išėjimo signale yra dedamosios, kurios proporcingos dauginamiesiems signalams $v_{in}(t)$ ir $v_0(t)$. Jeigu maišiklio išėjimo signalo išraiškoje (4.8.13) tik vienas iš koeficientų C_1 ir C_2 skiriasi nuo nulio, tuomet maišiklis vadinamas ***viengubo balanso maišikliu***. Tokio maišiklio pavyzdys pateiktas 4.8.3 pav. Šio maišiklio išėjimo signalo išraiškoje (4.8.11) yra dėmuo $v_{in}(t)/2$ (t.y., $C_1 = 1/2$), tačiau nėra dėmens, kuris proporcingas $v_0(t)$ (t.y., $C_2 = 0$). Jeigu abu koeficientai C_1 ir C_2 lygūs nuliui, tuomet maišiklis vadinamas ***dvigubo balanso maišikliu***. Formaliai dvigubo balanso maišiklį galima gauti, pašalinus nuolatinę dedamąją iš perjungimo signalo $s(t)$ (pašalinus dėmenį 1/2 iš reiškinio, kuris užrašytas laužtiniuose skliaustuose (4.8.11) lygybės dešiniojoje pusėje). T.y., reikia pasiekti, kad perjungimo signalas būtų vienodo aukščio ir vienodos trukmės teigiamų ir neigiamų stačiakampių impulsų seka (žr. 4.8.4d pav.). Tokio maišiklio pavyzdys aprašytas kitoje pastraipoje.

4.8.4a pav. pavaizduota dvigubo balanso maišiklio principinė schema. Įėjimo įtampa $\upsilon_{\mathrm{in}}(t)$ ir generatoriaus (*local oscillator*) harmoninė įtampa $\upsilon_{\mathrm{LO}}(t)$ prijungtos prie dviejų tiesinių transformatorių pirminių apvijų, o maišiklio išėjimo įtampa $\upsilon_1(t)$ matuojama tarp tų transformatorių antrinių apvijų centrinių taškų. Pagrindinė maišiklio dalis yra keturi diodai, kurie prijungti taip, kad, priklausomai nuo įtampos $\upsilon_{\mathrm{LO}}(t)$ ženklo, bet kuriuo laiko momentu būtų atidaryti tik du diodai. Signalo $\upsilon_{\mathrm{LO}}(t)$ galia yra žymiai (bent 10 kartų) didesnė už įėjimo signalo $\upsilon_{\mathrm{in}}(t)$ galią (pastaroji dažniausiai neviršija –5 dBm). Todėl diodus valdo būtent signalas $\upsilon_{\mathrm{LO}}(t)$, o ne įėjimo signalas $\upsilon_{\mathrm{in}}(t)$. Kai įtampa $\upsilon_{\mathrm{LO}}(t)$ yra teigiama (ženklų taisyklė parodyta 4.8.4a pav.), atidaryti tik viršutiniai du diodai, todėl grandinės ekvivalentinė schema yra tokia, kaip pavaizduota 4.8.4b pav. Kai įtampa $\upsilon_{\mathrm{LO}}(t)$ yra neigiama, atidaryti tik apatiniai du diodai, todėl grandinės ekvivalentinė schema yra tokia, kaip pavaizduota 4.8.4c pav. Pastarosiose dviejose ekvivalentinėse schemose matyti, kad įėjimo transformatoriaus antrinė apvija visą laiką yra atvira (nes maišiklio apkrovos varžą galima laikyti praktiškai begaline), todėl jos centrinio taško potencialas lygus nuliui. Dešiniojo transformatoriaus antrinės apvijos centrinio taško potencialas visuomet sutampa su taško, esančio tarp dviejų atidarytųjų diodų, potencialu. Šis taškas – tai vienas iš kraštinių įėjimo transformatoriaus antrinės apvijos kontaktų. Vadinasi, maišiklio išėjimo įtampa – tai iš daugiklio ±1/2 padauginta įėjimo transformatoriaus antrinės apvijos įtampa, kuri proporcinga įėjimo signalui $\upsilon_{\mathrm{in}}(t)$. Daugiklio ženklas sutampa su įtampos $\upsilon_{\mathrm{LO}}(t)$ ženklu. Todėl išėjimo įtampą galima užrašyti tokiu pavidalu:

$$\upsilon_1(t) = K\upsilon_{\mathrm{in}}(t)s(t), \tag{4.8.14}$$

kur $s(t)$ yra dvipolis perjungimo signalas, kuris pavaizduotas 4.8.4d pav. Kadangi perjungimo signalą valdo harmoninis signalas $\upsilon_{\mathrm{LO}}(t)$, tai signalo $s(t)$ periodas lygus $T_0 = 1/f_0$, o impulso trukmė lygi $T_0/2$. Tokio signalo išraiška Furjė eilute yra

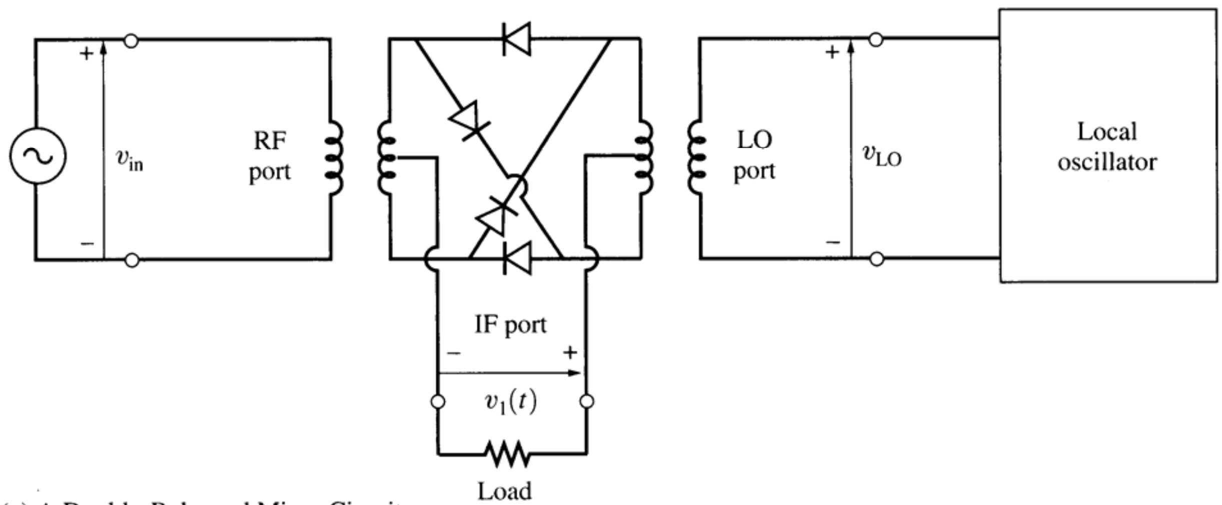
$$s(t) = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi}\cos n\omega_0 t. \tag{4.8.15}$$

Įrašę (4.8.15) į (4.8.14), gauname

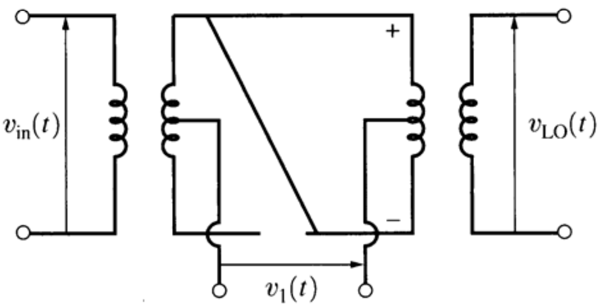
$$\upsilon_1(t) = \upsilon_{\mathrm{in}}(t)\left[4K\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi}\cos n\omega_0 t\right] \tag{4.8.16}$$

(plg. su (4.8.11)). Vadinasi, šiuo atveju maišiklio išėjimo signale nėra dėmenų, kurie būtų proporcingi $\upsilon_{\mathrm{in}}(t)$ arba $\upsilon_{\mathrm{LO}}(t)$, t.y., šis maišiklis iš tikrųjų yra dvigubo balanso maišiklis.

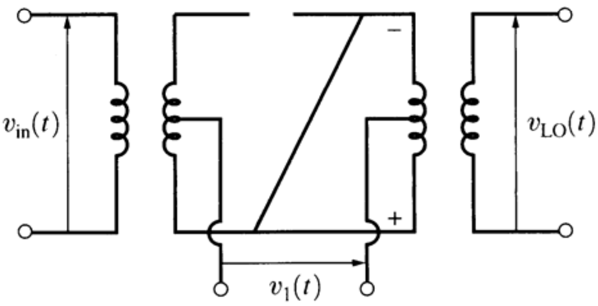
Tuo atveju, kai maišiklio įėjimo signalas $\upsilon_{\mathrm{in}}(t)$ yra žemadažnis signalas, maišiklį galima panaudoti kaip moduliatorių, kuris perkelia žemadažnį signalą į radijo dažnių juostą. Tuo atveju, kai maišiklio įėjimo signalas $\upsilon_{\mathrm{in}}(t)$ yra moduliuotasis radijo dažnių signalas, o jo nešlio dažnis sutampa su generatoriaus signalo $\upsilon_{LO}(t)$ dažniu, maišiklį galima panaudoti kaip detektorių, kuris atkuria moduliavimo signalą. Šie maišiklių pritaikymai bus aprašyti vėliau.



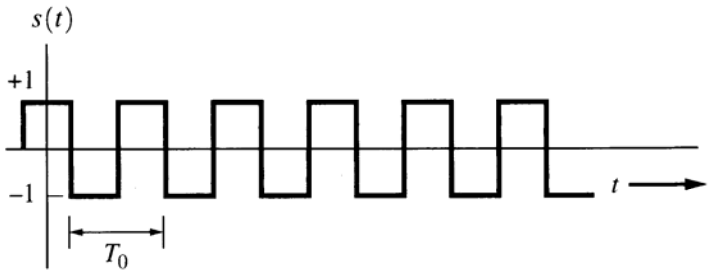
(a) A Double-Balanced Mixer Circuit



(b) Equivalent Circuit When $v_{LO}(t)$ Is Positive



(c) Equivalent Circuit When $v_{LO}(t)$ Is Negative

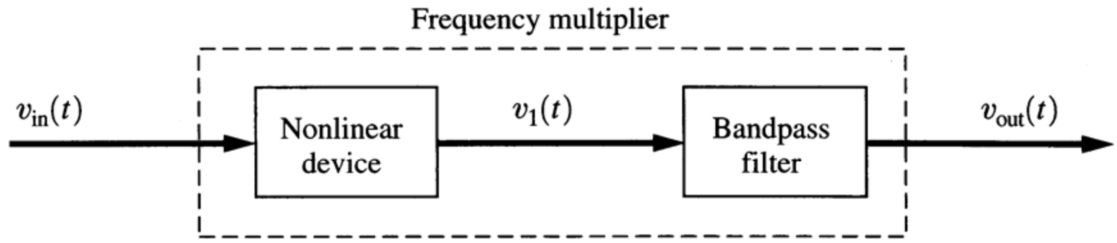


(d) Switching Waveform Due to the Local Oscillator Signal

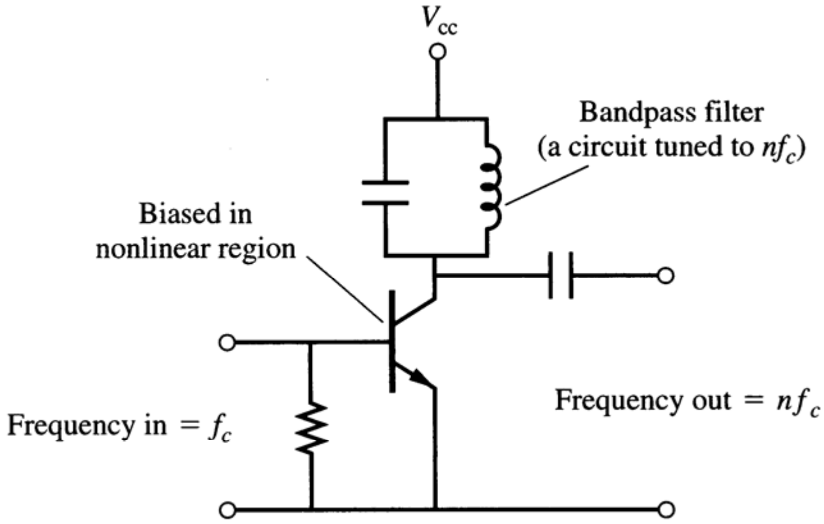
4.8.4 pav. Dvigubo balanso maišiklio grandinės analizė. a – dvigubo balanso maišiklio principinė schema, b – ekvivalentinė grandinė, kai generatoriaus (*local oscillator*) įtampa yra teigiama, c – ekvivalentinė grandinė, kai generatoriaus įtampa yra neigiama, d – perjungimo signalas, kurį sąlygoja generatorius.

4.9. Dažnio daugintuvai

Dažnio daugintuvas – tai įtaisas, į kurio įėjimą padavus dažnio f_0 virpesį, išėjime gaunamas dažnio nf_0 virpesys (n – sveikasis skaičius). Jeigu dažnio daugintuvo įėjime yra juostinis signalas, kurio nešlio dažnis yra f_c, tuomet išėjimo signalo spektras bus ties dažniu nf_c. Dažnio daugintuvą sudaro netiesinis įtaisas, kurio išėjime yra juostinis filtras (žr. 4.9.1a pav.). Dėl harmoninių iškraipymų netiesinio įtaiso išėjime signale atsiranda įėjimo signalo dažnių aukštesniosios harmonikos (žr. 4.6 poskyrį). Juostinis filtras išskiria n-tąją harmoniką. Juostinio filtro vaidmenį dažniausiai atlieka virpesių kontūras, kuris suderintas įėjimo signalo n-tosios harmonikos dažniui. Virpesių kontūro 3 dB lygio dažnių juostos plotis yra lygus



(a) Block Diagram of a Frequency Multiplier



(b) Circuit Diagram of a Frequency Multiplier

4.9.1 pav. Dažnio daugintuvas. a – struktūrinė schema, b – principinė schema.

$$B = \frac{f_{\text{res}}}{Q}, \tag{4.9.1}$$

kur f_{res} yra kontūro rezonansinis dažnis, o Q yra kontūro kokybė (šių dydžių išraiškos kontūro parametrais pateiktos 4.10.3 poskyryje).

Paprasčiausio tranzistorinio dažnio daugintuvo principinė schema pateikta 4.9.1b pav. Tranzistorius įjungtas pagal bendro emiterio schemą. Kolektoriaus grandinėje nuosekliai prijungtas lygiagretusis virpesių kontūras, kuris suderintas dažniui nf_c, kur f_c yra nešlio dažnis. Tranzistoriaus bazės įtampos nuolatinė dedamoji yra lygi nuliui (todėl nereikalingas įtampos daliklis). Tuomet emiterinė sandūra atsidaro tik teigiamųjų įėjimo signalo pusperiodžių metu. T.y., bazės srovė yra ribojama iš apačios. Todėl kolektoriaus srovė yra impulsų pavidalo (žr. 5.1.3b pav., antroji kreivė). Vadinasi, kolektoriaus srovėje yra ir aukštesniosios įėjimo signalo harmonikos. Išėjimo signalas – tai lygiagrečiojo kontūro įtampa. Kurio nors dažnio indėlis į lygiagrečiojo kontūro įtampą yra lygus to dažnio kolektoriaus srovės dedamosios ir kontūro impedanso, esant tam dažniui, sandaugai. Lygiagrečiojo kontūro impedansas yra didžiausias, esant rezonansiniam dažniui, ir sparčiai mažėja, tolstant nuo rezonansinio dažnio. Todėl dažnių, kurie artimi rezonansiniam dažniui, indėlis į kontūro įtampą yra padidintas, lyginant su kitais dažniais. T.y., lygiagretusis virpesių kontūras veikia kaip juostinis filtras, kuris išskiria iš kolektoriaus srovės n-tąją harmoniką.

Be kurį juostinį signalą galima išreikšti (4.1.1b) pavidalu:

$$v_{\text{in}}(t) = R(t)\cos[\omega_c t + \theta(t)]. \tag{4.9.2}$$

Netiesinio įrenginio išėjimo signalą galima išreikšti (4.6.2) pavidalo laipsnine eilute, kurios n-tosios eilės dėmuo yra

$$\upsilon_1(t) = K_n \upsilon_{\text{in}}^n(t) = K_n R^n(t)\cos^n[\omega_c t + \theta(t)]$$

arba

$$\upsilon_1(t) = CR^n(t)\cos[n\omega_c t + n\theta(t)] + \text{kiti dėmenys.}$$

Kadangi juostinis filtras praleidžia tik tuos dažnius, kuris yra nf_c aplinkoje, tai dažnio daugintuvo išėjimo signalas, atitinkantis įėjimo signalą (4.9.2), yra

$$\upsilon_{\text{out}}(t) = CR^n(t)\cos[n\omega_c t + n\theta(t)]. \quad (4.9.3)$$

Vadinasi, dažnio daugintuvas iškraipo signalo amplitudės laikinę priklausomybę, nes išėjimo signalo realioji gaubtinė pakeliama n-tuoju laipsniu. Pradinės fazės $\theta(t)$ pavidalas nėra iškraipomas, tačiau fazės kitimo ribos padidėja n kartų (išėjimo signalo pradinė fazė yra $n\theta(t)$). Dėl šių savybių dažnio daugintuvai nėra naudojami tais atvejais, kai reikia išsaugoti signalo realiąją gaubtinę, tačiau naudojami tais atvejais, kai reikia "sustiprinti" moduliuotos fazės laikinę priklausomybę.

Dažnio daugintuvo nereikia painioti su maišikliu (žr. 4.8 poskyrį). Dažnio daugintuvas yra netiesinis įrenginys, o maišiklis yra tiesinis įrenginys, kurio stiprinimo koeficientas priklauso nuo laiko. Dažnio daugintuvo netiesinis pobūdis pasireiškia tuo, kad juostinio signalo realioji gaubtinė yra iškraipoma, o signalo spektro plotis padidėja ir spektras atsiduria ties n-tosios harmonikos dažniu. Tuo tarpu daugybos iš sinusoidės operacija, kurią atlieka maišiklis, pasireiškia juostinio signalo spektro poslinkiu išilgai dažnių ašies, nekintant signalo kompleksinės gaubtinės ir spektro formai.

4.10. Detektoriai

Detektorius – tai įtaisas, kuris atkuria moduliuojantįjį signalą pagal moduliuotąjį juostinį signalą. Žemiau aprašyti kelių tipų detektoriai.

4.10.1. Gaubtinės detektorius

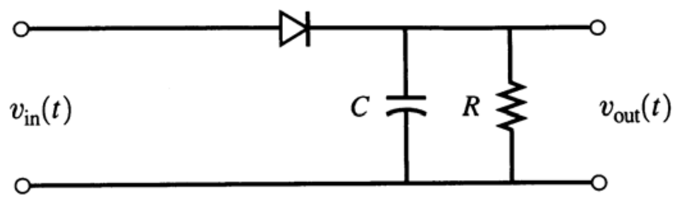
Idealusis ***gaubtinės detektorius*** – tai įtaisas, kurio išėjimo signalas yra proporcingas įėjimo juostinio signalo realiajai gaubtinei $R(t)$ (žr. juostinio signalo išraišką (4.9.2)):

$$\upsilon_{\text{out}}(t) = KR(t). \quad (4.10.1)$$

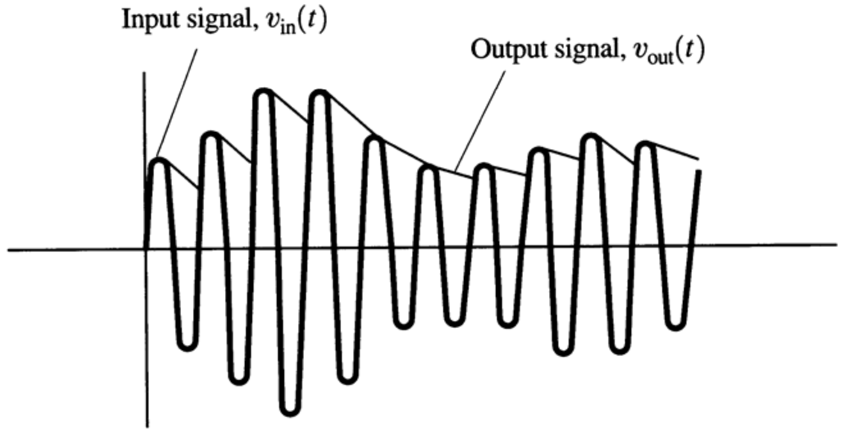
Gaubtinės detektoriaus išėjimo įtampos priklausomybė nuo įėjimo signalo amplitudės (realiosios gaubtinės) vadinama ***gaubtinės detektoriaus charakteristika***. Idealiojo gaubtinės detektoriaus charakteristika yra tiesinė (žr. (4.10.1)).

Paprasčiausio gaubtinės detektoriaus principinė schema pavaizduota 4.10.1a pav. Diodu srovė teka tik tuomet, kai įėjimo įtampa $\upsilon_{\text{in}}(t)$ yra didesnė už kondensatoriaus C įtampą, kuri sutampa su išėjimo įtampa $\upsilon_{\text{out}}(t)$. Tokiu atveju kondensatorius įsikrauna, o išėjimo įtampa sutampa su įėjimo įtampa (žr. 4.10.1b pav.). Kai įėjimo įtampa pradeda mažėti, ji pasidaro mažesnė už kondensatoriaus įtampą, todėl diodas užsidaro, o kondensatorius pradeda išsikrauti pro rezistorių R. Laikas, per kurį kondensatoriaus įtampa sumažėja e kartų, yra lygus rezistoriaus varžos ir kondensatoriaus talpos sandaugai RC. Jeigu šis laikas būtų mažesnis už nešlio periodą, tuomet kondensatoriaus įtampa sutaptų su įėjimo įtampa. Kitu ribiniu atveju, kai per laiką RC įėjimo signalo gaubtinė spėja pastebimai pasikeisti, išėjimo įtampa nespėja sekti gaubtinės kitimo, todėl jos laikinė priklausomybė tik apytiksliai sutampa su gaubtine. Vadinasi, kad galiotų (4.10.1) lygybė, kondensatoriaus išsikrovimo trukmė RC turi būti žymiai didesnė už nešlio periodą, tačiau žymiai mažesnė už laiką, per kurį gaubtinės vertė $R(t)$ pastebimai pasikeičia. Tai reiškia, kad turi galioti nelygybės

$$B << \frac{1}{2\pi RC} << f_c, \quad (4.10.2)$$



(a) A Diode Envelope Detector



(b) Waveforms Associated with the Diode Envelope Detector

4.10.1 pav. Diodinis gaubtinės detektorius. a – principinė schema, b – įėjimo ir išėjimo signalai.

kur B yra moduliavimo signalo (gaubtinės) dažnių juostos plotis, o f_c yra nešlio dažnis. Gaubtinės detektoriaus įėjimo ir išėjimo signalų pavidalą iliustruoja 4.10.1b pav.

Gaubtinės detektoriai dažniausiai naudojami, detektuojant amplitudės moduliavimo signalus. Šiuo atveju įėjimo signalo $v_{in}(t)$ kompleksinė gaubtinė yra $g(t) = A_c[1+m(t)]$, kur A_c yra nemoduliuoto nešlio amplitudė, o $m(t)$ yra moduliavimo signalas. Jeigu $|m(t)| < 1$, tuomet

$$v_{out}(t) = KR(t) = K\,|\,g(t)\,| = KA_c[1+m(t)] = KA_c + KA_c m(t). \quad (4.10.3)$$

Taigi, AM signalo gaubtinės detektoriaus išėjimo signalas yra proporcingas moduliavimo signalo ir nuolatinės įtampos KA_c sumai. Ši nuolatinė įtampa naudojama AM imtuvo ***automatiniam stiprinimo reguliavimui***: kai KA_c vertė yra maža (t.y., AM signalas yra silpnas), imtuvo stiprinimas padidinamas, ir atvirkščiai. Tuo atveju, kai moduliavimo signalas $m(t)$ yra garsinio dažnio signalas, tipiškos R ir C vertės yra $R = 10$ kΩ ir $C = 1$ nF. Tuomet žemųjų dažnių filtro, kurį sudaro RC grandinėlė, ribinis dažnis (3 dB lygio dažnių juostos plotis) yra $f_{co} = 1/(2\pi RC) = 15.9$ kHz. Šis dažnis yra žymiai mažesnis už nešlio dažnį f_c, tačiau didesnis už didžiausią garsinį dažnį B, kuris naudojamas amplitudės moduliavimui.

4.10.2. Sandaugos detektorius

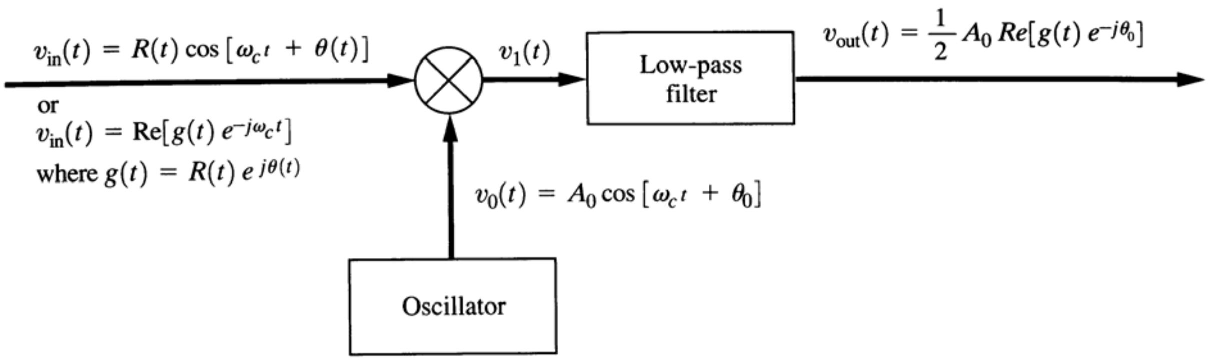
Sandaugos detektorius – tai dažnio keitiklis (žr. 4.8 poskyrį), kuris paslenka juostinio signalo spektrą dažnio mažėjimo kryptimi atstumu, kuris lygus nešlio dažniui f_c. Sandaugos detektoriaus struktūrinė schema pavaizduota 4.10.2 pav. Sandaugos detektorių sudaro maišiklis, kurio generatoriaus dažnis sutampa su įėjimo signalo nešlio dažniu f_c, ir žemųjų dažnių filtras. Jeigu įėjime yra juostinis signalas

$$v_{in}(t) = R(t)\cos[\omega_c t + \theta(t)] \quad (4.10.4)$$

(čia $\theta(t)$ atspindi fazės arba dažnio moduliavimą: žr. C-1 lentelę), o generatoriaus signalas yra

$$v_0(t) = A_0\cos[\omega_c t + \theta_0], \quad (4.10.5)$$

tuomet maišiklio (signalų daugintuvo) išėjimo įtampa yra



4.10.2 pav. Sandaugos detektorius.

$$v_1(t) = R(t)\cos[\omega_c t + \theta(t)]A_0\cos(\omega_c t + \theta_0) =$$
$$= \frac{1}{2}A_0 R(t)\cos[\theta(t) - \theta_0] + \frac{1}{2}A_0 R(t)\cos[2\omega_c t + \theta(t) + \theta_0].$$

Žemųjų dažnių filtras išskiria iš šio signalo žeminamojo dažnio keitimo dedamąją (žr. 4.8 poskyrį), t.y., pirmąjį dėmenį:

$$v_{\text{out}}(t) = \frac{1}{2}A_0 R(t)\cos[\theta(t) - \theta_0] = \frac{1}{2}A_0\,\mathrm{Re}\{g(t)e^{-j\theta_0}\}\,, \tag{4.10.6}$$

kur $g(t)$ yra įėjimo signalo kompleksinė gaubtinė (žr. (4.1.1a) ir (4.1.2)):

$$g(t) = R(t)e^{j\theta(t)} = x(t) + jy(t)\,. \tag{4.10.7}$$

Čia $x(t)$ ir $y(t)$ yra kompleksinės gaubtinės realioji ir menamoji dalys.

Generatoriaus virpesio pradinės fazės θ_0 prasmė – tai generatoriaus virpesio ir nešlio fazių skirtumas. Jeigu $\theta_0 = 0$, tuomet, pagal (4.10.6) ir (4.10.7), išėjimo signalas yra

$$v_{\text{out}}(t) = \frac{1}{2}A_0 x(t)\,. \tag{4.10.8a}$$

Jeigu $\theta_0 = 90°$, tuomet

$$v_{\text{out}}(t) = \frac{1}{2}A_0 y(t)\,. \tag{4.10.8b}$$

Vadinasi, priklausomai nuo generatoriaus ir nešlio fazių skirtumo, sandaugos detektorius gali atkurti įėjimo juostinio signalo kompleksinės gaubtinės realiąją dalį (sinfazinės dedamosios amplitudę) arba menamąją dalį (kvadratūrinės dedamosios amplitudę). Dėl šios savo savybės sandaugos detektorius gali detektuoti ir moduliuotos amplitudės, ir moduliuotos fazės signalus. Jeigu detektoriaus įėjime yra AM signalas ($\theta(t) \equiv 0$), kurio fazė sutampa su generatoriaus virpesio faze ($\theta_0 = 0$), tuomet, pagal (4.10.7) ir (4.10.8a),

$$v_{\text{out}}(t) = \frac{1}{2}A_0 R(t)\,, \tag{4.10.9a}$$

t.y., detektoriaus išėjime yra realioji gaubtinė, kaip ir gaubtinės detektoriaus atveju (žr. 4.10.1 poskyrį). Jeigu detektoriaus įėjime yra moduliuotos fazės arba moduliuoto dažnio signalas ($\theta(t)$ kinta laike), kurio amplitudė yra pastovi ir lygi A_c, o $\theta_0 = 90°$, tuomet, pagal (4.10.7) ir (4.10.8b),

$$v_{\text{out}}(t) = \frac{1}{2}A_0 A_c \sin\theta(t)\,. \tag{4.10.9b}$$

Vadinasi, šiuo atveju sandaugos detektorius veikia kaip ***fazės detektorius***, nes jo išėjimo įtampa priklauso nuo įėjimo signalo pradinės fazės $\theta(t)$. Šios priklausomybės pavidalas vadinamas ***fazės detektoriaus charakteristika***. Šiuo atveju fazės detektoriaus charakteristika yra sinusinė, nes išėjimo įtampa yra proporcinga $\theta(t)$ sinusui. Jeigu pradinė fazė yra maža ($|\theta(t)| << \pi/2$), tuomet $\sin\theta(t) \approx \theta(t)$ ir

$$v_{\text{out}}(t) \approx \frac{1}{2} A_0 A_c \theta(t). \tag{4.10.10}$$

Vadinasi, mažiems moduliavimo kampams fazės detektoriaus charakteristika yra tiesinė, t.y., jo išėjimo įtampa yra proporcinga įėjimo signalo ir generatoriaus virpesio fazių skirtumui.

Visus detektorius taip pat galima suklasifikuoti pagal įėjimų skaičių. ***Koherentinis detektorius*** turi du įėjimus – vieną įėjimą atraminiam signalui (pvz., generatoriaus virpesiui) ir vieną įėjimą signalui, kurį reikia demoduliuoti. Pvz., sandaugos detektorius yra koherentinis detektorius. ***Nekoherentinis detektorius*** turi tik vieną įėjimą, į kurį paduodamas moduliuotasis signalas. Nekoherentinio detektoriaus pavyzdys yra gaubtinės detektorius (žr. 4.10.1 poskyrį).

4.10.3. Dažnio detektoriai

Idealusis ***dažnio detektorius*** – tai įtaisas, kurio išėjimo įtampa yra proporcinga įėjimo signalo momentiniam dažniui. Juostinio signalo $R(t)\cos[\omega_c t + \theta(t)]$ (žr. (4.1.1b)) momentinis dažnis – tai kosinusoidės argumento išvestinė laiko atžvilgiu. Vadinasi, jeigu įėjime yra juostinis signalas, tuomet idealiojo dažnio detektoriaus išėjimo signalas yra

$$v_{\text{out}}(t) = K\frac{d[\omega_c t + \theta(t)]}{dt} = K\left[\omega_c + \frac{d\theta(t)}{dt}\right]. \tag{4.10.11}$$

Dažniausiai dažnio detektoriaus išėjimo įtampoje nėra nuolatinės dedamosios $K\omega_c$:

$$v_{\text{out}}(t) = K\frac{d\theta(t)}{dt}. \tag{4.10.12}$$

Tuomet dažnio detektorius vadinamas ***balansiniu dažnio detektoriumi***. Dažnio detektoriaus išėjimo įtampos priklausomybė nuo įėjimo signalo dažnio vadinama ***dažnio detektoriaus charakteristika***. Idealiojo dažnio detektoriaus charakteristika yra tiesinė (žr. (4.10.12)).

Daugumoje dažnio detektorių išėjimo signalas formuojamas vienu iš šių trijų metodų:

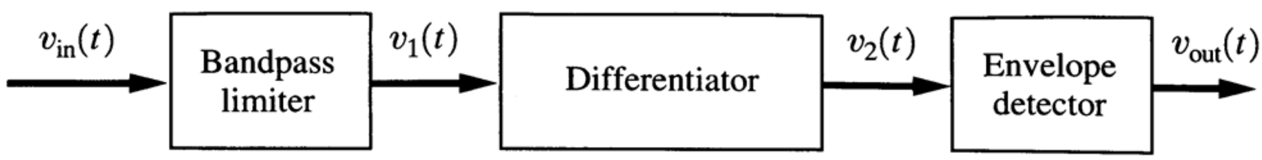
- dažnio moduliavimo vertimas amplitudės moduliavimu,
- kvadratūrinis detektavimas,
- perėjimo per nulį detektavimas.

Pvz., pirmasis iš šių metodų įgyvendintas ***polinkio detektoriuje*** (*slope detector*), kurio struktūrinė schema pavaizduota 4.10.3 pav. Juostinis ribotuvas (žr. 4.7 poskyrį) pašalina įėjimo signalo amplitudės kitimą. T.y., juostinio ribotuvo išėjime yra (4.7.2) pavidalo signalas:

$$v_1(t) = V_L \cos[\omega_c t + \theta(t)]. \tag{4.10.13}$$

Jeigu tai yra moduliuotojo dažnio (*frequency modulation*, ***FM***) signalas, tuomet pradinė fazė $\theta(t)$ yra proporcinga moduliavimo signalo integralui (žr. C-1 lentelę):

$$\theta(t) = K_f \int_{-\infty}^{t} m(t_1)dt_1. \tag{4.10.14}$$



4.10.3 pav. Polinkio detektoriaus struktūrinė schema.

Diferenciatoriaus išėjimo signalas yra proporcingas įėjimo signalo laikinei išvestinei:

$$\upsilon_2(t) = K_1 \frac{d\upsilon_1(t)}{dt} = -K_1 V_L \left[\omega_c + \frac{d\theta(t)}{dt} \right] \sin[\omega_c t + \theta(t)]. \qquad (4.10.15)$$

Vadinasi, diferenciatoriaus išėjimo signalas – tai juostinis signalas, kurio kompleksinė gaubtinė yra proporcinga įėjimo signalo momentiniam dažniui. Gaubtinės detektorius atkuria signalo *realiąją* gaubtinę (žr. 4.10.1 poskyrį), t.y., gaubtinės detektoriaus išėjime yra įėjimo juostinio signalo kompleksinės gaubtinės absoliutinė vertė:

$$\upsilon_{\text{out}}(t) = \left| -K_1 V_L \left[\omega_c + \frac{d\theta(t)}{dt} \right] \right|.$$

Kadangi praktikoje visuomet galioja nelygybė $\omega_c > |d\theta(t)/dt|$, tai

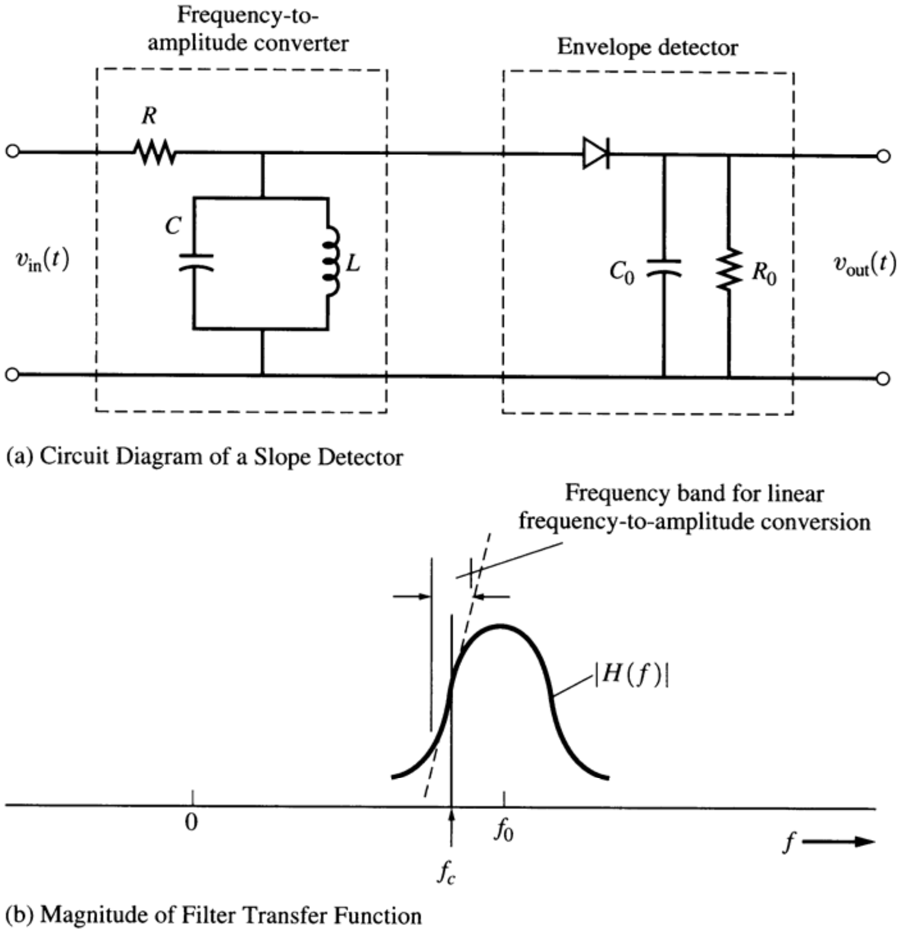
$$\upsilon_{\text{out}}(t) = K_1 V_L \left[\omega_c + \frac{d\theta(t)}{dt} \right]. \qquad (4.10.16)$$

Įrašę (4.10.14) į (4.10.16), randame

$$\upsilon_{\text{out}}(t) = K_1 V_L \omega_c + K_1 V_L K_f m(t). \qquad (4.10.17)$$

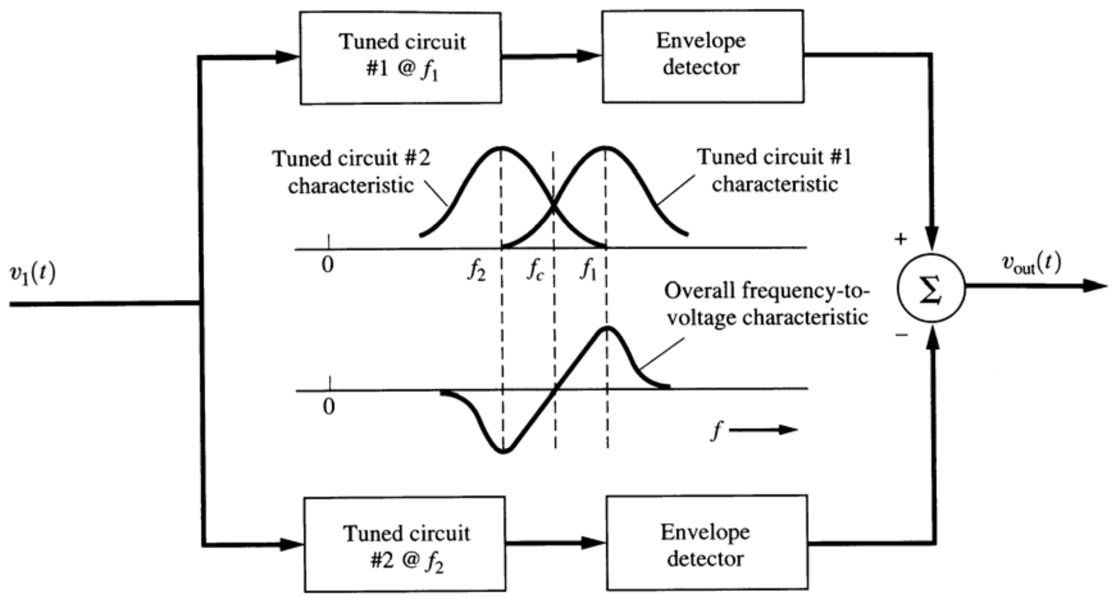
T.y., polinkio detektoriaus išėjimo signalas sudarytas iš nuolatinės dedamosios $K_1 V_L \omega_c$ ir kintamosios dedamosios $K_1 V_L K_f m(t)$, kuri proporcinga dažnio moduliavimo signalui $m(t)$. Kintamąją dedamąją galima išskirti, prijungus gaubtinės detektoriaus išėjime kondensatorių.

Palyginus (4.10.13) ir (4.10.15) lygybes, matyti, kad sinusoidės diferencijavimas pasireiškia jos amplitudės moduliavimu sinusoidės argumento išvestine ir fazės pokyčiu, kuris lygus $\pi/2$. Tačiau fazės pokytis dažnio detektavimui neturi reikšmės, nes gaubtinės detektorius detektuoja tik išvestinės realiąją gaubtinę. Todėl polinkio detektoriaus charakteristika sutampa su diferenciatoriaus dažnine amplitudės charakteristika. Vadinasi, diferenciatoriaus vaidmenį gali atlikti bet kuris įtaisas, kurio dažninė amplitudės charakteristika yra proporcinga įėjimo signalo dažniui, kai jis yra artimas nešlio dažniui f_c, t.y., kuris dažnio moduliavimą paverčia amplitudės moduliavimu. Bet kuri dažnio funkcija, kuri turi perlinkio tašką, yra tiesinė šio taško aplinkoje. Vadinasi, juostinio signalo diferenciavimui galima panaudoti filtrą, kurio dažninės amplitudės charakteristikos perlinkio taškas yra ties nešlio dažniu f_c. Be to, pageidautina, kad šios charakteristikos statumas šiame taške būtų kuo didesnis, nes tuomet padidėja diferenciatoriaus jautrumas įėjimo signalo dažnio pokyčiui. Pvz., diferenciatoriaus vaidmenį gali atlikti virpesių kontūras (žr. 4.10.4a pav.), kurio rezonansinis dažnis f_0 šiek tiek didesnis už nešlio dažnį f_c. Šis dažnių skirtumas turi būti toks, kad diferenciatoriaus dažninės amplitudės charakteristikos perlinkio taškas būtų ties nešlio dažniu (žr. 4.10.4b pav.). Varža R diferenciatoriaus schemoje (žr. 4.10.4a pav.) būti pakankamai didelė, kad žymiai sumažintų įėjimo varžos (ir įėjimo srovės amplitudės) priklausomybę nuo kontūro impedanso (t.y., nuo dažnio), ir kartu pakankamai maža, kad signalo galios nuostoliai joje nebūtų per dideli. Mat, kintant dažniui, kontūro impedansas (įėjimo varžos dalis) ir įėjimo srovės amplitudė kinta priešingom kryptim, todėl, kuo silpniau srovės amplitudė priklauso nuo dažnio, tuo stipriau nuo dažnio priklauso kontūro įtampa, kuri lygi įėjimo srovės ir kontūro impedanso sandaugai. Vadinasi, kuo didesnė varža R, tuo siauresnis yra diferenciatoriaus dažninės amplitudės charakteristikos maksimumas – tuo didesnis šios charakteristikos statumas perlinkio taške.

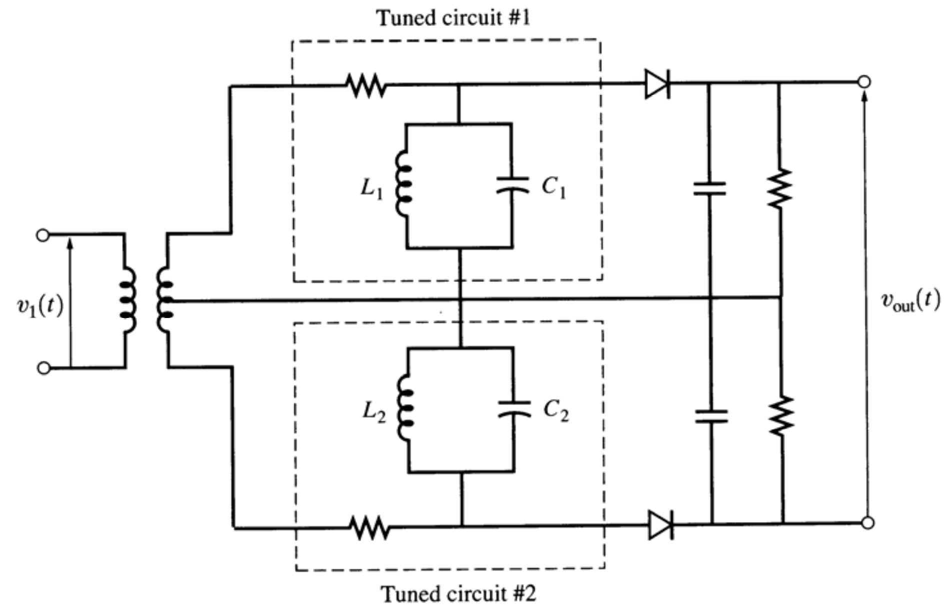


4.10.4 pav. Polinkio detektorius su virpesių kontūru. a – principinė schema, b – charakteristika.

Polinkio detektoriaus, kuris pavaizduotas 4.10.4a pav., trūkumai yra jo charakteristikos tiesinės srities siaurumas (žr. 4.10.4b pav.) ir tas faktas, kad ši charakteristika nėra lygi nuliui ties nešlio dažniu, t.y., išėjimo signalas turi nenulinę nuolatinę dedamąją. Šių trūkumų neturi balansinis dažnio detektorius, kuris pavaizduotas 4.10.5 pav. Šis dažnio detektorius vadinamas ***balansiniu diskriminatoriumi***. Balansinį diskriminatorių sudaro du lygiagrečiai sujungti virpesių kontūrai, kurių kiekvieno išėjime yra gaubtinės detektorius. Vieno kontūro rezonansinis dažnis (f_1) yra didesnis už nešlio dažnį f_c, o kito kontūro rezonansinis dažnis (f_2) – mažesnis už f_c. Nešlio dažnis turi būti lygus abiejų kontūrų rezonansinių dažnių vidurkiui. Gaubtinių detektorių išėjimuose yra abiejų virpesių kontūrų įtampų realiosios gaubtinės. Dažnio detektoriaus išėjimo signalas lygus abiejų gaubtinių skirtumui, t.y., detektoriaus charakteristika lygi abiejų kontūrų dažninių amplitudės charakteristikų skirtumui. Kadangi kiekvieno virpesių kontūro dažninė amplitudės charakteristika yra lyginė atžvilgiu rezonansinio dažnio, tai tuo atveju, kai abiejų charakteristikų forma yra vienoda, jos yra simetriškos viena kitai atžvilgiu nešlio dažnio (žr. 4.10.5a pav., viršutinės kreivės). Vadinasi, atėmus vieną charakteristiką iš kitos, gaunama dažnio funkcija, kuri yra nelyginė nešlio dažnio f_c atžvilgiu (žr. 4.10.5a pav., apatinė kreivė). Tai reiškia, kad detektoriaus charakteristika lygi nuliui taške $f = f_c$ (t.y., dažnio detektorius yra balansinis), o jos skleidinys Teiloro eilute taško f_c aplinkoje neturi lyginių laipsnių. Kontūrų išderinimą nešlio dažnio atžvilgiu visuomet galima parinkti taip, kad jų dažninių amplitudės charakteristikų trečiosios išvestinės taške f_c būtų lygios nuliui (virpesių kontūro atveju trečiosios išvestinės nuliai yra arti perlinkio taškų). Tuomet trečiojo laipsnio dėmuo detektoriaus charakteristikos skleidinyje Teiloro eilute taip pat lygus nuliui, o pagrindinis dėmuo, kuris lemia detektoriaus charakteristikos nuokrypį nuo tiesės, tolstant nuo perlinkio taško $f = f_c$, yra penktojo laipsnio



(a) Block Diagram



(b) Circuit Diagram

4.10.5 pav. Balansinis diskriminatorius. a – struktūrinė schema, b – principinė schema.

dėmuo, kuris pradeda pasireikšti žymiai toliau nuo perlinkio taško, negu pradinių charakteristikų kvadratiniai dėmenys. Todėl, lyginant su detektorium, kuris pavaizduotas 4.10.4 pav., šio detektoriaus charakteristika yra tiesinė žymiai platesniame dažnių intervale (plg. 4.10.4b pav. ir 4.10.5a pav., apatinė kreivė).

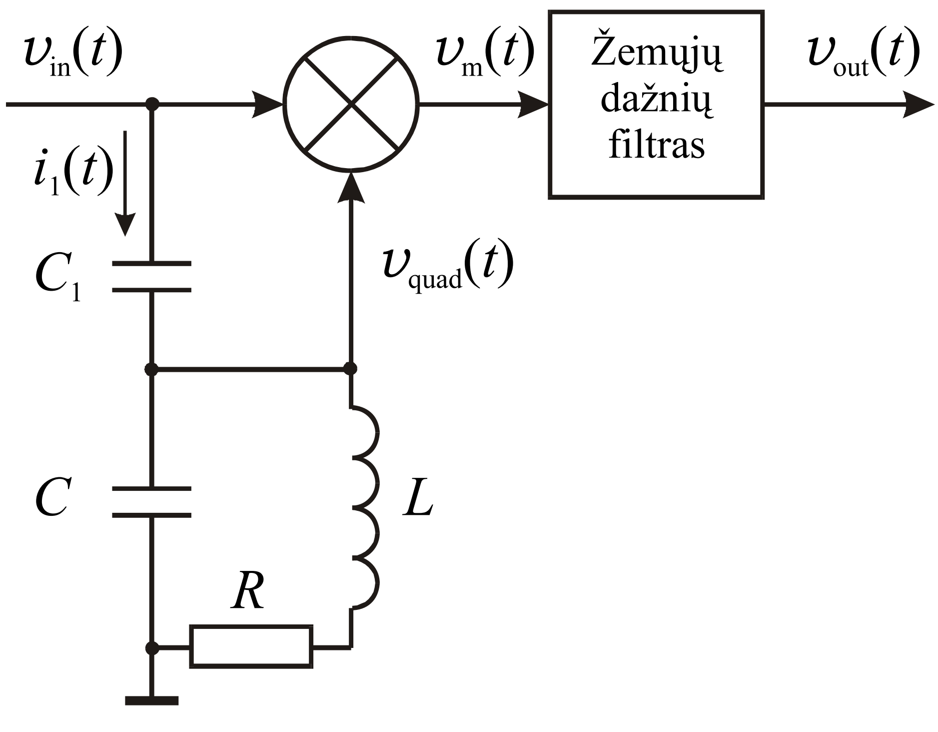
Balansinį diskriminatorių, kurio struktūrinė schema pavaizduota 4.10.5a pav., galima realizuoti, sujungus du dažnio detektorius, kurių schema atitinka 4.10.4a pav., taip, kaip pavaizduota 4.10.5b pav. Įėjimo įtampa padalinta po lygiai tarp dviejų virpesių kontūrų, kurie išderinti atžvilgiu nešlio dažnio aukščiau aprašytuoju būdu. Viršutinis diodas yra atidarytas tik teigiamųjų įėjimo signalo pusperiodžių metu, o apatinis – tik neigiamųjų pusperiodžių metu. Abiejų gaubtinės detektorių išėjimo įtampų ženklai yra priešingi, o absoliutinių verčių dažninės priklausomybės atitinka virpesių kontūrų dažnines amplitudės charakteristikas. Todėl šių charakteristikų atimties operacija realizuojama, tiesiog sudedant abiejų gaubtinės detektorių išėjimo įtampas (žr. 4.10.5b pav.).

Praktikoje balansiniai diskriminatoriai naudojami retai, nes praktiškai sunku pasiekti, kad abiejų virpesių kontūrų dažninių charakteristikų forma būtų vienoda, o jų rezonansiniai dažniai būtų vienodai nutolę nuo nešlio dažnio. Be to, tokius dažnio detektorius sunku derinti. Balansinius diskriminatorius pastaruoju metu išstūmė integriniai grandynai, kuriuose panaudojamas kvadratūrinis detektavimo metodas.

Kvadratūrinio detektoriaus struktūrinė schema pateikta 4.10.6 pav. Tarkime, kad įėjimo signalas yra

$$\upsilon_{\text{in}}(t) = V_L \cos[\omega_c t + \theta(t)]. \tag{4.10.18}$$

Šis signalas praleidžiamas pro kondensatorių C_1, kuris nuosekliai sujungtas su lygiagrečiuoju virpesių kontūru LRC, kuris suderintas nešlio dažniui f_c. Maišiklis sudaugina pradinį įėjimo signalą ir lygiagrečiojo kontūro įtampą. Praleidus šią signalų sandaugą pro žemųjų dažnių filtrą, gaunamas signalas, kuris proporcingas įėjimo signalo momentiniam dažniui. Žemiau šis teiginys pagrįstas matematiškai.



4.10.6 pav. Kvadratūrinis dažnio detektorius.

Kondensatorius C_1 sukuria $\pi/2$ fazių skirtumą tarp signalų υ_{quad} ir υ_{in}:

$$i_1(t) = \omega_c C_1 V_L \cos\left[\omega_c t + \theta(t) + \frac{\pi}{2}\right] = -\omega_c C_1 V_L \sin[\omega_c t + \theta(t)]. \tag{4.10.19}$$

Iš virpesių teorijos yra žinoma, kad, esant mažam kontūro išderinimui ($\omega \approx \omega_c = 1/\sqrt{LC}$) ir aukštai kontūro kokybei ($\omega_c L >> R$), lygiagrečiojo kontūro įtampos ir kontūro įėjimo srovės fazių skirtumas yra lygus

$$\Delta\theta_1 \approx -\frac{2Q}{\omega_c}\frac{d\theta}{dt} \quad (|\Delta\theta_1| << 1); \tag{4.10.20}$$

čia $d\theta/dt$ yra įėjimo srovės (4.10.19) momentinio ciklinio dažnio nuokrypis nuo kontūro rezonansinio dažnio

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \tag{4.10.21}$$

kuris sutampa su įėjimo signalo nešlio dažniu, o Q yra kontūro kokybė:

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\omega_c L}{R} = \frac{1}{\omega_c CR} \tag{4.10.22}$$

(lygiagrečiojo kontūro kokybė nusako jo elementais tekančios srovės ir įėjimo srovės amplitudžių santykį rezonanso metu). Esant tokiam mažam išderinimui, kai galioja nelygybė (4.10.20), lygiagrečiojo kontūro įtampos ir kontūro įėjimo srovės amplitudžių santykis beveik nepriklauso nuo dažnio ir yra lygus kontūro rezonansinei varžai R_0 (žr. (4.10.19)). Kadangi kontūro įėjimo srovės amplitudė yra proporcinga detektoriaus įėjimo įtampai V_L (žr. (4.10.19)), tai, atsižvelgus į papildomą fazės pokytį $\Delta\theta_1$ (žr. (4.10.20)), kontūro įtampa yra

$$\upsilon_{\text{quad}}(t) = -K_1 V_L \sin[\omega_c t + \theta(t) + \Delta\theta_1(t)]. \tag{4.10.23}$$

Šis signalas vadinamas ***kvadratūriniu signalu***, nes tuo atveju, kai $|\Delta\theta_1| << 1$, jo fazė skiriasi nuo įėjimo signalo fazės dydžiu $\pi/2$. Maišiklio išėjimo signalas (žr. 4.10.6 pav.) yra proporcingas signalų $\upsilon_{\text{in}}(t)$ ir $\upsilon_{\text{quad}}(t)$ sandaugai:

$$\upsilon_{\text{m}}(t) = K_2\upsilon_{\text{in}}(t)\upsilon_{\text{quad}}(t) = -K_2K_1V_L^2\cos[\omega_c t + \theta(t)]\sin[\omega_c t + \theta(t) + \Delta\theta_1(t)] \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2}K_2K_1V_L^2\{\sin\Delta\theta_1(t) - \sin[2\omega_c t + 2\theta(t) + \Delta\theta_1(t)]\}.$$

Žemųjų dažnių filtras (žr. 4.10.6 pav.) išskiria šios sumos pirmąjį dėmenį. Atsižvelgus į (4.10.20), filtro išėjimo signalas yra

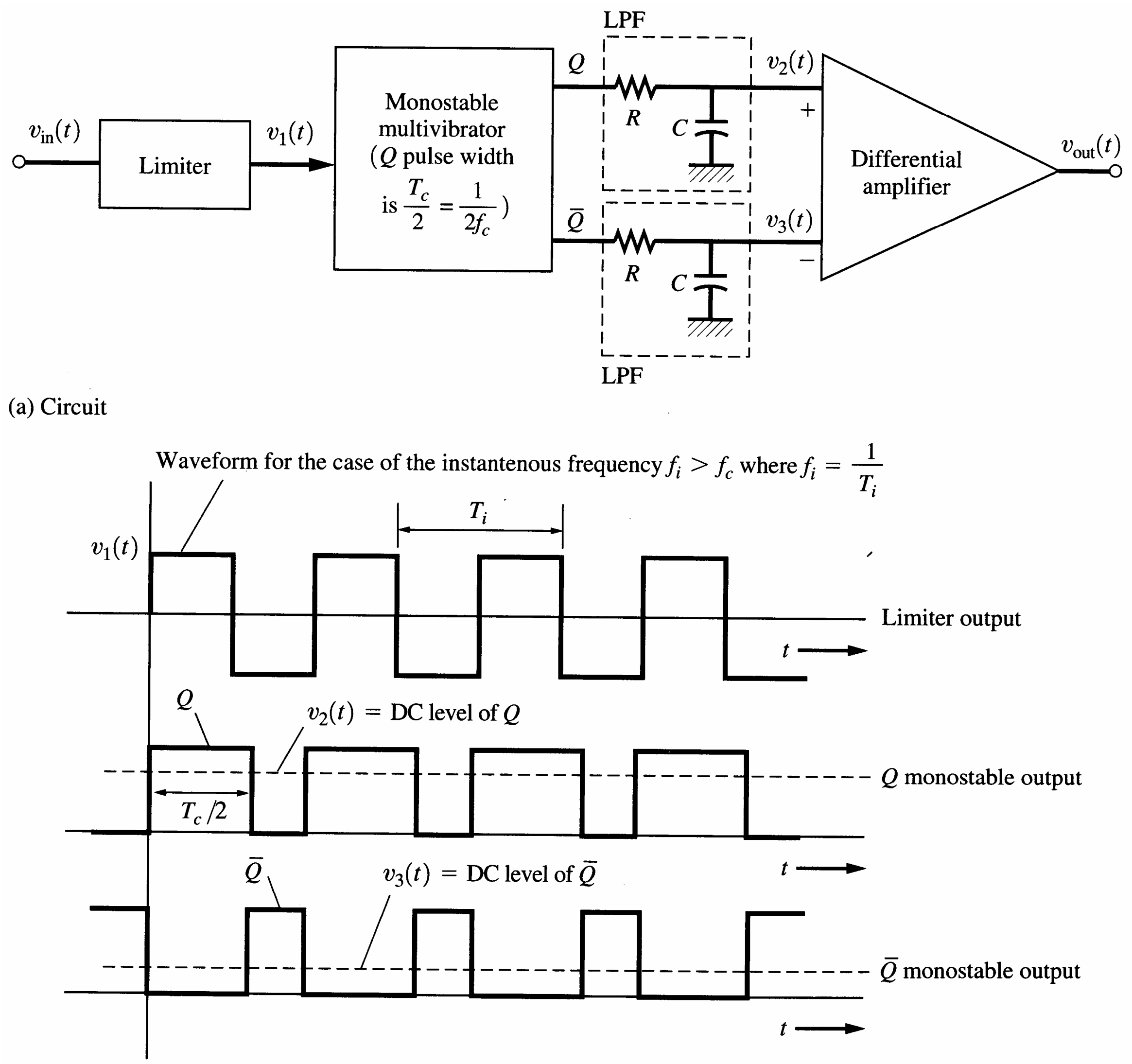
$$\upsilon_{\text{out}}(t) \approx \frac{1}{2}K_2K_1V_L^2\Delta\theta_1(t) \approx -K_2K_1V_L^2\frac{Q}{\omega_c}\frac{d\theta}{dt}. \tag{4.10.24}$$

Įrašę (4.10.14) į (4.10.24), gauname

$$\upsilon_{\text{out}}(t) \approx -K_2K_1V_L^2\frac{Q}{\omega_c}K_f m(t). \tag{4.10.25}$$

Vadinasi, kvadratūrinis detektorius atkuria dažnio moduliavimo signalą.

Tiesinę išėjimo įtampos priklausomybę nuo įėjimo įtampos momentinio dažnio (4.10.12) galima gauti, naudojant įtaisą, kuris registruoja kiekvieną įėjimo įtampos perėjimą per nulinę vertę. Dažnio detektorius, kuriame naudojamas toks įtaisas, vadinamas ***perėjimo per nulį detektoriumi*** (*zero-crossing detector*) Perėjimo per nulį balansinio dažnio detektoriaus struktūrinė schema pateikta 4.10.7a pav. Įėjimo signalas visų pirma patenka į plačiajuostį ribotuvą (žr. 4.7 poskyrį), kuris suformuoja to paties dažnio stačiakampių impulsų seką. Šie impulsai patenka į monovibratorių – dviejų išėjimų įtaisą, kuris įėjimo impulso teigiamojo fronto metu abiejuose išėjimuose generuoja po vieną vienodos trukmės ir aukščio, tačiau priešingo poliarumo stačiakampį impulsą, o po to grįžta į pradinę stabiliąją būseną. Stabilioje būsenoje išėjime Q yra nulinė įtampa, o išėjime $\overline{Q}$ – kažkokia teigiama įtampa A. Įėjimo impulso teigiamojo fronto metu monovibratorius pereina į kvazistabiliąją būseną. Šis perėjimas pasireiškia tuo, kad abiejų išėjimų įtampos “susikeičia vietomis”: išėjime Q nusistovi aukštasis įtampos lygis A, o išėjime $\overline{Q}$ – nulinis lygis. Tačiau po tam tikro laiko monovibratorius savaime šuoliškai grįžta į stabiliąją būseną. T.y., išėjime Q atsiranda teigiamas impulsas, o išėjime $\overline{Q}$ – neigiamas impulsas žr. (4.10.7b pav., antroji ir trečioji kreivės). Dažnio detektoriuje naudojamo monovibratoriaus išėjimo impulso trukmė lygi pusei nešlio periodo, t.y., $T_c/2 = 1/(2f_c)$. Pavyzdyje, kuris pavaizduotas 4.10.7b pav., įėjimo signalo momentinis dažnis f_i yra šiek tiek



(b) Waveforms ($f_i > f_c$)

4.10.7 pav. Perėjimo per nulį detektorius. a – struktūrinė schema, b – ribotuvo ir monovibratoriaus išėjimo signalai.

didesnis už nešlio dažnį f_c, t.y., įėjimo signalo periodas $T_i < T_c$. Intervalas tarp monovibratoriaus impulsų yra lygus $T_i - T_c/2$ (žr. 4.10.7b pav. antrąją ir trečiąją kreives). Abiejų monovibratoriaus išėjimų (Q ir $\overline{Q}$) signalai praleidžiami pro vienodus žemųjų dažnių filtrus, kurių ribinis dažnis (žr. 2.6.4 poskyrį) yra žymiai mažesnis už nešlio dažnį, tačiau žymiai didesnis už įėjimo signalo kompleksinės gaubtinės dažnių juostos plotį. Tuomet filtrų išėjimuose yra monovibratoriaus išėjimo signalų laikiniai vidurkiai laiko intervale, kuris žymiai ilgesnis už nešlio periodą, tačiau žymiai trumpesnis už laiką, per kurį šis periodas pastebimai pasikeičia. Šie vidurkiai lygūs

$$\langle Q\rangle = \frac{1}{T_i} A \frac{T_c}{2} = A\frac{f_i}{2f_c} \quad \text{ir} \quad \langle \overline{Q}\rangle = \frac{1}{T_i} A\left(T_i - \frac{T_c}{2}\right) = A\left(1 - \frac{f_i}{2f_c}\right).$$

Abiejų žemadažnių filtrų išėjimo signalai patenka į diferencialinį stiprintuvą, kurio išėjimo įtampa yra proporcinga dviejų įėjimų įtampų skirtumui

$$\langle Q\rangle - \langle \overline{Q}\rangle = A\left(\frac{f_i}{f_c} - 1\right) = A\frac{f_i - f_c}{f_c}.$$

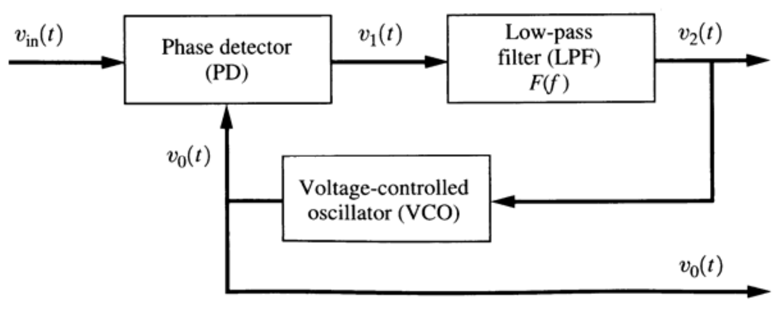
Vadinasi, perėjimo per nulį balansinio dažnio detektoriaus išėjimo signalas yra proporcingas įėjimo signalo dažnio momentiniam nuokrypiui nuo nešlio dažnio, t.y., moduliavimo signalui (žr. (4.10.14)).

4.11. Fazės derinimo kilpos (PLL kilpos) ir dažnio sintezatoriai

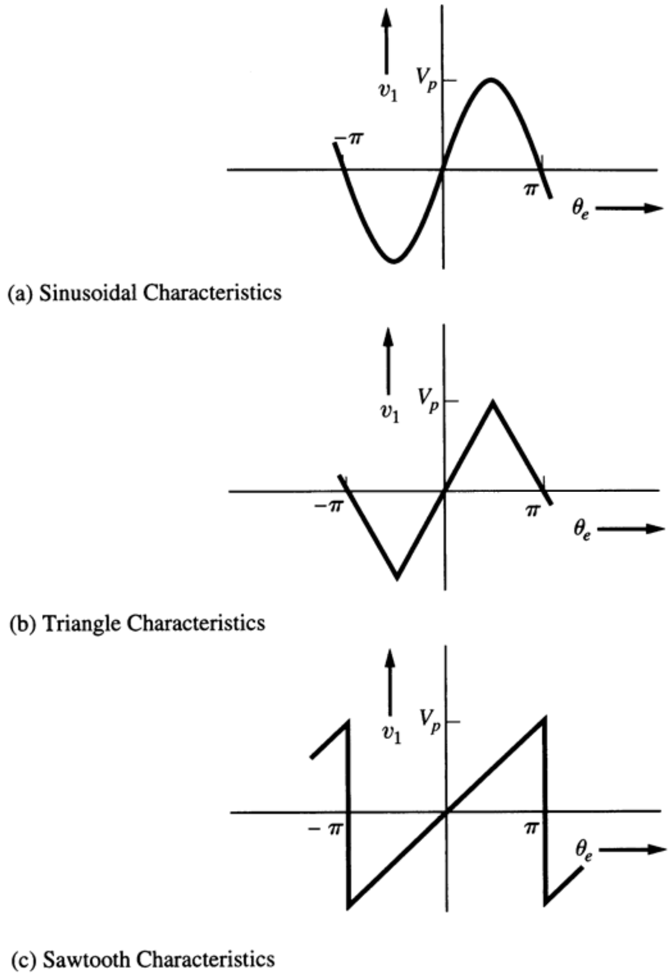
Fazės derinimo kilpa (*phase-locked loop*, ***PLL***), arba ***PLL kilpa*** – tai grįžtamojo ryšio sistema, kurioje grįžtamojo ryšio signalo vaidmenį atlieka ne išėjimo įtampa, o jos dažnis. PLL kilpa sudaryta iš trijų pagrindinių dalių (žr. 4.11.1 pav.): 1) fazės detektorius (žr. 4.10.2 poskyrį), 2) žemųjų dažnių filtras, 3) įtampa valdomas generatorius. Žemųjų dažnių filtras gali įeiti ir į paties fazės detektoriaus sudėtį (žr., pvz., 4.10.2 pav.). ***Įtampa valdomas generatorius*** – tai osciliatorius, kurio signalo dažnio nuokrypis nuo tam tikro fiksuoto dažnio f_0 priklauso nuo valdymo įtampos $v_2(t)$. Generatoriaus dažnis f_0, kai valdymo įtampa $v_2(t)$ lygi nuliui, vadinamas ***laisvųjų virpesių dažniu*** arba ***savuoju dažniu***. Įtampos $v_2(t)$ kitimo sparta lemia generatoriaus dažnio kitimo spartą. Fazės detektoriaus išėjimo signalas $v_1(t)$ yra periodinė įėjimo signalo $v_{in}(t)$ ir generatoriaus signalo $v_0(t)$ fazių skirtumo θ_e funkcija, kurios periodas lygus 2π (pvz., harmoninė funkcija (4.10.9b)). Keletas galimų fazės detektoriaus charakteristikų pateiktos 4.11.2 pav. Reikia turėti omenyje, kad fazių skirtumas θ_e gali būti atskaitomas ne nuo nulio, o nuo kažkokios baigtinės vertės, pvz., $-\pi/2$ (žr. žemiau analoginės PLL kilpos analizę). θ_e atskaitos tašką patogiausia pasirinkti taip, kad nulinį fazių skirtumą atitiktų nulinė fazės detektoriaus išėjimo įtampa (žr. fazės detektoriaus charakteristikas 4.11.2 pav.). θ_e keičiasi tik tuo atveju, kai įėjimo signalo ir generatoriaus virpesio dažniai skiriasi. Šių dažnių skirtumas nusako fazių skirtumo laikinę išvestinę, t.y., θ_e kitimo spartą. Jeigu dažnių skirtumas būtų pastovus, tuomet θ_e tiesiškai kistų laike ir fazės detektoriaus išėjime būtų jo charakteristikos pavidalo periodinis signalas, kurio dažnis lygus dažnių skirtumui.

Tarkime, kad tam tikru laiko momentu įėjimo signalo ir generatoriaus dažniai sutampa ir yra lygūs savajam dažniui f_0. Tuomet jų fazių skirtumas yra pastovus, o fazės detektoriaus išėjimo įtampa ir filtro išėjimo įtampa lygios nuliui, todėl generatoriaus dažnis nekinta. Laikysime, kad, didėjant generatoriaus valdymo įtampai $v_2(t)$, jo dažnis auga. Tuomet, jeigu generatoriaus dažnis nežymiai sumažėja arba įėjimo įtampos dažnis nežymiai padidėja, dažnių skirtumas pasidaro teigiamas, fazių skirtumas ir $v_1(t)$ pradeda lėtai augti, generatoriaus valdymo įtampa $v_2(t)$ taip pat pradeda augti, todėl generatoriaus dažnis pradeda augti, dažnių skirtumas pradeda mažėti, fazių skirtumo augimas sulėtėja, ir galų gale dažniai vėl pasidaro vienodi, o fazių skirtumas ir valdymo įtampa $v_2(t)$ nusistovi ties naujom didesnėm vertėm. Lygiai taip pat galima įrodyti, kad, nežymiai padidėjus generatoriaus dažniui arba nežymiai sumažėjus įėjimo įtampos dažniui, generatoriaus dažnis pradeda mažėti, ir mažėja tol, kol vėl tampa lygus įėjimo signalo dažniui, o fazių skirtumas ir valdymo įtampa $v_2(t)$ nusistovi ties naujom mažesnėm vertėm. Jeigu dažnių svyravimai yra maži, tuomet fazių skirtumas visą laiką yra fazės detektoriaus charakteristikos tiesinėje dalyje (žr. 4.11.2 pav.), o jo pokytis proporcingas dažnio pokyčiui. Vadinasi, įtampos $v_2(t)$ pokytis proporcingas įėjimo signalo $v_{in}(t)$ dažnio pokyčiui.

Pradėjus kisti fazės detektoriaus išėjimo įtampai $v_1(t)$, indėlį į valdymo įtampos $v_2(t)$ kitimą įneša tik tos signalo $v_1(t)$ harmoninės dedamosios, kurių dažniai priklauso filtro pralaidumo juostai. T.y., $v_2(t)$ spektras yra proporcingas įėjimo signalo $v_{in}(t)$



4.11.1 pav. PLL kilpos struktūrinė schema.



4.11.2 pav. Keletas galimų fazės detektoriaus charakteristikų.

spektro daliai, kuri sutelkta ties generatoriaus dažniu ir kurios plotis atitinka filtro dažnių juostos plotį. Jeigu filtras be iškraipymų praleidžia visą skirtuminių dažnių ($v_{in}(t)$ kompleksinės gaubtinės) spektrą, tuomet generatoriaus dažnis sutampa su *momentiniu* įėjimo signalo $v_{in}(t)$ dažniu, o įtampa $v_2(t)$ yra proporcinga šio dažnio vertei (šis teiginys įrodytas toliau šiame poskyryje). T.y., šiuo atveju PLL kilpą galima panaudoti kaip dažnio detektorių, kurio išėjimo signalas yra $v_2(t)$. Jeigu žemųjų dažnių filtro pralaidumo juostos plotis yra žymiai mažesnis už $v_{in}(t)$ kompleksinės gaubtinės juostos plotį, tuomet pakankamai didelę valdymo įtampos vertę galima gauti tik tuomet, kai įėjimo signalo $v_{in}(t)$ kompleksinės gaubtinės nuolatinė dedamoji nelygi nuliui (valdymo įtampos vertė turi būti pakankamai didelė, kad generatoriaus dažnis "spėtų sekti" įėjimo signalo arba jo nešlio dažnį). T.y., $v_{in}(t)$ spektre ties nešlio dažniu turi būti δ funkcijos pavidalo maksimumas (žr., pvz., AM signalo spektro išraišką (4.3.14a)). Tokiu atveju $v_0(t)$ dažnis sutampa su šios spektro linijos dažniu, ir filtro išėjimo signalas "reaguoja" tik į lėtus jos dažnio pokyčius. Vadinasi, šiuo atveju signalą $v_0(t)$ galima panaudoti, pvz., sandaugos detektoriuje vietoj generatoriaus signalo (žr. 4.10.2 poskyrį).

Taigi, jeigu pradiniu laiko momentu įėjimo signalo momentinis arba nešlio dažnis sutampa su generatoriaus dažniu, tuomet PLL kilpoje atsiranda neigiamas dažninis ryšys, dėl kurio generatoriaus dažnis visuomet tiksliai lygus įėjimo signalo momentiniam arba nešlio dažniui, o generatoriaus valdymo įtampa proporcinga šio dažnio nuokrypiui nuo savojo dažnio f_0. T.y., PLL kilpos generatoriaus dažnis "seka" įėjimo signalo momentinį arba nešlio dažnį. Tuomet sakoma, kad PLL kilpa yra sinchronizuota ("*locked*"). Tačiau įėjimo signalo dažnių intervalas, kuriame PLL kilpa lieka sinchronizuota, yra baigtinio pločio. Taip yra todėl, kad, didėjant dažnio nuokrypiui nuo f_0, auga įėjimo įtampos ir generatoriaus signalo fazių skirtumas (žr. aukščiau), o generatoriaus dažnis yra *periodinė* šio fazių skirtumo funkcija (žr. 4.11.2 pav.). Didžiausias įmanomas sinchronizuotos PLL dažnio nuokrypis nuo savojo dažnio f_0 vadinamas ***sinchronizavimo diapazonu*** (*hold-in range*; *lock range*). Jeigu įėjimo signalo dažnis skiriasi nuo f_0, tuomet PLL kilpos sinchronizavimas gali ir neįvykti. Taip atsitinka tuomet, kai įėjimo signalo dažnio ir f_0 skirtumas ($v_1(t)$ dažnis) yra didesnis už žemųjų dažnių filtro pralaidumo juostą: tokiu atveju šio dažnio amplitudė filtro išėjime yra maža, todėl generatoriaus dažnis kinta lėtai ir nespėja pastebimai pakisti per vieną $v_1(t)$ pusperiodį, o po to $v_1(t)$ ženklas pasikeičia, todėl generatoriaus dažnio kitimo kryptis taip pat pasikeičia ir t.t. Didžiausias įėjimo signalo dažnio nuokrypis nuo savojo dažnio f_0, kuriam esant, dar yra įmanomas PLL kilpos sinchronizavimas, vadinamas ***pagavimo diapazonu*** (*pull-in range*; *capture range*). Pagavimo diapazonas negali būti didesnis už sinchronizavimo diapazoną. Kitas svarbus PLL kilpos parametras yra didžiausia sinchronizuotos sistemos dažnio kitimo sparta – didžiausia įėjimo signalo dažnio kitimo sparta, kuriai esant, PLL kilpa lieka sinchronizuota. Jeigu įėjimo signalo dažnis kinta greičiau už šį dydį, PLL kilpa "pameta" sinchronizavimo dažnį.

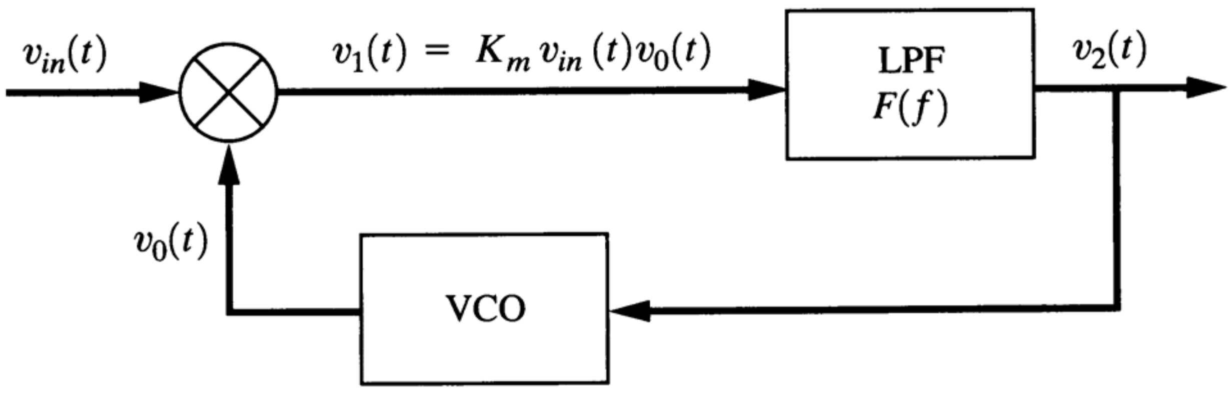
Jeigu PLL kilpoje panaudotos analoginės grandinės, tuomet ji vadinama ***analogine fazės derinimo kilpa*** (***APLL***), o jeigu skaitmeninės grandinės – ***skaitmenine fazės derinimo kilpa*** (***DPLL***). Nuo analoginio arba skaitmeninio PLL kilpos pobūdžio priklauso fazės detektoriaus charakteristikos pavidalas. Pvz., sinusoidės pavidalo charakteristika, kuri pavaizduota 4.11.2a pav., gaunama tuo atveju, kai fazės detektoriaus vaidmenį atlieka analoginis sandaugos detektorius (žr. 4.10.2 poskyrį). Šiuo atveju maišiklis, kuris įeina į sandaugos detektoriaus sudėtį, gali būti, pvz., dvigubo balanso maišiklis, kuris pavaizduotas 4.8.4a pav. Trikampė ir pjūklinė fazės detektoriaus charakteristikos, kurios pavaizduotos, atitinkamai, 4.11.2b pav. ir 4.11.2c pav., gaunamos, naudojant skaitmenines grandines.

Bendrąsias PLL kilpų savybes galima gauti, tiriant APLL kilpą. Ši PLL kilpa skiriasi nuo 4.10.2 pav. pavaizduoto sandaugos detektoriaus tik tuo, kad generatoriaus dažnį valdo žemadažnio filtro išėjimo įtampa (žr. 4.11.3 pav.). Tarkime, kad APLL įėjime yra moduliuotos fazės arba moduliuoto dažnio signalas (žr. C-1 lentelę):

$$v_{\text{in}}(t) = A_i \sin[\omega_0 t + \theta_i(t)], \tag{4.11.1}$$

kur ω_0 yra įtampa valdomo generatoriaus savasis dažnis. Kaip minėta 4.10.2 poskyryje, sandaugos detektorius veikia kaip fazės detektorius tik tuo atveju, kai generatoriaus signalo ir įėjimo įtampos vidutinis fazių skirtumas lygus $\pi/2$. Todėl laikysime, kad generatoriaus išėjimo signalas yra

$$v_0(t) = A_0 \cos[\omega_0 t + \theta_0(t)], \tag{4.11.2}$$



4.11.3 pav. Analoginės PLL kilpos struktūrinė schema.

Generatoriaus dažnio nuokrypis nuo ω_0 yra proporcingas valdymo įtampai $\upsilon_2(t)$:

$$\Delta\omega \equiv \frac{d\theta_0(t)}{dt} = K_\upsilon \upsilon_2(t) \qquad (4.11.3)$$

arba (laikant, kad $\theta_0(-\infty) = 0$)

$$\theta_0(t) = K_\upsilon \int_{-\infty}^{t} \upsilon_2(\tau)d\tau . \qquad (4.11.4)$$

T.y., generatoriaus išėjime yra FM signalas, kurį moduliuoja žemųjų dažnių filtro išėjimo signalas $\upsilon_2(t)$ (plg. (4.11.4) ir (4.10.14)). Maišiklio (signalų daugintuvo) išėjimo signalas yra

$$\begin{aligned}\upsilon_1(t) &= K_m \upsilon_{in}(t)\upsilon_0(t) = K_m A_i A_0 \sin[\omega_0 t + \theta_i(t)]\cos[\omega_0 t + \theta_0(t)] = \\ &= \frac{K_m A_i A_0}{2}\sin[\theta_i(t) - \theta_0(t)] + \frac{K_m A_i A_0}{2}\sin[2\omega_0 t + \theta_i(t) + \theta_0(t)],\end{aligned} \qquad (4.11.5)$$

kur K_m yra maišiklio stiprinimo koeficientas (žr. 4.11.3 pav.). Kadangi žemųjų dažnių filtras praleidžia tik skirtuminį dažnį (t.y., (4.11.5) pirmąjį dėmenį), tai filtro išėjimo signalas yra

$$\upsilon_2(t) = K_d[\sin\theta_e(t)] * f_1(t) , \qquad (4.11.6)$$

kur

$$\theta_e(t) \equiv \theta_i(t) - \theta_0(t) , \qquad (4.11.7)$$

$$K_d \equiv \frac{K_m A_i A_0 F(0)}{2} , \qquad (4.11.8)$$

$$f_1(t) \equiv f(t)/F(0). \qquad (4.11.9)$$

$f(t)$ yra žemųjų dažnių filtro impulsinis atsakas, o $F(0)$ yra jo spektro vertė, esant nuliniam dažniui. Todėl ekvivalenčiojo filtro, kurio impulsinis atsakas yra $f_1(t)$ (žr. (4.11.9)), perdavimo funkcija lygi vienetui taške $f = 0$. Dydis $\theta_e(t)$ vadinamas ***fazės paklaida*** (fazės paklaida yra dydžiu $\pi/2$ didesnė už signalų $\upsilon_{\text{in}}(t)$ ir $\upsilon_0(t)$ fazių skirtumą), o koeficientas K_d vadinamas ***fazės detektoriaus perdavimo konstanta***.

Lygybės (4.11.3), (4.11.6) ir (4.11.7) sudaro trijų lygčių sistemą atžvilgiu trijų nežinomųjų funkcijų – $\upsilon_2(t)$, $\theta_0(t)$ ir $\theta_e(t)$. Šią lygčių sistemą pakeisime viena lygtimi atžvilgiu $\theta_e(t)$. Įrašę (4.11.6) į (4.11.3), randame

$$\frac{d\theta_0(t)}{dt} = K_d K_\upsilon[\sin\theta_e(t)] * f_1(t) . \qquad (4.11.10)$$

Išreiškę $\theta_0(t)$ pagal (4.11.7), randame

$$\frac{d\theta_e(t)}{dt} = \frac{d\theta_i(t)}{dt} - K_d K_\upsilon[\sin\theta_e(t)] * f_1(t) . \qquad (4.11.11)$$

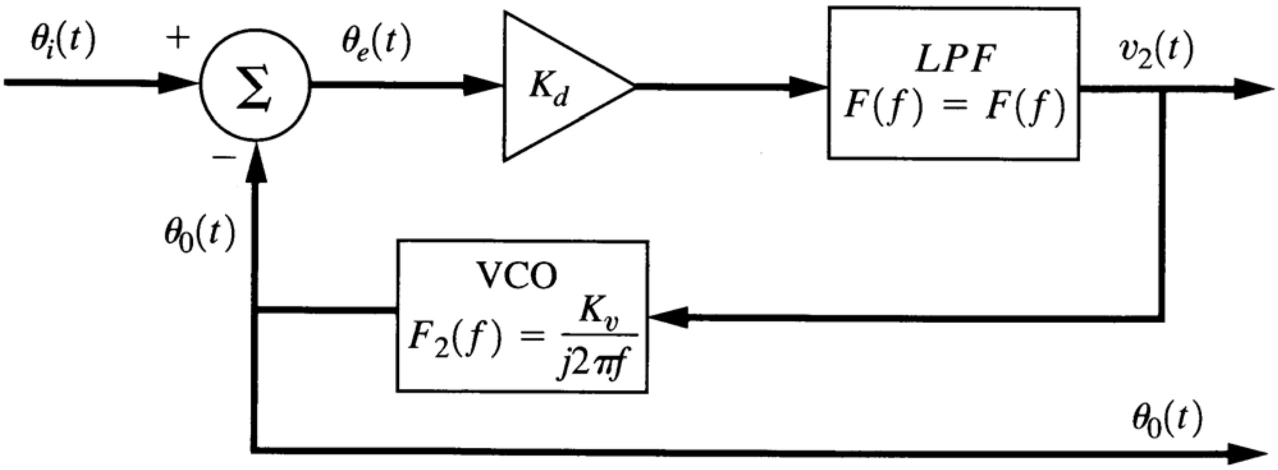
Čia $\theta_e(t)$ yra nežinomoji funkcija, o θ_i nusako išorinį poveikį sistemai. Jeigu koeficientas K_d yra pakankamai didelis, tuomet generatoriaus valdymo įtampos pokytis, pakitus įėjimo įtampos dažniui, taip pat yra didelis, todėl generatoriaus dažnio kitimo sparta yra didelė ir fazės paklaida θ_e nespėja išaugti iki didelių verčių. Tokiu atveju galima laikyti, kad $\sin\theta_e(t) \approx \theta_e(t)$, ir lygtys (4.11.10) bei (4.11.11) virsta tiesinėm lygtim

$$\frac{d\theta_0(t)}{dt} = K_d K_\upsilon \theta_e(t) * f_1(t) \equiv K_d K_\upsilon[\theta_i(t) * f_1(t) - \theta_0(t) * f_1(t)] , \qquad (4.11.12)$$

$$\frac{d\theta_e(t)}{dt} = \frac{d\theta_i(t)}{dt} - K_d K_\upsilon \theta_e(t) * f_1(t) . \qquad (4.11.13)$$

Pastarosios lygties integralas nuo $-\infty$ iki t yra

$$\theta_e(t) = \theta_i(t) - K_d K_\upsilon \int_{-\infty}^{t} [\theta_e(t) * f_1(t)]dt . \qquad (4.11.14)$$



4.11.4 pav. Analoginės PLL kilpos tiesinis modelis.

Palyginus (4.11.14) su (4.11.7), akivaizdu, kad antrasis dėmuo yra priešingas generatoriaus signalo pradinei fazei $\theta_0(t)$. (4.11.14) lygtį galima pavaizduoti schema, kurioje vietoj signalų $v_{in}(t)$ ir $v_0(t)$ yra jų fazės $\theta_{in}(t)$ ir $\theta_0(t)$. Ši schema pateikta 4.11.4 pav.

Rasime APLL kilpos sinchronizavimo diapazoną. Kaip minėta šio poskyrio pradžioje, PLL kilpos sinchronizavimo diapazonas atitinka $\theta_e(t)$ verčių intervalą nuo fazės detektoriaus charakteristikos nulio iki maksimumo arba minimumo. APLL kilpos atveju šis intervalas yra $-\pi/2 < \theta_e < \pi/2$ (žr. 4.11.2a pav.) Jeigu įėjimo signalo dažnis kinta pakankamai lėtai, tuomet fazių skirtumas $\theta_e(t)$ taip pat kinta lėtai, todėl maišiklio išėjimo signalo skirtuminė dedamoji $K_d \sin\theta_e(t)$ praeina pro žemųjų dažnių filtrą be iškraipymų. Vadinasi, pagal (4.11.3),

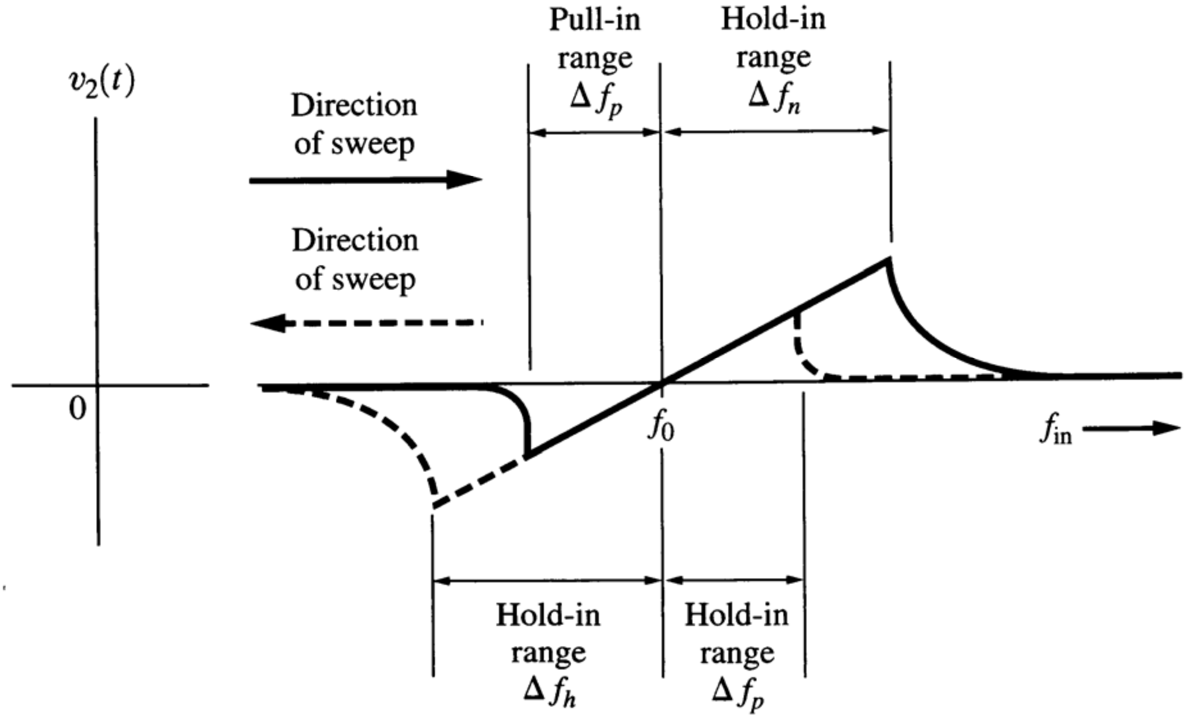
$$\Delta\omega = K_v K_d \sin\theta_e . \qquad (4.11.15)$$

Sinchronizavimo diapazonas atitinka $\sin\theta_e = 1$ (žr. aukščiau):

$$\Delta f_h = \frac{1}{2\pi} K_v K_d . \qquad (4.11.16)$$

PLL kilpos generatoriaus valdymo įtampos v_2 priklausomybė nuo harmoninio įėjimo signalo dažnio vadinama PLL kilpos ***sinchronizavimo charakteristika***. Tipiška sinchronizavimo charakteristika pavaizduota 4.11.5 pav. Kai lėtai kintantis įėjimo dažnis pasiekia pagavimo diapazoną, PLL kilpa sinchronizuojasi, t.y., jos dažnis tampa lygus įėjimo dažniui, o valdymo įtampa tampa proporcinga dažniui. Kai dažnis išeina iš sinchronizavimo diapazono, sinchronizavimas prarandamas ir valdymo įtampa grįžta prie nulio, t.y., PLL kilpos dažnis grįžta prie savojo dažnio.

PLL kilpos yra plačiai naudojamos ryšių sistemose. Kai kurie PLL kilpų pritaikymai yra: 1) dažnio detektavimas, 2) FM signalų generavimas, 3) koherentinis AM detektavimas, 4) dažnio dauginimas, 5) dažnio sintezė, 6) bitų sinchronizavimas skaitmeninėse ryšių sistemose.



4.11.5 pav. Tipiška PLL kilpos sinchronizavimo charakteristika.

Šio poskyrio pradžioje jau buvo trumpai aprašytas PLL kilpos panaudojimas dažnio detektavimui. Rasime sąlygas, kurios turi būti patenkintos, kad PLL kilpos generatoriaus valdymo įtampa $v_2(t)$ būtų proporcinga įėjimo dažnio moduliavimo signalui $m(t)$. Naudosimės analoginės PLL kilpos tiesiniu modeliu (žr. 4.11.4 pav.). Signalo $v_2(t)$ spektras yra

$$V_2(f) = K_d F_1(f)\Theta_e(f) \equiv K_d F_1(f)[\Theta_i(f) - \Theta_0(f)] \equiv K_d F_1(f)[1 - H(f)]\Theta_i(f), \quad (4.11.17)$$

kur $F_1(f) = F[f_1(t)]$, $\Theta_e(f) = F[\theta_e(t)]$, $\Theta_i(f) = F[\theta_i(t)]$, $\Theta_0(f) = F[\theta_0(t)]$, o $H(f)$ yra uždarojo kontūro perdavimo funkcija: $H(f) \equiv \Theta_0(f)/\Theta_i(f)$ (keturpolio su grįžtamuoju ryšiu ***uždarojo kontūro perdavimo funkcija*** apibrėžiama kaip grąžinamo į įėjimą signalo ir įėjimo signalo Furjė transformacijų santykis). Funkcija $H(f)$ randama, apskaičiavus lygties (4.11.12) Furjė transformaciją:

$$H(f) = \frac{\Theta_0(f)}{\Theta_i(f)} = \frac{K_d K_v F_1(f)}{j2\pi f + K_d K_v F_1(f)}. \quad (4.11.18)$$

Įrašę (4.11.18) į (4.11.17), gauname

$$V_2(f) = \frac{j\dfrac{2\pi f}{K_v}F_1(f)}{F_1(f) + j\dfrac{2\pi f}{K_d K_v}}\Theta_i(f). \quad (4.11.19)$$

Tarkime, PLL kilpos įėjimo signalas (4.11.1) yra moduliuoto dažnio (FM) signalas, t.y.,

$$\theta_i(t) = D_f \int_{-\infty}^{t} m(\lambda)d\lambda. \quad (4.11.20)$$

(žr. C-1 lentelę). Tuomet

$$\Theta_i(f) = \frac{D_f}{j2\pi f}M(f), \quad (4.11.21)$$

kur $M(f)$ yra moduliavimo signalo $m(t)$ spektras (žr. integralo Furjė transformacijos išraišką B-1 lentelėje). Įrašę (4.11.21) į (4.11.19), randame

$$V_2(f) = \frac{\frac{D_f}{K_v} F_1(f)}{F_1(f) + j\frac{2\pi f}{K_d K_v}} M(f) . \tag{4.11.22}$$

Tikslas – rasti sąlygas, kuriomis $V_2(f)$ yra proporcingas $M(f)$. Tarkime, kad moduliavimo signalo dažnių juostoje ($f < |B|$) filtras neiškraipo ir neužvėlina signalo, t.y., galioja lygybė

$$F_1(f) = F_1(0) = 1, \qquad |f| < B \tag{4.11.23}$$

(žr. (2.6.29)). Tuomet, jeigu

$$\frac{K_d K_v}{2\pi} >> B , \tag{4.11.24}$$

(4.11.22) reiškinys virsta

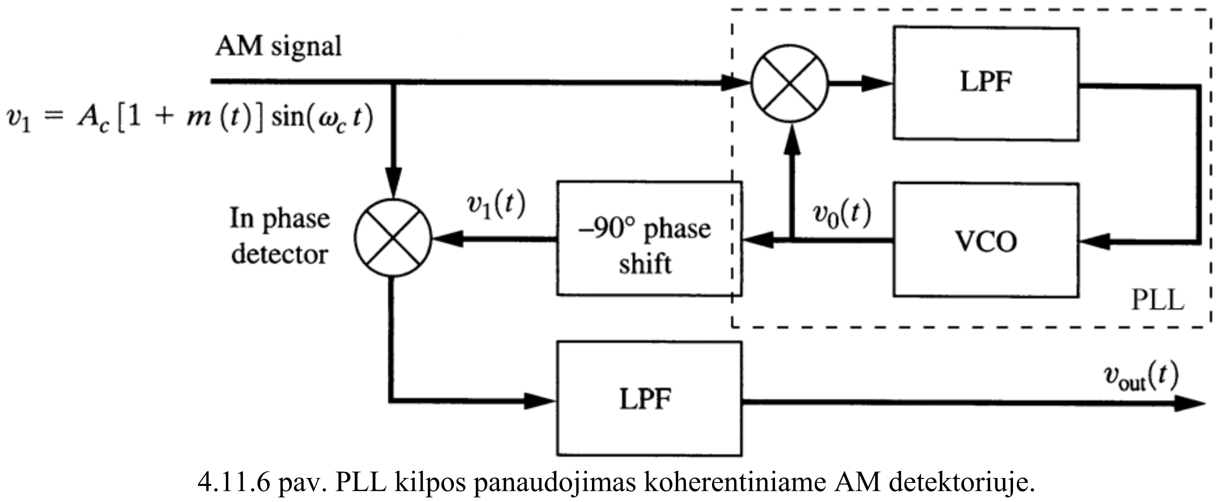
$$V_2(f) = \frac{D_f}{K_v} M(f) \tag{4.11.25}$$

arba

$$\upsilon_2(t) = Cm(t), \tag{4.11.26}$$

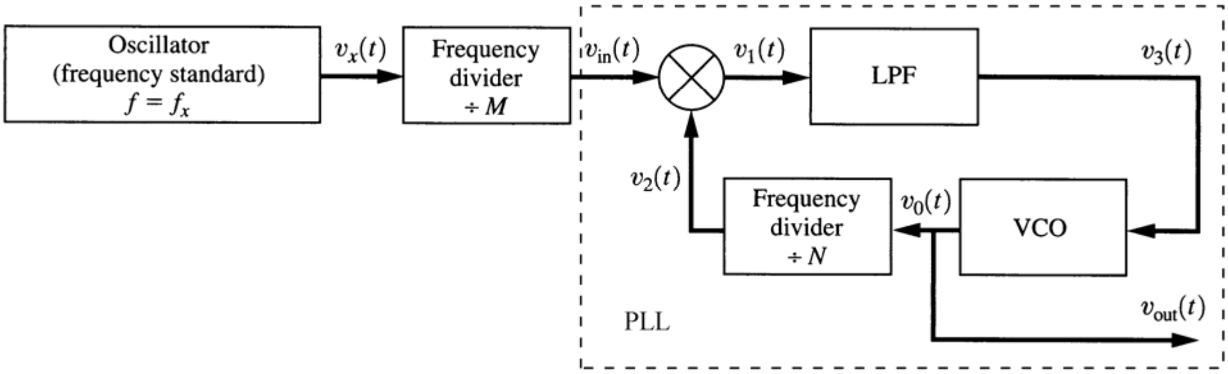
kur proporcingumo konstanta yra $C = D_f/K_\upsilon$. Vadinasi, APLL kilpa, kuri pavaizduota 4.11.3 pav., veikia kaip dažnio detektorius, jeigu tenkinamos sąlygos (4.11.23) ir (4.11.24).

PLL kilpos panaudojimas AM detektavimui remiasi tuo, kad sandaugos detektorius, kurio schema pavaizduota 4.10.2 pav., veikia kaip gaubtinės detektorius, jeigu generatoriaus virpesio ir nešlio fazių skirtumas lygus nuliui (žr. (4.10.9a)). T.y., tokiame sandaugos detektoriuje galima panaudoti PLL kilpos generatorių, kurio išėjimo signalo fazė pasukta -90° kampu (žr. (4.11.2) ir (4.11.1)). Tokio AM detektoriaus struktūrinė schema pavaizduota 4.11.6 pav. Kadangi sandaugos detektoriuje generatoriaus dažnis turi būti pastovus ir lygus įėjimo signalo nešlio dažniui, tai šiuo atveju PLL kilpos žemadažnio filtro pralaidumo juostos plotis turi būti žymiai mažesnis už įėjimo signalo realiosios gaubtinės dažnių juostos plotį, tačiau nemažesnis už reikalingą pagavimo diapazoną (žr. aukščiau).



4.11.6 pav. PLL kilpos panaudojimas koherentiniame AM detektoriuje.

4.11.7 pav. iliustruoja PLL kilpos panaudojimą dažnio sintezatoriuje. ***Dažnio sintezatorius*** – tai įtaisas, kuris gali generuoti įvairaus stabilaus dažnio signalus, kombinuodamas mažesnį skaičių fiksuotų dažnių. Paprasčiausias dažnio sintezatorius, kuris pavaizduotas 4.11.7 pav. naudoja tik vieną stabilaus dažnio f_x generatorių, tačiau gali generuoti daug įvairių dažnių f_{out}. Tai pasiekiama, naudojant PLL kilpą ir du dažnio daliklius, kurie dalina signalo dažnį M ir N kartų. Parametrai M ir N gali būti kintami. Kai PLL kilpa yra sinchronizuota, jos generatoriaus dažnis f_{out} yra toks, kad abiejuose maišiklio įėjimuose būtų vienodo dažnio signalai, t.y.,



4.11.7 pav. PLL kilpos panaudojimas dažnio sintezatoriuje.

$$\frac{f_x}{M} = \frac{f_{out}}{N}. \tag{4.11.27}$$

Vadinasi, dažnio sintezatoriaus generuojamas dažnis yra

$$f_{out} = \frac{N}{M} f_x. \tag{4.11.28}$$

Šio dažnio sintezatoriaus pagrindinis privalumas yra jo paprastumas: dažnio daliklio vaidmenį gali atlikti paprastas skaitmeninis įtaisas, kuris skaičiuoja įėjimo signalo perėjimus per nulį. Kai $M = 1$, šis dažnio sintezatorius veikia kaip dažnio daugintuvas.

4.12. Siųstuvai ir imtuvai

4.12.1. Apibendrintieji siųstuvai

Siųstuvo paskirtis – perkelti žemadažnį moduliavimo signalą $m(t)$ į dažnių juostą, kuri yra nešlio dažnio f_c aplinkoje. Apibendrintąją siųstuvo schemą galima sudaryti, naudojantis juostinio signalo matematine išraiška. 4.1 ir 4.2 poskyriuose buvo minėta, kad bet kokio pavidalo moduliuotąjį signalą galima išreikšti vienu iš šių trijų ekvivalenčių pavidalų:

$$v(t) = \mathrm{Re}\{g(t)e^{j\omega_c t}\}, \tag{4.12.1}$$

$$v(t) = R(t)\cos[\omega_c t + \theta(t)], \tag{4.12.2}$$

$$v(t) = x(t)\cos\omega_c t - y(t)\sin\omega_c t, \tag{4.12.3}$$

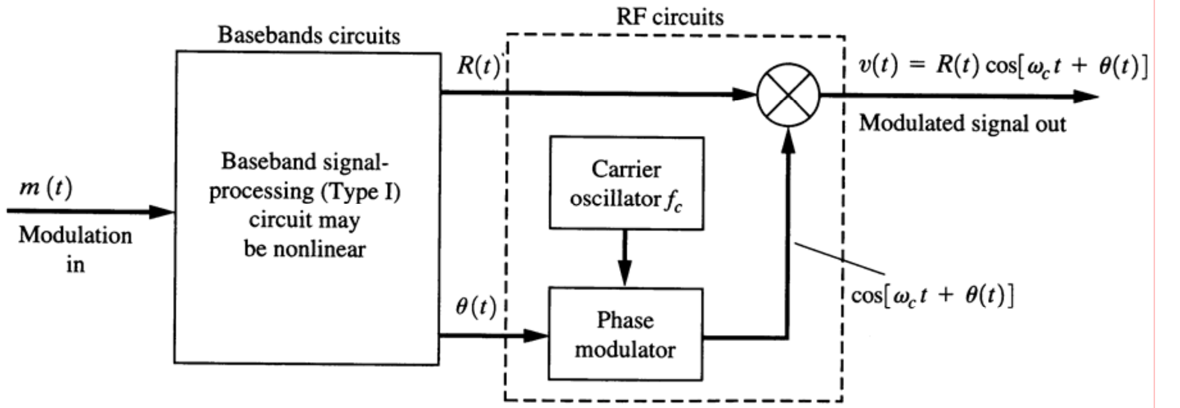
kur kompleksinė gaubtinė $g(t)$ lygi

$$g(t) = R(t)e^{j\theta(t)} = x(t) + jy(t). \tag{4.12.4}$$

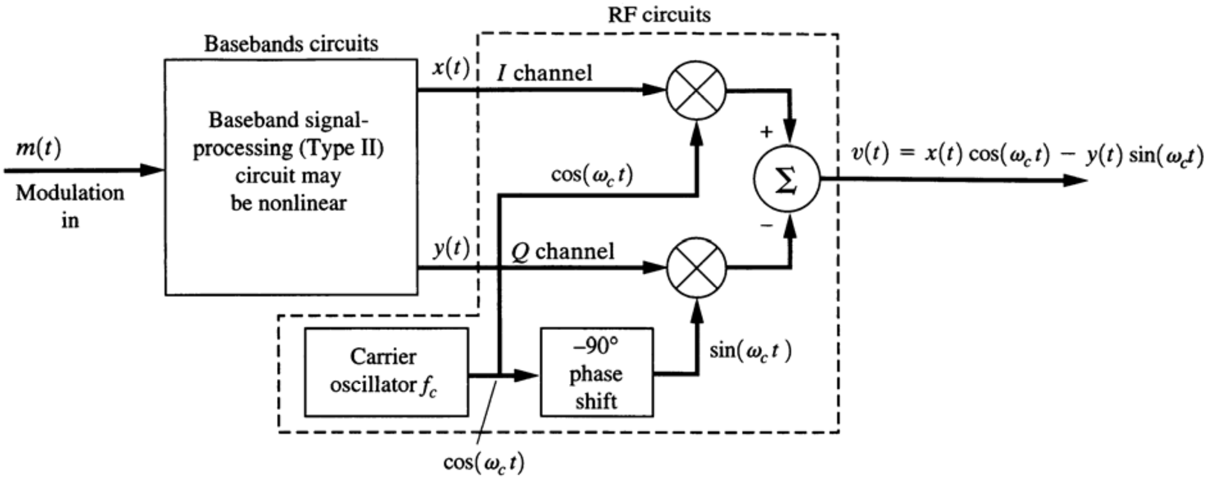
Kompleksinė gaubtinė $g(t)$ yra moduliavimo signalo $m(t)$ funkcija. Šios funkcijos pavidalas nusako moduliavimo rūšį, pvz., AM, FM, SSB ir kt. (žr. C-1 lentelę).

Kadangi visi fizikiniai signalai yra realieji dydžiai, tai praktinę vertę turi tik (4.12.2) ir (4.12.3) formulės (signalo užrašymas (4.12.1) pavidalu naudingas signalų teorinėje analizėje, siekiant supaprastinti formules). Priklausomai nuo juostinio signalo formavimo būdo, galima sudaryti dvi skirtingas apibendrintąsias siųstuvo schemas, kurių kiekviena realizuoja vieną iš (4.12.2) ir (4.12.3) signalo išraiškų. Kadangi šios dvi išraiškos yra matematiškai ekvivalenčios, tai bet kuri iš šių schemų gali būti panaudota bet kurios rūšies moduliavimui. Konkrečios schemos pasirinkimas priklauso tik nuo techninių reikalavimų siųstuvui ir nuo jo kainos apribojimų.

Juostinio signalo išraiška (4.12.2) nusako ***AM-PM generavimo metodą***. Atitinkamos grandinės struktūrinė schema pavaizduota 4.12.1 pav. Šioje grandinėje galima išskirti dvi dalis: žemadažnę dalį, kuri žemadažnį moduliavimo signalą paverčia dviem žemadažniais signalais $R(t)$ ir $\theta(t)$, ir aukštadažnę dalį, kuri suformuoja nešlio dažnio signalą, moduliuoja jo fazę signalu $\theta(t)$ ir padaugina iš realiosios gaubtinės $R(t)$. Žemadažnę dalį gali sudaryti netiesinės analoginės



4.12.1 pav. AM-PM generavimo metodą naudojančio apibendrintojo siųstuvo struktūrinė schema.



4.12.2 pav. Kvadratūrinį generavimo metodą naudojančio apibendrintojo siųstuvo struktūrinė schema.

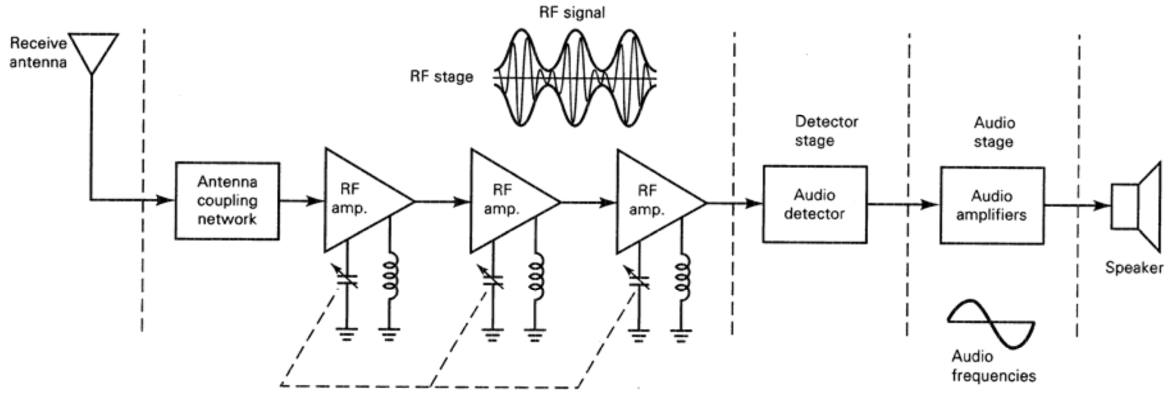
grandinės arba skaitmeninis kompiuteris. Pastaruoju atveju įėjime reikalingas vienas skaitmeninis analogo keitiklis žemadažnės dalies įėjime ir po vieną analoginį skaitmenų keitiklį kiekviename jos išėjime.

Juostinio signalo išraiška (4.12.3) nusako ***kvadratūrinį generavimo metodą***. Šiuo atveju atskirai suformuojamos juostinio signalo sinfazinė dedamoji $x(t)\cos\omega_c t$ ir kvadratūrinė dedamoji $y(t)\sin\omega_c t$. Todėl šis metodas dar vadinamas ***IQ generavimo metodu*** (*in-phase and quadrature-phase*). Atitinkamos grandinės struktūrinė schema pavaizduota 4.12.2 pav. Kaip ir AM-PM metode, siųstuvą sudaro žemadažnė ir aukštadažnė dalys, tačiau šiuo atveju žemadažnės dalies išėjimuose yra ne realioji gaubtinė ir pradinė fazė ($R(t)$ ir $\theta(t)$), o sinfazinės ir kvadratūrinės dedamųjų amplitudės ($x(t)$ ir $y(t)$). Sinfazinė signalo komponentė ($x(t)\cos\omega_c t$) suformuojama, dauginant nešlio dažnio signalą iš $x(t)$, o kvadratūrinė komponentė ($y(t)\sin\omega_c t$) suformuojama, pakeitus nešlio signalo fazę -90° ir padauginus jį iš $y(t)$. Kaip ir 4.12.1 pav. atveju, žemadažnę dalį gali sudaryti netiesinės analoginės grandinės arba skaitmeninis kompiuteris.

Dauguma praktikoje naudojamų siųstuvų – tai šių apibendrintųjų siųstuvų atskirieji atvejai. Žemadažnėje siųstuvo dalyje dažnai naudojamas skaitmeninis kompiuteris, ir moduliavimo tipas užduodamas programiškai.

4.12.2. Apibendrintieji imtuvai

Imtuvo paskirtis – atkurti moduliavimo signalą pagal priimtąjį moduliuotąjį signalą, kuris gali būti iškraipytas triukšmo. Du pagrindiniai imtuvų tipai yra suderintasis radijo dažnio (*tuned radio frequency*, ***TRF***) imtuvas ir superheterodininis imtuvas.

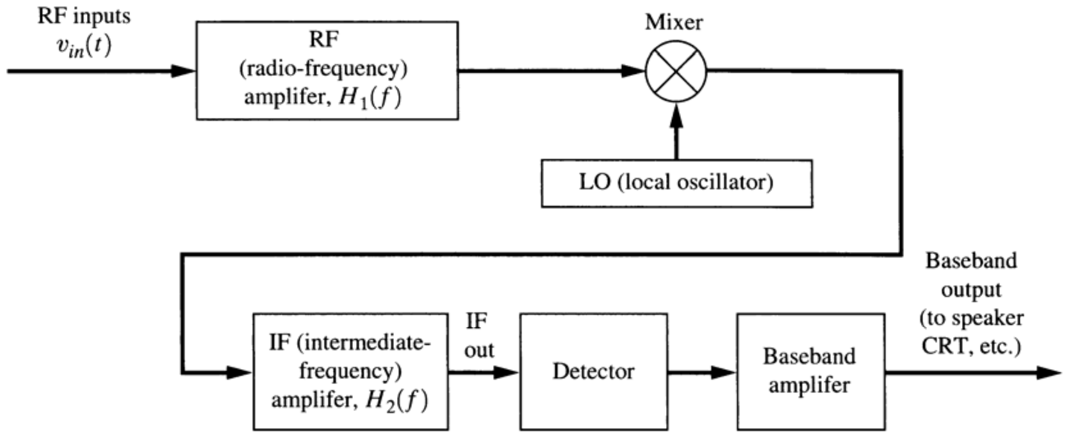


4.12.3 pav. Suderintojo radijo dažnio imtuvo struktūrinė schema.

Suderintojo radijo dažnio imtuvo struktūrinė schema pateikta 4.12.3 pav. TRF imtuvą sudaro kelių aukštadažnių stiprinimo pakopų stiprintuvas, detektorius (žr. 4.10 poskyrį) ir žemadažnis stiprintuvas. Kelios aukštadažnės stiprinimo pakopos reikalingos signalo filtravimui ir pakankamai stipraus detektoriaus įėjimo signalo užtikrinimui. TRF imtuvų pranašumai yra jų paprastumas ir didelis jautris tam dažniui, kuriam jie suderinti. Tačiau kintamo (derinamo) dažnio TRF imtuvai praktikoje nenaudojami dėl šių priežasčių:

1. TRF imtuvo dažnių juostos plotis priklauso nuo suderinimo dažnio ω_c. Taip yra dėl ***paviršiaus efekto***, kuris pasireiškia tuo, kad radijo dažnių diapazone elektros srovė yra sutelkta arti laidininko paviršiaus, ir laidininko skerspjūvio ploto dalis, kuria teka srovė, yra tuo mažesnė, kuo aukštesnis dažnis. Dėl šios priežasties laidininko varža R, esant aukštiems dažniams, yra apytiksliai proporcinga dažniui. Kadangi ritės induktyvumas L nepriklauso nuo dažnio (suderinimas pasiekiamas, keičiant talpą C), tai, kai $R \sim \omega_c$, virpesių kontūro kokybė Q (4.10.22) nepriklauso nuo dažnio. Tačiau virpesių kontūro, kuris suderintas dažniui ω_c, 3 dB lygio dažnių juostos plotis lygus ω_c/Q. Vadinasi, dėl paviršiaus efekto šis juostos plotis auga, didėjant suderinimo dažniui. Todėl, jeigu imtuvo dažnių juosta atitinka kažkurio dažnio juostinio signalo perdavimo juostos plotį (4.5.3), tai dukart didesnio dažnio signalui imtuvo juostos plotis bus dukart didesnis už perdavimo juostos plotį. T.y., imtuvas galės vienu metu priimti dviejų kaimyninių kanalų signalus. Ir atvirkščiai: dukart mažesnio dažnio signalui imtuvo juostos plotis taps dukart mažesnis už perdavimo juostos plotį, t.y., priimtasis signalas bus stipriai iškraipomas.
2. Kelių pakopų radijo dažnio stiprintuve sunku išvengti teigiamo grįžtamojo ryšio, dėl kurio stiprintuvas gali virsti generatoriumi.
3. Praktiškai sunku pasiekti, kad kelių pakopų radijo dažnio stiprintuvo perdavimo koeficientas nepriklausytų nuo dažnio.
4. Keičiant suderinimo dažnį, visas radijo dažnio stiprinimo pakopas reikia perderinti vienu metu. Norint, kad tai būtų galima atlikti vienu reguliatoriumi, visų suderintųjų kontūrų charakteristikos turi būti vienodos, o tai pasiekti yra neįmanoma.

Daugumoje imtuvų įgyvendintas ***superheterodininis priėmimo metodas***. Naudojant šį metodą, priimtojo juostinio signalo spektras perkeliamas į fiksuoto dažnio, kuris vadinamas ***tarpiniu dažniu***, aplinką, ir tik po to detektuojamas. Imtuvai, kurie naudoja šį metodą, vadinami ***superheterodininiais imtuvais***. Tokio imtuvo struktūrinė schema pavaizduota 4.12.4 pav. Signalas iš pradžių sustiprinamas radijo dažnio (*radio frequency*, ***RF***) stiprintuvo, o po to dauginamas iš sinusinio generatoriaus (*local oscillator*, ***LO***) signalo, naudojant maišiklį (žr. 4.8 poskyrį). Pastarojo generatoriaus vaidmenį gali atlikti dažnio sintezatorius (žr. 4.11 poskyrį).



4.12.4 pav. Superheterodininio radijo imtuvo struktūrinė schema.

Tarpinis dažnis (*intermediate frequency*, ***IF***) – tai nešlio dažnio ir generatoriaus dažnio suma arba skirtumas (dažniausiai – skirtumas). Tarpinio dažnio juostą išskiria IF stiprintuvas ir filtras. Imtuvo derinimas pasireiškia įėjimo stiprintuvo pralaidumo juostos centrinio dažnio ir generatoriaus dažnio sinchroniniu keitimu, kad jų suma arba skirtumas (t.y., tarpinis dažnis) būtų pastovus.

Pagrindiniai superheterodininio imtuvo pranašumai, lyginant su derinamo dažnio TRF imtuvu, yra susiję su tuo, kad tarpinis dažnis yra pastovus ir gali žymiai skirtis nuo nešlio dažnio. Todėl tarpinį dažnį galima parinkti nepriklausomai nuo nešlio dažnio, remiantis vien reikalavimais stiprintuvo kokybei ir kainai. Reikalavimai tarpiniam dažniui yra šie:

- Tarpinis dažnis turi būti toks, kad būtų kuo paprasčiau pagaminti stabilų didelio stiprinimo koeficiento IF stiprintuvą.
- Tarpinis dažnis turi būti pakankamai žemas, kad būtų galima pasiekti pakankamai aukštą virpesių kontūrų kokybę, naudojant pigius komponentus IF filtruose (aukšta kontūrų kokybė reikalinga tam, kad IF filtrų perdavimo funkcija kuo staigiau mažėtų už IF signalo perdavimo juostos ribų).
- Tarpinis dažnis turi būti pakankamai aukštas, kad veidrodinis dažnis kuo labiau skirtųsi nuo nešlio dažnio. ***Veidrodinis dažnis*** (*image frequency*) apibrėžiamas tokiu būdu: jeigu IF signalas formuojamas žeminamojo dažnio keitimo būdu, tuomet veidrodinis dažnis yra simetriškas nešlio dažniui atžvilgiu *generatoriaus* dažnio, o jeigu aukštinamojo dažnio keitimo būdu, tuomet veidrodinis dažnis yra simetriškas nešlio dažniui atžvilgiu *tarpinio* dažnio. Veidrodinio dažnio signalas priimamas todėl, kad po daugybos su generatoriaus signalu veidrodinio dažnio signalo žeminamojo dažnio keitimo spektras atsiduria ties tarpiniu dažniu (žr. žemiau). Vienintelis būdas išvengti šio reiškinio – pasiekti, kad veidrodinis dažnis būtų kuo toliau nuo įėjimo RF stiprintuvo pralaidumo juostos, t.y., kad kuo labiau skirtųsi nuo nešlio dažnio.

Tarpinio dažnio f_{IF} ir veidrodinio dažnio f_{image} išraiškos nešlio dažniu f_c ir generatoriaus dažniu f_{LO} priklauso nuo to, ar IF filtras išskiria aukštinamojo dažnio keitimo dedamąją, ar žeminamojo dažnio keitimo dedamąją (žr. 4.8 poskyrį). Be to, jeigu naudojama žeminamojo dažnio keitimo dedamoji, tuomet šios išraiškos priklauso nuo to, kuris iš dažnių f_c ir f_{LO} yra didesnis (plg. antrąjį dėmenį (4.8.2) ir (4.8.3) reiškiniuose). Jeigu tarpinis dažnis yra žeminamojo dažnio keitimo dažnis, tuomet jo išraiška dažniais f_c ir f_{LO} yra

$$f_{\mathrm{IF}} = \begin{cases} f_{\mathrm{LO}} - f_c, & \text{jeigu } f_{\mathrm{LO}} > f_c \ (\textit{high-side injection}); \\ f_c - f_{\mathrm{LO}}, & \text{jeigu } f_{\mathrm{LO}} < f_c \ (\textit{low-side injection}), \end{cases} \tag{4.12.5}$$

o veidrodinio dažnio atitinkamos išraiškos yra

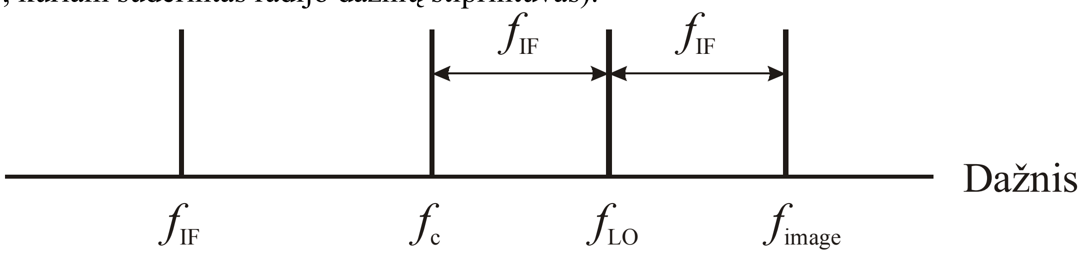
$$f_{\text{image}} = \begin{cases} f_c + 2f_{\text{IF}}, & \text{jeigu } f_{\text{LO}} > f_c; \\ f_c - 2f_{\text{IF}}, & \text{jeigu } f_{\text{LO}} < f_c, \end{cases} \tag{4.12.6}$$

Jeigu tarpinis dažnis yra aukštinamojo dažnio keitimo dažnis, tuomet

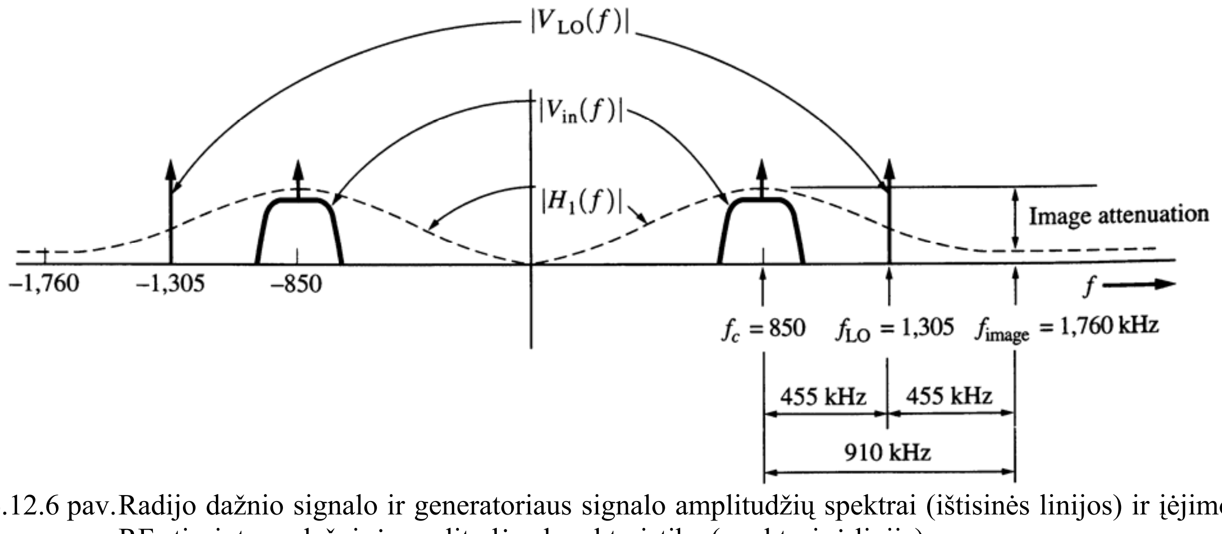
$$f_{\text{IF}} = f_c + f_{\text{LO}}, \tag{4.12.7}$$

$$f_{\text{image}} = f_c + 2f_{\text{LO}} = 2f_{\text{IF}} - f_c. \tag{4.12.8}$$

Veidrodinis atsakas – tai pašalinio signalo, kurio perdavimo juosta yra ties veidrodiniu dažniu (***veidrodinio signalo***), priėmimas kartu su naudinguoju signalu. Šį reiškinį iliustruoja 4.12.5 pav. Šiame pavyzdyje tarpinis dažnis f_{IF} – tai žeminamojo dažnio keitimo dažnis, o generatoriaus dažnis f_{LO} yra didesnis už nešlio (RF) dažnį f_c. Akivaizdu, kad $f_{\text{image}} - f_{\text{LO}} = f_{\text{LO}} - f_c = f_{\text{IF}}$. T.y., po žeminamojo dažnio keitimo veidrodinio signalo spektras atsiduria ties tarpiniu dažniu. (4.12.6) ir (4.12.8) formulėse matyti, kad, didėjant tarpiniam dažniui f_{IF}, veidrodinio dažnio f_{image} ir nešlio dažnio f_c skirtumas auga. Todėl, didėjant tarpiniam dažniui f_{IF}, mažėja veidrodinio dažnio indėlis į IF signalą. Tai akivaizdu 4.12.6 pav. Šiame paveiksle ištisinėm linijom pavaizduoti RF signalo ir generatoriaus virpesio amplitudžių spektrai, o punktyrine linija – įėjimo RF stiprintuvo dažninė amplitudės charakteristika. Kadangi stiprinimas mažėja, tolstant nuo stiprintuvo pralaidumo juostos centrinio dažnio, tai, norint išvengti veidrodinio atsako, tarpinis dažnis turi būti pakankamai didelis (t.y., veidrodinis dažnis turi būti kuo toliau nuo dažnio, kuriam suderintas radijo dažnių stiprintuvas).

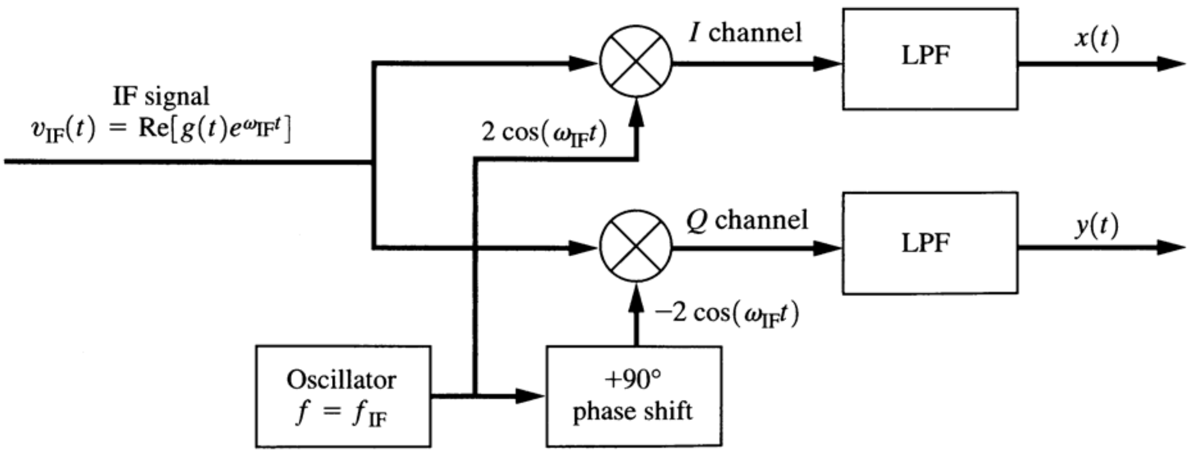


4.12.5 pav. Veidrodinis dažnis.



4.12.6 pav. Radijo dažnio signalo ir generatoriaus signalo amplitudžių spektrai (ištisinės linijos) ir įėjimo RF stiprintuvo dažninė amplitudės charakteristika (punktyrinė linija).

IF signalo detektoriaus tipas priklauso nuo moduliavimo rūšies. Pvz., fazės moduliavimo sistemoje galima panaudoti sandaugos detektorių, kurio generatoriaus dažnis sutampa su tarpiniu dažniu, o generatoriaus ir IF signalo nešlio fazių skirtumas lygus 90° (žr. 4.10.2 poskyrį ir (4.10.9b) lygybę). AM radiofonijos imtuvuose naudojami gaubtinės detektoriai (žr. 4.10.1 poskyrį). Egzistuoja imtuvai su ***IQ detektoriais*** (*in-phase and quadrature phase detectors*), kurie vienu metu detektuoja juostinio signalo (4.12.3) sinfazinės dedamosios amplitudę $x(t)$ ir



4.12.7 pav. IQ detektoriaus struktūrinė schema

kvadratūrinės dedamosios amplitudę $y(t)$. Tokio detektoriaus struktūrinė schema pateikta 4.12.7 pav.

Superheterodininio imtuvo pranašumai yra šie:

- Net tuo atveju, kai tarp imtuvo įėjimo ir išėjimo egzistuoja teigiamas grįžtamasis ryšys, stiprintuvai lieka stabilūs, esant dideliems stiprinimo koeficientams, nes stiprinimas gaunamas trijose dažnių juostose, kurios yra toli viena nuo kitos: RF dažniai, IF dažniai ir žemieji dažniai (žr. 4.12.4 pav.).
- Imtuvą galima lengvai suderinti kitam dažniui, keičiant generatoriaus dažnį ir perderinant įėjimo RF stiprintuvą.
- Aukštos kokybės virpesių kontūrai, kurie reikalingi efektyviam kaimyninių kanalų slopinimui, naudojami tik IF stiprintuve, kuris suderintas pastoviam dažniui.

Superheterodininio imtuvo pagrindinis trūkumas yra tas, kad šalia to RF dažnio, kuriam jis yra suderintas, imtuvas gali priimti ir pašalinius dažnius. Vienas iš tokių dažnių – tai aukščiau minėtasis veidrodinis dažnis. Be to, jeigu generatoriaus signalas nėra idealiai harmoninis, tuomet gali būti priimami RF dažniai, kurie atitinka generatoriaus signalo aukštesniąsias harmonikas.

4.13. Uždavinių sprendimo pavyzdžiai

Pavyzdys Nr. 1

Duotas moduliuotos amplitudės įtampos signalas $s(t)$, kurio nešlio dažnis 1150 kHz, nešlio amplitudė $A_c = 500$ V, o moduliavimo signalas yra 1 kHz sinusoidė:

$$m(t) = 0.8\sin(2\pi 1000t)\,. \tag{4.13.1}$$

Apskaičiuokite signalo $s(t)$ spektrą.

Sprendimas

Visų pirma signalą $m(t)$ išreiškiame kompleksiniu pavidalu (žr. priedo A formulę (A-1)):

$$m(t) = \frac{0.8}{2j}(e^{j2\pi 1000t} - e^{-j2\pi 1000t})\,. \tag{4.13.2}$$

Įrašę $m(t)$ išraišką (4.13.2) į Furjė transformacijos apibrėžimą (2.2.1) ir pasinaudoję delta funkcijos integraline išraiška (2.2.16), randame moduliavimo signalo spektrą:

$$M(f) = -j\,0.4\,\delta(f-1000) + j\,0.4\,\delta(f+1000)\,. \tag{4.13.3}$$

Įrašę (4.13.3) į AM signalo spektro bendrąją išraišką (4.3.14a), gauname signalo $s(t)$ spektrą:

$$S(f) = 250\,\delta(f - f_c) - j100\,\delta(f - f_c - 1000) + j100\,\delta(f - f_c + 1000) + \\ + 250\,\delta(f + f_c) - j100\,\delta(f + f_c - 1000) + j100\,\delta(f + f_c + 1000). \tag{4.13.4}$$

Pavyzdys Nr. 2

Apskaičiuokite signalo, kuris aprašytas ankstesniajame uždavinyje, galios spektrinį tankį.

Sprendimas

Pagal formulę (2.3.13), signalo (4.13.1) autokoreliacijos funkcija lygi

$$R_m(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos\omega_0\tau = \frac{A^2}{4}(e^{j\omega_0\tau} + e^{-j\omega_0\tau})\,; \tag{4.13.5}$$

čia $A = 0.8$, $\omega_0 = 2\pi 1000$. Pagal Vinerio ir Chinčino teoremą (2.3.10), moduliavimo signalo $m(t)$ galios spektrinis tankis yra jo autokoreliacijos funkcijos (4.3.5) Furjė transformacija. Įrašę (4.3.5) į Furjė transformacijos apibrėžimą (2.2.1) ir pasinaudoję delta funkcijos integraline išraiška (2.2.16), randame moduliavimo signalo galios spektrinį tankį:

$$P_m(f) = \frac{A^2}{4}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

arba

$$P_m(f) = 0.16[\delta(f - 1000) + \delta(f + 1000)]\,. \tag{4.13.6}$$

Pagal autokoreliacijos funkcijos apibrėžimą (2.3.8), AM signalo kompleksinės gaubtinės $g(t)$ autokoreliacijos funkcija lygi

$$R_g(\tau) = \langle g^*(t)g(t+\tau)\rangle = A_c^2\langle[1 + m(t)][1 + m(t+\tau)]\rangle = A_c^2[\langle 1\rangle + \langle m(t)\rangle + \langle m(t+\tau)\rangle + \langle m(t)m(t+\tau)\rangle]\,.$$

Tačiau $\langle 1\rangle = 1$, $\langle m(t)\rangle = 0$, $\langle m(t+\tau)\rangle = 0$, o $\langle m(t)m(t+\tau)\rangle \equiv R_m(\tau)$. Vadinasi,

$$R_g(\tau) = A_c^2 + A_c^2 R_m(\tau)\,. \tag{4.13.7}$$

Apskaičiavę lygybės (4.13.7) abiejų pusių Furjė transformaciją, gauname

$$P_g(f) = A_c^2\delta(f) + A_c^2 P_m(f)\,. \tag{4.13.8}$$

Įrašę reiškinį (4.13.8) į juostinio signalo galios spektrinio tankio bendrąją išraišką (4.3.8) ir atsižvelgę į (4.13.6), gauname AM signalo $s(t)$ galios spektrinį tankį:

$$P_s(f) = 62500\,\delta(f - f_c) + 10000\,\delta(f - f_c - 1000) + 10000\,\delta(f - f_c + 1000) + \\ + 62500\,\delta(f + f_c) + 10000\,\delta(f + f_c - 1000) + 10000\,\delta(f + f_c + 1000). \tag{4.13.9}$$

Pavyzdys Nr. 3

Moduliuotos amplitudės įtampos signalas $s(t)$, kuris aprašytas šio poskyrio pirmajame uždavinyje, yra prijungtas prie 50 Ω varžinės apkrovos. Apskaičiuokite vidutinius galios nuostolius apkrovoje (čia turima omenyje tikroji, o ne normuotoji galia).

Sprendimas

Pagal formulę (4.3.15), AM signalo vidutinė normuotoji galia lygi

$$(P_s)_{\text{norm}} = (V_s)^2_{\text{rms}} = \tfrac{1}{2}A_c^2[1 + (V_m)^2_{\text{rms}}] = \tfrac{1}{2}(500)^2\left[1 + \left(\frac{0.8}{\sqrt{2}}\right)\right]^2 = 165\ \text{kW}\,; \tag{4.13.10}$$

čia $(V_s)_{\text{rms}}$ yra juostinio $s(t)$ efektinis vidurkis, o $(V_m)_{\text{rms}}$ yra moduliavimo signalo $m(t)$ efektinis vidurkis (užrašant lygybę (4.13.10), pasinaudota tuo, kad harmoninio signalo efektinis vidurkis yra lygus signalo amplitudės ir skaičiaus $\sqrt{2}$ santykiui).

Pastaba: $(P_s)_{\text{norm}}$ gali būti apskaičiuota ir kitu būdu – suintegravus galios spektrinį tankį (4.13.9) dažnio atžvilgiu nuo -∞ iki ∞:

$$(P_s)_{\text{norm}} = (V_s)^2_{\text{rms}} = \int_{-\infty}^{\infty} P_s(f)df = 165\,\text{kW}\,. \tag{4.13.11}$$

Tikroji vidutinė galia R = 50 Ω varžinėje apkrovoje lygi

$$(P_s)_{\text{tikr}} = \frac{(P_s)_{\text{norm}}}{R} = \frac{(V_s)^2_{\text{rms}}}{R} = \frac{1.65\cdot 10^5}{50} = 3.3\,\text{kW}\,. \tag{4.13.12}$$

Pastaba: Jeigu $s(t)$ nusakytų ne įtampą, o srovę, tuomet, skaičiuojant tikrąją galią, normuotąją galią reikėtų dauginti iš varžos: $(P_s)_{\text{tikr}} = (P_s)_{\text{norm}} R = (I_s)^2_{\text{rms}} R$

Pavyzdys Nr. 4

Moduliuotos amplitudės įtampos signalas $s(t)$, kuris aprašytas šio poskyrio pirmajame uždavinyje, yra prijungtas prie 50 Ω varžinės apkrovos. Apskaičiuokite didžiausiąją gaubtinės galią apkrovoje (čia turima omenyje tikroji, o ne normuotoji galia).

Sprendimas

Pagal formulę (4.3.10), normuotoji didžiausioji gaubtinės galia lygi

$$(P_{\text{PEP}})_{\text{norm}} = \tfrac{1}{2}[\max|g(t)|]^2 = \tfrac{1}{2}A_c^2[1+\max m(t)]^2 = \tfrac{1}{2}(500)^2[1+0.8]^2 = 405\,\text{kW}\,. \tag{4.13.13}$$

Tikroji didžiausioji gaubtinės galia 50 Ω varžinėje apkrovoje lygi

$$(P_{\text{PEP}})_{\text{tikr}} = \frac{(P_{\text{PEP}})_{\text{norm}}}{R} = \frac{4.05\cdot 10^5}{50} = 8.1\,\text{kW}\,. \tag{4.13.14}$$

Pavyzdys Nr. 5

Juostinis signalas išmatuojamas atskirais laiko momentais ir matavimų duomenys (imtys) išsaugomi vėlesnei analizei. Šio juostinio signalo juostos plotis B_T yra žymiai mažesnis už nešlio dažnį f_c, o dažnių juostos centras sutampa su f_c (žr. 4.13.1 pav. viršuje). Atranka atliekama, naudojant vieną iš trijų metodų, kurių schemos pavaizduotos 4.13.1 pav. Kiekvienam iš šių trijų metodų išreiškite mažiausią atrankos dažnį (t.y., mažiausią valdymo impulsų generatoriaus dažnį) ir aptarkite kiekvieno metodo privalumus ir trūkumus.

Sprendimas

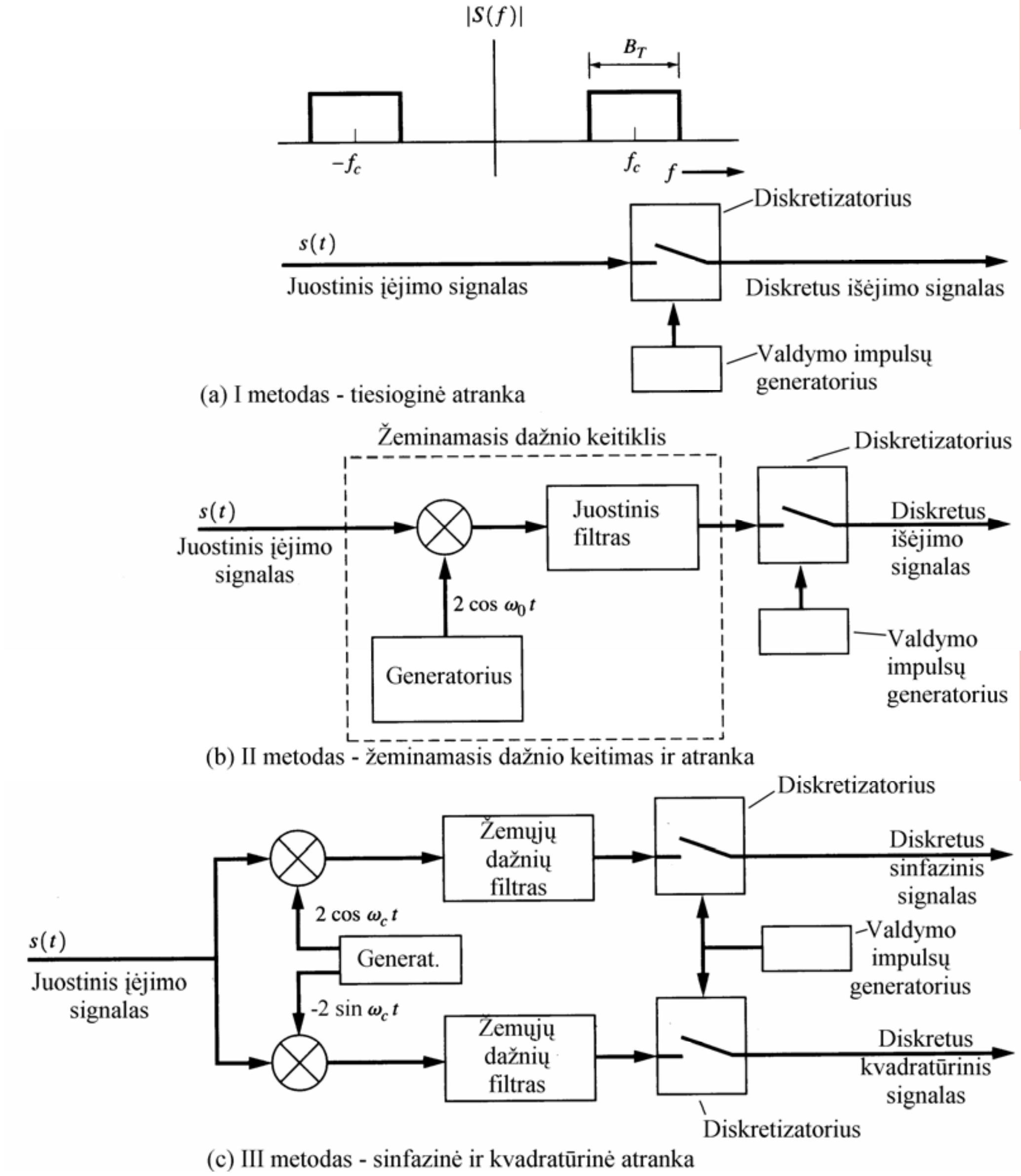
I metodas. Pirmasis metodas, kurio schema pavaizduota 4.13.1a pav., naudoja tiesioginę atranką, apie kurią buvo kalbama 2.7 poskyryje. Pagal formulę (2.7.11), mažiausias atrankos dažnis yra $(f_s)_{\min} = 2B$; čia B yra aukščiausias dažnis signalo spektre. Duotajam juostiniam signalui aukščiausias dažnis yra $B = f_c + B_T/2$. Vadinasi, I metodo atveju mažiausias atrankos dažnis yra

$$(f_s)_{\min} = 2B = 2f_c + B_T \qquad \text{(I metodas).} \tag{4.13.15}$$

Pvz., jeigu f_c = 100 MHz, o B_T = 1 MHz, reikalingas atrankos dažnis yra $(f_s)_{\min}$ = 201 MHz.

II metodas. Naudojant antrąjį metodą, kurio schema pavaizduota 4.13.1b pav., visų pirma atliekamas žeminamasis dažnio keitimas, todėl aukščiausias dažnis signalo spektre žymiai sumažėja. Dažnio pokytis turi būti toks, kad teigiamųjų ir neigiamųjų dažnių spektro dalys (žr. 4.13.1 pav. viršuje) nepersiklotų, nes priešingu atveju signalas būtų iškraipytas (jeigu šalinės juostos nėra simetriškos viena kitai). Vadinasi, didžiausias leistinas dažnio pokytis yra toks, kad teigiamųjų dažnių spektro srities kairysis kraštas atsidurtų ties nuliniu dažniu. Tokiu atveju generatoriaus dažnis turi būti lygus $f_0 = f_c - B_T/2$. Vadinasi, po žeminamojo dažnio keitimo didžiausias dažnis signalo spektre yra $B = (f_c + B_T/2) - f_0 = B_T$. Pagal formulę (2.7.11), mažiausias atrankos dažnis yra

$$(f_s)_{\min} = 2B = 2B_T \qquad \text{(II metodas).} \tag{4.13.16}$$



4.13.1 pav. Trys juostinio signalo diskretizavimo metodai

Kai $f_0 = f_c - B_T/2$, juostinis filtras 4.13.1b pav. schemoje virsta žemųjų dažnių filtru, kurio ribinis dažnis B_T. *Pastaba*: Daugiklis 2 prieš $\cos\omega_0 t$ 4.13.1b pav. schemoje reikalingas, siekiant kompensuoti galios nuostolius, kurie atsiranda, pašalinus aukštinamojo dažnio keitimo dedamąją.

Akivaizdu, kad II metodas leidžia žymiai sumažinti atrankos dažnį, lyginant su I metodu. Pvz., jeigu f_c = 100 MHz, o B_T = 1 MHz, tuomet mažiausias atrankos dažnis yra $(f_s)_{\min}$ = 2 MHz vietoj 201 MHz, kurie reikalingi I metodo atveju. Tai yra svarbus II metodo privalumas. Tačiau, iš kitos pusės, II metodo schema yra sudėtingesnė: ji naudoja žeminamąjį dažnio keitiklį (tai yra II metodo trūkumas). Be to, reikia pastebėti, kad II metodo atveju dažnis $(f_s)_{\min}$ sutampa su dažniu, kurį numato juostinio signalo ėmimo teorema (4.5.2). Vadinasi, II metodas yra vienas iš efektyviausių juostinio signalo ėmimo metodų. Tačiau, atkūrus juostinį signalą iš imčių pagal formules (2.7.3) ir (2.7.6), gauname signalą, pagal kurį palyginti sunku atkurti pradinio juostinio signalo kompleksinę gaubtinę. Tai apsunkina imčių skaitmeninį apdorojimą. Šio trūkumo neturi III metodas.

<u>III metodas</u>. Trečiasis metodas, kurio schema pavaizduota 4.13.1c pav., naudoja sinfazinį ir kvadratūrinį sandaugos detektorius, kurie atkuria signalo $s(t)$ kompleksinės gaubtinės realiąją ir menamąją dalis $x(t)$ ir $y(t)$. Aukščiausias dažnis signalų $x(t)$ ir $y(t)$ spektruose yra $B = B_T/2$. Todėl, pagal (2.7.11), mažiausia kiekvieno iš šių signalų ėmimo sparta yra

$$(f_s)_{\min} = 2B = B_T \text{ kiekvienam diskretizatoriui} \qquad \text{(III metodas).} \qquad (4.13.17)$$

Kadangi naudojami du diskretizatoriai, tai pilnutinė ėmimo sparta yra dvigubai didesnė: $(f_s)_{\min\ \text{piln}} = 2B_T$. Ši vertė taip pat sutampa su mažiausiąja juostinių signalų ėmimo sparta (žr. (4.5.2)). Taigi, III metodas, kaip ir II metodas, yra vienas iš efektyviausių juostinio signalo ėmimo būdų. Tačiau, naudojant III metodą, gaunamos kompleksinės gaubtinės realiosios ir menamosios dalių $x(t)$ ir $y(t)$ imtys. Tai yra privalumas, lyginant su II metodu, nes, turint šias imtis, galima atlikti įvairias signalo transformacijas. Pvz., žinant moduliavimo tipą, pagal šias imtis galima palyginti lengvai atkurti moduliavimo signalą m (žr. priedo C lentelę C-1).

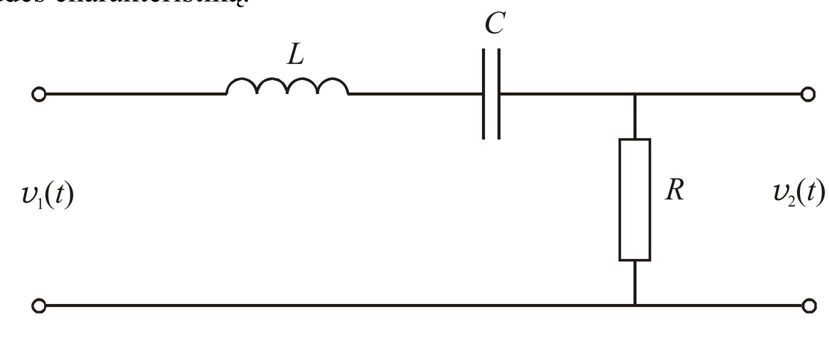
Uždaviniai

4.1. Įrodykite, kad juostinio signalo išraiškos (4.1.1b) ir (4.1.1c) išplaukia iš (4.1.1a), laikant, kad $g(t) = x(t) + j\,y(t) = R(t)e^{j\theta(t)}$.

4.2. Dvipusės šalinės juostos numalšintojo nešlio signalo $s(t)$ gaubtinė yra $g(t) = A_c m(t)$. Nešlio amplitudė $A_c = 50$ V, o moduliavimo signalas $m(t)$ yra 1 kHz dažnio sinusoidė: $m(t) = 2\sin(2\pi 1000t)$. Apskaičiuokite signalo $s(t)$ spektrą.

4.3. Dvipusės šalinės juostos numalšintojo nešlio įtampos signalas $s(t)$, kuris aprašytas uždavinio 4.2 sąlygoje, yra prijungtas prie 50 Ω varžinės apkrovos.
(a) Apskaičiuokite tikruosius vidutinius galios nuostolius apkrovoje.
(b) Apskaičiuokite tikrąją didžiausiąją gaubtinės galią.

4.4. Juostinio filtro schema pavaizduota žemiau.
(a) Išreiškite šio filtro perdavimo funkciją $H(f) = V_2(f)/V_1(f)$. Dydžiai R, L ir C turi įeiti į perdavimo funkcijos išraišką kaip parametrai. Grafiškai pavaizduokite dažninę amplitudės charakteristiką $|H(f)|$.
(b) Išreiškite ekvivalenčiojo žemųjų dažnių filtro perdavimo funkciją ir pavaizduokite atitinkamą dažninę amplitudės charakteristiką.



4.5. Moduliuoto dažnio signalas yra tokio pavidalo:

$$s(t) = \cos\left[\omega_c t + D_f \int_{-\infty}^{t} m(\sigma)d\sigma\right];$$

čia $m(t)$ yra moduliavimo signalas, o $\omega_c = 2\pi f_c$, kur f_c yra nešlio dažnis. Įrodykite, kad funkcijų $g(t)$, $x(t)$, $y(t)$, $R(t)$ ir $\theta(t)$ išraiškos, kurios pateiktos priedo C lentelėje C-1 moduliuoto dažnio atvejui, yra teisingos.

4.6. Duotas juostinis signalas

$$s(t) = 100\sin(\omega_c + \omega_a)t + 500\cos\omega_c t - 100\sin(\omega_c - \omega_a)t\ ,$$

kuris gautas, moduliuojant nešlio signalą 500 cos$\omega_c t$.

(a) Raskite signalo $s(t)$ kompleksinę gaubtinę. Kokio tipo moduliavimas tai yra? Koks yrs moduliavimo signalas?

(b) Raskite signalo $s(t)$ kompleksinės gaubtinės realiąją ir menamąją dalis $x(t)$ ir $y(t)$.

(c) Raskite signalo $s(t)$ realiąją gaubtinę $R(t)$ ir pradinę fazę $\theta(t)$.

(d) Apskaičiuokite vidutinę signalo $s(t)$ galią 50 Ω varžinėje apkrovoje.

4.7. Apskaičiuokite 4.6 uždavinyje aprašyto signalo $s(t)$ spektrą dviem būdais:

(a) tiesiogiai skaičiuojant funkcijos $s(t)$ Furjė transformaciją,

(b) naudojant (4.3.4).

4.8. Juostinio stiprintuvo išėjimo charakteristika nusakoma reiškiniu (4.6.2). Stiprintuvo tiesiškumas įvertinamas, naudojant dviejų sinusinių signalų sumą (4.6.8).

(a) Išreiškite penktosios eilės intermoduliacinių iškraipymų dažnius, kurie priklauso stiprintuvo dažnių juostai.

(b) Išreiškite penktosios eilės intermoduliacinių iškraipymų amplitudes dydžiais A_1, A_2 ir K_5.

4.9. Stiprintuvo harmoniniai iškraipymai matuojami, naudojant sinusinį įėjimo signalą. Išėjimo signalas tiriamas spektro analizatoriumi. Nustatyta, kad trijų išmatuotųjų harmonikų amplitudės mažėja eksponentiškai, t.y., $V_{n+1} = V_1 e^{-n}$, kur n = 1, 2, 3. Apskaičiuokite harmoninių iškraipymų koeficientą.

4.10. Sinusinis signalas praleidžiamas pro idealųjį ribotuvą. Apskaičiuokite išėjimo signalo harmoninių iškraipymų koeficientą.

4.11. Apskaičiuokite perėjimo per nulį dažnio detektoriaus (*zero-crossing detector*), kuris pavaizduotas 4.10.7a pav., jautrį. Šio detektoriaus jautris – tai koeficientas K sąryšyje $\upsilon_{\mathrm{out}} = Kf_d$, kur υ_{out} yra detektoriaus išėjimo įtampa, o f_d yra įėjimo signalo momentinio dažnio f_i nuokrypis nuo nešlio dažnio f_c: $f_d = f_i - f_c$. Jautris K turi būti išreikštas žemųjų dažnių filtrų parametrais R ir C (žr. 4.10.7a pav.) bei diferencialinio stiprintuvo stiprinimo koeficientu A, kuris susieja stiprintuvo išėjimo įtampą ir jo įėjimo įtampų skirtumą: $\upsilon_{\mathrm{out}}(t) = A[\upsilon_2(t) - \upsilon_3(t)]$. Monovibratoriaus išėjimo signalų Q ir $\overline{Q}$ maksimali vertė lygi 4 V.

4.12. (a) Naudodamiesi sąryšiu (4.11.13) arba (4.11.14), įrodykite, kad PLL kilpos tiesinis modelis nusakomas 4.11.4 pav.

(b) Įrodykite, kad 4.11.4 pav. pavaizduotos schemos uždarojo kontūro perdavimo funkcija išreiškiama formule (4.11.18).

4.13. Superheterodininis FM radijo imtuvas yra suderintas dažniui 96.9 MHz. Yra žinoma, kad generatoriaus dažnis yra didesnis už nešlio dažnį, o tarpinis dažnis yra 10.7 MHz.

(a) Apskaičiuokite generatoriaus dažnį.

(b) Apskaičiuokite radijo dažnių ir tarpinio dažnių filtrų ribinius dažnius, jeigu FM signalo juostos plotis yra 180 kHz.

(c) Apskaičiuokite veidrodinį dažnį.

4.14. Palydovinio ryšio imtuvas yra suderintas 4 GHz dažniui. Tarpinis dažnis yra 70 MHz. Koks yra veidrodinis dažnis, kai:

(a) Generatoriaus dažnis yra didesnis už nešlio dažnį?

(b) Generatoriaus dažnis yra mažesnis už nešlio dažnį?

4.15. Superheterodininis radijo imtuvas suderintas 20 MHz dažniui. Generatoriaus dažnis yra 80 MHz, o tarpinis dažnis yra 100 MHz.
(a) Koks yra veidrodinis dažnis?
(b) Jeigu generatorius generuoja ne tik pirmosios, bet ir antrosios harmonikos virpesį, kokie du pašaliniai radijo dažniai yra priimami?
(c) Jeigu radijo dažnių stiprintuvas turi suderintąjį lygiagretųjį virpesių kontūrą, kurio kokybė $Q = 50$, koks yra veidrodinio dažnio slopinimas (decibelais)?
Pastaba: Atliekant punktą (c), reikia pasinaudoti lygiagrečiojo virpesių kontūro rezonanso kreivės išraiška:

$$\frac{I_C}{(I_C)_{\max}} = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{f}{f_0}-\frac{f_0}{f}\right)^2}};$$

čia I_C yra kontūro kondensatoriumi tekančios srovės (kontūro išėjimo signalo) amplitudė, o $(I_C)_{\max}$ yra šios amplitudės didžiausioji vertė, kuri pasiekiama, kai kontūro rezonanso dažnis f_0 sutampa su įėjimo srovės (kontūro įėjimo signalo) dažniu f.

4.16. Naudodami matematinę tiesiškumo apibrėžtį, kuri pateikta 2.6 poskyryje, įrodykite, kad 4.8.3 pav. pavaizduotasis įrenginys yra tiesinis.

4.17. Moduliuotos amplitudės (AM) signalo imtuvas su gaubtinės detektoriumi yra suderintas vienpusės šalinės juostos numalšintojo nešlio (*single sideband suppressed carrier*, SSB-AM) signalui, kurio moduliavimo signalas yra $m(t)$. Išreiškite imtuvo išėjimo garsinį signalą moduliavimo signalu $m(t)$. Ar garsinis signalas yra iškraipytas?

5. AM, FM IR SKAITMENINIO MODULIAVIMO SISTEMOS

5.1. Amplitudės moduliavimas

Pagal Priedo C lentelę C-1, AM signalo kompleksinė gaubtinė yra

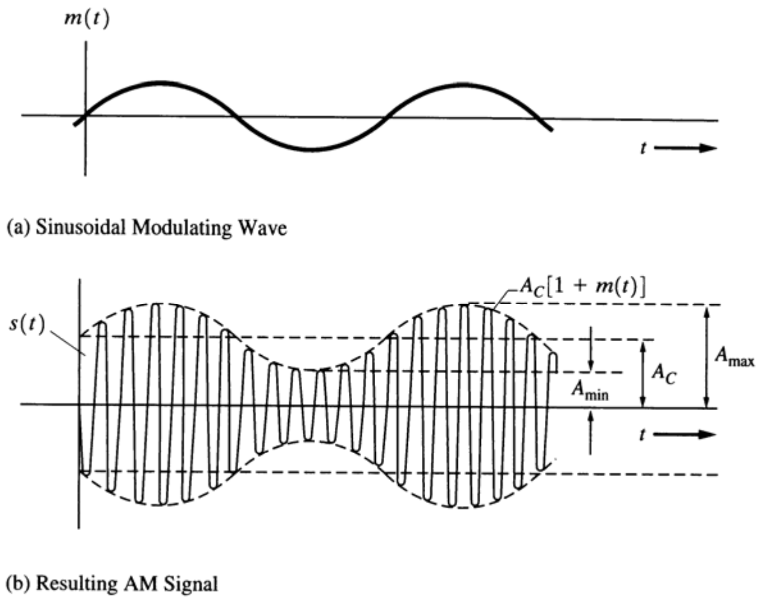
$$g(t) = A_c[1 + m(t)], \qquad (5.1.1)$$

kur A_c yra nemoduliuoto nešlio amplitudė, o $m(t)$ yra analoginis arba skaitmeninis moduliavimo signalas. Pagal bendrąją juostinio signalo išraišką (4.1.1a), kompleksinė gaubtinė (5.1.1) atitinka tokią AM signalo išraišką:

$$s(t) = A_c[1 + m(t)]\cos\omega_c t, \qquad (5.1.2)$$

kur $\omega_c = 2\pi f_c$ yra nešlio dažnis. AM signalo pavyzdys pateiktas 5.1.1 pav. (šiame pavydyje moduliavimo signalas yra sinusoidė).

AM signalo nešlio amplitudės santykinio kitimo ribas nusako moduliavimo procentas. Praktikoje naudojami trys moduliavimo procento apibrėžimai:



5.1.1 pav. (a) moduliavimo signalas, (b) atitinkamas moduliuotosios amplitudės (AM) signalas.

AM signalo ***teigiamo moduliavimo procentas*** lygus

$$k^+ = \frac{A_{\max} - A_c}{A_c} \times 100 = \max[m(t)] \times 100, \qquad (5.1.3)$$

kur $A_{\max}$ yra didžiausia nešlio amplitudė ($A_{\max} > A_c$), o ***neigiamo moduliavimo procentas*** –

$$k^- = \frac{A_c - A_{\min}}{A_c} \times 100 = -\min[m(t)] \times 100, \qquad (5.1.4)$$

kur $A_{\min}$ yra mažiausia nešlio amplitudė ($A_{\min} < A_c$). Pilnutinis ***moduliavimo procentas*** lygus

$$k = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{2A_c} \times 100 = \frac{\max[m(t)] - \min[m(t)]}{2} \times 100. \qquad (5.1.5)$$

Dydžiai $A_{\max}$, $A_{\min}$ ir A_c yra parodyti 5.1.1b pav.

Pagal (4.3.9), AM signalo vidutinė normuotoji galia lygi

$$\begin{aligned}\langle s^2(t)\rangle &= \frac{1}{2}\langle |g(t)|^2\rangle = \frac{1}{2}A_c^2\langle [1+m(t)]^2\rangle = \\ &= \frac{1}{2}A_c^2\langle 1 + 2m(t) + m^2(t)\rangle = \frac{1}{2}A_c^2 + A_c^2\langle m(t)\rangle + \frac{1}{2}A_c^2\langle m^2(t)\rangle.\end{aligned} \qquad (5.1.6)$$

Jeigu moduliavimo signalo nuolatinė dedamoji lygi nuliui ($\langle m(t)\rangle = 0$), tuomet AM signalo vidutinė normuotoji galia yra

$$\langle s^2(t)\rangle = \underbrace{\frac{1}{2}A_c^2}_{\substack{\text{nešlio}\\ \text{galia}}} + \underbrace{\frac{1}{2}A_c^2\langle m^2(t)\rangle}_{\text{šalinių juostų galia}} \qquad (5.1.7)$$

(viršutinės ir apatinės šalinių juostų sąvoka buvo apibrėžta 4.3.2 poskyryje).

Moduliuotojo signalo galios dalis, kuri naudojama informacijos perdavimui, vadinama ***moduliavimo efektyvumu***. AM signale informaciją perduoda tik šalinės juostos, todėl moduliavimo efektyvumas, pagal (5.1.7), yra

$$E = \frac{\langle m^2(t)\rangle}{1+\langle m^2(t)\rangle} \times 100\% . \tag{5.1.8}$$

AM signalo, kurio moduliavimo procentas yra 100 %, didžiausias moduliavimo efektyvumas yra 50 %. Šis moduliavimo efektyvumas pasiekiamas tuomet, kai $\langle m^2(t)\rangle = 1$, t.y., kai $m(t)$ gali įgyti tik dvi vertes – +1 ir -1 (stačiakampių impulsų seka). Jeigu moduliavimo signalas yra sinusoidė, o AM signalo moduliavimo procentas yra 100 %, tuomet $\langle m^2(t)\rangle = 1/2$ (žr. (2.3.16)). Vadinasi, šiuo atveju moduliavimo efektyvumas lygus 33 %.

Pagal (4.3.10), AM signalo didžiausioji gaubtinės galia lygi

$$P_{\text{PEP}} = \frac{A_c^2}{2}\{1+\max[m(t)]\}^2 . \tag{5.1.9}$$

AM signalo spektras buvo gautas 4.3.2 poskyryje (žr. (4.3.14a)):

$$S(f) = \frac{A_c}{2}[\delta(f-f_c)+M(f-f_c)+\delta(f+f_c)+M(f+f_c)] \tag{5.1.10}$$

(šio spektro pavyzdys pateiktas 4.3.1b pav.). Taigi, AM spektras gaunamas palyginti paprastai: tai yra paslinktas moduliavimo signalo spektras ir δ funkcija (nešlio dažnio linija). AM signalo dažnių juostos plotis yra lygus dvigubam moduliavimo signalo dažnių juostos pločiui, nes moduliavimo signalo spektro neigiamųjų dažnių dalis po poslinkio atsiduria teigiamųjų dažnių srityje (žr. juostos pločio apibrėžimus 2.8 poskyryje).

AM siųstuvą galima kurti įvairiais būdais. Vienas būdas – generuoti mažos galios AM signalą (naudojant maišiklį: žr. 4.8 poskyrį), o po to tiesiškai sustiprinti jį. Tokio maišiklio schema pavaizduota 5.1.2a pav. Šiuo atveju nešlio dažnio kintamoji įtampa υ_c apytiksliai lygi tranzistoriaus bazės įtampos kintamai dedamajai $\Delta\upsilon_B$ (kondensatoriaus C_1 varža nešlio dažnio signalui yra žymiai mažesnė, o moduliavimo dažnio signalui – žymiai didesnė už stiprintuvo įėjimo varžą $R_1||R_2$). Todėl mažo signalo stiprinimo koeficientas yra lygus

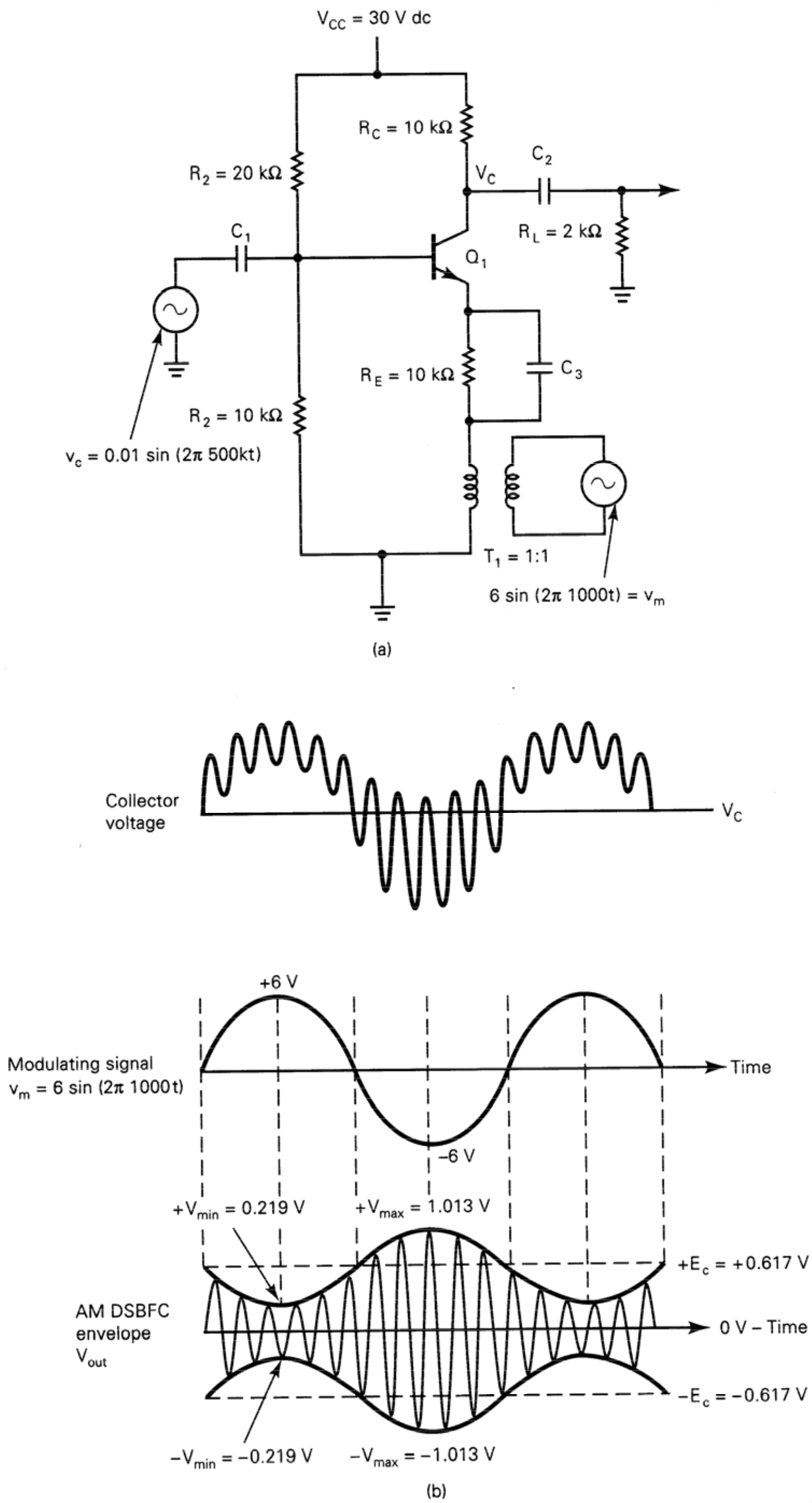
$$K \equiv \frac{\Delta\upsilon_K}{\upsilon_c} \approx \frac{\Delta\upsilon_K}{\Delta\upsilon_B} = \frac{\Delta i_K R_{\text{ap}}}{\Delta i_E R_{E\,\text{total}}} \approx \frac{R_{\text{ap}}}{R_{E\,\text{total}}}, \tag{5.1.11}$$

kur $\Delta\upsilon_K$ yra kolektoriaus įtampos nešlio dažnio kintamoji dedamoji, R_{ap} yra kolektoriaus apkrovos varža, $R_{E\,\text{total}}$ yra pilnoji emiterinės grandinės varža, o Δi_K ir Δi_E – kolektoriaus ir emiterio srovių aukštadažnės kintamosios dedamosios. Kolektoriaus apkrova – tai rezistorius R_C, prie kurio lygiagrečiai prijungta nuoseklioji *RC* grandinėlė R_LC_2 (maitinimo šaltinio vidinę varžą galima laikyti lygia nuliui). Emiterinė grandinė – tai emiterinė sandūra, prie kurios nuosekliai prijungta lygiagrečioji *RC* grandinėlė R_EC_3. Talpos C_2 ir C_3 parinktos taip, kad jų varžos nešlio dažnio signalui būtų žymiai mažesnės, o moduliavimo dažnio signalui – žymiai didesnės, atitinkamai, už R_L ir emiterinės sandūros varžą r_e. Todėl nešlio dažnio signalui $R_{\text{ap}} \approx R_C||R_L$, o $R_{E\,\text{total}}$ apytiksliai sutampa su emiterio sandūros diferencialine varža r_e. Vadinasi,

$$K \approx \frac{R_C \,||\, R_L}{r_e} . \tag{5.1.12}$$

Emiterio sandūros (diodo) diferencialinė varža r_e apibrėžiama sąryšiu

$$r_e = \frac{\Delta\upsilon_B}{\Delta i_E} = \frac{d\upsilon_{B0}}{di_{E0}} = \frac{1}{di_{E0}/d\upsilon_{B0}}, \tag{5.1.13}$$



5.1.2 pav. Emiterinio mažos galios amplitudės moduliatoriaus principinė schema (a) ir jo išėjimo signalai (b).

kur $\Delta\upsilon_B$ ir Δi_E yra bazės įtampos ir emiterio srovės kintamosios dedamosios, o i_{E0} yra emiterio srovės nuolatinė dedamoji, atitinkanti bazės įtampos nuolatinę dedamąją υ_{B0}. Laikant, kad $\upsilon_{B0} > kT/q$ (t.y., tiesioginė srovė žymiai didesnė už atgalinę),

$$i_{E0} = const \cdot \exp\left(\frac{q\upsilon_{B0}}{kT}\right), \tag{5.1.14}$$

todėl

$$r_e = \frac{kT/q}{i_{E0}} \approx \frac{25\,\mathrm{mV}}{i_{E0}}; \tag{5.1.15}$$

čia q yra elementarusis krūvis, k yra Bolcmano konstanta, o T yra absoliutinė temperatūra. Įrašę (5.1.15) į (5.1.12), gauname, kad įtampos perdavimo koeficientas yra proporcingas emiterio srovės nuolatinei dedamajai i_{E0}. Vadinasi, amplitudės moduliavimo efektą galima gauti, valdant srovę i_{E0} žemadažniu moduliavimo signalu υ_m. Tuo tikslu moduliavimo signalas prijungiamas emiterio grandinėje (žr. 5.1.2a pav.). Kadangi moduliavimo dažniui kondensatoriaus C_3 varža yra žymiai didesnė už R_E, tai, pagal Kirchhofo dėsnį,

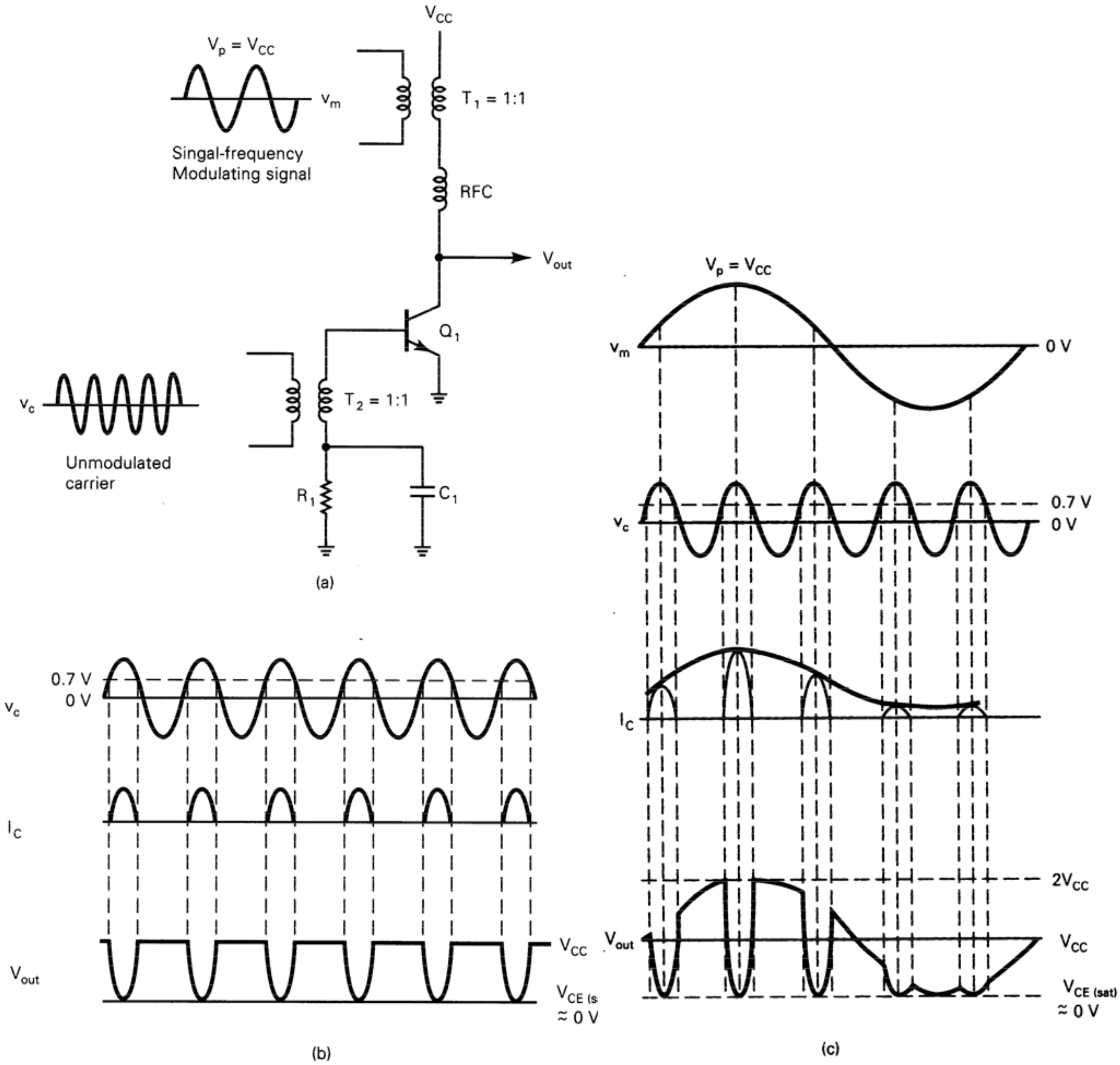
$$i_{E0} = \frac{\upsilon_{B0} - \upsilon_{BE} - \upsilon_m}{R_E}. \tag{5.1.16}$$

Taigi, emiterio srovės "nuolatinė" dedamoji (vadinasi, ir aukštadažnės įtampos perdavimo koeficientas K) yra proporcinga moduliavimo įtampai υ_m su minuso ženklu. T.y., teigiamuose moduliavimo signalo pusperiodžiuose K išauga, o neigiamuose – sumažėja. Kolektoriaus įtampa lygi

$$\upsilon_K = V_{CC} - i_{K0}R_C - \Delta i_K R_{\mathrm{ap}} \approx V_{CC} - i_{E0}R_C - \Delta i_E R_{\mathrm{ap}}, \tag{5.1.17}$$

kur $i_{K0} \approx i_{E0}$ yra kolektoriaus srovės nuolatinė dedamoji. Vadinasi, kolektoriaus įtampos laikinė priklausomybė yra proporcinga "apverstai" emiterio srovės laikinei priklausomybei: teigiamuose moduliavimo signalo pusperiodžiuose kolektoriaus įtampos "nuolatinė" dedamoji ($V_{CC} - i_{E0}R_C$) sumažėja (nes i_{E0} išauga), o aukštadažnė – išauga (nes padidėja K); neigiamuose moduliavimo signalo pusperiodžiuose "nuolatinė" kolektoriaus įtampos dedamoji išauga (nes i_{E0} sumažėja), o aukštadažnė – sumažėja (nes sumažėja K). Šią laikinę priklausomybę iliustruoja viršutinė kreivė 5.1.2b pav. Pro aukštųjų dažnių filtrą, kurį sudaro nuoseklioji RC grandinėlė R_LC_2, praeina tik aukštadažnė kolektoriaus įtampos dedamoji, t.y., AM signalas (žr. apatinę kreivę 5.1.2b pav.).

Pagrindinis aukščiau aprašytojo AM signalo generavimo būdo trūkumas yra tas, kad išėjimo signalo galia yra palyginti maža, todėl prieš signalo perdavimą kanalu jį reikia sustiprinti. Stiprinimas turi būti tiesinis, kad nebūtų iškraipyta signalo gaubtinė. Tačiau tiesinių stiprintuvų našumas yra žemas. ***Našumas*** – tai išėjimo signalo galios ir maitinimo šaltinio galios nuostolių santykis. Tiesiniuose stiprintuvuose didžioji naudojamos galios dalis išeikvojama maitinimo šaltinio srovės nuolatinei dedamajai, kuri nenaudojama moduliavimui. Didinant stiprintuvo galią, tuo pačiu didinami ir šie nenaudingi galios nuostoliai. Todėl praktikoje AM signalų generavimui naudojami netiesiniai stiprintuvai, kurių našumas žymiai didesnis, negu tiesinių, ir po moduliavimo signalas iš karto perduodamas į kanalą. Atitinkamai, amplitudės moduliatoriai dažniausiai yra didelio galingumo įtaisai, kurių naudojama galia siekia kelis kilovatus arba daugiau. Šių netiesinių stiprintuvų didesnį našumą sąlygoja tas faktas, kad jų išėjimo grandinės srovė yra trumpų impulsų pavidalo, o moduliavimo signalas valdo ne srovės nuolatinę dedamąją, o maitinimo įtampą. Tokio AM moduliatoriaus supaprastinta principinė schema pateikta 5.1.3a pav. Nešlio signalas prijungiamas prie bazės. Bazės įtampos nuolatinė dedamoji artima nuliui, todėl tranzistorius atsidaro tik teigiamų pusperiodžių metu. Kai nėra moduliavimo signalo, kolektoriaus srovė yra vienodos amplitudės impulsų pavidalo (žr. 5.1.3b pav. antroji kreivė). Kadangi tarp impulsų kolektoriaus srovė lygi nuliui, tai kolektoriaus įtampa tarp impulsų lygi maitinimo įtampai V_{CC} (žr. 5.1.3b pav., apatinė kreivė). Kolektoriaus apkrovos (ritės RFC) impedansas nešlio dažniui yra didelis, todėl atidarytas tranzistorius pereina į soties būseną. Atitinkamai, kolektoriaus įtampa srovės impulso metu pakinta nuo maitinimo įtampos

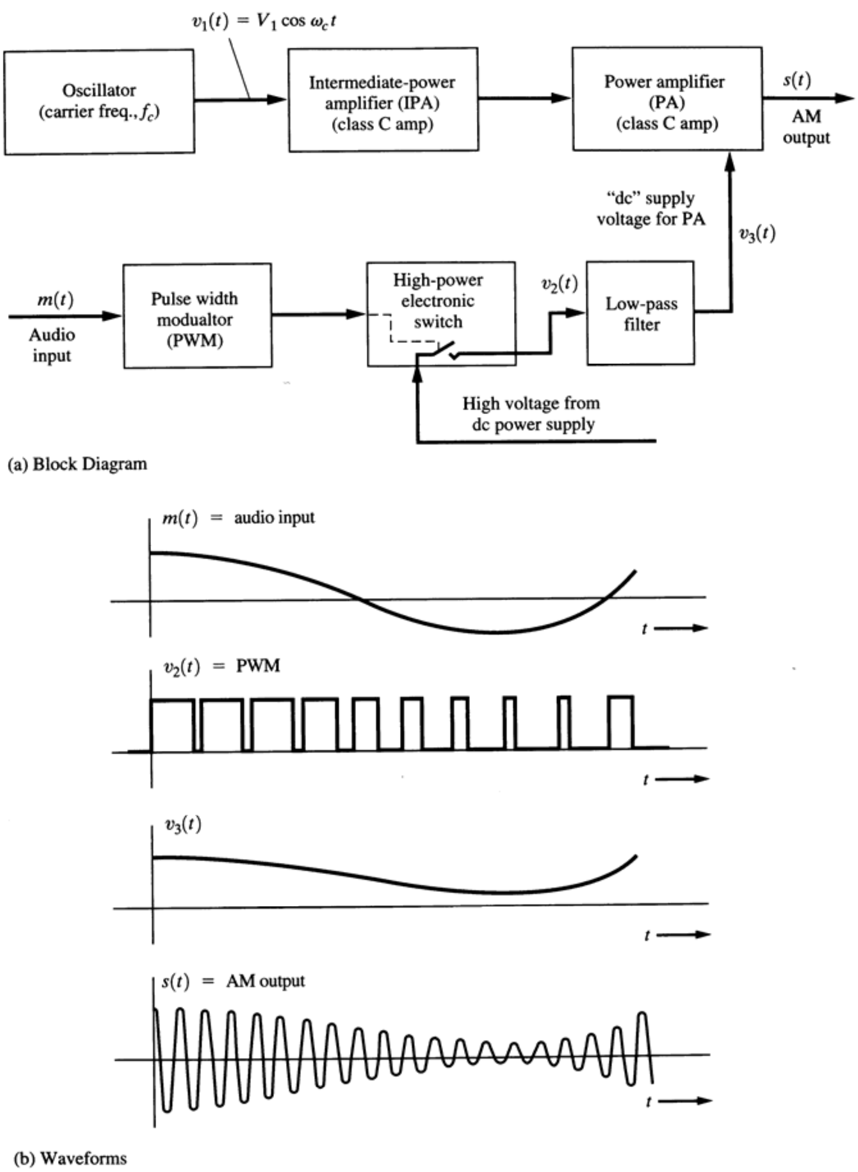


5.1.3 pav. Vidutinės galios aukšto našumo amplitudės moduliatorius. a – principinė schema, b – kolektoriaus įtampa, kai nėra moduliavimo signalo, c – kolektoriaus įtampa, kai egzistuoja sinusoidės pavidalo moduliavimo signalas.

V_{CC} iki nulio (žr. 5.1.3b pav., apatinė kreivė). Moduliavimo signalas prijungiamas nuosekliai su kolektoriumi (o ne su emiteriu, kaip aukščiau aprašytame moduliatoriuje), t.y., jis pridedamas prie kolektoriaus maitinimo įtampos. Vadinasi, moduliavimas pasireiškia maitinimo įtampos keitimu. Kolektoriaus įtampos laikinė priklausomybė, esant moduliavimo signalui, yra panaši į moduliavimo signalo ir kolektoriaus įtampos, kai nėra moduliavimo signalo, sumą (žr. 5.1.3c pav., apatinė kreivė). Tačiau ši suma yra iškraipyta: nepriklausomai nuo maitinimo įtampos vertės, kiekvieno impulso metu tranzistorius pereina į soties būseną, t.y., jo kolektoriaus įtampa sumažėja iki nulio ir negali sumažėti žemiau šios vertės. Vadinasi, efektas toks pats, lyg moduliavimo signalo ir didelės amplitudės neigiamų impulsų suma būtų ribojama iš apačios. Signalo vertės ribojimas – tai netiesinis iškraipymas (žr. 4.6 poskyrį). Vadinasi, kolektoriaus įtampa – tai netiesiškai iškraipyta dviejų signalų suma. Todėl jos spektre yra ir suminio bei skirtuminio dažnio linijos (žr. 4.6 poskyrį ir (4.6.10) formulę). Šios suminio ir skirtuminio dažnio komponentės ir sudaro AM signalą. Kadangi jos yra arti viena kitos (moduliavimo dažnis yra žymiai mažesnis už nešlio dažnį), tai jas galima išskirti, naudojant juostinį filtrą. Juostinio filtro vaidmenį galėtų atlikti, pvz., kolektoriaus grandinėje vietoj ritės RFC prijungtas lygiagretusis virpesių kontūras, kuris suderintas nešlio dažniui (5.1.3a pav. juostinis filtras neparodytas). Šio moduliatoriaus našumas yra žymiai didesnis už 5.1.2a pav. pavaizduoto moduliatoriaus našumą, nes didžiąją laiko dalį tranzistorius yra uždarytas, t.y., beveik nenaudoja energijos (tuo metu galią naudoja tik moduliatoriaus apkrova).

Impulsų plotį (ir moduliatoriaus našumą) galima reguliuoti, keičiant varžą R_1. Įtampos kritimas šioje varžoje lygus bazės srovės nuolatinės dedamosios ir R_1 sandaugai. Šis įtampos kritimas pasireiškia kaip papildoma neigiama įtampa emiterinėje sandūroje. Didėjant R_1, ši papildoma įtampa auga, todėl tranzistorius vėliau atsidaro ir anksčiau užsidaro, todėl kolektoriaus srovės impulsai trumpėja.

5.1.3a pav. schemoje moduliavimo įtampa turi būti tos pačios eilės, kaip tranzistoriaus maitinimo įtampa V_{CC}, t.y., kelių dešimčių voltų eilės. Tokių didelių moduliavimo signalo verčių galima išvengti, moduliavimo įtampą naudojant maitinimo įtampos jungiklio valdymui. Tuo tikslu panaudojamas ***impulsų trukmės moduliavimas*** (*pulse width modulation*, ***PWM***): maitinimo šaltinis prijungiamas prie įtaiso trumpiems laiko tarpams, kurie proporcingi moduliavimo signalo $m(t)$ vertėms diskrečiais laiko momentais (žr. 5.1.4a pav.). Kitais žodžiais, maitinimo įtampa pakeičiama PWM impulsų seka $\upsilon_2(t)$ (žr. 5.1.4b pav., antroji kreivė). Po to ši PWM impulsų seka praleidžiama pro žemųjų dažnių filtrą. Jeigu PWM impulsų dažnis yra žymiai didesnis už žemųjų dažnių filtro juostos plotį, tuomet žemųjų dažnių filtro išėjimo signalas $\upsilon_3(t)$ – tai impulsų sekos laikinis vidurkis per laiko tarpą, kuris žymiai didesnis už intervalą tarp impulsų. Jeigu filtro juostos plotis atitinka $m(t)$ juostos plotį, tuomet žemųjų dažnių filtro išėjimo signalas $\upsilon_3(t)$ proporcingas moduliavimo signalui $m(t)$ (plg. 5.1.4b pav. pirmąją ir trečiąją kreives). Pvz., jeigu $m(t)$ yra garso dažnio signalas, PWM impulsų dažnis dažniausiai pasirenkamas tarp 70 kHz ir 80 kHz, o žemųjų dažnių filtro juostos plotis artimas 20 kHz. Tuomet filtras pilnai nuslopina PWM signalo pagrindinę ir aukštesniąsias harmonikas, tačiau "nuolatinė"



5.1.4 pav. Aukštos galios AM signalų generavimas, naudojant impulsų trukmės moduliavimą. a – moduliatoriaus struktūrinė schema, b – signalai įvairiuose sistemos taškuose.

maitinimo įtampa gali kisti pakankamai aukštu garsiniu dažniu (pvz., 12 kHz arba 15 kHz). Taigi, efektas toks pats, kaip ir 5.1.3a pav. schemoje: prie nuolatinės maitinimo įtampos pridedamas tos pačios eilės dėmuo, kuris proporcingas moduliavimo signalui. Tačiau šiuo atveju moduliatoriaus išėjimo grandinėje nenaudojamas garsinio dažnio transformatorius, todėl mažesni moduliavimo signalo iškraipymai.

5.2. Dvipusės šalinės juostos numalšintojo nešlio (DSB-SC) signalai

Dvipusės šalinės juostos numalšintojo nešlio signalas (*double-sideband suppressed carrier*, ***DSB-SC***) – tai AM signalas, kurio spektre nėra nešlio linijos. DSB-SC signalo kompleksinė gaubtinė yra

$$g(t) = A_c m(t), \tag{5.2.1}$$

kur A_c yra nešlio amplitudė, o $m(t)$ yra moduliavimo signalas, kurio nuolatinė dedamoji lygi nuliui. Atitinkama DSB-SC signalo išraiška yra

$$s(t) = A_c m(t)\cos\omega_c t. \tag{5.2.2}$$

DSB-SC signalo spektras gaunamas iš AM signalo spektro (5.1.10), pašalinus δ funkcijas ties dažniais $\pm f_c$:

$$S(f) = \frac{A_c}{2}[M(f - f_c) + M(f + f_c)]. \tag{5.2.3}$$

DSB-SC signalo moduliavimo procentas yra begalinis (žr. 5.1 poskyrį), o moduliavimo efektyvumas lygus 100 %, nes energija neeikvojama nešlio perdavimui. Tačiau DSB-SC signalo detektavimui negalima naudoti gaubtinės detektoriaus (žr. 4.10.1 poskyrį), o reikia naudoti brangesnį sandaugos detektorių (žr. 4.10.2 poskyrį).

Jeigu (5.2.2) formulėje $m(t)$ yra dvilygis skaitmeninis signalas, kuris išreikštas poliniu NRZ linijos kodu (žr. 3.4.1b pav.), tuomet $m(t) = \pm 1$. Tokio pavidalo moduliavimas vadinamas ***apgrąžiniu fazės manipuliavimu***, nes tuomet signalą $s(t)$ galima užrašyti šitaip:

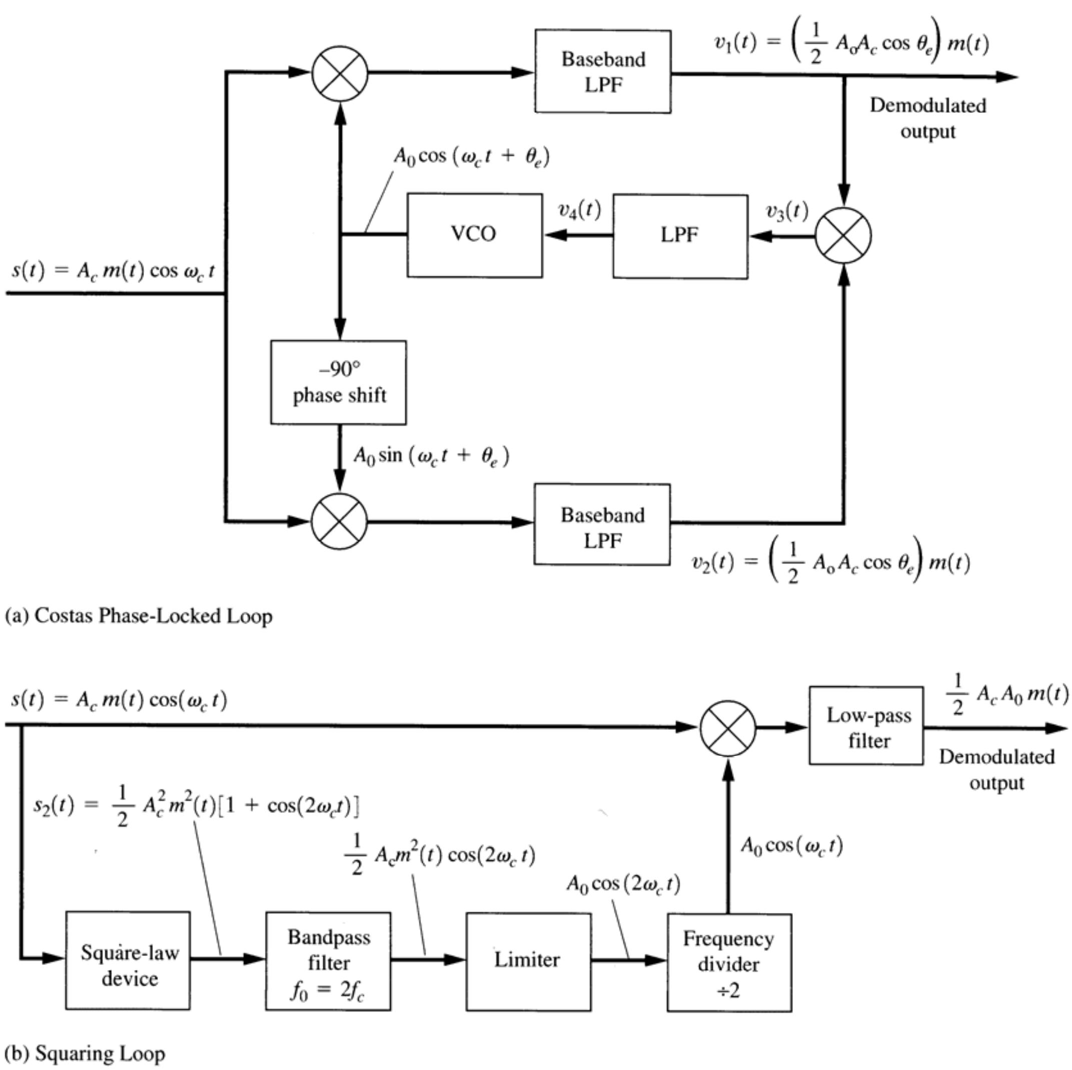
$$s(t) = A_c \cos(\omega_c t + \theta), \quad \theta = 0,\ \pi. \tag{5.2.4}$$

Čia nulinė pradinės fazės vertė atitinka dvejetainį vienetą ($m(t) = 1$), o vertė π atitinka dvejetainį nulį ($m(t) = -1$).

5.3. DSB-SC signalo detektoriai: Kosto PLL kilpa ir kėlimo kvadratu sistema

Sandaugos detektoriuje įėjimo signalas dauginamas iš sinusinio generatoriaus virpesio, kurio dažnis lygus nešlio dažniui (žr. 4.10.2 poskyrį ir 4.10.2 pav.). Detektuojant AM signalą, vietoj generatoriaus naudojama PLL kilpa (žr. 4.11 poskyrį ir 4.11.6 pav.), kurią sinchronizuoja įėjimo signalo spektro linija ties nešlio dažniu. Tačiau tuo atveju, kai moduliavimo signalo $m(t)$ nuolatinė dedamoji lygi nuliui, DSB-SC signalas (5.2.2) neturi δ funkcijos pavidalo maksimumo ties nešlio dažniu (žr. 5.2 poskyrį), todėl toks atraminio sinusinio virpesio generavimo metodas netinka (žr. 4.11 poskyrį). Praktikoje naudojami du DSB-SC signalų detektavimo būdai. Pirmasis būdas – tai ***Kosto PLL kilpa*** (*Costas PLL*), kurios schema pavaizduota 5.3.1a pav. Kosto PLL kilpa skiriasi nuo įprastos analoginės PLL kilpos (žr. 4.11.3 pav.) sudėtingesne fazės detektoriaus schema, kurią sudaro trys maišikliai ir trys žemųjų dažnių filtrai (vietoj vieno maišiklio ir vieno filtro 4.11.3 pav. schemoje). Kosto PLL kilpos veikimas aprašytas žemiau.

Visų pirma verta prisiminti PLL kilpos sinchronizavimo sąlygas, kurios jau buvo minėtos 4.11 poskyryje. Tarkime, kad, didėjant generatoriaus valdymo įtampai, jo dažnis mažėja. Tuomet, kad generatorius sinchronizuotųsi su nešliu, reikia, kad generatoriaus valdymo įtampos pokyčio ženklas sutaptų su generatoriaus ir nešlio dažnių skirtumo ženklu. Pvz., jeigu generatoriaus dažnis yra didesnis už nešlio dažnį, valdymo įtampos pokytis turi būti toks, kad generatoriaus dažnis sumažėtų, t.y., teigiamas. Vadinasi, augant generatoriaus ir nešlio fazių skirtumui θ_e, valdymo įtampa turi augti (reikia atkreipti dėmesį, kad čia fazių skirtumas θ_e apibrėžiamas šiek tiek kitaip, negu 4.11 poskyryje). Be to, šis augimas turi būti pakankamai



5.3.1 pav. DSB-SC signalų detektoriai. a – Kosto PLL kilpa, b – kėlimo kvadratu sistema.

greitas, kad generatoriaus dažnio kitimas “spėtų sekti” nešlio dažnio kitimą, t.y., kad per sinchronizavimo laikotarpį θ_e pokytis būtų mažesnis už fazės detektoriaus charakteristikos periodą (pvz., 4.11.2 pav. pavaizduotų charakteristikų periodas lygus π). Norint visa tai įgyvendinti, reikia iš įėjimo signalo ir generatoriaus signalo suformuoti signalą, kuris būtų pakankamai greitai didėjanti fazių skirtumo θ_e funkcija. Tai atliekama tokiu būdu. Įėjimo signalas sudauginamas su dviem signalais: pirmasis signalas – tai generatoriaus virpesys, o antrasis gautas iš generatoriaus virpesio, pasukus jo fazę -90° kampu (žr. 5.3.1a pav.). Po to abi signalų sandaugos praleidžiamos pro žemųjų dažnių filtrus, kurie išskiria visą skirtuminių dažnių juostą. Abiejų filtrų išėjimo signalus nusako (4.10.6) formulė, kurioje A_0 yra generatoriaus virpesio amplitudė, $R(t) = A_c m(t)$, $\theta(t) = -\theta_e$, o θ_0 lygus, atitinkamai, nuliui arba -90°. T.y., pirmojo (viršutinio) filtro išėjimo signalas lygus

$$\upsilon_1(t) = \left(\frac{1}{2} A_0 A_c \cos\theta_e\right) m(t), \tag{5.3.1}$$

o antrojo (apatinio) –

$$\upsilon_2(t) = \left(\frac{1}{2} A_0 A_c \sin\theta_e\right) m(t). \tag{5.3.2}$$

Po to šie du signalai sudauginami, suformuojant signalą

$$\upsilon_3(t) = \upsilon_1(t)\upsilon_2(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} A_0 A_c\right)^2 m^2(t) \sin 2\theta_e. \tag{5.3.3}$$

Šis signalas jau yra panašus į AM detektavimui naudojamos PLL kilpos (žr. 4.11.6 pav.) maišiklio išėjimo signalo skirtuminę dedamąją: daugiklis prieš $\sin(2\theta_e)$ turi pakankamai didelę nuolatinę dedamąją, kurią galima išskirti siaurajuosčiu žemadažniu filtru ir panaudoti generatoriaus dažnio valdymui (žr. 5.3.1a pav.). Tačiau šio filtro išėjimo signalo υ_4, kaip θ_e funkcijos (t.y., fazės detektoriaus charakteristikos), periodas yra lygus ne π, o $\pi/2$. Vadinasi, sinchronizavimo diapazono ribas atitinka $\theta_e = \pm\pi/2$ (o ne $\theta_e = \pm\pi$, kaip (4.11.15) formulėje). Be to, šiuo atveju generatoriaus valdymo signalas $\upsilon_4(t)$ yra proporcingas moduliavimo signalo kvadrato laikiniam vidurkiui $\langle m^2(t)\rangle$. Praktikoje visuomet galioja nelygybė $|\theta_e| << 1$, todėl $\cos(\theta_e) \approx 1$ ir (5.3.1) virsta

$$\upsilon_1(t) \approx \frac{1}{2} A_0 A_c m(t)\,. \tag{5.3.4}$$

Vadinasi, kai fazės paklaida $\theta_e << 1$, Kosto PLL kilpą galima naudoti kaip DSB-SC signalo demoduliatorių (amplitudės detektorių).

Kitas nešlio atkūrimo būdas – tai ***kėlimo kvadratu sistema***, kurios struktūrinė schema pavaizduota 5.3.1b pav. Šiuo atveju harmoninis nešlio dažnio signalas suformuojamas, praleidžiant įėjimo signalą pro keturis nuosekliai sujungtus įtaisus: kėlimo kvadratu įtaisą, juostinį filtrą, kuris suderintas dvigubam nešlio dažniui, ribotuvą ir dažnio daliklį iš 2. Įėjimo signalo kvadrato spektre yra dvigubo nešlio dažnio linija, kurios intensyvumas proporcingas moduliavimo signalo kvadrato vidurkiui. Šią liniją išskiria juostinis filtras ir ribotuvas. Dažnio daliklis atkuria galutinį nešlio dažnio virpesį, kuris sudauginamas su įėjimo signalu, kaip įprastiniame koherentiniame AM detektoriuje.

Pagrindinis Kosto PLL kilpos ir kėlimo kvadratu sistemos trūkumas yra tas, kad, pakeitus moduliavimo signalo ženklą, detektoriaus išėjimo signalas nepasikeičia. T.y., nėra žinoma, ar detektoriaus išėjimo signalas nusako moduliavimo signalą $m(t)$, ar priešingą dydį $-m(t)$. Taip yra todėl, kad abiem šiais atvejais, atkuriant nešlio dažnio signalą, moduliavimo signalas keliamas kvadratu (žr. 5.3.1 pav.). Tai pasireiškia tuo, kad sandaugos detektoriuje virpesio, iš kurio dauginamas įėjimo signalas, fazė gali būti priešinga nešlio fazei. Jeigu $m(t)$ yra garso signalas, tuomet šis fazės neapibrėžtumas neturi reikšmės, nes žmogaus ausis nėra jautri garso virpesių pradinei fazei. Tačiau, jeigu $m(t)$ yra polinis dvejetainių duomenų signalas (pvz., apgrąžinio fazės manipuliavimo signalas (5.2.4)), tuomet, pasikeitus signalo ženklui, dvejetainiai nuliai virsta vienetais, ir atvirkščiai. Šį pradinės fazės neapibrėžtumą galima panaikinti dviem būdais: 1) įjungus detektoriaus sistemą, siųstuvas gali trumpam laikui moduliuoti nešlį žinomo poliarumo pastoviu bandomuoju signalu, kad imtuvas galėtų nustatyti, ar sistema invertuoja moduliavimo signalą, ar ne; 2) galima naudoti diferencialinį duomenų kodavimą ir dekodavimą (žr. 3.4.3 poskyrį).

5.4. Asimetrinių šalinių juostų signalai

5.4.1. Vienpusės šalinės juostos signalai

Vienpusės šalinės juostos (*single sideband*, ***SSB***) signalu vadinamas juostinis signalas, kurio spektras lygus nuliui dažnių intervale $|f| < f_c$ arba dažnių intervale $|f| > f_c$, kur f_c yra nešlio dažnis. ***Viršutinės vienpusės šalinės juostos*** (*upper single sideband*, ***USSB***) signalu vadinamas juostinis signalas, kurio spektras lygus nuliui dažnių intervale $|f| < f_c$. ***Apatinės vienpusės šalinės juostos*** (*lower single sideband*, ***LSSB***) signalu vadinamas juostinis signalas, kurio spektras lygus nuliui dažnių intervale $|f| > f_c$. Vienpusės šalinės juostos signalą galima gauti, naudojant įvairų funkcinį ryšį tarp juostinio signalo kompleksinės gaubtinės g ir moduliavimo signalo m (žr. C-1 lentelę). Dažniausiai naudojami moduliuotos amplitudės SSB signalai (***SSB-AM***), nes šių signalų juostos plotis sutampa su moduliavimo signalo juostos pločiu (t.y., du kartus mažesnis už AM arba DSB-SC signalų juostos plotį). Todėl toliau bus kalbama tik apie SSB-AM signalus, ir jie bus vadinami tiesiog SSB signalais.

SSB signalo gaubtinė yra

$$g(t) = A_c[m(t) \pm j\hat{m}(t)], \tag{5.4.1}$$

kur $\hat{m}(t)$ yra moduliavimo signalo $m(t)$ ***Hilberto transformacija***:

$$\hat{m}(t) \equiv m(t) * h(t) \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{m(\lambda)}{t-\lambda}d\lambda, \tag{5.4.2}$$

kur

$$h(t) = \frac{1}{\pi t}. \tag{5.4.3}$$

"+" ženklas (5.4.1) formulėje atitinka USSB signalą, o "-" ženklas – LSSB signalą. Žemiau įrodyta, kad (5.4.1) formulė iš tikrųjų nusako SSB signalą.

Hilberto transformaciją (5.4.2) atlieka fazės poslinkio -90° įtaisas. Tokio įtaiso perdavimo funkcija (impulsinio atsako $h(t)$ spektras) yra

$$H(f) = \begin{cases} -j, & f > 0 \\ j, & f < 0 \end{cases} \tag{5.4.4}$$

(dažninė fazės charakteristika visuomet yra nelyginė dažnio funkcija: žr. (2.6.12)). Iš (5.4.2) išplaukia, kad $\hat{m}(t)$ spektras yra lygus moduliavimo signalo $m(t)$ spektro $M(f)$ ir perdavimo funkcijos $H(f)$ sandaugai (žr. B-1 lentelę). Todėl kompleksinės gaubtinės (5.4.1) spektras lygus

$$G(f) = A_c M(f)[1 \pm jH(f)]. \tag{5.4.5}$$

Jeigu (5.4.5) reiškinyje yra "+" ženklas (USSB signalas), tuomet reiškinys laužtiniuose skliaustuose lygus nuliui, kai $f < 0$, ir lygus 2, kai $f > 0$ (žr. (5.4.4)). T.y.,

$$G(f) = \begin{Bmatrix} 2A_c M(f), & f > 0 \\ 0, & f < 0 \end{Bmatrix} \quad \textit{USSB atveju.} \tag{5.4.6}$$

Moduliavimo signalo amplitudžių spektro $|M(f)|$ ir atitinkamo USSB signalo kompleksinės gaubtinės amplitudžių spektro $|G(f)|$ pavyzdys pateiktas 5.4.1a ir 5.4.1b pav.). Akivaizdu, kad gaubtinės spektras lygus nuliui, kai $f < 0$, ir proporcingas moduliavimo signalo spektrui, kai $f > 0$. USSB signalo spektras $S(f)$ lygus paslinktam į teigiamųjų dažnių pusę atstumu f_c ir padalintam iš 2 kompleksinės gaubtinės spektrui (žr. juostinio signalo spektro bendrąją išraišką (4.3.4)):

$$S(f) = A_c \begin{Bmatrix} M(f - f_c), & f > f_c \\ 0, & f < f_c \end{Bmatrix} + A_c \begin{Bmatrix} 0, & f > -f_c \\ M(f + f_c), & f < -f_c \end{Bmatrix}. \tag{5.4.7}$$

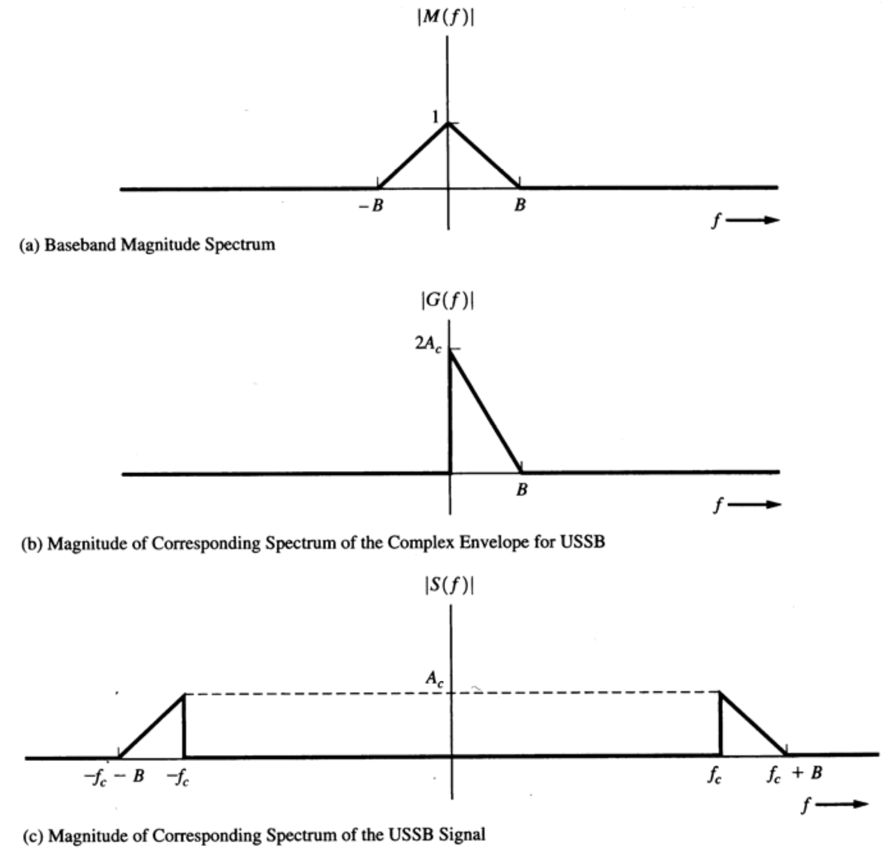
5.4.1c pav. pavaizduotas USSB signalo amplitudžių spektras $|S(f)|$, atitinkantis kompleksinės gaubtinės amplitudžių spektrą, kuris pavaizduotas 5.4.1b pav. Akivaizdu, kad šis spektras iš tikrųjų atitinka USSB signalo apibrėžimą (žr. aukščiau). Jeigu kompleksinės gaubtinės išraiškoje (5.4.1) būtų naudojamas "-" ženklas, tuomet tokiu pačiu būdu gautume LSSB signalą. Be to, palyginus SSB signalo spektrą (žr. 5.4.1c pav.) su atitinkamo AM signalo spektru (žr. 4.3.1b pav.), galima padaryti išvadą, kad SSB signalo spektro plotis yra du kartus mažesnis.

Rasime SSB signalo vidutinę normuotąją galią. Įrašę kompleksinės gaubtinės išraišką (5.4.1) į juostinio signalo galios bendrąją išraišką (4.3.9), randame

$$P_s = \frac{1}{2}\langle |g(t)|^2 \rangle = \frac{1}{2}A_c\{\langle m^2(t)\rangle + \langle[\hat{m}(t)]^2\rangle]. \tag{5.4.8}$$

Bet kurio signalo galią galima išreikšti galios spektrinio tankio integralu (žr. (2.3.5)):

$$\langle \hat{m}^2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} P_{\hat{m}}(f)df = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 \, P_m(f)df, \tag{5.4.9}$$



5.4.1 pav. Viršutinės vienpusės šalinės juostos (USSB) signalo spektras. a – moduliavimo signalo amplitudžių spektras, b – atitinkamo USSB signalo kompleksinės gaubtinės amplitudžių spektras, c – USSB signalo amplitudžių spektras.

kur perdavimo funkciją $H(f)$ nusako (5.4.4) formulė (užrašant paskutiniąją lygybę, pasinaudota (2.6.19) sąryšiu). Pagal (5.4.4), $|H(f)| = 1$. Todėl signalų $m(t)$ ir $\hat{m}(t)$ galių spektriniai tankiai ir normuotosios vidutinės galios sutampa:

$$\langle \hat{m}^2(t) \rangle = \langle m^2(t) \rangle . \qquad (5.4.10)$$

Įrašę (5.4.10) į (5.4.8), gauname

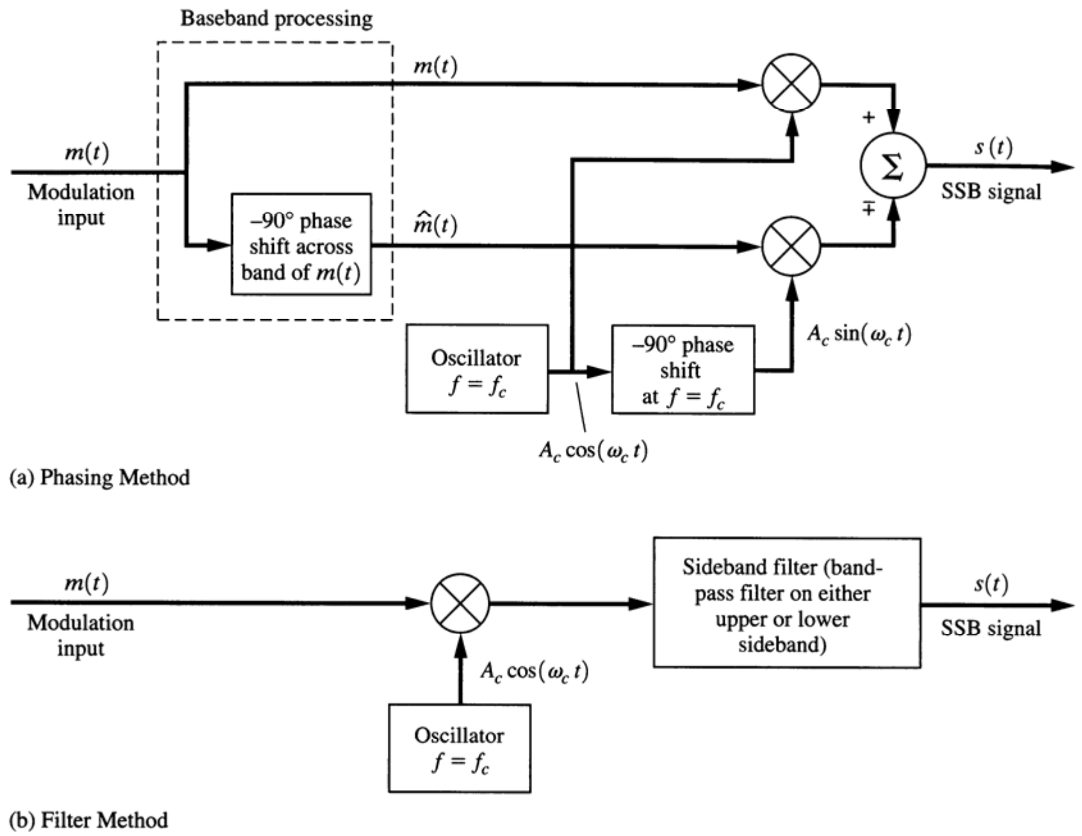
$$P_s = \langle s^2(t) \rangle = A_c^2 \langle m^2(t) \rangle . \qquad (5.4.11)$$

SSB signalo didžiausioji gaubtinės galia pagal apibrėžimą (4.3.10) yra lygi

$$\frac{1}{2} \max\{| g(t) |^2\} = \frac{1}{2} A_c^2 \max\{m^2(t) + [\hat{m}(t)]^2\} , \qquad (5.4.12)$$

t.y., didesnė už atitinkamo DSB-SC signalo didžiausiąją gaubtinės galią $A_c^2 \max\{m^2(t)\}/2$.

5.4.2 pav. iliustruoju du SSB signalo generavimo būdus. ***Fazavimo metodo*** schema (žr. 5.4.2a pav.) sutampa su anksčiau aprašyto apibendrintojo IQ generavimo metodo schema, kuri pavaizduota 4.12.2 pav. Šiuo atveju sinfazinės dedamosios amplitudė sutampa su moduliavimo signalu, o kvadratūrinės dedamosios amplitudė – tai moduliavimo signalo $m(t)$ Hilberto transformacija $\hat{m}(t)$, kurią suformuoja fazės poslinkio -90° kampu įtaisas. Naudojant ***filtravimo metodą*** (žr. 5.4.2b pav.), pirmiausia suformuojamas DSB-SC signalas, o po to viena šalinė juosta nuslopinama, naudojant juostinį filtrą. Perduodant garso signalus, filtravimo metodas yra populiariausias, nes tipiško garso signalo spektras žemiau 300 Hz praktiškai lygus nuliui. Vadinasi, slopinant vieną šalinę juostą, egzistuoja 2 × 300 = 600 Hz pločio dažnių intervalas, kuriame filtro dažninės charakteristikos pavidalas beveik neturi įtakos signalo perdavimo kokybei. Šis intervalas yra pakankamai platus, kad juostinio filtro dažninė amplitudės charakteristika sumažėtų jame nuo didžiausios vertės beveik iki nulio.



5.4.2 pav. SSB signalų generavimas. a – fazavimo metodas, b – filtravimo metodas.

Iš juostinio signalo realiosios gaubtinės išraiškos (4.1.4a) ir iš SSB signalo kompleksinės gaubtinės apibrėžimo (5.4.1) išplaukia, kad SSB signalo realioji gaubtinė lygi

$$R(t) = |g(t)| = A_c\sqrt{m^2(t) + [\hat{m}(t)]^2}\,. \quad (5.4.13)$$

Iš juostinio signalo pradinės fazės išraiškos (4.1.4b) išplaukia, kad SSB signalo pradinė fazė lygi

$$\theta(t) = \arctan\left[\frac{\pm\hat{m}(t)}{m(t)}\right]. \quad (5.4.14)$$

Vadinasi, ir SSB signalo amplitudė, ir jo fazė yra moduliuoti.

SSB signalo detektavimui galima panaudoti detektorių, kuris atkuria juostinio signalo kompleksinės gaubtinės realiąją dalį (žr. SSB signalo kompleksinės gaubtinės išraišką (5.4.1)). Tokio detektoriaus pavyzdys yra sandaugos detektorius, kurio generatoriaus virpesio fazė sutampa su nešlio faze (žr. (4.10.8a)).

5.4.2. Liekamosios šalinės juostos signalai

Kai kuriais atvejais (pvz., televizijos transliavime) DSB moduliavimo signalų juostos plotis yra per didelis, o SSB moduliavimas yra per brangus. Tokiais atvejais naudojamas kompromisinis moduliavimo būdas, kuris vadinamas ***liekamosios šalinės juostos*** (*vestigial sideband*, ***VSB***) moduliavimu: viena DSB signalo šalinė juosta nuslopinama dalinai. DSB signalas gali būti AM arba DSB-SC signalas. Šį moduliavimo būdą iliustruoja 5.4.3 pav. Šalinės juostos daliniam slopinimui naudojamas liekamosios šalinės juostos filtras (žr. 5.4.3a pav.), kurio dažninė amplitudės charakteristika nėra simetrinė atžvilgiu nešlio dažnio $\pm f_c$ (žr. 5.4.3c pav.). VSB signalas yra

$$s_{\mathrm{VSB}}(t) = s(t) * h_v(t)\,, \quad (5.4.15)$$

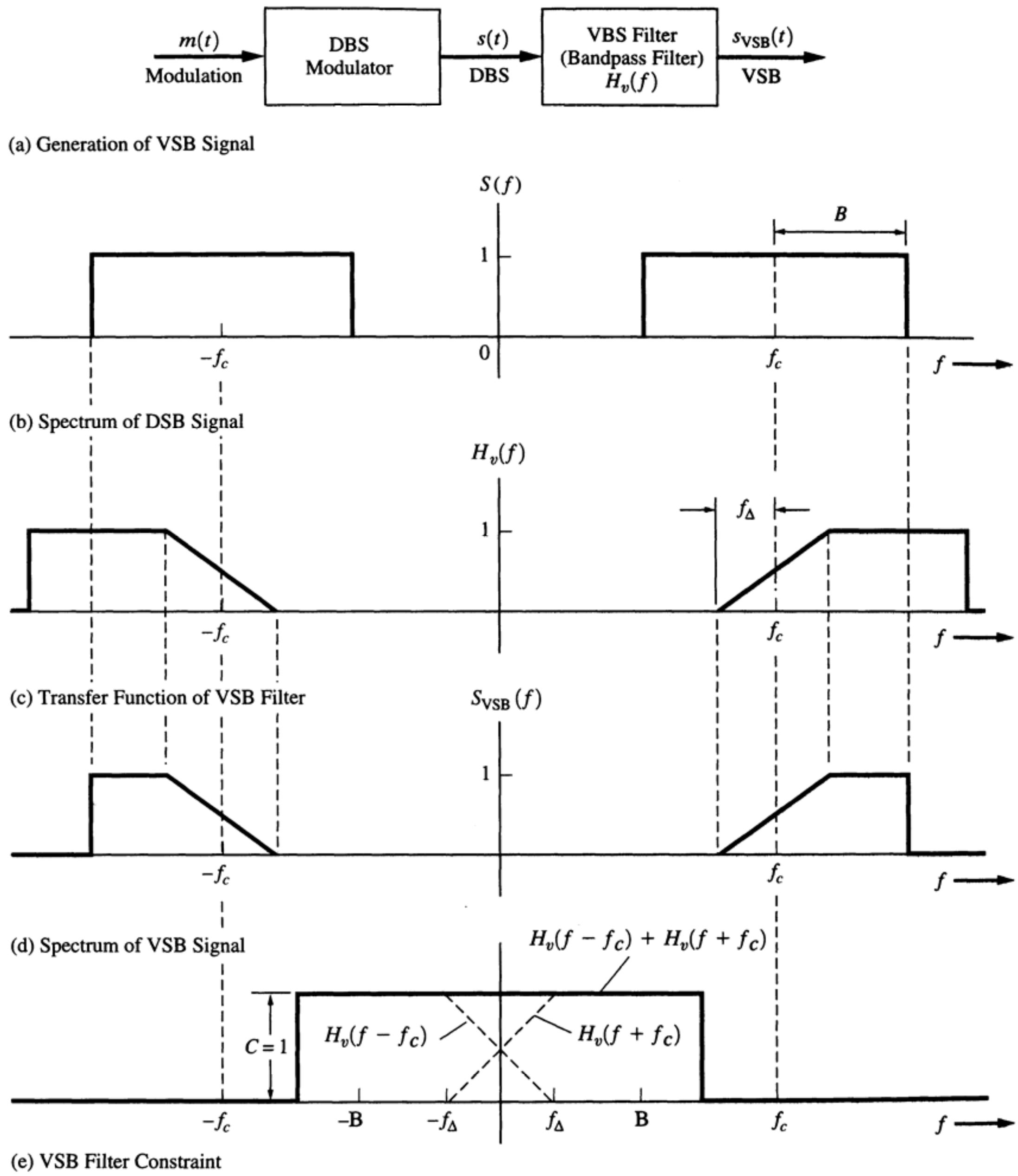
kur $s(t)$ yra DSB signalas (AM signalas (5.1.1) arba DSB-SC signalas (5.2.2)), o $h_v(t)$ yra VSB filtro impulsinis atsakas. VSB signalo spektras yra

$$S_{\mathrm{VSB}}(f) = S(f)H_v(f) \tag{5.4.16}$$

(žr. 5.4.3d pav.).

VSB signalą galima detektuoti, naudojant sandaugos detektorių, kuris pavaizduotas 4.10.2 pav. (generatoriaus virpesio ir nešlio fazių skirtumas θ_0 turi būti lygus nuliui). Rasime sąlygą, kurią turi tenkinti VSB filtro perdavimo funkcija $H_v(f)$, kad sandaugos detektoriaus išėjimo signalo spektras būtų proporcingas pradinio DBS moduliavimo signalo $m(t)$ spektrui $M(f)$. Tarkime, kad $s(t)$ yra DSB-SC signalas (5.2.2). Įrašę šio signalo spektro išraišką (5.2.3) į (5.4.16), gauname

$$S_{\mathrm{VSB}}(f) = \frac{A_c}{2}[M(f - f_c)H_v(f) + M(f + f_c)H_v(f)]. \tag{5.4.17}$$



5.4.3 pav. VSB signalų generavimas. a – VSB siųstuvo struktūrinė schema, b – tarpinio DSB signalo spektras, c – liekamosios šalinės juostos filtro (VSB filtro) dažninė amplitudės charakteristika, d – VSB signalo spektras, e – sąlyga, kurią turi tenkinti VSB filtro dažninė amplitudės charakteristika.

Maišiklio, kuris įeina į sandaugos detektoriaus sudėtį, išėjimo signalas yra signalo s_{VSB} ir generatoriaus signalo $A_0\cos\omega_c t$ sandauga. Todėl detektoriaus išėjimo signalas yra

$$v_{\mathrm{out}}(t) = [A_0 s_{\mathrm{VSB}}(t)\cos\omega_c t] * h(t)\,, \tag{5.4.18}$$

kur $h(t)$ yra žemųjų dažnių filtro impulsinis atsakas. Signalo (5.4.18) spektras yra

$$V_{\mathrm{out}}(f) = A_0\{S_{\mathrm{VSB}}(f) * [\tfrac{1}{2}\delta(f - f_c) + \tfrac{1}{2}\delta(f + f_c)]\}H(f)\,. \tag{5.4.19}$$

Įrašę (5.4.17) į (5.4.19) ir pasinaudoję tapatybe $x(f)*\delta(f-a) = x(f-a)$, kuri išplaukia iš δ funkcijos savybės (2.2.15b), randame

$$V_{\mathrm{out}}(f) = \frac{A_c A_0}{4}[M(f - 2f_c)H_v(f - f_c) + M(f)H_v(f - f_c) +$$
$$+ M(f)H_v(f + f_c) + M(f + 2f_c)H_v(f + f_c)]H(f).$$

Kadangi $M(f)$ skiriasi nuo nulio, tik kai $f \approx 0$, tai pirmasis dėmuo laužtiniuose skliaustuose skiriasi nuo nulio, kai $f \approx 2f_c$, antrasis ir trečiasis – kai $f \approx 0$, o ketvirtasis – kai $f \approx -2f_c$. Todėl, laikant, kad $H(f) = 0$, kai $B < |f| << f_c$, šiame reiškinyje nelieka pirmojo ir paskutiniojo dėmens. Laikant, kad $H(f) = 1$, kai $|f| < B$,

$$V_{\mathrm{out}}(f) = \frac{A_c A_0}{4}M(f)[H_v(f - f_c) + H_v(f + f_c)], \qquad |f| < B.$$

Vadinasi, kad sandaugos detektoriaus išėjimo signalo spektras būtų proporcingas moduliavimo signalo spektrui, žemųjų dažnio filtro pralaidumo juostos plotis B turi atitikti moduliavimo signalo juostos plotį, o VSB filtro perdavimo funkcija turi tenkinti sąlygą

$$H_v(f - f_c) + H_v(f + f_c) = C\,, \qquad |f| < B. \tag{5.4.20}$$

Čia C yra konstanta. Galiojant (5.4.20) lygybei, detektoriaus išėjimo signalas $v_{\mathrm{out}}(t) = Km(t)$, kur $K = A_c A_0/4$.

Pavyzdžiui, (5.4.20) sąlygą tenkina VSB filtras, kurio perdavimo funkcija tiesiškai mažėja slopinamosios šalinės juostos kryptimi ir ties dažniu f_c sumažėja iki pusės didžiausios vertės (žr. 5.4.3c pav. ir 5.4.3e pav.). Tokie VSB filtrai naudojami, formuojant televizijos transliavimo VSB signalą. Pagal JAV galiojančius TV transliavimo standartus, viršutinės šalinės juostos plotis yra 4.5 MHz, o filtro parametras f_Δ, kuris nusako dalinai nuslopintos apatinės šalinės juostos plotį (žr. 5.4.3c pav.), yra 0.75 MHz. Pilnutinis TV kanalo dažnių juostos plotis yra 6 MHz, t.y., bent 1.5 karto mažesnis už tą, kurio reikėtų AM arba DSB-SC signalo perdavimui ($2 \times 4.5 = 9$ MHz).

5.5. Fazės moduliavimas ir dažnio moduliavimas

5.5.1. PM ir FM signalų matematinės išraiškos ir generavimo būdai

Fazės moduliavimas ir dažnio moduliavimas yra atskirieji ***kampo moduliavimo*** atvejai. Moduliuoto kampo signalo kompleksinė gaubtinė (žr. (4.2.1)) yra

$$g(t) = A_c e^{j\theta(t)}. \tag{5.5.1}$$

Tai atitinka tokią signalo išraišką:

$$s(t) = A_c\cos[\omega_c t + \theta(t)]\,. \tag{5.5.2}$$

Taigi, kampo moduliavimo atveju realioji gaubtinė yra konstanta, kuri sutampa su nešlio amplitude A_c ($R(t) = |g(t)| = A_c$), o pradinė fazė $\theta(t)$ yra moduliavimo signalo $m(t)$ funkcija. ***Fazės moduliavimo*** (*phase modulation*, ***PM***) atveju pradinė fazė $\theta(t)$ yra proporcinga moduliavimo signalui:

$$\theta(t) = D_p m(t)\,, \tag{5.5.3}$$

o ***dažnio moduliavimo*** (*frequency modulation*, ***FM***) atveju pradinė fazė proporcinga moduliavimo signalo integralui:

$$\theta(t) = D_f \int_{-\infty}^{t} m(\sigma) d\sigma \,. \tag{5.5.4}$$

Ši išraiška galioja tik tuo atveju, kai signalas turi pradžią (t.y., kai $m(-\infty) = 0$). Jeigu moduliavimo signalas $m(t)$ yra periodinis, tuomet apatinis integravimo rėžis turi būti baigtinis ir turi nusakyti laiko momentą, kai funkciją $\theta(t)$ susitarta laikyti lygia nuliui.

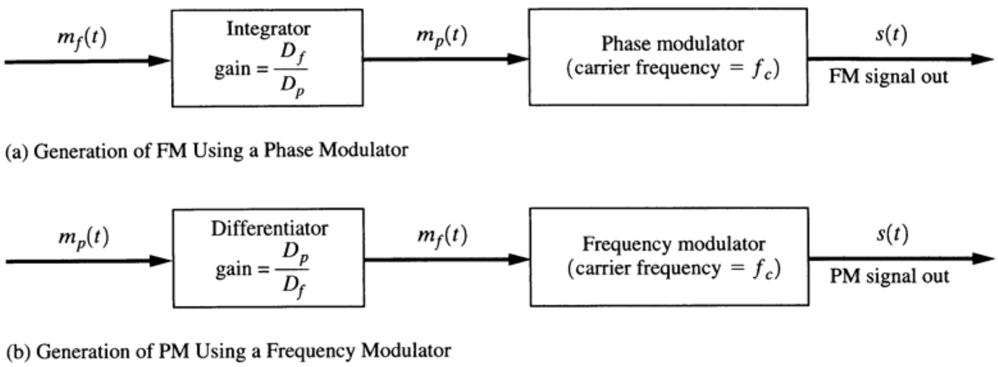
Palyginus (5.5.3) ir (5.5.4), galima teigti, kad moduliuotos fazės signalą galima laikyti moduliuoto dažnio signalu, kurio moduliavimo signalas m_f yra proporcingas pradinio signalo m_p laikinei išvestinei:

$$m_f(t) = \frac{D_p}{D_f}\left[\frac{dm_p(t)}{dt}\right], \tag{5.5.5}$$

o moduliuoto dažnio signalą galima laikyti moduliuotos fazės signalu, kurio moduliavimo signalas m_p proporcingas pradinio signalo integralui:

$$m_p(t) = \frac{D_f}{D_p} \int_{-\infty}^{t} m(\sigma) d\sigma \,. \tag{5.5.6}$$

Vadinasi, FM signalą galima generuoti, naudojant PM moduliatorių ir moduliavimo signalo integratorių (žr. 5.5.1a pav.), o PM signalą galima generuoti, naudojant FM moduliatorių ir moduliavimo signalo diferenciatorių (žr. 5.5.1b pav.).



5.5.1 pav. FM signalo formavimas iš PM signalo ir atvirkščiai.

Tiesiogiai PM arba FM signalą galima gauti, naudojant virpesių kontūrą, kurio rezonansinį dažnį valdo moduliavimo signalas. PM atveju šis kontūras naudojamas kaip nešlio generatoriaus apkrova (žr. 5.5.2a pav.), o FM atveju jis pats įeina į aukšto dažnio generatoriaus sudėtį, kaip dažnį užduodantis elementas (žr. 5.5.2b pav.). PM ir FM moduliatorių grandinėse, kurios pavaizduotos 5.5.2 pav., kontūro rezonansinis dažnis keičiamas, naudojant varikapus, t.y., diodus, kurių talpą valdo prie jų prijungta moduliavimo įtampa. Kintant moduliavimo įtampai, kinta pilnutinė kontūro talpa C, todėl kinta ir rezonansinis dažnis $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. PM moduliatoriuje (5.5.2a pav.) fazės moduliavimo efektas gaunamas dėl to, kad, esant mažiems išderinimams, lygiagrečiojo kontūro įtampos (moduliuotojo signalo) ir jo įėjimo srovės (nešlio) fazių skirtumas yra proporcingas kontūro rezonansinio dažnio ir įėjimo srovės dažnio skirtumui:

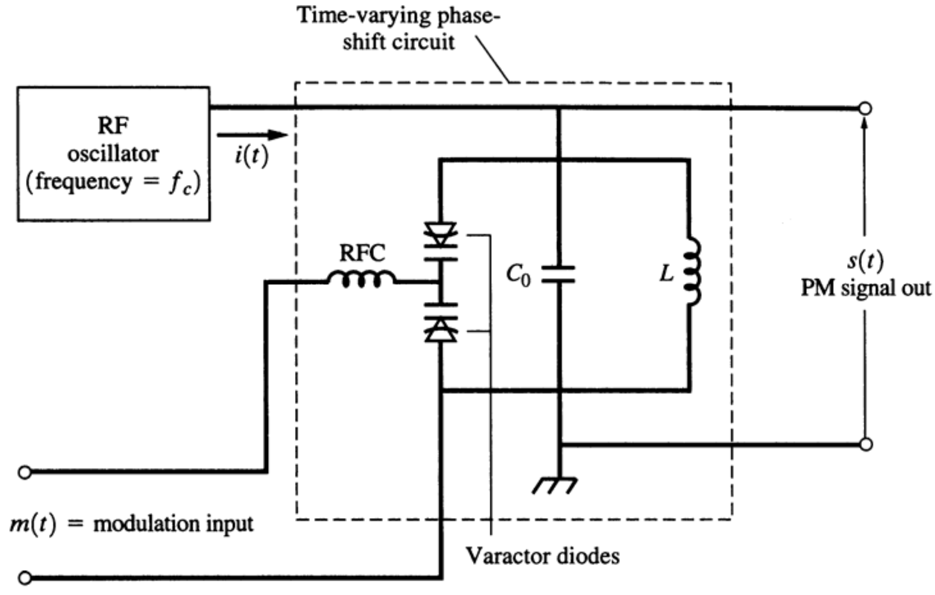
$$\theta(t) = \frac{2Q}{f_0}(f_0 - f_c), \tag{5.5.7}$$

kur Q yra kontūro kokybė.

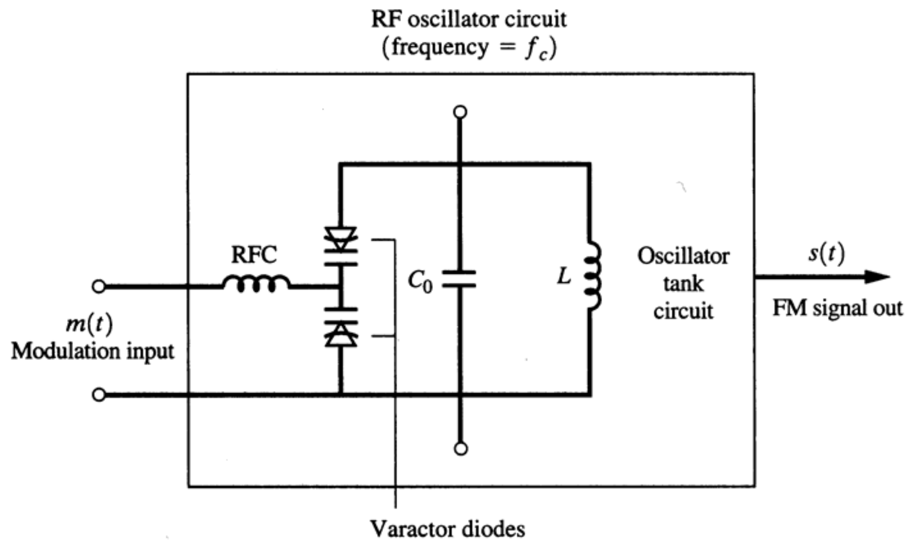
Kalbant apie PM ir FM signalus, svarbi yra momentinio dažnio sąvoka. Užrašius juostinį signalą tokiu pavidalu:

$$s(t) = R(t)\cos\psi(t) \qquad (\psi(t) \equiv \omega_c t + \theta(t)),$$

signalo $s(t)$ ***momentinis dažnis*** f_i apibrėžiamas šitaip:



(a) A Phase Modulator Circuit



(b) A Frequency Modulator Circuit

5.5.2 pav. Fazės (a) ir dažnio (b) moduliatorių schemos.

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi}\omega_i(t) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{d\psi(t)}{dt}\right]$$

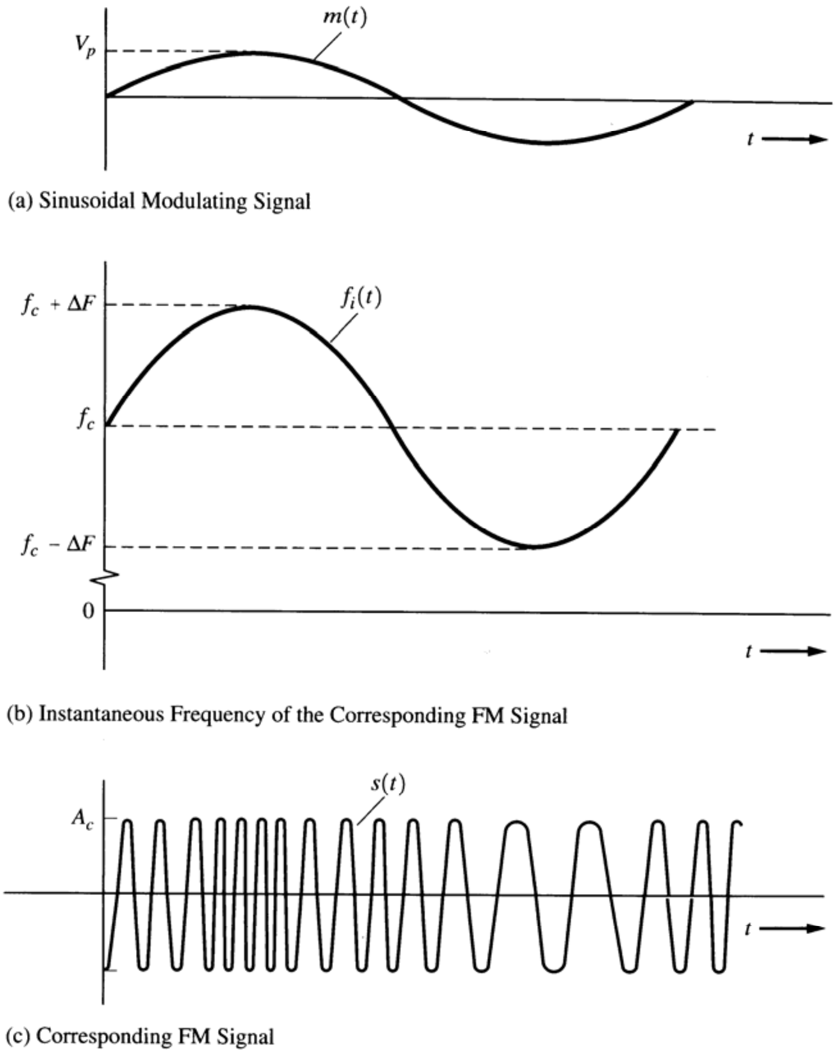
arba

$$f_i(t) = f_c + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{d\theta(t)}{dt}\right]. \tag{5.5.8}$$

FM atveju, įrašę (5.5.4) į (5.5.8), gauname

$$f_i(t) = f_c + \frac{1}{2\pi}D_f m(t). \tag{5.5.9}$$

Būtent todėl tokio tipo signalas vadinamas *moduliuotojo dažnio* signalu: momentinio dažnio f_i nuokrypis nuo nešlio dažnio f_c yra proporcingas moduliavimo signalui $m(t)$. 5.5.3b pav. parodytas momentinio dažnio kitimas, kai moduliavimo signalas yra sinusoidė, kuri pavaizduota 5.5.3a pav. Atitinkamas FM signalas pavaizduotas 5.5.3c pav.



5.5.3 pav. FM signalas, kai moduliavimo signalas yra sinusoidės pavidalo. a – moduliavimo signalas, b – atitinkamo FM signalo momentinio dažnio kitimas laike, c – atitinkamas FM signalas.

Dažnio nuokrypis nuo nešlio dažnio apibrėžiamas sąryšiu

$$f_d(t) = f_i(t) - f_c = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{d\theta(t)}{dt}\right], \tag{5.5.10}$$

o ***didžiausiasis dažnio nuokrypis*** yra

$$\Delta F = \max\left\{\frac{1}{2\pi}\left[\frac{d\theta(t)}{dt}\right]\right\}. \tag{5.5.11}$$

FM atveju didžiausiasis dažnio nuokrypis yra proporcingas didžiausiai moduliavimo signalo (įtampos) vertei (žr. (5.5.9)):

$$\Delta F = \frac{1}{2\pi} D_f V_p, \tag{5.5.12}$$

kur $V_p = \max[m(t)]$ (žr. 5.5.3a pav.).

Kai kuriais atvejais (pvz., skaitmeninio moduliavimo atveju) naudojama dažnio nuokrypio kitimo intervalo pločio sąvoka (*peak-to-peak deviation*):

$$\Delta F_{\text{pp}} = \max\left\{\frac{1}{2\pi}\left[\frac{d\theta(t)}{dt}\right]\right\} - \min\left\{\frac{1}{2\pi}\left[\frac{d\theta(t)}{dt}\right]\right\}. \tag{5.5.13}$$

Didžiausiojo fazės nuokrypio apibrėžimas analogiškas didžiausiojo dažnio nuokrypio apibrėžimui (5.5.11):

$$\Delta\theta = \max[\theta(t)]. \tag{5.5.14}$$

PM atveju didžiausiasis fazės nuokrypis yra proporcingas didžiausiai moduliavimo signalo (įtampos) vertei (žr. (5.5.3)):

$$\Delta\theta = D_p V_p, \tag{5.5.15}$$

kur $V_p = \max[m(t)]$.

Remiantis didžiausiuoju dažnio arba fazės nuokrypiu, apibrėžiamos dar dvi FM arba PM signalo charakteristikos – ***fazės moduliavimo indeksas***, kuris sutampa su didžiausiuoju fazės nuokrypiu:

$$\beta_p = \Delta\theta = D_p \max[m(t)], \tag{5.5.16}$$

ir ***dažnio moduliavimo indeksas***:

$$\beta_f = \frac{\Delta F}{B} = \frac{D_f \max[m(t)]}{2\pi B}, \tag{5.5.17}$$

kur ΔF yra didžiausiasis dažnio nuokrypis (5.5.12), o B yra moduliavimo signalo ribinis dažnis. Harmoninio moduliavimo signalo atveju B yra lygus moduliavimo signalo dažniui. Žemadažnio moduliavimo signalo atveju ribinis dažnis B sutampa su dažnių juostos pločiu. Jeigu kampo moduliavimo signalas yra skaitmeninis, moduliavimo indeksas apibrėžiamas šiek tiek kitaip (žr. 5.7.3 poskyrį).

Augant dažnio arba fazės moduliavimo indeksui, FM arba PM signalo vidutinė normuotoji galia nesikeičia ir lieka lygi $\frac{A_c^2}{2}$. Tačiau signalo dažnių juostos plotis auga, nes signalo spektro dažnių intervalas apima visas momentinio dažnio vertes. Vadinasi, augant didžiausiajam dažnio nuokrypiui, arti nešlio dažnio esančių spektrinių komponenčių amplitudė mažėja. Tuo kampo moduliavimas iš esmės skiriasi nuo amplitudės moduliavimo: AM signalo vidutinė galia yra proporcinga moduliavimo signalo vidutinei galiai (žr. (5.1.7)), o spektro pavidalą lemia moduliavimo signalo spektras (žr. (5.1.10)), t.y., AM signalo dažnių juostos plotis nepriklauso nuo moduliavimo signalo galios.

5.5.2. Moduliuoto kampo signalų spektrai

Pagal juostinio signalo spektro bendrąją išraišką (4.3.4), moduliuoto kampo signalo spektras yra

$$S(f) = \frac{1}{2}[G(f - f_c) + G^*(-f - f_c)], \tag{5.5.18}$$

kur $G(f)$ yra kompleksinės gaubtinės (5.5.1) Furjė transformacija:

$$G(f) = F[g(t)] = F[A_c e^{j\theta(t)}]. \tag{5.5.19}$$

AM, DSB-SC ir SSB atveju juostinio signalo spektro $S(f)$ ir moduliavimo signalo spektro $M(f)$ ryšys yra gana paprastas (AM – (5.1.10), DSB-SC – (5.2.3), USSB – (5.4.7)), nes visais šiais atvejais signalo kompleksinė gaubtinė $g(t)$ yra tiesinė moduliavimo signalo $m(t)$ funkcija (AM – (5.1.1), DSB-SC – (5.2.1)), SSB – (5.4.1)). FM ir PM atveju juostinio signalo *pradinė fazė* $\theta(t)$ yra tiesinė moduliavimo signalo $m(t)$ funkcija (PM – (5.5.3), FM – (5.5.4)), tačiau kompleksinė gaubtinė (5.5.1) yra netiesinė $m(t)$ funkcija. Todėl kampo moduliavimo atveju neįmanoma išvesti bendros formulės, kuri susietų kompleksinės gaubtinės spektrą $G(f)$ ir moduliavimo signalo spektrą $M(f)$. T.y., kiekvienam moduliavimo signalui spektrą reikia skaičiuoti atskirai. Be to, kadangi $g(t)$ yra netiesinė $m(t)$ funkcija, negalioja superpozicijos principas. Tai reiškia, kad tuo atveju, kai moduliavimo signalas yra lygus dviejų signalų sumai, moduliuotojo signalo spektras nėra lygus sumai dviejų spektrų, kurie būtų gauti, moduliuojant tik pirmuoju ir tik antruoju signalu.

Praktikoje svarbiausias yra moduliavimo harmoniniu signalu atvejis. Atitinkami FM ir PM signalų spektrai apskaičiuoti sekančiame poskyryje.

5.5.3. PM arba FM signalo spektras, kai moduliavimo signalas yra sinusoidės pavidalo

Tarkime, kad PM moduliavimo signalas yra

$$m_p(t) = A_m \sin\omega_m t \,. \qquad (5.5.20)$$

Tuomet, pagal (5.5.3), (5.5.14) ir (5.5.16) pradinę fazę $\theta(t)$ galima užrašyti šitaip:

$$\theta(t) = \beta \sin\omega_m t \,, \qquad (5.5.21)$$

kur $\beta = \beta_p = D_p A_m$ yra fazės moduliavimo indeksas.

To paties pavidalo (5.5.21) pradinė fazė gaunama ir FM atveju, kai moduliavimo signalas yra

$$m_f(t) = A_m \cos\omega_m t \,. \qquad (5.5.22)$$

Įrašę (5.5.22) į (5.5.4), gauname (5.5.21) pavidalo funkciją, kurioje $\beta = D_f A_m / \omega_m$. Pagal (5.5.12) ir (5.5.17), taip apibrėžtas dydis sutampa su dažnio moduliavimo indeksu: $\beta = \beta_f$.

Kompleksinė gaubtinė yra

$$g(t) = A_c e^{j\theta(t)} = A_c e^{j\beta \sin\omega_m t} \,. \qquad (5.5.23)$$

Tai yra periodinė funkcija, kurios periodas lygus $T_m = 1/f_m$. Vadinasi, visoje laiko ašyje ($-\infty < t < \infty$) galioja g(t) skleidinys Furjė eilute

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n e^{jn\omega_m t} \,, \qquad (5.5.24)$$

kur

$$c_n = \frac{A_c}{T_m} \int_{-T_m/2}^{T_m/2} g(t) e^{-jn\omega_m t} dt = \frac{A_c}{T_m} \int_{-T_m/2}^{T_m/2} (e^{j\beta \sin\omega_m t}) e^{-jn\omega_m t} dt \qquad (5.5.25)$$

(žr. 2.5.1 poskyrį). Atlikę integravimo kintamojo pakeitimą $t \to \theta = \omega_m t$, gauname

$$c_n = A_c \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(\beta \sin\theta - n\theta)} d\theta \right] = A_c J_n(\beta) \,. \qquad (5.5.26)$$

Funkcija $J_n(\beta)$, kuri lygi reiškiniui laužtiniuose skliaustuose, vadinama ***pirmosios rūšies n-tosios eilės Beselio funkcija***. Beselio funkcijos neįmanoma išreikšti analiziškai, tačiau egzistuoja jos verčių lentelės. Be to, daugumoje kompiuterio programų, kurios skirtos matematinių uždavinių sprendimui (*MATHCAD*, *MATLAB* ir pan.), Beselio funkcija yra viena iš standartinių funkcijų. Beselio funkcijos pasižymi šia simetrijos savybe:

$$J_{-n}(\beta) = (-1)^n J_n(\beta) \,. \qquad (5.5.27)$$

5.5.4 pav. pavaizduotos įvairios eilės Beselio funkcijos. Priedo D lentelėje D-1 pateiktos įvairių eilių Beselio funkcijų vertės, esant įvairioms argumento β vertėms.

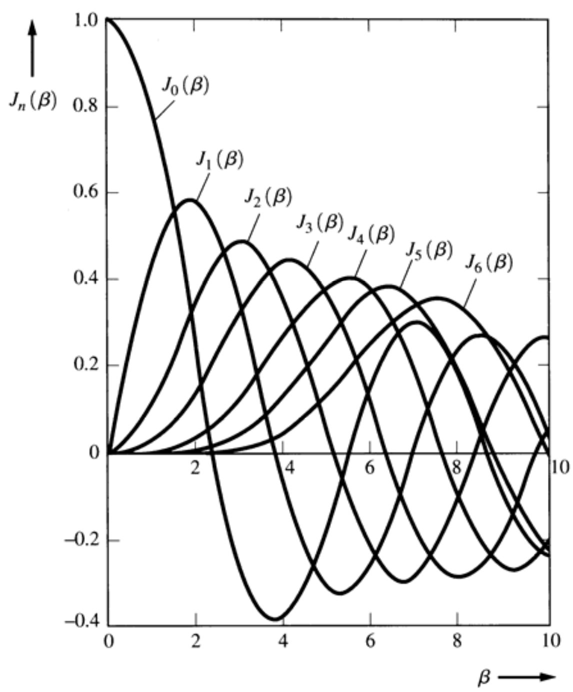
Pagal (2.5.21), kompleksinės gaubtinės spektras yra lygus

$$G(f) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n \delta(f - nf_m) \qquad (5.5.28)$$

arba

$$G(f) = A_c \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} J_n(\beta) \delta(f - nf_m) \,. \qquad (5.5.29)$$

Vadinasi, sinusoide moduliuoto PM signalo (arba kosinusoide moduliuoto FM signalo) kompleksinės gaubtinės spektras sudarytas iš diskrečių linijų ties dažniais, kurie yra moduliavimo signalo dažnio kartotiniai. Vadinasi, gaubtinės <u>dažnių juostos plotis yra proporcingas moduliavimo signalo dažniui</u>. Be to, *n*-



5.5.4 pav. Įvairių eilių Beselio funkcijos.

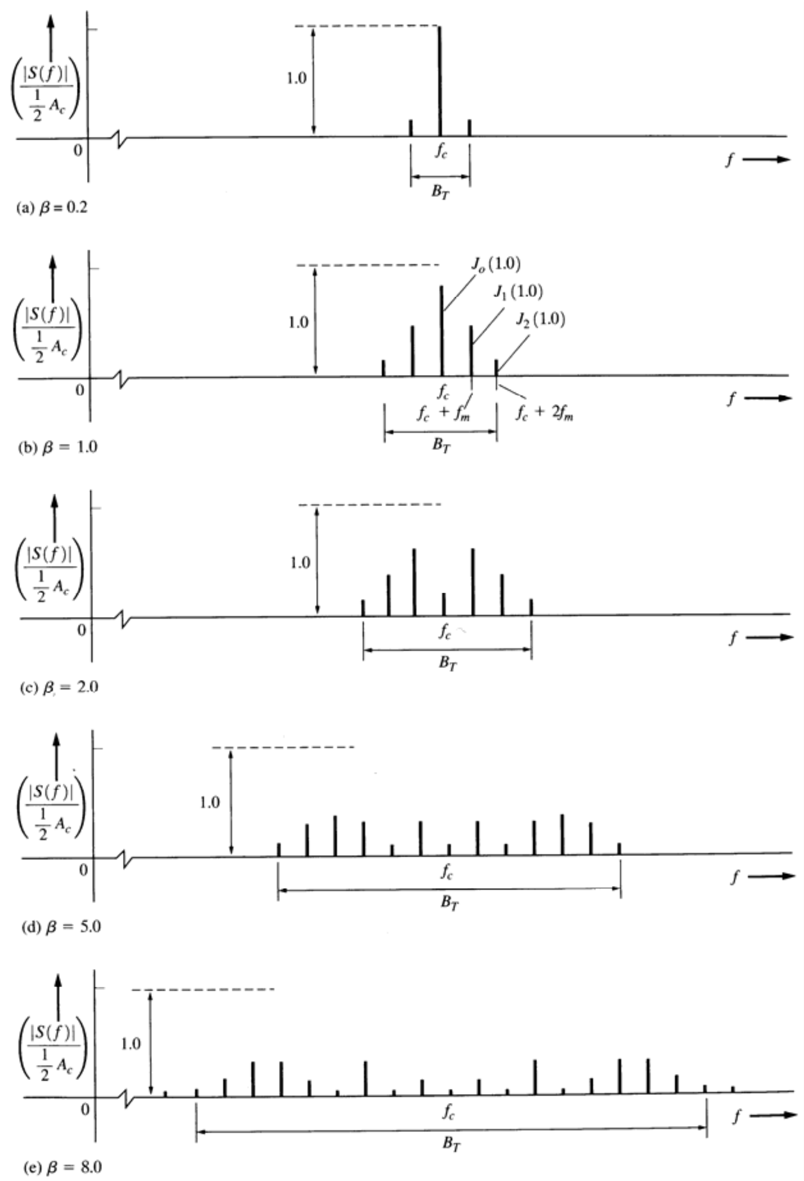
tosios linijos svoris yra proporcingas n-tosios eilės Beselio funkcijos vertei, kai jos argumentus lygus moduliavimo indeksui β. Pagal (5.5.18), atitinkamo PM arba FM signalo spektras – tai nešlio dažniu f_c paslinktas kompleksinės gaubtinės spektras (5.5.29). Amplitudžių spektras, kuris gaunamas, įrašius (5.5.29) į (5.5.18), pavaizduotas 5.5.5 pav. penkioms moduliavimo indekso β vertėms. Linija ties nešlio dažniu f_c atitinka dėmenį $n = 0$ (5.5.29) sumoje, t.y., nešlio linijos intensyvumas yra proporcingas $|J_0(\beta)|$. Todėl *nešlio linijos svoris mažėja, didėjant moduliavimo indeksui* (plg. 5.5.5a–e pav.). Be to, šis mažėjimas nėra monotoniškas: augant β, nulinės eilės Beselio funkcija $J_0(\beta)$ mažėja osciliuodama ir keisdama ženklą (žr. 5.5.4 pav.). Esant moduliavimo indekso vertėms, kurios atitinka šios funkcijos nulius, nešlio linijos signalo spektre iš viso nelieka. 5.5.4 pav. ir priedo D lentelėje D-2 matyti, kad nešlio amplitudė bus lygi nuliui, kai $\beta = 2.40$, 5.52 ir t.t.

5.5.5 pav. taip pat matyti, kad moduliuoto kampo signalo dažnių juostos plotis priklauso nuo moduliavimo indekso β. Taip yra todėl, kad, augant moduliavimo indeksui, aukštesniųjų eilių Beselio funkcijos iš pradžių auga (žr. 5.5.4 pav.), ir šio augimo srities plotis yra tuo didesnis, kuo didesnė Beselio funkcijos eilė. Kadangi Beselio funkcijos eilė nusako spektro linijos numerį, tai, didėjant β, signalo spektre pradeda atsirasti vis didesnių numerių linijos, t.y., *didėjant moduliavimo indeksui, dažnių juostos plotis auga*.

Vadinasi, pagrindiniai veiksniai, kurie lemia moduliuoto kampo signalo dažnių juostos plotį B_T, yra moduliavimo signalo ribinis dažnis ir moduliavimo indeksas. Juostos plotį B_T galima skaičiuoti pagal apytikslę formulę

$$B_T \approx 2(\beta + 1)B, \qquad (5.5.30)$$

kur β yra fazės arba dažnio moduliavimo indeksas, o B yra moduliavimo signalo ribinis dažnis, kuris sinusoidinio moduliavimo atveju sutampa su sinusoidės dažniu. (5.5.30) formulė vadinama ***Karsono taisykle***.



5.5.5 pav. Sinusoide moduliuoto FM arba PM signalo spektras, esant kelioms moduliavimo indekso vertėms.

Kadangi moduliuoto kampo signalo spektrą tiksliai apskaičiuoti yra sudėtinga, tai ypatingą reikšmę įgyja apytikslės formulės, kurios galioja ribiniais atvejais, kai moduliavimo indeksas yra žymiai mažesnis už vienetą arba žymiai didesnis už vienetą. Apie šiuos ribinius atvejus kalbama sekančiuose dviejuose poskyriuose.

5.5.4. Siaurajuostis kampo moduliavimas

Siaurajuosčiu kampo moduliavimu vadinamas toks fazės arba dažnio moduliavimas, kurio metu didžiausiasis fazės nuokrypis (5.5.14) yra žymiai mažesnis už vienetą. Praktikoje moduliuoto kampo signalas laikomas siaurajuosčiu signalu, jeigu pradinė fazė mažesnė už 0.2:

$$|\theta(t)| < 0.2. \qquad (5.5.31)$$

Tuomet kompleksinę gaubtinę $g(t) = A_c e^{j\theta}$ galima aproksimuoti Teiloro eilute, kurioje palikti tik pirmieji du dėmenys:

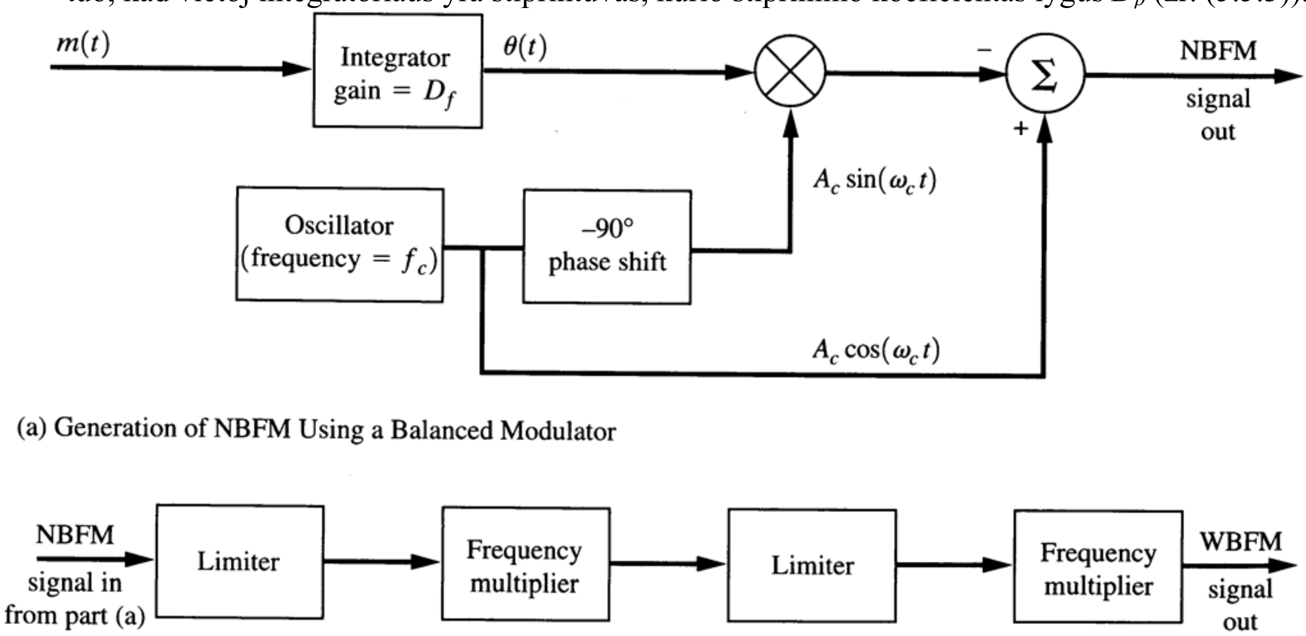
$$g(t) \approx A_c[1 + j\theta(t)]. \qquad (5.5.32)$$

Įrašę (5.5.32) į bendrąją moduliuotojo signalo išraišką (4.2.1), gauname moduliuoto kampo siaurajuosčio signalo išraišką:

$$s(t) = \underbrace{A_c \cos\omega_c t}_{\text{Nešlys}} - \underbrace{A_c\theta(t)\sin\omega_c t}_{\text{Šalinės juostos}}. \qquad (5.5.33)$$

Šis rezultatas rodo, kad siaurajuostis moduliuoto kampo signalas sudarytas iš dviejų dėmenų: harmoninis nešlio dėmuo, kuris nepriklauso nuo moduliavimo signalo, ir šalinių juostų dėmuo. Šia prasme siaurajuostis kampo moduliavimas yra panašus į amplitudės moduliavimą (žr. (5.1.2)), išskyrus tai, kad šalinių juostų dėmens fazė aplenkia nešlio fazę 90° kampu.

Siaurajuosčio kampo moduliavimo signalo išraiška (5.5.33) kartu nusako ir būdą, kuriuo galima generuoti tokį signalą. Atitinkama moduliuoto dažnio siaurajuosčio signalo (*narrowband frequency modulation*, ***NBFM***) generavimo schema pavaizduota 5.5.6a pav. Šis įtaisas vadinamas ***balansiniu moduliatoriumi***. Pradinė fazė $\theta(t)$ suformuojama, integruojant moduliavimo signalą (žr. (5.5.4)), po to signalas $\theta(t)$ dauginamas iš nešlio dažnio virpesio, kurio fazė atsilieka nuo nešlio fazės 90° kampu, po to ši sandauga atimama iš nešlio signalo. Moduliuotos fazės siaurajuosčio signalo generavimo schema skiriasi nuo 5.5.6a pav. schemos tik tuo, kad vietoj integratoriaus yra stiprintuvas, kurio stiprinimo koeficientas lygus D_p (žr. (5.5.3)).



5.5.6 pav. Siaurajuostis dažnio moduliavimas, naudojant balansinį moduliatorių (a), ir plačiajuosčio FM signalo formavimas iš siaurajuosčio (b).

Suformavus NBFM signalą, jo moduliavimo indeksą (5.5.17) galima padidinti kiek norima kartų, naudojant dažnio daugintuvus (žr. 4.9 poskyrį), nes, padidinus momentinį dažnį, tiek pat kartų padidėja ir didžiausias dažnio nuokrypis ΔF, o moduliavimo signalo ribinis dažnis B nepasikeičia (jeigu moduliavimo signalas yra sinusoidė, ribinį dažnį nusako dydis, kuris yra atvirkštinis laiko intervalui tarp FM signalo momentinio dažnio maksimumų, o dažnio daugintuvai nekeičia šių maksimumų laiko momentų). Plačiajuosčio moduliuoto dažnio signalo (*wideband frequency modulation*, ***WBFM***) gavimas iš NBFM signalo vadinamas WBFM signalo generavimo ***netiesioginiu metodu*** arba ***Armstrongo metodu***. Šio metodo schema pavaizduota 5.5.6b pav. Šioje schemoje signalo ribotuvai (žr. 4.7 poskyrį) reikalingi amplitudės moduliavimo pašalinimui. Pirmasis ribotuvas pašalina amplitudės daugiklį $\sqrt{1+\theta^2(t)}$, kuris atsiranda, generuojant NBFM signalą pagal (5.5.32) formulę. Sekantys ribotuvai pašalina amplitudės moduliavimą, kuris atsiranda dėl to, kad dažnio daugintuvuose naudojamų juostinių filtrų dažninės amplitudės charakteristikos nėra plokščios (pvz., žr. 4.10.4b pav.).

Apskaičiavus kompleksinės gaubtinės (5.5.32) Furjė transformaciją ir įrašius ją į juostinio signalo spektro bendrąją išraišką (5.5.18), gaunamas moduliuoto kampo siaurajuosčio signalo spektras:

$$S(f)=\frac{A_c}{2}\{[\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)]+j[\Theta(f-f_c)-\Theta^*(-f-f_c)]\}, \tag{5.5.34}$$

kur

$$\Theta(f)\equiv F[\theta(t)]=\begin{cases} D_p M(f) & \text{PM atveju;} \\ \dfrac{D_f}{j2\pi f}M(f) & \text{FM atveju.}\end{cases} \tag{5.5.35}$$

Čia $M(f)\equiv F[m(t)]$. Įrašę (5.5.35) į (5.5.34) ir pasinaudoję realiojo signalo $m(t)$ spektro simetrijos savybe (2.2.6), randame:
PM atveju

$$\begin{aligned} S(f)&=\frac{A_c}{2}\{[\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)]+j[\Theta(f-f_c)-\Theta(f+f_c)]\}= \\ &=\frac{A_c}{2}\{[\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)]+jD_p[M(f-f_c)-M(f+f_c)]\}, \end{aligned} \tag{5.5.36}$$

FM atveju

$$\begin{aligned} S(f)&=\frac{A_c}{2}\{[\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)]+j[\Theta(f-f_c)+\Theta(f+f_c)]\}= \\ &=\frac{A_c}{2}\{[\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)]+\frac{D_f}{2\pi f}[M(f-f_c)+M(f+f_c)]\}. \end{aligned} \tag{5.5.37}$$

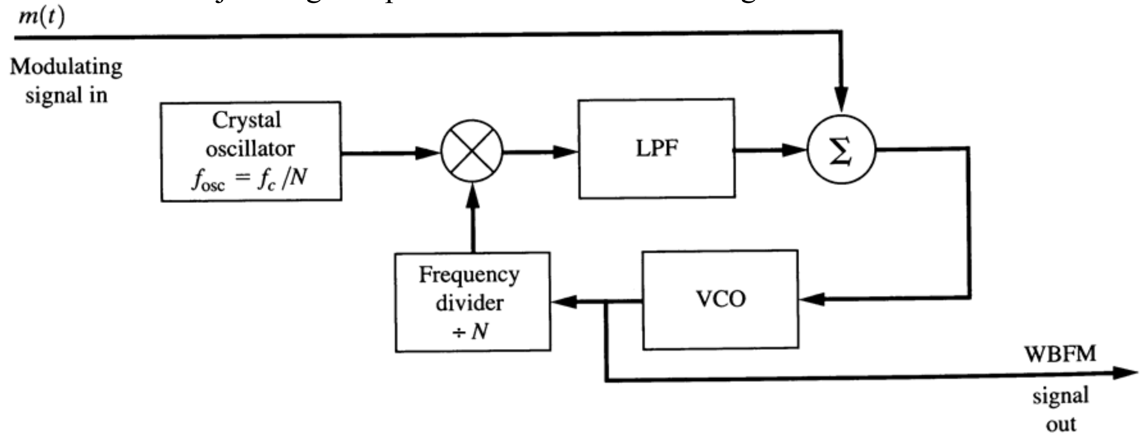
Vadinasi, <u>moduliuoto kampo siaurajuosčio signalo juostos plotis yra lygus dvigubam moduliavimo signalo dažnių juostos pločiui</u> (kaip ir amplitudės moduliavimo atveju).

5.5.5. Plačiajuostis dažnio moduliavimas

Plačiajuosčiu dažnio moduliavimu (*wideband frequency modulation*, ***WBFM***) vadinamas toks dažnio moduliavimas, kurio indeksas (5.5.17) didesnis už vienetą:

$$\beta_f=\frac{D_f\max[m(t)]}{2\pi B}>1. \tag{5.5.38}$$

Praeitame poskyryje buvo minėtas moduliuoto dažnio plačiajuosčio signalo (WBFM) gavimo netiesioginis būdas. Naudojant WBFM gavimo ***tiesioginį metodą***, WBFM signalą generuoja įtampa valdomas generatorius, kurio dažnį valdo moduliavimo signalas. Jeigu generatoriaus valdymo įėjime būtų tik moduliavimo signalas, tuomet nešlio dažnis būtų lygus generatoriaus savajam dažniui (žr. 4.11 poskyrį). Tačiau generatorių, kurie naudojami WBFM generavimui, savasis dažnis nėra stabilus, todėl generatorius įjungiamas į PLL kilpą, kurią sinchronizuoja stabilaus dažnio generatorius (žr. 5.5.7 pav.). Šiuo atveju generatoriaus valdymo signalas yra lygus moduliavimo signalo ir nuolatinės sinchronizavimo įtampos sumai. Nuolatinė sinchronizavimo įtampa suformuojama, sudauginant stabilaus dažnio osciliatoriaus ir įtampa valdomo generatoriaus signalus ir praleidžiant šią sandaugą pro siaurajuostį žemadažnį filtrą. Filtro išėjimo signalas yra proporcingas stabiliojo osciliatoriaus virpesio ir nešlio fazių skirtumui (jeigu fazės paklaida θ_e yra pakankamai maža: žr. fazės detektoriaus charakteristiką 4.11.2a pav.). Kadangi šio fazių skirtumo pokytis sukelia tokį generatoriaus dažnio pokytį, kad fazių skirtumas pradėtų kisti priešinga kryptimi, tai nešlio dažnis visuomet tiksliai sutampa su stabiliojo osciliatoriaus dažniu. Kad filtro išėjimo signalo amplitudė būtų pakankamai didelė, abiejų dauginamųjų virpesių amplitudės turi būti pakankamai didelės. Tai pasiekiama, naudojant dažnio daliklį, kuris sumažina įtampa valdomo generatoriaus dažnį. Tuo pačiu sumažinamas dažnio moduliavimo indeksas (5.5.17) ir padidinamas nešlio svoris signale bei susilpninamos kitos spektro linijos (žr. 5.5.5 pav.). Naudojant dažnio daliklį, kuris sumažina dažnį N kartų, stabiliojo osciliatoriaus dažnis turi būti N kartų mažesnis už nešlio dažnį. WBFM generavimo tiesioginiu metodu schema, kuri pavaizduota 5.5.7 pav., yra panaši į dažnio sintezatoriaus schemą, kuri pavaizduota 4.11.7 pav.: vienintelis skirtumas yra tas, kad WBFM schemoje prie žemadažnio filtro išėjimo signalo pridedamas moduliavimo signalas.



5.5.7 pav. Plačiajuosčio FM signalo (WBFM) generavimas tiesioginiu metodu.

WBFM signalo galios spektrinis tankis yra apytiksliai proporcingas moduliavimo signalo tikimybės tankiui φ_m, kuris apibrėžiamas tokiu būdu:

$$\varphi_m(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < m(t) < x + \Delta x)}{\Delta x}, \tag{5.5.39}$$

kur $P(x < m(t) < x + \Delta x)$ žymi tikimybę, kad moduliavimo signalas įgis vertę iš intervalo $x < m(t) < x + \Delta x$. Šį sąryšį tarp WBFM signalo galios spektro ir moduliavimo signalo tikimybės tankio tiksliai galima įrodyti tik statistinės radiofizikos metodais. Tačiau jį galima paaiškinti ir paprasčiau. FM signalo momentinio dažnio nuokrypis nuo nešlio dažnio yra proporcingas moduliavimo signalui $m(t)$ (žr. (5.5.9)). Vadinasi, kuo daugiau laiko moduliavimo signalas praleidžia arti kurios nors vertės, tuo ilgiau FM signalo momentinis dažnis yra arti atitinkamo dažnio. Todėl FM signalo galios spektras ties tuo dažniu turi maksimumą.

Rasime WBFM signalo normuotosios galios spektrinio tankio $P(f)$ išraišką, remdamiesi prielaida, kad šis tankis proporcingas moduliavimo signalo tikimybės tankiui. T.y., teigiamiems dažniams

$$P(f) = c\varphi_m[m(f)] \qquad (f > 0), \tag{5.5.40}$$

kur f turi momentinio dažnio prasmę, φ_m yra moduliavimo signalo m tikimybės tankis, o c yra proporcingumo koeficientas, kurį reikia rasti. Pagal (5.5.9) formulę

$$m(f) = \frac{2\pi}{D_f}(f - f_c)\,. \tag{5.5.41}$$

Įrašę (5.5.41) į (5.5.40), gauname

$$P(f) = c\varphi_m\left(\frac{2\pi}{D_f}(f - f_c)\right) \qquad (f > 0). \tag{5.5.42}$$

Kadangi galios spektrinis tankis yra lyginė dažnio funkcija (žr. (2.3.7)), tai $P(-f) = P(f)$. Vadinasi, galios spektrinio tankio išraiška, kuri galioja visiems (ir teigiamiems, ir neigiamiems) dažniams, yra

$$P(f) = P^+(f) + P^-(-f)\,; \tag{5.5.43}$$

čia pagalbinės dažnio funkcijos $P^+(f)$ ir $P^-(f)$ apibrėžiamos tokius būdu:

$$P^+(f) = \begin{cases} c\varphi_m\left(\dfrac{2\pi}{D_f}(f - f_c)\right) & (f \geq 0), \\ 0 & (f < 0). \end{cases} \qquad P^-(f) = \begin{cases} 0 & (f > 0), \\ c\varphi_m\left(\dfrac{2\pi}{D_f}(-f - f_c)\right) & (f \leq 0). \end{cases} \tag{5.5.44}$$

Kadangi šios dvi funkcijos yra simetriškos viena kitai nulinio dažnio atžvilgiu, tai kiekvienos iš jų integralas dažnio atžvilgiu lygus pusei FM signalo normuotosios galios, t.y.,

$$\int_{-\infty}^{\infty} P^+(f)df \equiv c\int_0^{\infty} \varphi_m\left(\frac{2\pi}{D_f}(f - f_c)\right)df = \frac{A_c^2}{4}\,. \tag{5.5.45}$$

Atlikę integravimo kintamojo pakeitimą $f \to m(f)$, kur $m(f)$ nusakomas (5.5.41) formule, gauname

$$c = \frac{\pi A_c^2}{2D_f \displaystyle\int_{-\frac{2\pi}{D_f}f_c}^{\infty} \varphi_m(m)dm}\,. \tag{5.5.46}$$

Integralo, kuris yra šios trupmenos vardiklyje, apatinį rėžį galima užrašyti tokiu būdu:

$$-\frac{2\pi}{D_f}f_c = -\frac{f_c}{\beta_f B}\max[m(t)]\,.$$

(žr. (5.5.38). Praktikoje nešlio dažnis f_c visuomet yra žymiai didesnis už moduliavimo signalo ribinį dažnį B, t.y., $f_c/B >> 1$. Todėl (5.5.46) reiškinyje esančio integralo apatinio rėžio absoliutinė vertė yra žymiai didesnė už moduliavimo signalo maksimalią vertę $\max[m(t)] \approx |\min[m(t)]|$. Vadinasi, tikimybės tankis, kad moduliavimo signalas įgys vertę, kuri mažesnė už apatinį integravimo rėžį, yra lygus nuliui. Pagal tikimybės tankio apibrėžimą (5.5.39), tai reiškia, kad šis integralas lygus vienetui, t.y.,

$$c = \frac{\pi A_c^2}{2D_f}\,, \tag{5.5.47}$$

o skaičiuojant pagalbines funkcijas $P^+(f)$ ir $P^-(f)$ (5.5.44), visoje dažnių ašyje galima naudoti, atitinkamai, tik viršutinį ir tik apatinį reiškinius:

$$P^+(f) = \frac{\pi A_c^2}{2D_f}\varphi_m\left(\frac{2\pi}{D_f}(f - f_c)\right), \quad P^-(f) = \frac{\pi A_c^2}{2D_f}\varphi_m\left(\frac{2\pi}{D_f}(-f - f_c)\right). \tag{5.5.48}$$

Įrašę (5.5.48) į (5.5.43), gauname galutinę WBFM signalo galios spektrinio tankio išraišką:

$$P(f) = \frac{\pi A_c^2}{2D_f}\left[\varphi_m\left(\frac{2\pi}{D_f}(f - f_c)\right) + \varphi_m\left(\frac{2\pi}{D_f}(-f - f_c)\right)\right]. \tag{5.5.49}$$

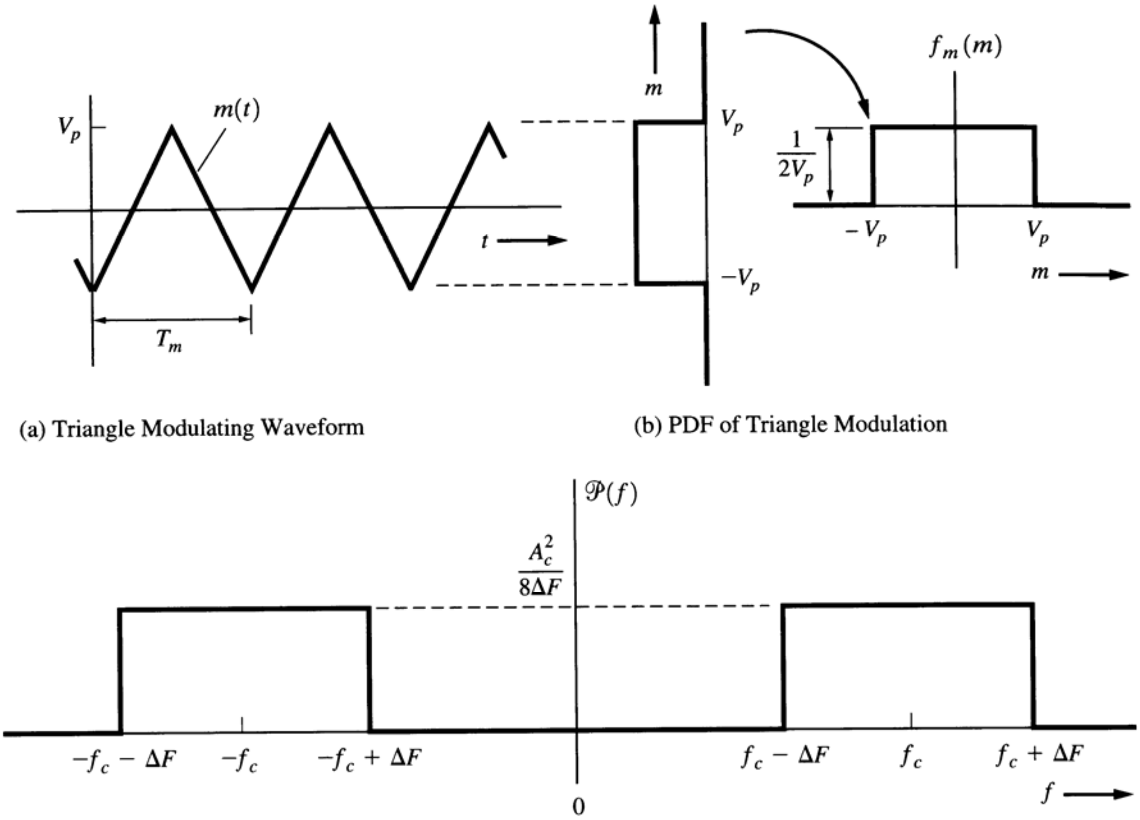
Pavyzdžiui, jeigu moduliavimo signalas yra trikampė įtampa (žr. 5.5.8a pav.) tuomet, pasirinkus bet kurį jo verčių intervalą, esantį tarp didžiausios ir mažiausios verčių $+V_p$ ir $-V_p$, tikimybė, kad įtampos vertė priklausys duotajam intervalui, priklausys tik nuo to intervalo pločio, tačiau nepriklausys nuo jo padėties ant įtampų ašies. T.y., kai $-V_p < m < V_p$, trikampės įtampos tikimybės tankis yra konstanta, o kai $|m| > V_p$, tikimybės tankis lygus nuliui:

$$\varphi_m(m) = \begin{cases} \dfrac{1}{2V_p}, & |m| < V_p; \\ 0, & |m| > V_p \end{cases} \tag{5.5.50}$$

(žr. 5.5.8b pav.). Įrašę šią tikimybės tankio funkciją į (5.5.49) ir išreiškę amplitudę V_p pagal didžiausiojo dažnio nuokrypio ΔF išraišką (5.5.12), gauname WBFM signalo galios spektrinį tankį trikampės moduliavimo įtampos atveju:

$$P(f) = \begin{cases} \dfrac{A_c^2}{8\Delta F}, & (f_c - \Delta F) < f < (f_c + \Delta F) \\ 0, & |f_c - f| > \Delta F \end{cases} + \begin{cases} \dfrac{A_c^2}{8\Delta F}, & (-f_c - \Delta F) < f < (-f_c + \Delta F) \\ 0, & |f_c + f| > \Delta F \end{cases} \tag{5.5.51}$$

Ši galios spektrinio tankio funkcija pavaizduota 5.5.8c pav. Reikia turėti omenyje, kad ši priklausomybė yra apytikslė. Kadangi moduliavimo signalas yra periodinė funkcija, tai FM signalas taip pat yra periodinė funkcija, kurios periodas sutampa su moduliavimo signalo periodu T_m. Vadinasi, tikslusis šio pavyzdžio FM signalo galios spektras yra sudarytas iš atskirų δ funkcijos pavidalo linijų, kurios nutolusios viena nuo kitos dažniu $1/T_m$ (žr. (2.5.31)). (5.5.51) formulė nusako tik šio spektro *apytikslę gaubtinę*, kuria galima pakeisti tikslųjį spektrą, kai dažnio moduliavimo indeksas yra pakankamai didelis.



5.5.8 pav. WBFM signalo su trikampiu moduliavimu apytikslis spektras. a – moduliavimo signalas, b – trikampio moduliavimo signalo tikimybės tankis, c – atitinkamo WBFM signalo galios spektrinis tankis.

Reziumuojant tai, kas aukščiau pasakyta apie kampo moduliavimą, galima teigti, kad svarbiausios moduliuoto kampo signalų savybės yra šios:

- Didėjant moduliavimo indeksui, moduliuoto kampo signalo dažnių juostos plotis auga.
- Nešlio linijos svoris signalo spektre priklauso nuo moduliavimo signalo ir gali būti lygus nuliui kai kurių pavidalų moduliavimo signalams.
- Moduliuoto kampo siaurajuosčio signalo dažnių juostos plotis yra lygus dvigubam moduliavimo signalo dažnių juostos pločiui (kaip ir amplitudės moduliavimo atveju).
- Moduliuoto kampo signalo realioji gaubtinė yra konstanta ($R(t) = A_c$), kuri nepriklauso nuo moduliavimo signalo.

5.5.6. Išankstinė korekcija ir atvirkštinė korekcija kampo moduliavimo sistemose

Kampo moduliavimo sistemose signalo ir triukšmo santykį imtuvo išėjime galima padidinti tokiu būdu. Siųstuve, prieš moduliavimą, moduliavimo signalo amplitudė padidinama aukštųjų dažnių srityje – tai vadinama ***išankstine korekcija*** (*preemphasis*), o imtuve, po demoduliavimo, aukštųjų dažnių srityje signalo amplitudė sumažinama – tai vadinama ***atvirkštine korekcija*** (*deemphasis*). Siųstuvo ir imtuvo filtrų, kurie atlieka šią transformaciją, dažninių amplitudės charakteristikų sandauga moduliavimo signalo dažnių juostoje yra konstanta, t.y., papildomų iškraipymų neatsiranda. Tačiau signalo ir triukšmo santykis imtuvo išėjime padidėja (šį teiginį galima įrodyti statistinės radiofizikos metodais). 5.5.9a pav. pavaizduota kampo moduliavimo sistemos su išankstine ir atvirkštine korekcija struktūrinė schema. 5.5.9b pav. pavaizduotas išankstinės korekcijos filtras. Tai yra aukštųjų dažnių filtras, kurio perdavimo funkcija yra

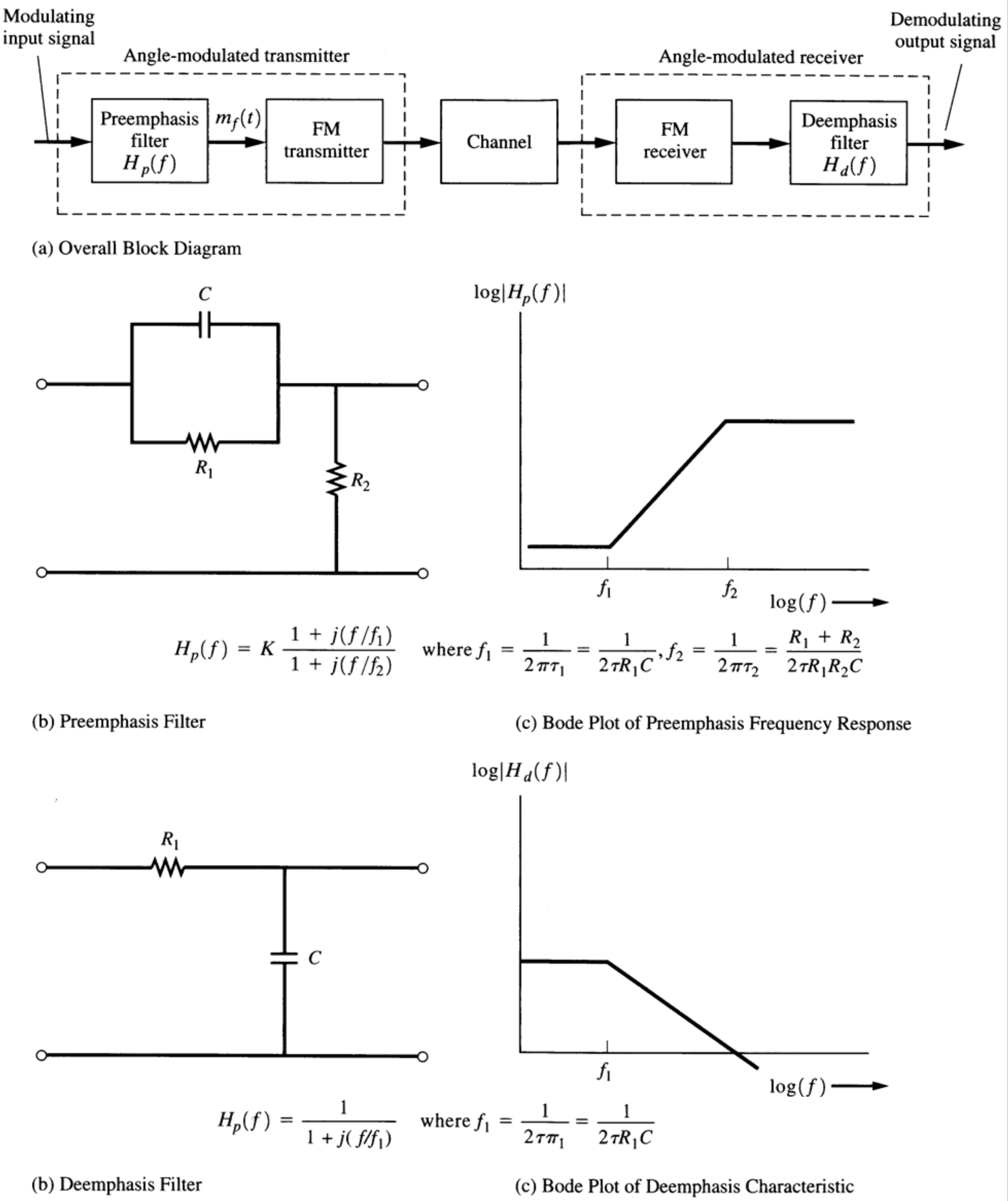
$$H_p(f) = \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{1 + j(f/f_1)}{1 + j(f/f_2)}, \quad \text{kur} \quad f_1 = \frac{1}{2\pi\tau_1} = \frac{1}{2\pi R_1 C}, \quad f_2 = \frac{1}{2\pi\tau_2} = \frac{R_1 + R_2}{2\pi R_1 R_2 C}. \qquad (5.5.52)$$

5.5.9c pav. dažninė amplitudės charakteristika $|H_p(f)|$ pavaizduota logaritminiame mastelyje. Matyti, kad joje yra du lūžio taškai: vienas atitinka grandinėles R_1C ribinį dažnį f_1, o kitas – ribinį dažnį f_2. Atvirkštinės korekcijos filtras (žr. 5.5.9d pav.) – tai yra paprasčiausias žemųjų dažnių filtras, kurio perdavimo funkciją nusako (2.6.22) formulė:

$$H_d(f) = \frac{1}{1 + j(f/f_1)}, \quad \text{kur} \quad f_1 = \frac{1}{2\pi\tau_1} = \frac{1}{2\pi R_1 C}. \qquad (5.5.53)$$

Logaritminiame mastelyje atvirkštinės korekcijos filtro dažninės amplitudės charakteristikos lūžio taškas (žr. 5.5.9e pav.) sutampa su išankstinės korekcijos filtro pirmuoju lūžio tašku f_1. Todėl, kai $f < f_2$, pilnoji sistemos dažninė charakteristika yra plokščia (tai akivaizdu, sudauginus reiškinius (5.5.52) ir (5.5.53)). Kad moduliavimo signalas nebūtų iškraipomas, antrasis lūžio taškas f_2 turi būti didesnis už moduliavimo signalo juostos plotį (pvz., 25 kHz garsinio dažnio moduliavimo atveju). FM transliavimo sistemose laiko konstanta τ_1 dažniausiai lygi 75 μs, todėl f_1 = 2.12 kHz.

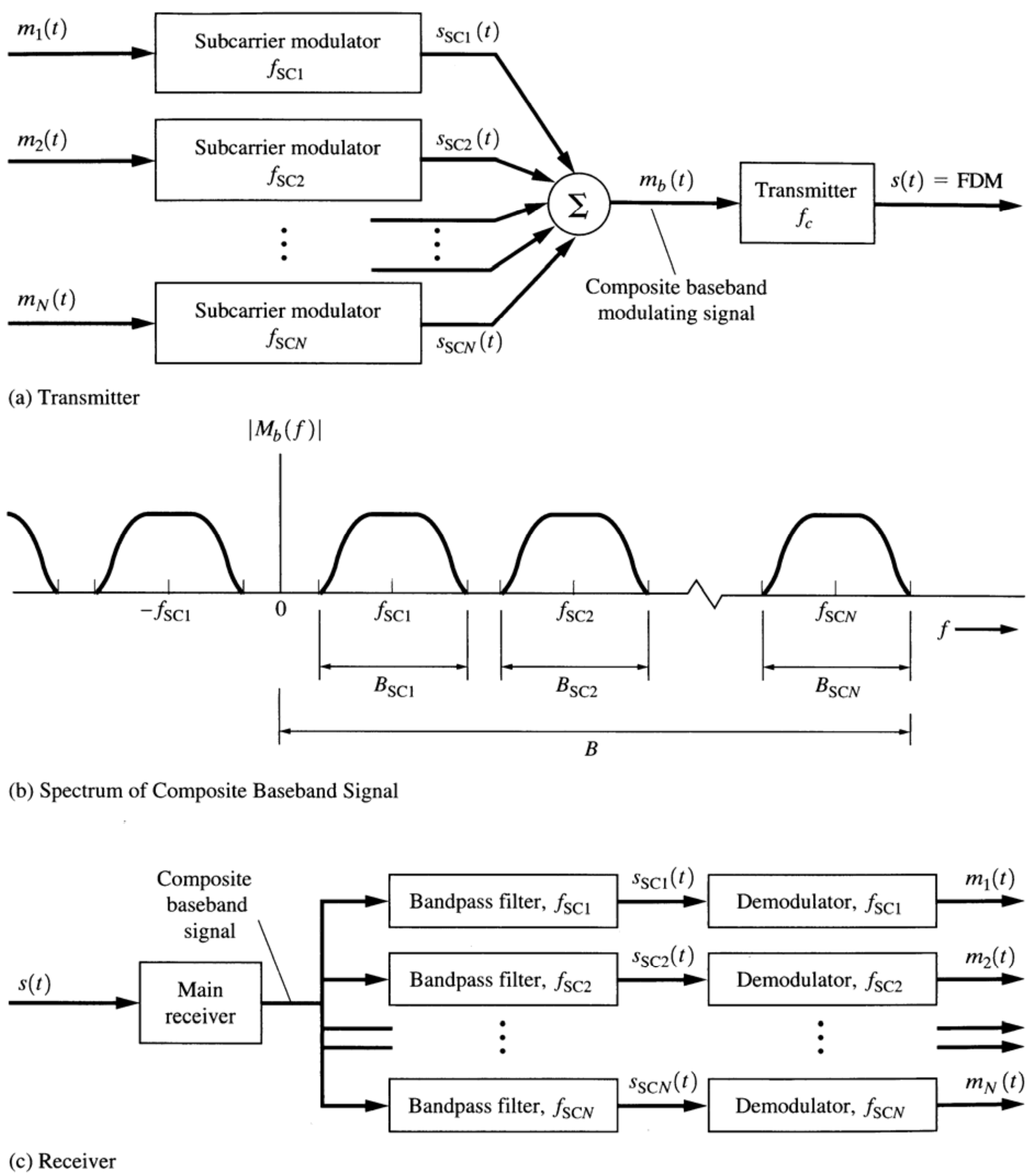
Dažnių intervale $f_1 < f < f_2$ išankstinės korekcijos filtras veikia kaip signalo diferenciatorius (daugyba iš dažnio). Todėl, kai $f > f_1$, moduliuotasis signalas yra PM signalas, o ne FM signalas (žr. 5.5.1b pav.). Vadinasi, <u>*dažnio moduliavimas su išankstine korekcija yra dažnio moduliavimo ir fazės moduliavimo derinys*</u>.



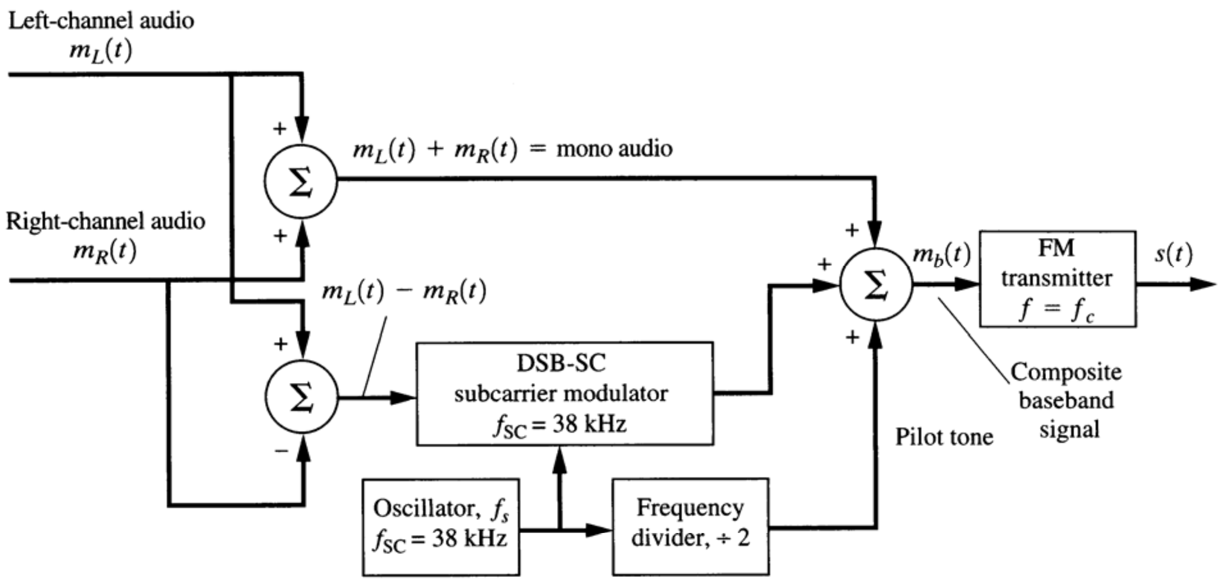
5.5.9 pav. Kampo moduliavimo sistema su išankstine korekcija ir atvirkštine korekcija. a – struktūrinė schema, b, c – išankstinės korekcijos filtras ir jo dažninė amplitudės charakteristika, d,e – atvirkštinės korekcijos filtras ir jo dažninė amplitudės charakteristika.

5.6. Dažninis tankinimas ir moduliuoto dažnio stereofoniniai signalai

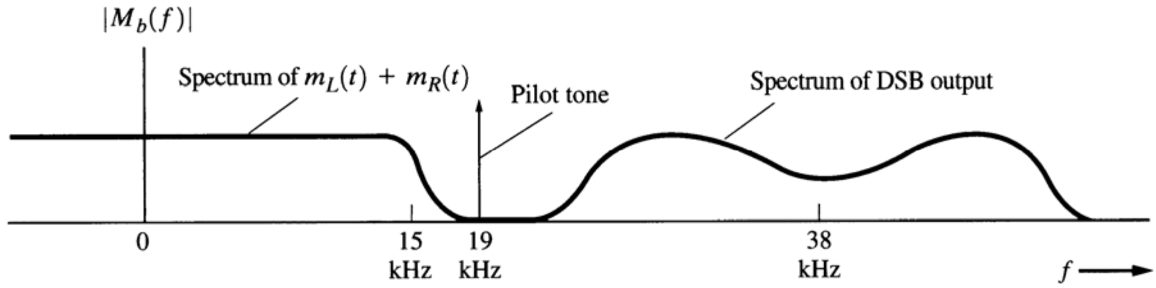
Dažninis tankinimas (*frequency-division multiplexing*, ***FDM***) yra toks kelių signalų perdavimas plačiajuosčiu kanalu, kai informaciniai signalai visų pirma moduliuoja kelis ***ponešlius*** (*subcarrier*), o po to gautųjų juostinių signalų suma, kuri vadinama ***sudėtiniu signalu***, moduliuoja nešlį (žr. 5.6.1 pav.). Skirtingų ponešlių moduliavimui gali būti panaudoti skirtingi moduliavimo būdai (AM, DSB, SSB, PM, FM ir kt.). Nešlio moduliavimo būdas taip pat gali



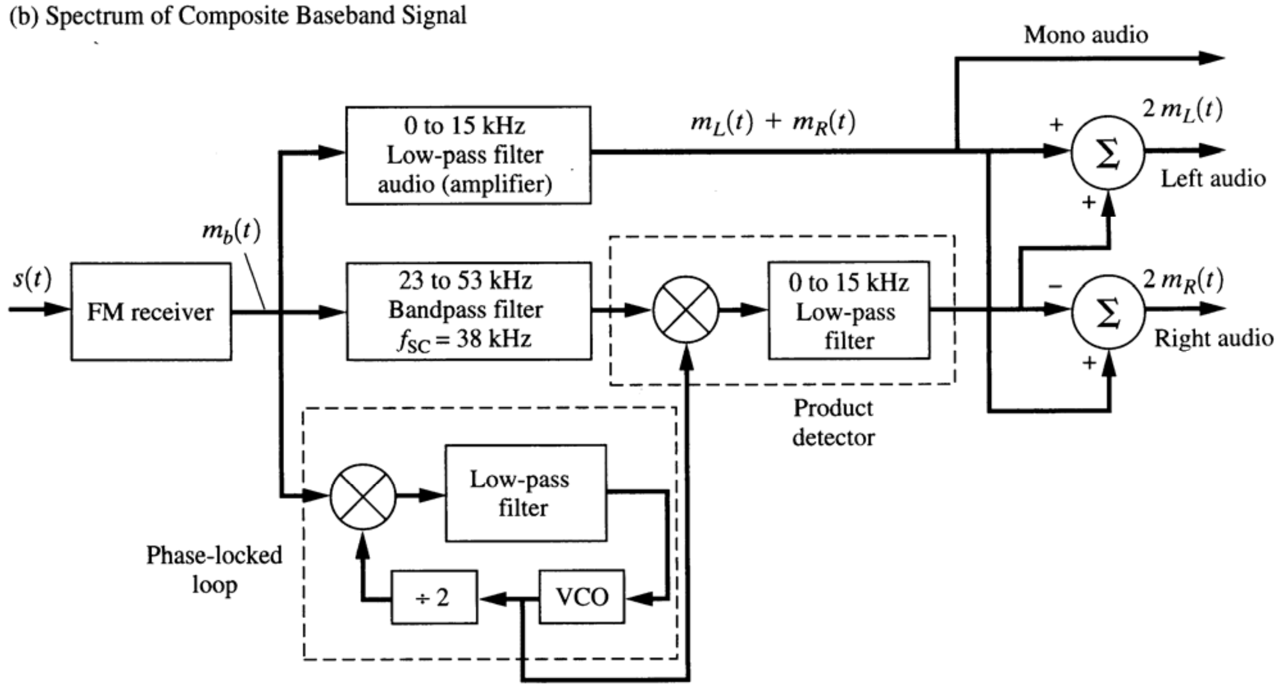
5.6.1 pav. Dažninio tankinimo sistema. a – siųstuvo struktūrinė schema, b – sudėtinio signalo spektras, c – imtuvo struktūrinė schema.



(a) FM Stereo Transmitter



(b) Spectrum of Composite Baseband Signal



(c) FM Stereo Receiver

5.6.2 pav. FM stereo sistema. a – FM stereo siųstuvo struktūrinė schema, b – sudėtinio signalo amplitudžių spektras, c – FM stereo imtuvo struktūrinė schema.

skirtis nuo ponešlių moduliavimo būdo. Tačiau, kaip parodyta 5.6.1b pav. sudėtinį signalą sudarančių moduliuotųjų signalų spektrai neturi persikloti; priešingu atveju atsirastų atitinkamų informacinių signalų ***abipusiai iškraipymai***. Sudėtinis signalas – tai plačiajuostis žemadažnis signalas, kurio dažnių juostos plotis didesnis už kiekvieno iš jį sudarančių juostinių signalų spektro plotį (žr. 5.6.1b pav.). Moduliuojant šiuo signalu nešlį, suformuojamas galutinis FDM signalas, kuris perduodamas plačiajuosčiu kanalu (žr. 5.6.1a pav.).

FDM signalo imtuvas visų pirma atkuria žemadažnį sudėtinį signalą, po to šis signalas praleidžiamas pro filtrus, kurie atskiria skirtingus moduliuotus ponešlius, o po to šie ponešliai demoduliuojami, atkuriant informacinius signalus $m_1(t)$, $m_2(t)$ ir t.t. (žr. 5.6.1c pav.).

FDM signalo perdavimo ir priėmimo sistemos pavyzdys – tai stereofoninis FM radijo siųstuvas ir imtuvas. Ši sistema sudaryta taip, kad klausytojas su monofoniniu FM radijo imtuvu girdėtų kairiojo ir dešiniojo kanalų sumą, o klausytojas su stereofoniniu FM imtuvu girdėtų kairiojo kanalo signalą kairiajame garsiakalbyje, o dešiniojo kanalo signalą – dešiniajame garsiakalbyje. Stereofoninio FM siųstuvo schema pavaizduota 5.6.2a pav. Signalas formuojamas tokiu būdu. Visų pirma suformuojami kairiojo ir dešiniojo kanalų signalų suma ir skirtumas. Skirtuminis signalas moduliuoja ponešlį, kurio dažnis lygus 38 kHz. Šio moduliavimo būdas – DSB-SC (žr. 5.2 poskyrį). Kadangi garsinio dažnio signalo dažnių juostos plotis yra 15 kHz, tai DSB-SC signalo spektro apatinis ribinis dažnis yra 38 - 15 = 23 kHz. Vadinasi, DSB-SC signalo ir suminio signalo spektrai nepersikloja. Sudėtinį signalą sudaro suminio signalo ir skirtuminiu signalu moduliuoto DSB-SC signalo suma. Be to, prie sudėtinio signalo pridedamas harmoninis 19 kHz dažnio virpesys, kuris gaunamas, dalinant DSB-SC signalo nešlio dažnį pusiau (šis virpesys panaudojamas imtuve DSB-SC signalo koherentiniam detektavimui: žr. žemiau). Atstojamasis sudėtinio signalo spektras pavaizduotas 5.6.2b pav. Sudėtinis signalas moduliuoja nešlio dažnį. Pagal galiojančius tarptautinius standartus, FM transliavime naudojami nešlio dažniai nuo 88.1 MHz iki 107.9 MHz (kas 200 kHz).

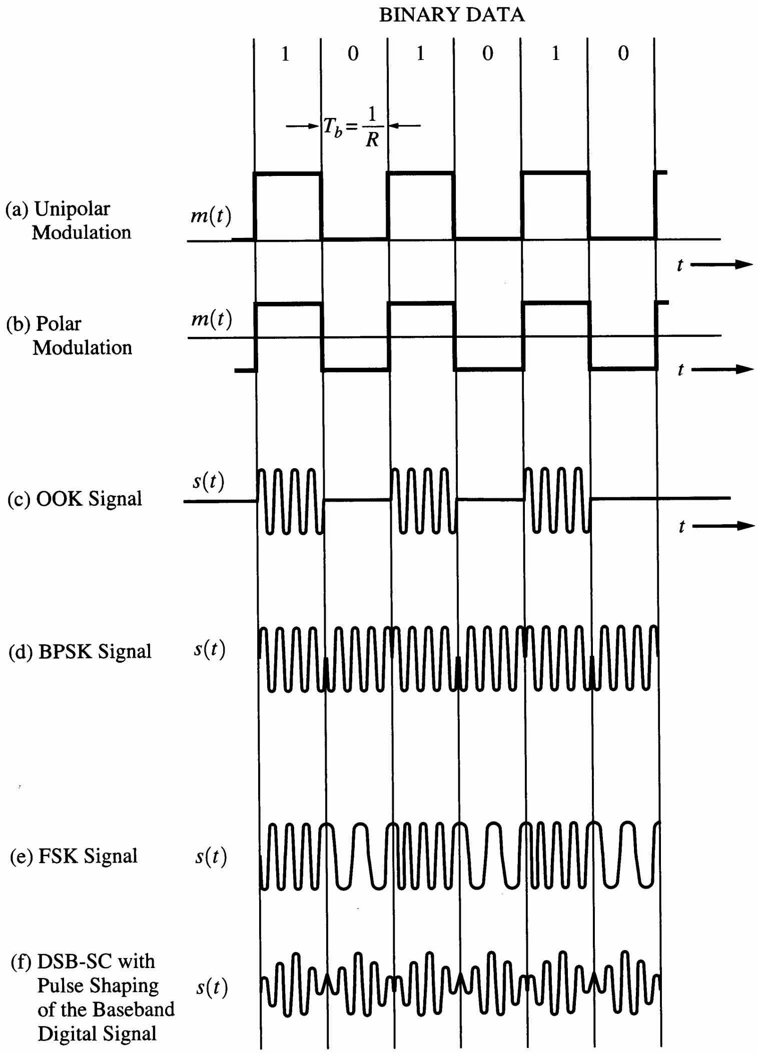
Stereofoninio FM imtuvo struktūrinė schema pateikta 5.6.2c pav. Imtuvas veikia tokiu būdu. Visų pirma atkuriamas sudėtinis signalas $m_b(t)$. Suminis signalas atkuriamas, praleidžiant sudėtinį signalą pro žemadažnį filtrą, kurio dažnių juostos plotis lygus 15 kHz (jeigu imtuvas būtų monofoninis, tuomet būtent šį signalą girdėtų klausytojas). Skirtuminio signalo atkūrimui naudojamas $23 \div 53$ kHz juostinis filtras ir sandaugos detektorius, kuriame generatoriaus vaidmenį atlieka PLL kilpa (taip pat, kaip AM detektoriuje: žr. 4.11.6 pav.). PLL kilpą sinchronizuoja 19 kHz dažnio pagalbinis signalas, esantis sudėtiniame signale (žr. aukščiau). Kadangi įtampa valdomo generatoriaus virpesys praleidžiamas pro dažnio daliklį iš dviejų, tai PLL kilpa atkuria nešlio virpesį (38 kHz). Šis virpesys sudauginamas su DSB-SC signalu, ir žeminamojo dažnio keitimo dedamąją išskiria žemadažnis filtras, kurio dažnių juostos plotis lygus 15 kHz. Kairiojo kanalo signalas atkuriamas, sudedant suminį ir skirtuminį signalus, o dešiniojo kanalo signalas atkuriamas, atimant skirtuminį signalą iš suminio.

5.7. Dvilygio skaitmeninio moduliavimo juostiniai signalai

5.7.1. Dvilygio skaitmeninio moduliavimo rūšys

Skaitmeniniu moduliavimu vadinamas toks moduliuotojo signalo (4.2.1) formavimo būdas, kai moduliavimo signalas $m(t)$ yra dvilygis arba daugialygis skaitmeninis impulsinis signalas (žr. 3 skyrių). Būdai, kuriais skaitmeninis žemadažnis moduliavimo signalas paverčiamas juostinio signalo kompleksine gaubtine, yra tokie patys, kaip ir analoginio moduliavimo signalo atveju (žr. C-1 lentelę), pvz., amplitudės moduliavimas, fazės moduliavimas arba dažnio moduliavimas. Šiame poskyryje bus aprašytas tik dvilygio moduliavimo signalo atvejis.

Labiausiai paplitusius dvejetainio moduliavimo būdus iliustruoja 5.7.1 pav. Šie būdai yra:



5.7.1 pav. Dvilygio skaitmeninio moduliavimo rūšys. a, b – vienpolis ir atitinkamas polinis moduliavimo signalai, c, d, e, f – moduliuotieji signalai.

Amplitudės manipuliavimas (*on-off keying*, ***OOK***) – tai toks dvejetainis moduliavimas, kai dvejetainio vieneto perdavimo metu perduodamas nemoduliuotas nešlys, o dvejetainio nulio perdavimo metu signalo nėra iš viso (žr. 5.7.1c pav.). T.y., amplitudės manipuliavimas – tai atskiras DSB-SC moduliavimo atvejis, kai moduliavimo signalas išreikštas vienpoliu NRZ linijos kodu (žr. 5.7.1a pav.). Šis DSB-SC signalas skiriasi nuo "tradicinio" DSB-SC signalo tuo, kad jo moduliavimo signalo nuolatinė dedamoji nelygi nuliui (t.y., signalo spektre ties nešlio dažniu yra δ funkcijos pavidalo maksimumas). Todėl šį moduliavimo būdą galima laikyti ir amplitudės moduliavimu: polinio NRZ linijos kodo pavidalo moduliavimo signalas (žr. 5.7.1b pav.) moduliuoja nešlį, kurio amplitudė lygi moduliavimo signalo impulsų amplitudei.

Apgrąžinis fazės manipuliavimas (*binary-phase shift keying*, ***BPSK***) – tai toks dvejetainis fazės moduliavimas, kai dvejetainio nulio perdavimo metu perduodamas nemoduliuotas nešlys, o dvejetainio vieneto perdavimo metu perduodamas signalas, kurio fazė skiriasi nuo nešlio fazės pastoviu dydžiu. Vadinasi, apgrąžinis fazės manipuliavimas yra tapatus fazės moduliavimui signalu, kuris išreikštas vienpoliu linijos kodu. Dažniausiai fazės pokytis lygus 180°, t.y., pasikeitus dvejetainiam skaitmeniui ($0 \rightarrow 1$ arba $1 \rightarrow 0$), nešlio fazė pakeičiama 180° (žr. 5.7.1d pav.). Tokiu atveju apgrąžinis fazės manipuliavimas yra tapatus DSB-SC moduliavimui signalu, kuris išreikštas poliniu linijos kodu (žr. 5.7.1b pav.).

Dažninis manipuliavimas (*frequency-shift keying*, ***FSK***) – tai toks skaitmeninis dažnio moduliavimas, kai dvejetainį vienetą ir nulį atitinka dvi fiksuotos dažnio vertės (žr. 5.7.1e pav.). Šis moduliavimo būdas yra tapatus dažnio moduliavimui skaitmeniniu dvilygiu signalu, kuriame naudojami stačiakampiai impulsai.

Kadangi stačiakampio impulso absoliutinis dažnių juostos plotis yra begalinis (žr. 2.2.2a pav.), tai, prieš moduliuojant skaitmeniniu impulsiniu signalu nešlį, impulsinį signalą reikia filtruoti, kad jo juostos plotis atitiktų reikalavimus juostinio signalo dažnių juostos pločiui. Mažinant impulso dažnių juostos plotį, impulsas išplinta, todėl skirtingi impulsai gali persikloti (tarpženklinė interferencija). Tačiau, kaip įrodyta 3.5.3 poskyryje, filtro perdavimo funkciją galima parinkti taip, kad filtravimas nesukeltų tarpženklinės interferencijos: tuo tikslu galima naudoti, pvz., pakelto kosinuso formos kryčio filtrą, kurio išėjimo signalo spektrą, kai įėjime laiko momentu $t = 0$ yra vienetinis stačiakampis impulsas, nusako (3.5.11) formulė. Jeigu skaitmeninis informacinis signalas prieš moduliavimą yra filtruojamas, tuomet BPSK signalas (žr. 5.7.1d pav.) virsta DSB-SC signalu (žr. 5.7.1f pav.).

5.7.2. Amplitudės manipuliavimas

Amplitudės manipuliavimo (*on-off keying*, OOK) signalą nusako formulė

$$s(t) = A_c m(t) \cos \omega_c t\,, \tag{5.7.1}$$

kur $m(t)$ yra dvilygis vienpolis NRZ signalas (žr. 5.7.1a pav.). Iš (5.7.1) išplaukia, kad šio signalo kompleksinė gaubtinė lygi

$$g(t) = A_c m(t)\,. \tag{5.7.2}$$

Šios gaubtinės galios spektrinis tankis lygus

$$P_g(f) = A_c^2 P_m(f)\,, \tag{5.7.3}$$

kur $P_m(f)$ yra moduliavimo signalo $m(t)$ galios spektrinis tankis. Laikant, kad dvejetainio vieneto ir nulio tikimybės yra vienodos ir kad visi bitai yra nepriklausomi, pagal (3.4.2a) ir (3.4.2b) formules, atsižvelgus į Puasono sumos formulę (2.5.25), randama tokia $P_m(f)$ išraiška:

$$P_m(f) = \frac{A^2 T_b}{4}\left(\frac{\sin \pi f T_b}{\pi f T_b}\right)^2 \left[1 + \frac{1}{T_b}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_b}\right)\right] = \frac{A^2}{4}\left[\delta(f) + T_b\left(\frac{\sin \pi f T_b}{\pi f T_b}\right)^2\right], \tag{5.7.4}$$

kur T_b yra bito trukmė, o A yra moduliavimo signalo impulso amplitudė. Jeigu moduliavimo signalo $m(t)$ vidutinė normuotoji galia lygi vienetui, tuomet $A = \sqrt{2}$. Įrašę šią vertę į (5.7.4) ir gautąjį reiškinį įrašę į (5.7.3), gauname OOK signalo gaubtinės galios spektrinio tankio išraišką:

$$P_g(f) = \frac{A_c^2}{2}\left[\delta(f) + T_b\left(\frac{\sin \pi f T_b}{\pi f T_b}\right)^2\right]. \tag{5.7.5}$$

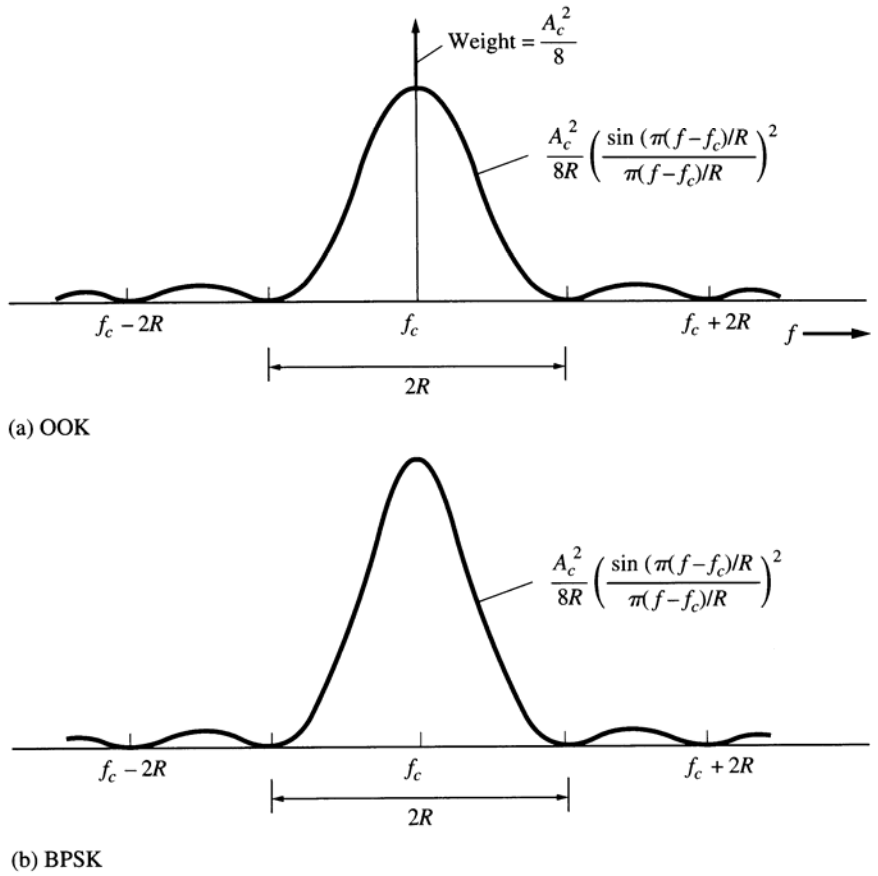
Gaubtinės vidutinė normuotoji galia ($P_g(f)$ integralas nuo -∞ iki ∞) šiuo atveju lygi A_c^2 (nes $m(t)$ impulso amplitudė parinkta taip, kad moduliavimo signalo vidutinė normuotoji galia būtų lygi 1). Vadinasi, pagal juostinio signalo vidutinės normuotosios galios bendrąją išraišką (4.3.9), OOK signalo $s(t)$ vidutinė normuotoji galia lygi $A_c^2/2$. Signalo $s(t)$ galios spektrinis tankis gaunamas, įrašius (5.7.5) į juostinio signalo galios spektrinio tankio bendrąją išraišką (4.3.8). Šio galios spektrinio tankio priklausomybė nuo dažnio teigiamųjų dažnių srityje pavaizduota 5.7.2a pav. OOK signalo pirmojo nulio dažnių juostos plotis B_T yra lygus $2/T_b = 2R$, kur $R = 1/T_b$ yra bitų sparta. T.y., OOK signalo atveju $B_T = 2B$, kur B yra žemadažnio moduliavimo signalo juostos plotis. Šis sąryšis išplaukia iš to, kad OOK yra atskirasis AM atvejis.

Jeigu dvilygis informacinis signalas prieš moduliavimą yra praleidžiamas pro pakelto kosinuso formos kryčio filtrą, tuomet filtro išėjimo signalo absoliutinis dažnių juostos plotis susijęs su bitų sparta R sąryšiu (3.5.18), kuriame simbolių sparta D sutampa su R:

$$B = \frac{1}{2}(1 + r)R \tag{5.7.6}$$

(čia r yra filtro kryčio koeficientas). Vadinasi, šiuo atveju OOK signalo absoliutinis dažnių juostos plotis lygus

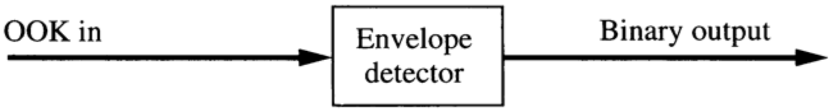
$$B_T = (1 + r)R\,. \tag{5.7.7}$$



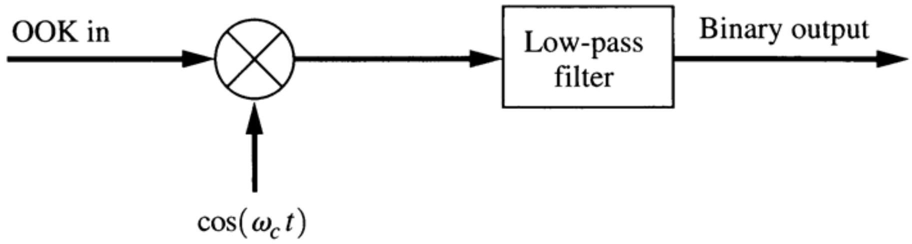
5.7.2 pav. Dvilygio skaitmeninio moduliavimo signalų galios spektriniai tankiai.

Kadangi OOK yra atskiras amplitudės moduliavimo atvejis (žr. 5.7.1 poskyrį), tai OOK signalus galima detektuoti, naudojant gaubtinės detektorių (žr. 4.10.1 poskyrį) arba sandaugos detektorių, kurio generatoriaus signalo fazė sutampa su nešlio faze (žr. 4.10.2 poskyrį). Šie detektoriai pavaizduoti 5.7.3a pav. ir 5.7.3b pav. Sandaugos detektoriuje naudojamas atraminis nešlio dažnio signalas $\cos(\omega_c t)$. Šis signalas dažniausiai gaunamas, naudojant PLL kilpą (žr. 4.11.6 pav.), kurią sinchronizuoja δ funkcijos pavidalo maksimumas ties nešlio dažniu OOK signalo spektre (žr. 5.7.2a pav.).

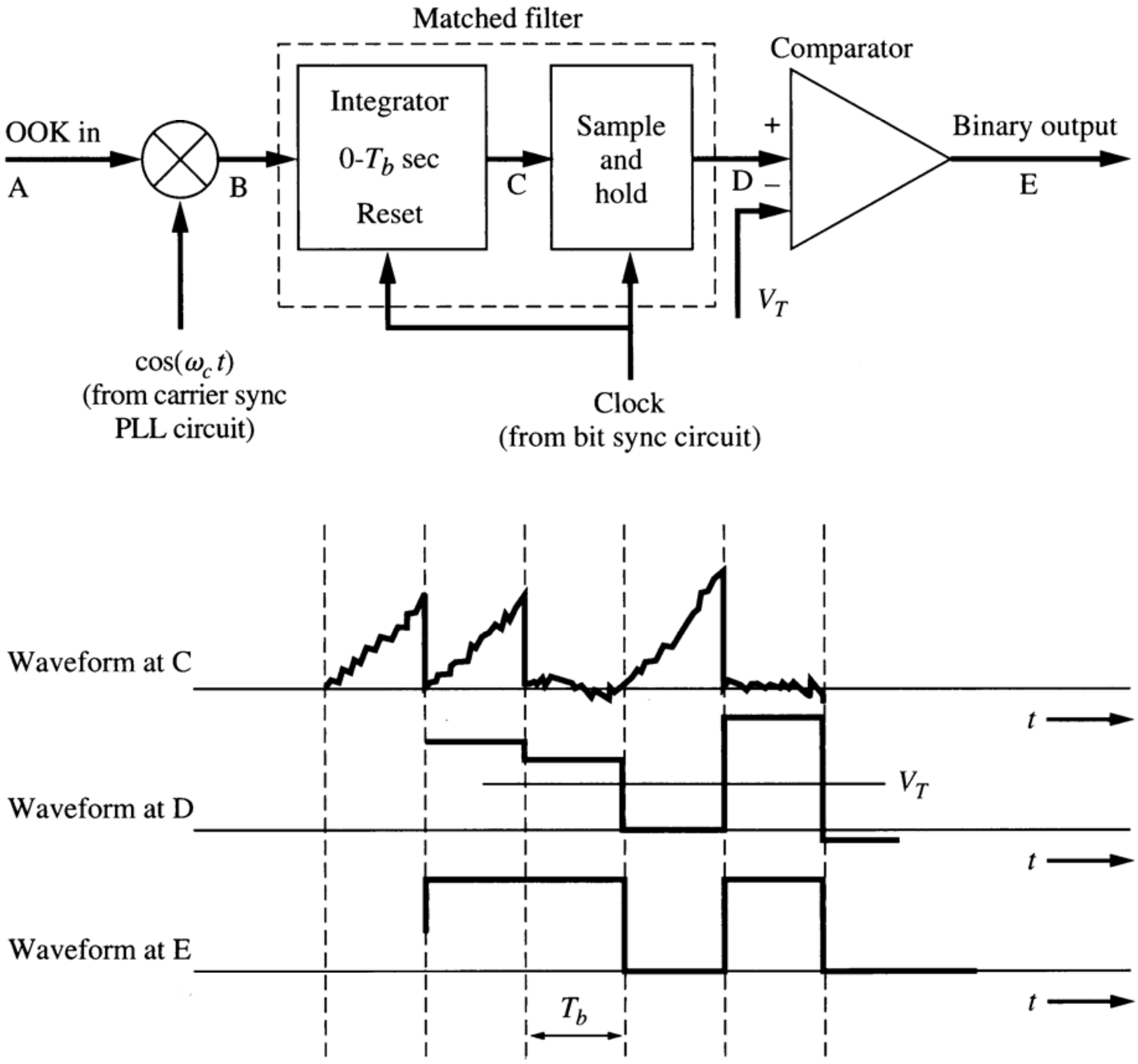
Siekiant minimizuoti klaidingų bitų dažnį imtuvo išėjimo signale, sandaugos detektoriuje žemųjų dažnių filtro vaidmenį turi atlikti optimalusis filtras (*matched filter*), kurį sudaro integratorius bei imties ir laikymo grandinė (žr. 5.7.3c pav.). ***Optimalusis filtras*** – tai filtras, kurio išėjime signalo ir triukšmo galių santykis imties momentu yra lygus savo viršutinei teorinei ribai, kurią įmanoma pasiekti, esant duotojo pavidalo įėjimo signalui ir duotojo pavidalo triukšmo galios spektriniam tankiui. Atsitiktinių procesų teorijoje įrodoma, kad tuo atveju, kai filtro įėjimo signalas sudarytas iš stačiakampių impulsų, o triukšmas yra baltasis, optimalusis filtras – tai įtaisas, kurio išėjimo signalas imties momentu t_0 yra proporcingas įėjimo signalo integralui nuo bito pradžios momento t_1 iki bito pabaigos momento $t_2 = t_1 + T_b$. Be to, kad šis optimalusis filtras tenkintų priežastingumo principą (žr. 2.6.2 poskyrį), imties momentas t_0 turi tenkinti sąlygą $t_0 \geq t_2$. Jeigu $t_0 = t_2$, tuomet imties momentai sutampa su bitų pabaigos momentais, o optimaliojo filtro išėjimo signalai – tai impulsai, kurių amplitudės proporcingos įėjimo signalo integralui paskutinio priimtojo bito laiko intervale (šį atvejį iliustruoja 5.7.3c pav.). Kad imties momentai atitiktų bitų pabaigos momentus, o integravimo pradžios momentai atitiktų bitų pradžios momentus, integratorius bei imties ir laikymo įtaisas turi būti sinchronizuojami bitų sinchronizavimo impulsais (žr. 3.4.6 poskyrį). Optimaliojo filtro išėjimo impulsų amplitudės dėl triukšmo šiek tiek skiriasi nuo savo pradinių verčių, todėl jie praleidžiami pro komparatorių,



(a) Noncoherent Detection



(b) Coherent Detection with Low-Pass Filter Processing



(c) Coherent Detection with Matched Filter Processing

5.7.3 pav. Amplitudės manipuliavimo signalų detektavimas.

kuris “išvalo” filtro išėjimo signalą (žr. 5.7.3c pav.). 5.7.3c pav. apačioje pavaizduotos įtampos laikinės priklausomybės įvairiuose detektoriaus taškuose, kai priimamas signalas, kuris atitinka dvejetainį žodį 1101. Pirmoji priklausomybė nusako signalą integratoriaus išėjime, antroji – imties ir laikymo įtaiso išėjime, trečioji – komparatoriaus išėjime.

Optimalusis koherentinis OOK detektorius, kuris pavaizduotas 5.7.3c pav., yra brangesnis už nekoherentinį OOK detektorių, kuris pavaizduotas 5.7.3a pav. Todėl, kai įėjimo triukšmas yra mažas, labiau apsimoka naudoti nekoherentinį detektorių.

5.7.3. Apgrąžinis fazės manipuliavimas

Apgrąžinio fazės manipuliavimo (*binary-phase shift keying*, BPSK) signalas išreiškiamas formule

$$s(t) = A_c \cos[\omega_c t + D_p m(t)], \tag{5.7.8}$$

kur $m(t)$ yra polinis dvilygis žemadažnis signalas. Toliau laikysime, kad $m(t)$ išreikštas poliniu NRZ linijos kodu (žr. 5.7.1b pav.) ir kad jo ribinės vertės yra ±1.

Pasinaudojus trigonometrine tapatybe $\cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B)$, lygybę (5.7.8) galima užrašyti šitaip:

$$s(t) = A_c \cos(D_p m(t)) \cos\omega_c t - A_c \sin(D_p m(t)) \sin\omega_c t\,.$$

Kadangi $m(t) = \pm 1$, pastarąją lygybę galima perrašyti šitaip:

$$s(t) = \underbrace{(A_c \cos D_p)\cos\omega_c t}_{\text{nešlio dėmuo}} - \underbrace{(A_c \sin D_p) m(t) \sin\omega_c t}_{\text{duomenų dėmuo}}\,. \tag{5.7.9}$$

Nešlio dėmens amplitudę lemia didžiausiasis fazės nuokrypis, kuris šiuo atveju sutampa su D_p: $\Delta\theta = D_p$.

Tuo atveju, kai kampo moduliavimo signalas yra skaitmeninis, moduliavimo indeksas apibrėžiamas šiek tiek kitaip, negu analoginio moduliavimo atveju (žr. (5.5.16) ir (5.5.17)). ***Skaitmeninio moduliavimo indeksas*** h apibrėžiamas tokiu būdu:

$$h = \frac{2\Delta\theta}{\pi}, \tag{5.7.10}$$

kur $\Delta\theta$ yra didžiausiasis fazės nuokrypis. BPSK atveju $2\Delta\theta$ nusako fazės nuokrypio kitimo intervalo plotį (nuo minimumo $-\Delta\theta$ iki maksimumo $\Delta\theta$).

Jeigu D_p yra mažas, tuomet iš (5.7.9) išplaukia, kad duomenų dėmuo yra žymiai mažesnis už nešlio dėmenį. Siekiant sumažinti klaidingų bitų dažnį, reikia padidinti duomenų dėmens galią. Ši galia yra didžiausia tuo atveju, kai $\Delta\theta = D_p = \pi/2$. Tai atitinka skaitmeninio moduliavimo indekso vertę $h = 1$. Šiuo optimaliuoju atveju nešlio dėmuo lygus nuliui, ir BPSK signalas (5.7.9) yra

$$s(t) = -A_c m(t) \sin\omega_c t\,. \tag{5.7.11}$$

Taigi, šiuo atveju BPSK signalas yra tapatus DSB-SC signalui su poliniu moduliavimo signalu (žr. (5.2.2)). Šio BPSK signalo kompleksinė gaubtinė yra

$$g(t) = jA_c m(t)\,. \tag{5.7.12}$$

Šios gaubtinės galios spektrinis tankis lygus

$$P_g(f) = A_c^2 P_m(f)\,, \tag{5.7.13}$$

kur $P_m(f)$ yra moduliavimo signalo (polinio NRZ linijos kodo) galios spektrinis tankis. Laikant, kad dvejetainio vieneto ir nulio tikimybės yra vienodos ir kad visi bitai yra nepriklausomi, pagal (3.4.2a) ir (3.4.2b) formules randama tokia polinio NRZ linijos kodo galios spektrinio tankio išraiška:

$$P_m(f) = A^2 T_b \left(\frac{\sin \pi f T_b}{\pi f T_b} \right)^2, \tag{5.7.14}$$

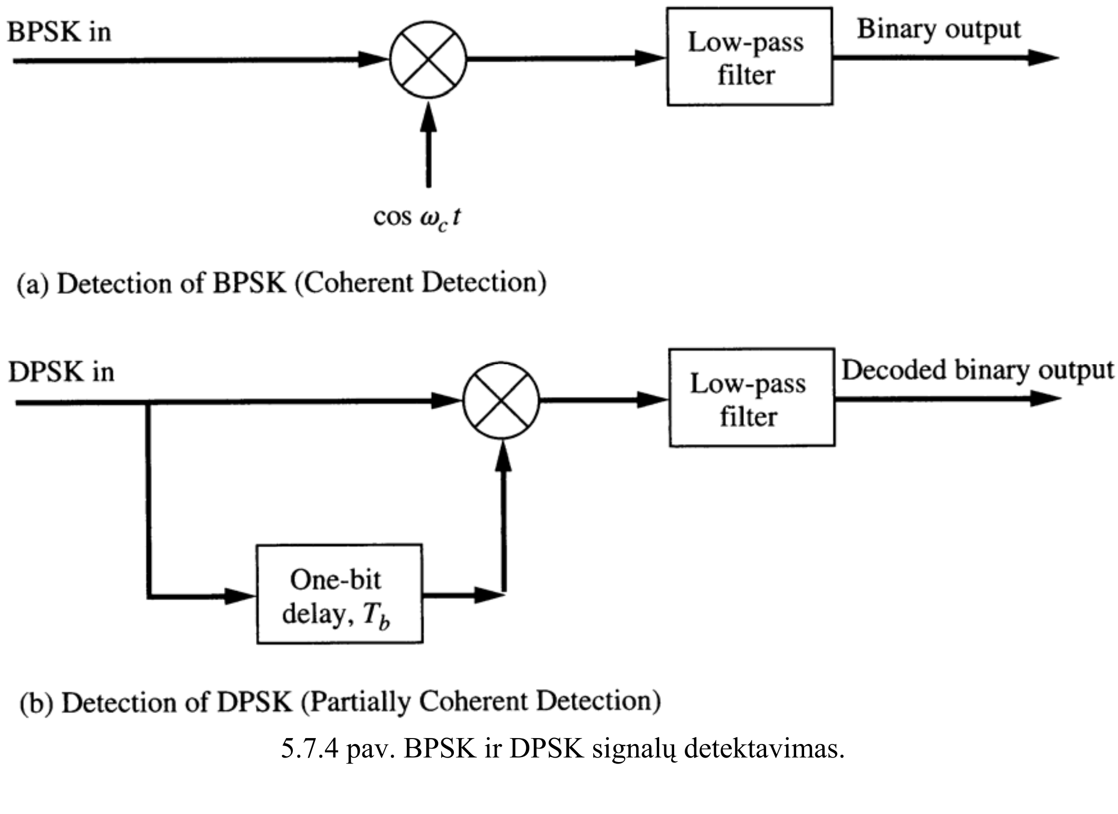
kur T_b yra bito trukmė, o A yra moduliavimo signalo impulso amplitudė. Atsižvelgus į tai, kad $A = 1$, iš (5.7.13) ir (5.7.14) formulių išplaukia tokia BPSK signalo kompleksinės gaubtinės galios spektrinio tankio formulė:

$$P_g(f) = A_c^2 T_b \left(\frac{\sin \pi f T_b}{\pi f T_b} \right)^2 . \tag{5.7.15}$$

Įrašę (5.7.12) į juostinio signalo vidutinės normuotosios galios bendrąją išraišką (4.3.9) ir atsižvelgę į tai, kad $\langle m^2(t) \rangle = 1$ (nes $m(t) = \pm 1$), gauname, kad BPSK signalo (5.7.11) vidutinė normuotoji galia lygi $A_c^2/2$. Šio signalo galios spektrinis tankis gaunamas, įrašius kompleksinės gaubtinės galios spektrinio tankio išraišką (5.7.15) į juostinio signalo galios spektrinio tankio bendrąją išraišką (4.3.8). Tokiu būdu gautasis galios spektras pavaizduotas 5.7.2b pav. Kaip matome, BPSK signalo pirmojo nulio dažnių juostos plotis yra lygus dvigubai bitų spartai: $B_T = 2R$, t.y., toks pats, kaip ir OOK signalo atveju (žr. 5.7.2a pav.).

Kadangi bendrojo pavidalo (5.7.9) BPSK signalo duomenų dėmens ir nešlio dėmens fazės skiriasi 90°, tai BPSK signalo detektavimui negalima naudoti gaubtinės detektoriaus, o reikia naudoti sandaugos detektorių, kurio generatoriaus signalo fazė aplenkia nešlio fazę 90° kampu (žr. 4.10.2 poskyrį ir 5.7.4a pav.). Jeigu $\Delta\theta < \pi/2$, tuomet atraminį signalą $-\sin(\omega_c t)$ galima generuoti, naudojant PLL kilpą, kurią sinchronizuoja signalo spektre esanti nešlio linija (žr. 4.11.6 pav.). Tačiau optimaliuoju atveju, kai $\Delta\theta = \pi/2$, atraminio signalo generavimui reikia panaudoti Kosto kilpą arba kėlimo kvadratu sistemą (žr. 5.3.1 pav.). Šiuo atveju būtina atsižvelgti į fazės neapibrėžtumą 180° (žr. 5.3 poskyrį).

Siekiant minimizuoti klaidingų bitų dažnį imtuvo išėjime, vietoj žemųjų dažnių filtro 5.7.4a pav. schemoje reikia naudoti optimalųjį filtrą, kuris pavaizduotas 5.7.3c pav. Kadangi moduliavimo signalas šiuo atveju yra polinio NRZ linijos kodo pavidalo (žr. 5.7.1b pav.), tai komparatoriaus persijungimo lygis V_T turi būti lygus 0.



5.7.4 pav. BPSK ir DPSK signalų detektavimas.

5.7.4. Fazių skirtumo manipuliavimas

5.7.3 poskyryje minėta, kad BPSK signalo koherentinis detektavimas susijęs su 180° fazės neapibrėžtumu, dėl kurio imtuvo išėjimo signalas gali būti priešingas moduliavimo signalui. Tokiu atveju vietoj dvejetainių nulių priimami dvejetainiai vienetai, ir atvirkščiai. Siekiant to išvengti, galima naudoti diferencialinį kodavimą (žr. 3.4.3 poskyrį). T.y., nešlys moduliuojamas užkoduotais (diferencialiniais) duomenimis, kurių bitai apskaičiuojami pagal (3.4.3) formulę, kurioje d_n yra n-tasis pradinių (nekoduotųjų) duomenų bitas, o e_n ir e_{n-1} yra n-tasis ir n-1-asis moduliavimo (diferencialinių) duomenų bitai. Imtuve diferencialiniai duomenys dekoduojami pagal (3.4.5) formulę. Vadinasi, galima visų pirma koherentiškai detektuoti moduliavimo signalą (pvz., naudojant 5.7.4a pav. pavaizduotą sandaugos detektorių su Kosto kilpa), o po to dekoduoti jį, naudojant dekodavimo įtaisą, kurio struktūrinė schema pavaizduota 3.4.3 pav. apatinėje dalyje. Tačiau egzistuoja paprastesnis pradinių duomenų atstatymo būdas, kai demoduliavimas ir dekodavimas atliekami vienu žingsniu. Tokio detektoriaus struktūrinė schema pavaizduota 5.7.4b pav. Šiuo atveju įėjimo signalas dauginamas ne iš atraminio harmoninio signalo, o iš užvėlinto vieno bito trukme T_b įėjimo signalo. Įrodysime, kad šios sandaugos skirtuminio dažnio dėmuo (kurį praleidžia žemųjų dažnių filtras) yra proporcingas dekoduotam informaciniam signalui, t.y., paskutiniųjų dviejų bitų sumai moduliu 2 (žr. (3.4.5)). Tai reiškia, kad tuo atveju, kai paskutiniai du bitai yra skirtingi, filtro išėjimo impulsas turi būti priešingas impulsui, kuris gaunamas tuo atveju, kai paskutiniai du bitai yra vienodi. Pagal BPSK signalo bendrąją išraišką (5.7.8) ir pagal trigonometrinę tapatybę $\cos A \cdot \cos B = 0.5 \cdot [\cos(A-B)+\cos(A+B)]$, filtro išėjimo signalas n-tojo bito priėmimo metu yra lygus

$$\widetilde{m}_n = 0.5KA_c^2 \cos[(\omega_c t + D_p m_{n-1}) - (\omega_c t + D_p m_n)] = 0.5KA_c^2 \cos[D_p (m_{n-1} - m_n)], \quad (5.7.16)$$

kur m_n ir m_{n-1} yra moduliavimo signalo (t.y., poliniu NRZ linijos kodu išreikštų užkoduotųjų duomenų) vertės n-tojo ir n-1-ojo bito perdavimo metu (m_n nusako dvejetainį skaičių e_n, o m_n – dvejetainį skaičių e_{n-1}). Optimaliojo BPSK signalo atveju $D_p = \pi/2$ (žr. 5.7.3 poskyrį). Todėl, jeigu $m_n = m_{n-1}$, $\widetilde{m}_n = 0.5KA_c^2$, o jeigu $m_n \neq m_{n-1}$, $\widetilde{m}_n = -0.5KA_c^2$. T.y., detektoriaus išėjimo signalas yra proporcingas $e_n \oplus e_{n-1} = d_n$, ką ir reikėjo įrodyti.

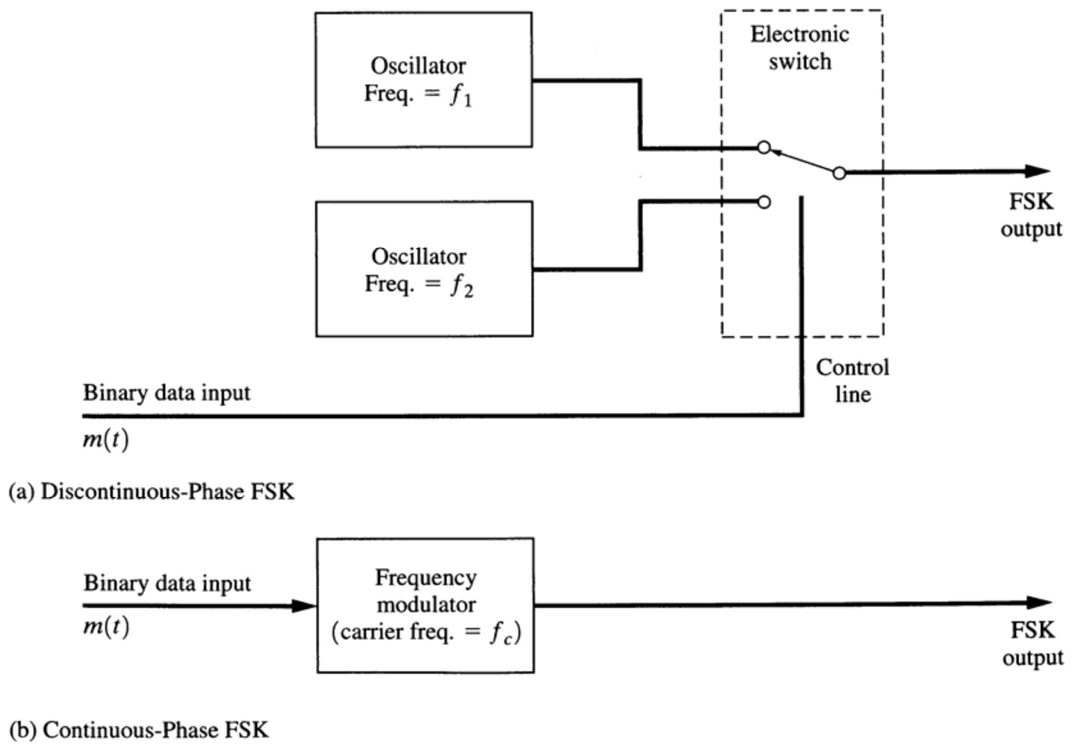
Vadinasi, šiuo atveju nekoduoto bito reikšmę nusako paskutiniuosius du bitus atitinkančių BPSK signalų fazių skirtumas. Todėl fazės moduliavimas poliniu dvilygiu signalu, kuris nusako diferencialinius duomenis, vadinamas ***fazių skirtumo manipuliavimu*** (*differential phase-shift keying*, ***DPSK***).

Praktikoje DPSK dažnai naudojamas vietoj BPSK, nes DPSK imtuve nereikalinga nešlio atkūrimo grandinė (pvz., PLL kilpa, Kosto kilpa arba kėlimo kvadratu sistema).

5.7.5. Dažninis manipuliavimas

Dažninio manipuliavimo (*frequency-shift keying*, FSK) signalą galima generuoti dviem būdais. Vienas būdas – tai elektroninis jungiklis, kuris pakaitom prijungia liniją prie vieno iš dviejų skirtingo dažnio generatorių, priklausomai nuo dvilygio duomenų signalo vertės (žr. 5.7.5a pav.). Šio FSK generavimo būdo ypatybė yra ta, kad perjungimo momentais siųstuvo išėjimo signalas turi trūkius. Kadangi šiuo atveju signalas $s(t)$ yra (5.5.2) pavidalo, tai funkcijos $s(t)$ trūkiai atsiranda dėl to, kad pradinė fazė $\theta(t)$ turi trūkius perjungimo momentais. Todėl toks FSK signalo generavimo būdas vadinamas ***trūkiosios fazės dažniniu manipuliavimu*** (*discontinuous phase FSK*). Trūkiosios fazės FSK signalą galima užrašyti tokiu būdu:

$$s(t) = \begin{cases} A_c \cos(\omega_1 t + \theta_1), & \text{kai perduodamas dvejetainis vienetas;} \\ A_c \cos(\omega_2 t + \theta_2), & \text{kai perduodamas dvejetainis nulis.} \end{cases} \quad (5.7.17)$$



5.7.5 pav. Dažninis manipuliavimas. a – trūkiosios fazės dažninis manipuliavimas, b – tolydžiosios fazės dažninis manipuliavimas.

Tolydžiosios fazės dažninis manipuliavimas (*continuous phase FSK*) realizuojamas, paduodant dvejetainių duomenų signalą $m(t)$ į dažnio moduliatorių (žr. 5.7.5b pav.). Pagal dažnio moduliavimo apibrėžimą (žr. 5.5.1 poskyrį), šiuo atveju FSK signalas yra

$$s(t) = \mathrm{Re}\{g(t)e^{j\omega_c t}\}, \tag{5.7.18a}$$

kur

$$g(t) = A_c e^{j\theta(t)}, \tag{5.7.18b}$$

$$\theta(t) = D_f \int_{-\infty}^{t} m(\lambda)d\lambda . \tag{5.7.18c}$$

Nors moduliavimo signalas $m(t)$ gali turėti trūkius (pvz., jeigu jis sudarytas iš stačiakampių impulsų), tačiau pradinė fazė $\theta(t)$ yra tolydžioji funkcija, nes $\theta(t)$ proporcinga $m(t)$ integralui. Toliau bus kalbama tik apie tolydžiosios fazės dažninį manipuliavimą. Jeigu $m(t)$ yra dvilygis signalas (pvz., $m(t) = \pm A$), tuomet FSK signalas vadinamas ***dvilygio dažninio manipuliavimo*** signalu.

FSK signalų spektrus galima įvertinti tais pačiais metodais, kurie naudojami, skaičiuojant moduliuoto kampo signalų spektrus (žr. 5.5.3 poskyrį). FSK signalo dažnių juostos plotį B_T apytiksliai nusako Karsono taisyklė (5.5.30): $B_T \approx 2(\beta + 1)B$, kur $\beta = \Delta F/B$. Tai tapatu lygybei

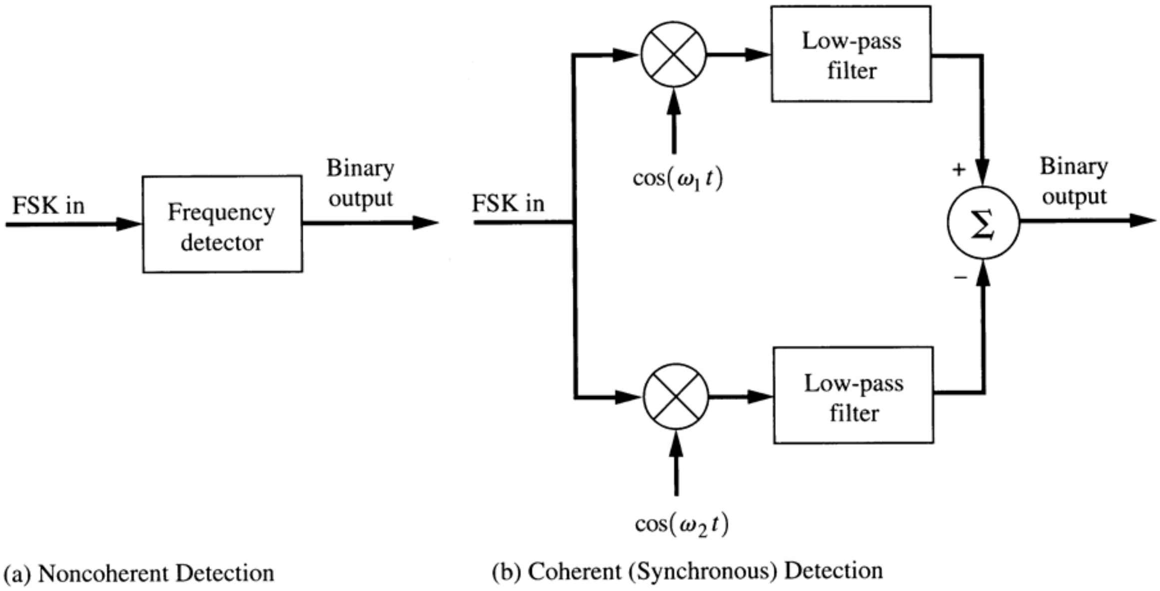
$$B_T = 2\Delta F + 2B, \tag{5.7.19}$$

kur B yra žemadažnio skaitmeninio moduliavimo signalo juostos plotis. Jeigu dvilygis moduliavimo signalas išreikštas poliniu NRZ linijos kodu, tuomet $B = B_{\text{null}} = R$, kur R yra bitų sparta (žr. (3.2.4)). Vadinasi, šiuo atveju

$$B_T = 2(\Delta F + R). \tag{5.7.20}$$

Jeigu prieš moduliavimą duomenų signalas praleidžiamas pro pakelto kosinuso formos kryčio filtrą, tuomet moduliavimo signalo juostos plotį B reikia skaičiuoti pagal (5.7.6) formulę. Įrašę tai į (5.7.19), gauname

$$B_T = 2\Delta F + (1 + r)R. \tag{5.7.21}$$



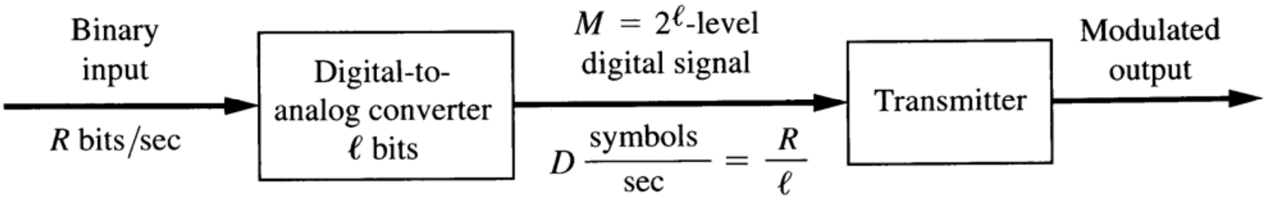
5.7.6 pav. Dažninio manipuliavimo signalų detektavimas.

Plačiajuosčio FSK atveju, kai $\beta >> 1$, pagrindinį indėlį į šiuos reiškinius įneša dėmuo $2\Delta F$, todėl $B_T = 2\Delta F$. Siaurajuosčio FSK atveju $B_T = 2B$.

Dvilygio FSK signalo detektavimui galima panaudoti nekoherentinį dažnio detektorių (žr. 5.7.6a pav. ir 4.10.3 poskyrį) arba du koherentinius AM detektorius, kurių vienas detektuoja tik dvejetainio vieneto dažnio signalą, o kitas – tik dvejetainio nulio dažnio signalą (žr. 5.7.6b pav.). Jeigu siekiama minimizuoti klaidingų bitų dažnį imtuvo išėjime, tuomet vietoj žemadažnių filtrų 5.7.6b schemoje reikia naudoti optimalųjį filtrą ir komparatorių (žr. 5.7.3c pav.), kurie jungiami po sumavimo įtaiso.

5.8. Daugialygio skaitmeninio moduliavimo juostiniai signalai

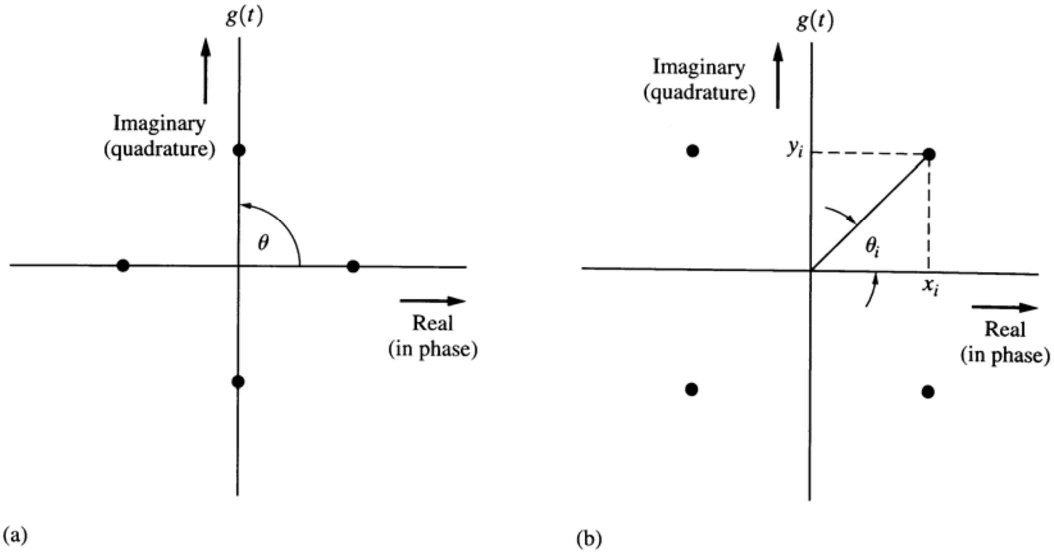
Naudojant daugialygį skaitmeninį moduliavimą, siųstuvo įėjime yra daugialygis skaitmeninis signalas (žr. 3.3 poskyrį). Daugialygio signalo lygių skaičius M ir vieno skaitmeninio simbolio bitų skaičius l susiję sąryšiu $M = 2^l$. Reikia turėti omenyje, kad čia l yra *pilnasis* bitų skaičius simbolyje (įskaitant ir lyginumo bitus: žr. 1.6.1 poskyrį). Pagrindinis daugialygio moduliavimo privalumas – l kartų mažesnis dažnių juostos plotis, lyginant su tos pačios bitų spartos ir tos pačios impulso formos dvilygiu signalu (žr. (3.3.6) ir (3.3.7)). Kaip minėta 3.3.3 poskyryje, 2^l lygių skaitmeninį signalą galima generuoti, naudojant l bitų analoginį skaitmenų keitiklį (ASK). Šį atvejį iliustruoja 5.8.1 pav.



5.8.1 pav. Daugialygio skaitmeninio moduliavimo sistema.

5.8.1. Ketvirtinis fazės manipuliavimas ir daugiakartis fazės manipuliavimas

Jeigu juostinio signalo fazė moduliuojama daugialygiu skaitmeniniu signalu, tuomet toks moduliavimo būdas vadinamas ***daugiakarčiu fazės manipuliavimu*** (*multiple phase-shift keying*, ***MPSK***). Pvz., jeigu lygių skaičius $M = 4$, tuomet siųstuvo išėjimo signalo kompleksinės gaubtinės $g(t) = A_c e^{j\theta(t)}$ galimos vertės kompleksinėje plokštumoje vaizduojamos keturiais taškais, kurių kiekvienas atitinka vieną iš keturių galimų pradinės fazės $\theta(t)$ verčių (žr. 5.8.2



5.8.2 pav. Ketvirtinio fazės manipuliavimo signalų kompleksinės gaubtinės verčių diagramos.

pav.). 5.8.2a pav. ir 5.8.2b pav. pavaizduoti du galimi $g(t)$ verčių rinkiniai, kai $M = 4$. Pvz., jeigu ASK išėjimo įtampos galimos vertės yra –3, -1, +1, ir +3 V, tuomet 5.8.2a pav. šios įtampos vertės atitinka pradinės fazės vertes 0°, 90°, 180° ir 270°, o 5.8.2b pav. šios įtampos vertės atitinka pradinės fazės vertes 45°, 135°, 225° ir 315°. Kai $M = 4$, daugiakartis fazės manipuliavimas vadinamas ***ketvirtiniu fazės manipuliavimu*** (*quadrature phase-shift keying*, ***QPSK***).

Iš kompleksinės gaubtinės kvadratūrinės išraiškos

$$g(t) = A_c e^{j\theta(t)} = x(t) + jy(t) \tag{5.8.1}$$

išplaukia, kad MPSK signalą galima generuoti, naudojant du nešlio signalus, kurių fazės skiriasi 90° kampu ir kurių amplitudės, atitinkančios i-tąją pradinės fazės vertę, yra lygios

$$x_i = A_c \cos\theta_i \tag{5.8.2}$$

ir

$$y_i = A_c \sin\theta_i \,. \tag{5.8.3}$$

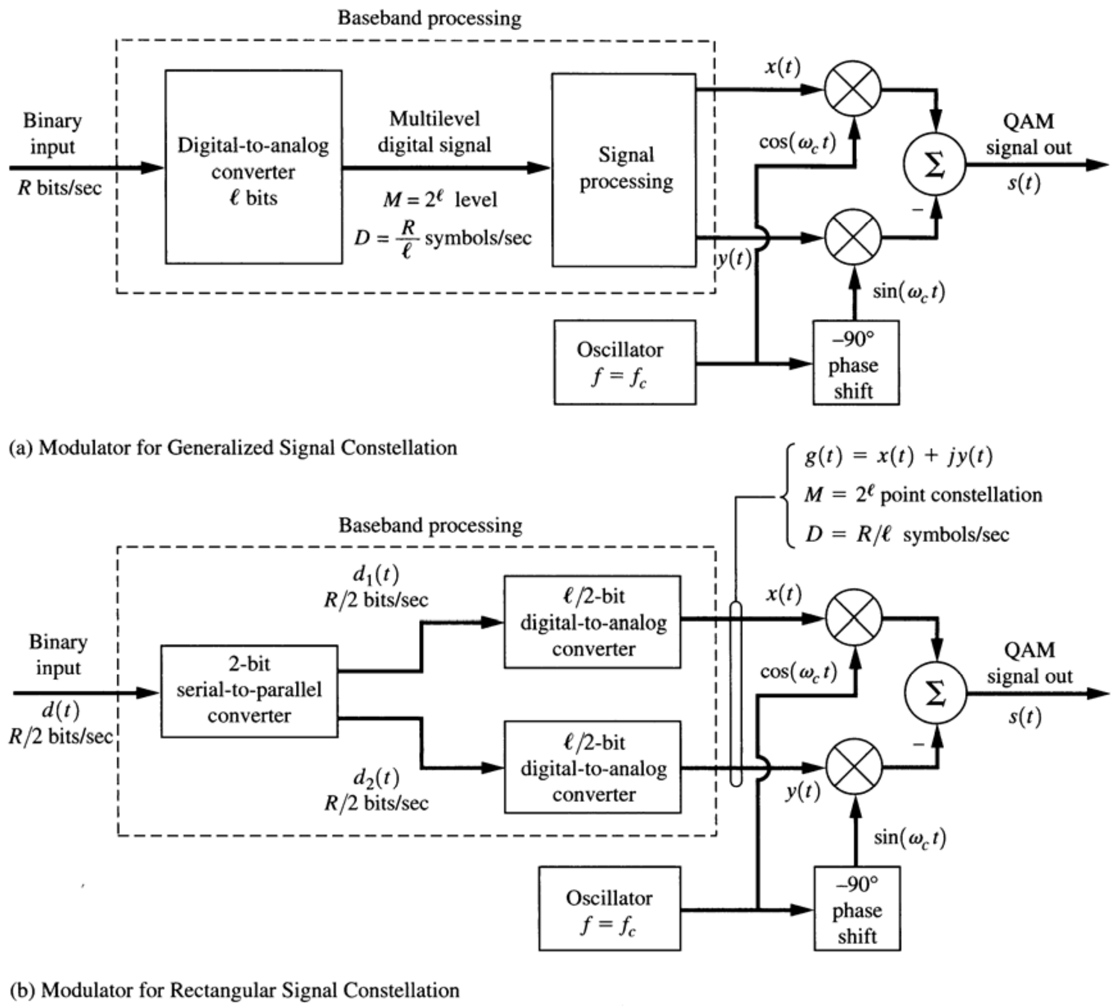
Šį MPSK signalo generavimo metodą iliustruoja 5.8.3a pav. Šioje schemoje signalų procesorius suformuoja du signalus (5.8.2) ir (5.8.3) iš įėjimo daugialygio signalo. Ši schema yra tapati IQ generavimo metodo schemai, kuri pavaizduota 4.12.2 pav.

5.8.2. Kvadratūrinis amplitudės moduliavimas

Kvadratūriniu amplitudės moduliavimu (*quadrature amplitude modulation*, ***QAM***) vadinamas toks daugialygio skaitmeninio moduliavimo būdas, kai, pasikeitus skaitmeniniam simboliui, gali pasikeisti ne tik pradinė fazė $\theta(t)$, bet ir realioji gaubtinė $R(t)$ (žr. (4.1.1b)). T.y., QAM atveju kompleksinės gaubtinės $g(t)$ vertes nusakantys taškai kompleksinėje plokštumoje nepriklauso vienam apskritimui. 16 lygių QAM atveju kompleksinės gaubtinės vertes nusakantys taškai išsidėstę taip, kaip parodyta 5.8.4 pav. Praktikoje QAM signalas generuojamas IQ metodu (žr. 4.12.1 poskyrį) – pagal formulę

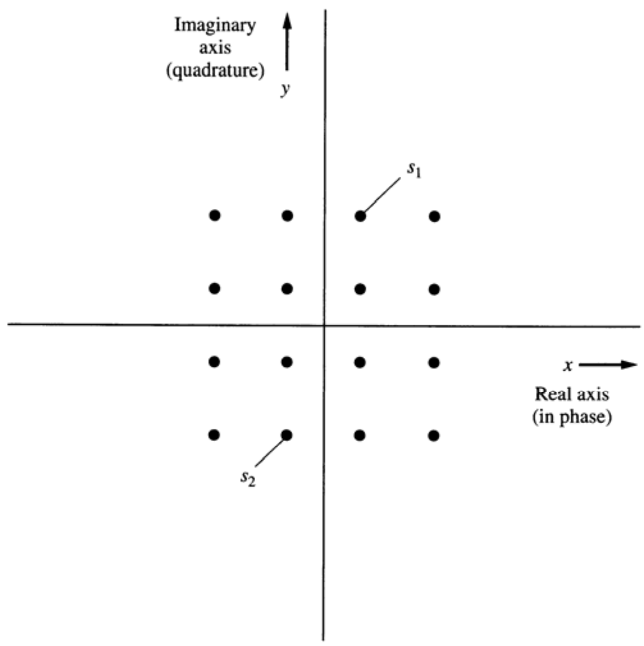
$$s(t) = x(t)\cos\omega_c t - y(t)\sin\omega_c t \,. \tag{5.8.4}$$

T.y., QAM signalo sinfazinė ir kvadratūrinė dedamosios suformuojamos atskirai, o po to sudedamos (žr. 5.8.3a pav.). 16 lygių QAM atveju (žr. 5.8.4 pav.) iš keturių bitų, kurie nusako moduliavimo signalo lygį, du bitus galima panaudoti taško x koordinatei nusakyti, o kitus du bitus galima panaudoti taško y koordinatei nusakyti. Apskritai, kai vieno skaitmeninio simbolio bitų skaičius l yra lyginis, tuomet $M = 2^l$ taškų kvadratinį išsidėstymą galima gauti,



5.8.3 pav. Kvadratūrinio amplitudės moduliavimo signalų generavimas. (a) – bendroji schema, (b) – schema kvadratiniam kompleksinių amplitudžių išsidėstymui gauti (pvz., 5.8.4 pav.).

naudojant siųstuvo žemadažnės dalies schemą, kuri pavaizduota 5.8.3b pav. Šioje schemoje žemadažnę dalį sudaro 2 bitų nuoseklusis-lygiagretusis keitiklis ir du *l*/2 bitų analoginiai skaitmenų keitikliai. Nuosekliojo-lygiagrečiojo keitiklio išėjimuose bet kuriuo laiko momentu yra du paskutinieji moduliavimo signalo bitai, kurie paduodami į ASK įėjimus. Vadinasi, vieno ASK įėjime yra skaitmeninio simbolio nelyginiai bitai, o kito įėjime – lyginiai bitai. Nelyginiai bitai naudojami sinfazinės dedamosios amplitudės $x(t)$ formavimui, o lyginiai bitai naudojami kvadratūrinės dedamosios amplitudės $y(t)$ formavimui (arba atvirkščiai). Laikines priklausomybes $x(t)$ ir $y(t)$ galima užrašyti tokiu pavidalu:



5.8.4 pav. 16 lygių kvadratūrinio amplitudės moduliavimo signalo kompleksinės gaubtinės leistinosios vertės.

$$x(t) = \sum_n x_n h_1\left(t - \frac{n}{D}\right) \tag{5.8.5}$$

ir

$$y(t) = \sum_n y_n h_1\left(t - \frac{n}{D}\right), \tag{5.8.6}$$

kur $D = 1/T_s = R/l$ yra simbolių sparta (žr. 3.3 poskyrį), (x_n, y_n) nusako QAM signalo kompleksinės gaubtinės vertę n-tojo duomenų simbolio laiko intervalo centre $t = nT_s = n/D$, o $h_1(t)$ yra vienetinės amplitudės impulsas, kuris naudojamas vieno simbolio perdavimui. Kartais $x(t)$ ir $y(t)$ impulsai būna paslinkti vienas kito atžvilgiu per $T_s/2 = 1/(2D)$ s. T.y., sinfazinės dedamosios amplitudė $x(t)$ nusakoma (5.8.5) formule, o kvadratūrinės dedamosios amplitudė $y(t)$ lygi

$$y(t) = \sum_n y_n h_1\left(t - \frac{n}{D} - \frac{1}{2D}\right). \tag{5.8.7}$$

5.8.3. MPSK ir QAM signalų galios spektrinis tankis

Atsitiktinių procesų teorijoje įrodoma, kad realiojo skaitmeninio signalo (3.4.1) galios spektrinį tankį nusako (3.4.2a) formulė, kurioje $R(k)$ yra duomenų autokoreliacija (3.4.2b). Šiomis formulėmis galima naudotis, ir skaičiuojant MPSK arba QAM signalo galios spektrinį tankį, tačiau šiuo atveju reikia atsižvelgti į tai, kad skaitmeninę informaciją perduoda ne viena realioji laiko funkcija, o dvi realiosios laiko funkcijos – sinfazinės dedamosios amplitudė $x(t)$ (5.8.5) ir kvadratūrinės dedamosios amplitudė $y(t)$ (5.8.6) (QAM atveju šios dvi laikinės priklausomybės yra nepriklausomos, o MPSK atveju jos yra susijusios funkciniu ryšiu: žr. (5.8.2) ir (5.8.3)). Kitais žodžiais, MPSK arba QAM atveju informaciją perduoda kompleksinė gaubtinė $g(t) = (x(t), y(t))$. Bendroji daugialygio skaitmeninio moduliavimo signalo kompleksinės gaubtinės $g(t)$ išraiška gaunama, apjungus dvi realiąsias eilutes (5.8.5) ir (5.8.6) į vieną kompleksinę eilutę:

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n f(t - nT_s), \tag{5.8.8}$$

kur $c_n = (x_n, y_n)$, $T_s = lT_b$ yra vieno simbolio perdavimo trukmė, o $f(t - nT_s)$ yra vienetinės amplitudės ir T_s trukmės impulsas n-tojo simbolio perdavimo laiko intervale $(n\text{-}1/2)T_s < t < (n+1/2)T_s$. Taigi, šiuo atveju perduodamieji duomenys yra užkoduoti kompleksinių skaičių c_n pavidalu, kurių realiosios dalys yra (5.8.5) eilutės koeficientai, o menamosios dalys yra (5.8.6) eilutės koeficientai. Skaičiuojant tokio signalo galios spektrinį tankį pagal (3.4.2a) formulę, duomenų autokoreliacija $R(k)$ apibrėžiama tokiu būdu:

$$R(k) = \sum_{i=1}^{I} (c_n c_{n+k}^*)_i P_i\,, \tag{5.8.9}$$

kur I yra kompleksinių koeficientų c_n ir c_{n+k} verčių derinių skaičius, o P_i yra i-tojo derinio tikimybė. Autokoreliaciją (5.8.9) lengviausia apskaičiuoti tuo atveju, kai visų moduliavimo signalo lygių vertės yra vienodai tikėtinos, o taškų išsidėstymas kompleksinės gaubtinės verčių diagramoje yra simetriškas atžvilgiu X ir Y ašių (kaip 5.8.2 pav. arba 5.8.4 pav.). Tuomet $R(k) = 0$, kai $k \neq 0$ (šio teiginio įrodymas dvilygio signalo atveju pateiktas 3.4.2 poskyryje). $R(0)$ sutampa su koeficiento c_n absoliutinės vertės kvadrato vidurkiu C:

$$C = \overline{c_n c_n^*} = \overline{|\,c_n\,|^2}\,. \tag{5.8.10}$$

Vadinasi, šiuo atveju

$$P_g(f) = C\frac{|\,F(f)\,|^2}{T_s}\,, \tag{5.8.11}$$

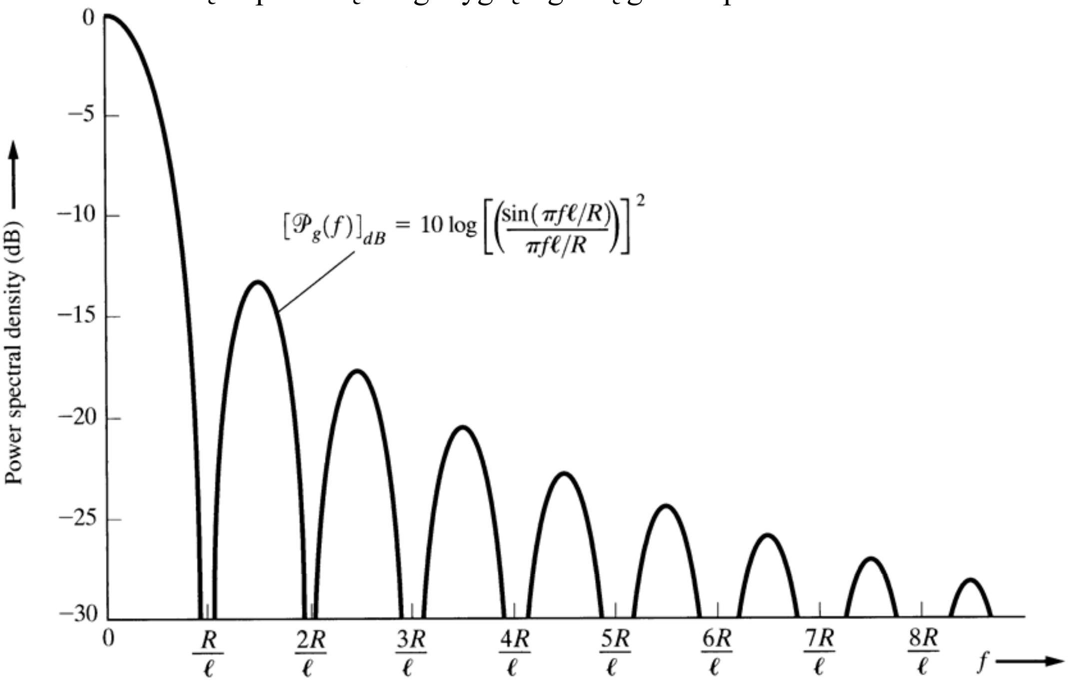
kur $F(f)$ yra impulso $f(t)$ spektras, o C – kompleksinės gaubtinės impulso amplitudės absoliutinės vertės kvadrato vidurkis (5.8.10) (plg. su (3.4.3a)). Pagal (2.2.32) formulę, vienetinio stačiakampio T_s trukmės impulso, kurio centras yra taške $t = 0$, spektras lygus

$$F(f) = T_s \frac{\sin \pi T_s f}{\pi T_s f} = lT_b \frac{\sin \pi l T_b f}{\pi l T_b f}, \tag{5.8.12}$$

kur T_b yra bito trukmė, o l yra bitų skaičius, kuriuo nusakomas vienas moduliavimo signalo lygis (simbolis). Įrašę (5.8.12) į (5.8.11), randame

$$P_g(f) = K\left(\frac{\sin \pi l T_b f}{\pi l T_b f}\right)^2, \tag{5.8.13}$$

kur $K \equiv ClT_b$. Šis kompleksinės gaubtinės galios spektras (tiksliau, santykis $P_g(f)/P_g(0)$) pavaizduotas 5.8.5 pav. puslogaritminiame mastelyje. Kai $l = 1$, šis spektras sutampa su BPSK signalo spektru (5.7.15). MPSK arba QAM signalo galios spektras gaunamas, tiesiog paslinkus kompleksinės gaubtinės galios spektrą nešlio dažniu (žr. (4.3.8)). Palyginus (5.8.13) ir (3.4.11), galima teigti, kad daugialygių juostinių signalų kompleksinės gaubtinės galios spektras iš esmės sutampa su žemadažnių impulsinių daugialygių signalų galios spektru.



5.8.5 pav. l lygių MPSK arba QAM signalo kompleksinės gaubtinės galios spektrinis tankis. R yra bitų sparta, o $R/l = D$ yra simbolių sparta.

Kaip matome 5.8.5 pav., MPSK arba QAM signalo pirmojo nulio dažnių juostos plotis yra l kartų mažesnis už tos pačios bitų spartos BPSK signalo juostos plotį:

$$B_T = \frac{2R}{l}. \tag{5.8.14}$$

Pagal (3.4.13), MPSK arba QAM signalo spektro panaudojimo efektyvumas lygus

$$\eta = \frac{R}{B_T} = \frac{l}{2} \frac{\text{bits/s}}{\text{Hz}}. \tag{5.8.15}$$

Pvz., $M = 2^l = 16$ lygių QAM atveju spektro panaudojimo efektyvumas yra 2 bits/s/Hz. Tai reiškia, kad, norint pasiekti, pvz., 2400 bits/s bitų spartą, naudojant 16 lygių QAM, reikalingas bent 1200 Hz pločio kanalas.

Kaip minėta 5.7.1 poskyryje, stačiakampių impulsų pavidalo duomenų signalas prieš moduliavimą turi būti filtruojamas, siekiant sumažinti jo dažnių juostos plotį. T.y., (5.8.5) ir

(5.8.6) eilutėse $h_1(t) = h(t)*h_T(t)$, kur $h(t)$ yra pradinis impulsas, o $h_T(t)$ yra filtro impulsinis atsakas. Jeigu naudojamas pakelto kosinuso formos kryčio filtras, tuomet, pagal (3.5.18), M-lygio moduliavimo signalo absoliutinis dažnių juostos plotis yra

$$B = \frac{1}{2}(1+r)D, \tag{5.8.16}$$

kur $D = R/l = R/\log_2 M$ yra simbolių sparta, o r yra filtro dažninės amplitudės charakteristikos kryčio koeficientas. Pagal bendrąją juostinio signalo spektro išraišką (4.3.4), juostinio signalo dažnių juostos plotis B_T yra lygus dvigubam moduliavimo signalo juostos pločiui: $B_T = 2B$, todėl QAM signalo absoliutinis dažnių juostos plotis lygus

$$B_T = \left(\frac{1+r}{l}\right)R. \tag{5.8.17}$$

Kadangi moduliavimo signalo lygių skaičius M susijęs su vieno simbolio bitų skaičiumi l sąryšiu $M = 2^l$, tai QAM arba MPSK signalo su pakelto kosinuso formos kryčio filtravimu spektro panaudojimo efektyvumas lygus

$$\eta = \frac{R}{B_T} = \frac{\ln M}{(1+r)\ln 2}\frac{\text{bit/s}}{\text{Hz}}. \tag{5.8.18}$$

Žinant spektro panaudojimo efektyvumą η, galima apskaičiuoti kanalo juostos plotį, kuris reikalingas, norint pasiekti duotąją bitų spartą R: $B_T = R/\eta$. Ir atvirkščiai: kai duotas kanalo dažnių juostos plotis, galima apskaičiuoti spektro panaudojimo efektyvumą $\eta = R/B_T$ ir mažiausią bitų skaičių simbolyje $l = [(\ln M)/\ln 2] + 1 = [(1 + r)\eta] + 1$, kuris reikalingas, norint pasiekti duotąją bitų spartą R (laužtiniai skliaustai reiškia skaičiaus sveikąją dalį). Todėl (5.8.18) formulė turi didelę praktinę reikšmę. Pvz., apskaičiuosime QAM signalo kompleksinės gaubtinės lygių skaičių, kuris reikalingas, norint pasiekti 28.8 kb/s spartą, perduodant skaitmeninius duomenis telefono kanalu, kurio dažnių juostos plotis $B_T = 3.4$ kHz. Reikalingas spektro panaudojimo efektyvumas $\eta = 28.8/3.4 \approx 8.5$. Vadinasi, $l \geq 9$. Kai $l = 9$, lygių skaičius $M = 2^9 = 512$. Būtent tokio lygių skaičiaus QAM naudojamas standartiniuose 28.8 kb/s spartos modemuose.

Iš (5.8.18) formulės išplaukia, kad, norint padidinti duotojo kanalo spektro panaudojimo efektyvumą η, reikia didinti M. Tačiau, didinant M ir nekeičiant didžiausiosios gaubtinės galios (žr. (4.3.10)) $P_{\text{PEP}} = [\max|g(t)|]^2/2 = [\max|c_n|]^2/2$ (žr. (5.8.8)), mažėja atstumas tarp taškų kompleksinės gaubtinės galimų verčių diagramoje (pvz., plg. 5.8.2 pav. ir 5.8.4 pav.). Tai reiškia, kad didėja tikimybė, jog dėl triukšmo kompleksinė gaubtinė peršoks nuo vieno taško prie kito, t.y., kad įvyks klaida. Kai η viršija ribinę vertę $\eta_{\max}$, kurią nusako (3.4.14) formulė, klaidos tampa neišvengiamos (žr. Šenono teoremą 1.4 poskyryje). Vadinasi, spektro panaudojimo efektyvumas η turi tenkinti sąlygą

$$\eta < \eta_{\max}, \tag{5.8.19}$$

kur

$$\eta_{\max} = \log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right). \tag{5.8.20}$$

5.9. Uždavinių sprendimo pavyzdžiai

Pavyzdys Nr. 1

Vienpusės šalinės juostos (SSB) siųstuvas, kurio nešlio amplitudė $A_c = 100$, yra išbandomas, naudojant trikampių impulsų sekos pavidalo moduliavimo signalą, kuris pavaizduotas 5.5.8a pav. Impulso amplitudė $V_p = 0.5$ V. Tokiu būdu gautasis SSB įtampos signalas yra prijungtas prie 50 Ω varžinės apkrovos. Apskaičiuokite tikruosius (ne normuotuosius) galios nuostolius apkrovoje.

Sprendimas

Žinome, kad įtampos signalo tikroji galia P_{tikr} lygi normuotosios galios ir apkrovos varžos R santykiui (žr. 2.1 poskyrio pabaigą). Pasinaudoję SSB signalo vidutinės normuotosios galios išraiška (5.4.11), gauname

$$P_{tikr} = \frac{\langle s^2(t)\rangle}{R} = \frac{A_c^2}{R}\langle m^2(t)\rangle \,. \tag{5.9.1}$$

Moduliavimo signalas $m(t)$, kuris pavaizduotas 5.5.8a pav., yra periodinis; jo periodas lygus T_m. Akivaizdu, kad šio signalo kvadratas $m^2(t)$ taip pat yra periodinis, o jo periodas lygus $T_m/2$. Skaičiuojant periodinio signalo laikinį vidurkį (2.1.3), pakanka integruoti tik vieno periodo atžvilgiu, todėl

$$\langle m^2(t)\rangle = \frac{2}{T_m}\int_{-T_m/4}^{T_m/4} m^2(t)dt = \frac{4}{T_m}\int_{0}^{T_m/4} m^2(t)dt\,;$$

čia, užrašant antrąją lygybę, pasinaudota tuo, kad funkcija $m^2(t)$ yra lyginė ($m^2(t) = m^2(-t)$). Kadangi laiko intervale $0 < t < T_m/4$ signalas $m(t)$ tiesiškai auga nuo $-V_p$ iki 0, tai šiame intervale $m(t) = (4V_p/T_m)\cdot t - V_p$. Vadinasi,

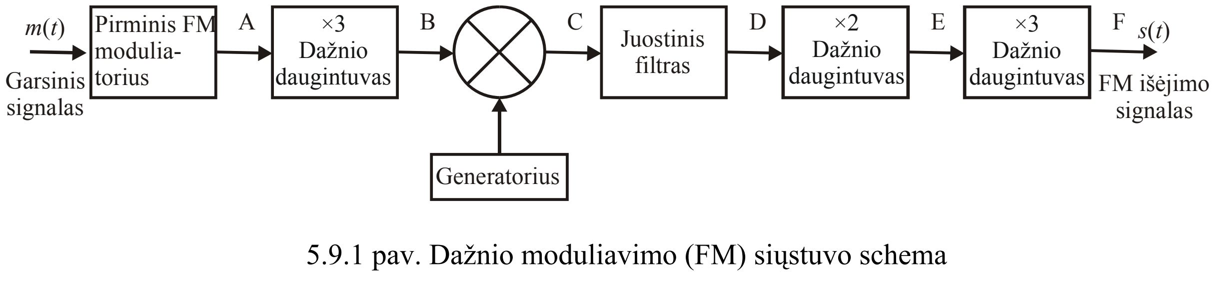
$$\langle m^2(t)\rangle = \frac{4}{T_m}\int_{0}^{T_m/4}\left(\frac{4V_p}{T_m}t - V_p\right)^2 dt = \frac{4V_p^2}{T_m}\left.\frac{\left(\frac{4}{T_m}t-1\right)^3}{3\left(\frac{4}{T_m}\right)}\right|_0^{T_m/4} = \frac{V_p^2}{3}. \tag{5.9.2}$$

Įrašę (5.9.2) į (5.9.1), randame

$$P_{tikr} = \frac{A_c^2V_p^2}{3R} = \frac{100^2\cdot 0.5^2}{3\cdot 50} = 16.67\text{ W}.$$

<u>*Pavyzdys Nr. 2*</u>

Dažnio moduliavimo (FM) siųstuvas, kurio schema pavaizduota 5.9.1 pav., yra sudarytas iš pirminio FM moduliatoriaus (*FM exciter*), dažnio daugintuvo "×3", aukštinamojo dažnio keitiklio (su juostiniu filtru), dažnio daugintuvo "×2" ir dažnio daugintuvo "×3". Generatoriaus dažnis lygus 80.0150 MHz, o juostinio filtro dažnių juostos centrinis dažnis sutampa su nešlio dažniu, kuris apytiksliai lygus 143 MHz. Pirminio FM moduliatoriaus nešlio dažnis lygus 20.9957 MHz, o didžiausiasis dažnio nuokrypis lygus 0.694 kHz, kai įėjimo signalas yra garsinio dažnio. Įėjimo signalo juostos plotis lygus 3 kHz. Apskaičiuokite nešlio dažnį ir didžiausiąjį dažnio nuokrypį taškuose B, C, D, E ir F bei reikalingą juostinio filtro juostos plotį ir jos centrinio dažnio tiksliąją vertę.



5.9.1 pav. Dažnio moduliavimo (FM) siųstuvo schema

Sprendimas

Kaip minėta 4.9 poskyryje, dažnio daugintuvas padidina nešlio dažnį f_c ir pradinę fazę $\theta(t)$ n kartų (žr. formulę (4.9.3)). Todėl, turint omenyje didžiausiojo dažnio nuokrypio apibrėžimą (5.5.11), didžiausiais dažnio nuokrypis ΔF taip pat išauga n kartų. Taigi, dažnio daugintuvo išėjime $(\Delta F)_{\text{out}} = n(\Delta F)_{\text{in}}$. Kadangi taške A nešlio dažnis $(f_c)_A = 20.9957$ MHz, o didžiausiasis dažnio nuokrypis $(\Delta F)_A = 0.694$ kHz, tai FM signalo parametrai taške B yra

$$(f_c)_B = 3(f_c)_A = 62.9871 \text{ MHz ir } (\Delta F)_B = 3(\Delta F)_A = 2.08 \text{ kHz}.$$

Signalų maišiklio išėjime (taške C) turime suminio dažnio ir skirtuminio dažnio signalų sumą. Šių signalų dažniai yra

$$(f_c)_{C\,\text{sum}} = f_G + (f_c)_B = 80.0150 + 62.9871 = 143.0021 \text{ MHz},$$
$$(f_c)_{C\,\text{diff}} = f_G - (f_c)_B = 80.0150 - 62.9871 = 17.0279 \text{ MHz}.$$

Kadangi kiekvieno iš šių dviejų signalų kompleksinė gaubtinė sutampa su maišiklio įėjimo signalo kompleksine gaubtine (žr. (4.8.2)), tai visi moduliavimo parametrai maišiklio išėjime lieka tokie patys, kaip įėjime. Vadinasi, suminio ir skirtuminio dažnio signalai yra FM signalai, kurių didžiausiasis dažnio nuokrypis lygus $(\Delta F)_C = (\Delta F)_B = 2.08$ kHz. Juostinis filtras praleidžia tik suminio dažnio dedamąją. Todėl taške D FM signalo parametrai yra

$$(f_c)_D = (f_c)_{C\,\text{sum}} = 143.0021 \text{ MHz ir } (\Delta F)_D = (\Delta F)_C = 2.08 \text{ kHz}.$$

FM signalo parametrai taškuose E ir F yra

$$(f_c)_E = 2(f_c)_D = 286.0042 \text{ MHz ir } (\Delta F)_E = 2(\Delta F)_D = 4.16 \text{ kHz}$$

ir

$$(f_c)_F = 3(f_c)_E = 858.0126 \text{ MHz ir } (\Delta F)_F = 3(\Delta F)_E = 12.49 \text{ kHz}.$$

Taigi, 5.9.1 pav. pavaizduotasis FM siųstuvas generuoja FM signalą, kurio nešlio dažnis yra 858.0126 MHz, o didžiausiasis dažnio nuokrypis 12.49 kHz. Juostinio filtro centrinis dažnis yra $(f_c)_{C\,\text{sum}} = 143.0021$ MHz, o juostos plotis yra pakankamas FM signalo su didžiausiuoju dažnio nuokrypiu $(\Delta F)_C = 2.08$ kHz perdavimui. Pagal Karsono taisyklę (5.5.30), juostinio filtro juostos plotis turi būti lygus

$$B_T = 2(\beta_C + 1)B;$$

čia β_C yra dažnio moduliavimo indeksas taške C. Atsižvelgus į tai, kad $\beta_C = (\Delta F)_C/B$ (žr. (5.5.17))

$$B_T = 2[(\Delta F)_C + B] = 2(2.08 + 3.0) = 10.16 \text{ kHz}.$$

<u>*Pavyzdys Nr. 3*</u>

Mėgėjiškoje skaitmeninėje radijo ryšio sistemoje dvejetainiai duomenys perduodami 40 m bangos ilgio juostoje, naudojant vienpusės šalinės juostos amplitudės moduliavimą su numalšintuoju nešliu (*single sideband amplitude modulation with suppressed carrier*; SSB-AM-SC arba tiesiog SSB). Tuo tikslu dažninio manipuliavimo modemas prijungiamas prie apatinės vienpusės šalinės juostos SSB siųstuvo įėjimo. Modemas naudoja 2225 Hz dažnį dvejetainio vieneto perdavimui ir 2025 Hz dažnį dvejetainio nulio perdavimui. Bitų sparta lygi 300 b/s. SSB siųstuvo nešlio dažnis yra $(f_c)_{\text{SSB}} = 7.090$ MHz.

(a) Kokio tipo skaitmeninio moduliavimo signalą perduoda SSB siųstuvas?

(b) Apskaičiuokite perduodamojo signalo spektrą, kai duomenys yra alternuojančioji vienetų ir nulių seka (10101010...).

(c) Apytiksliai įvertinkite šio signalo dažnių juostos plotį.

Sprendimas

(a) Kaip minėta 5.4 poskyryje, apatinės vienpusės šalinės juostos siųstuvas perkelia moduliavimo signalo spektrą prie nešlio dažnio ir pašalina viršutinę šalinę juostą. Visų pirma išsiaiškinsime, kokio tipo moduliavimo signalą gautume, jeigu viršutinė šalinė juosta nebūtų pašalinta, t.y., jeigu vietoj vienpusės šalinės juostos moduliavimo turėtume dvipusės šalinės juostos moduliavimą su numalšintuoju nešliu (*double sideband supressed carrier*, DSB-SC). DSB-SC signalo kompleksinė gaubtinė yra proporcinga moduliavimo signalui $m(t)$ (žr. (5.2.1)). Šiuo atveju moduliavimo signalas – tai sinusinis signalas, kurio dažnis periodiškai kinta. Perduodant dvejetainį vienetą, šis dažnis lygus $f_1 = 2225$ Hz, o perduodant dvejetainį nulį, šis dažnis lygus $f_2 = 2025$ Hz. Vadinasi, perduodant dvejetainį vienetą, DSB-SC signalo kompleksinė gaubtinė lygi

$$g_{1,\mathrm{DSB-SC}}(t) = A_c m_1(t) = A_c \sin\omega_1 t = A_c \frac{e^{j\omega_1 t} - e^{-j\omega_1 t}}{2j},$$

o perduodant dvejetainį nulį, DSB-SC signalo kompleksinė gaubtinė lygi

$$g_{2,\mathrm{DSB-SC}}(t) = A_c m_2(t) = A_c \sin\omega_2 t = A_c \frac{e^{j\omega_2 t} - e^{-j\omega_2 t}}{2j};$$

čia A_c yra nešlio amplitudė. Pagal juostinio signalo bendrąją išraišką (4.1.1a), perduodant dvejetainį vienetą, DSB-SC signalas lygus

$$s_{1,\mathrm{DSB-SC}}(t) = \mathrm{Re}\{g_{1,\mathrm{DSB-SC}}(t)e^{j\omega_c t}\} = A_c\,\mathrm{Re}\left\{\frac{e^{j\omega_1 t} - e^{-j\omega_1 t}}{2j} e^{j\omega_c t}\right\} = \frac{A_c}{2}\sin(\omega_c + \omega_1)t + \frac{A_c}{2}\sin(\omega_c - \omega_1)t,$$

o perduodant dvejetainį nulį, DSB-SC signalas lygus

$$s_{2,\mathrm{DSB-SC}}(t) = \mathrm{Re}\{g_{2,\mathrm{DSB-SC}}(t)e^{j\omega_c t}\} = A_c\,\mathrm{Re}\left\{\frac{e^{j\omega_2 t} - e^{-j\omega_2 t}}{2j} e^{j\omega_c t}\right\} = \frac{A_c}{2}\sin(\omega_c + \omega_2)t + \frac{A_c}{2}\sin(\omega_c - \omega_2)t.$$

Taigi, DSB-SC signalo atveju, perduodant dvejetainį vienetą, yra perduodama dviejų sinusinių signalų su dažniais $\omega_c \pm \omega_1$ suma, o perduodant dvejetainį nulį, yra perduodama dviejų sinusinių signalų su dažniais $\omega_c \pm \omega_2$ suma. Dažniai $\omega_c + \omega_1$ ir $\omega_c + \omega_2$ priklauso viršutinei šalinei juostai, kuri, pagal sąlygą, yra nuslopinama. Vadinasi, sąlygoje aprašytoji sistema dvejetainio vieneto atveju perduoda sinusinį signalą

$$s_1(t) = \frac{A_c}{2}\sin(\omega_c - \omega_1)t,$$

o dvejetainio nulio atveju perduoda sinusinį signalą

$$s_2(t) = \frac{A_c}{2}\sin(\omega_c - \omega_2)t.$$

Tokio tipo skaitmeninis moduliavimas vadinamas dažniniu manipuliavimu (žr. poskyrius 5.7.1 ir 5.7.5). Taigi, duotojo siųstuvo generuojamas signalas – tai dažninio manipuliavimo (*frequency-shift keying*, FSK) signalas su dažniais

$$(f_c)_{\mathrm{SSB}} - f_1 = 7090 \text{ kHz} - 2.225 \text{ kHz} = 7087.775 \text{ kHz}$$

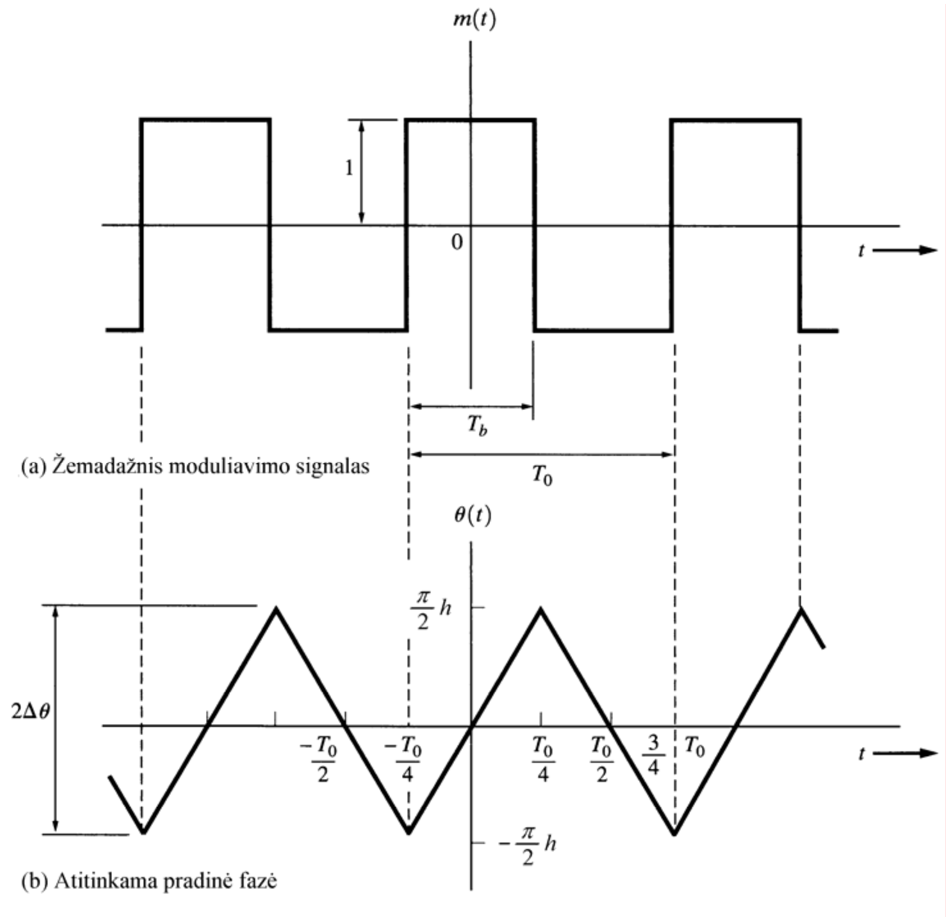
ir

$$(f_c)_{\mathrm{SSB}} - f_2 = 7090 \text{ kHz} - 2.025 \text{ kHz} = 7087.975 \text{ kHz}.$$

Šio FSK signalo nešlio dažnis priklausys nuo to, kaip mes apibrėšime moduliavimo signalą. Pvz., šiuo atveju moduliavimo signalą galima išreikšti vienpoliu *NRZ* kodu (žr. 3.4.1a pav.) arba dvipoliu NRZ kodu (žr. 3.4.1b pav.). Praktikoje moduliavimo signalas visuomet apibrėžiamas taip, kad jo laikinis vidurkis būtų lygus nuliui. Šiuo atveju tai reikštų, kad vienetus ir nulius atitinka vienodo aukščio, tačiau priešingo poliarumo stačiakampiai impulsai (dvipolis NRZ kodas). Tuomet nešlio dažnis lygus dvejetainių vieneto ir nulio dažnių vidurkiui:

$$f_c = (f_c)_{\mathrm{SSB}} - \frac{f_1 + f_2}{2} = 7087.875 \text{ kHz}.$$

Atitinkamas moduliavimo signalas pavaizduotas 5.9.2a pav.



5.9.2 pav. Moduliavimo signalas ir atitinkamo FSK signalo pradinė fazė $\theta(t)$

(b) Skaičiuojant šio FSK signalo spektrą, reikia pasinaudoti bendrąja juostinio signalo spektro išraiška (4.3.4):

$$S(f) = \frac{1}{2}[G(f - f_c) + G^*(-f - f_c)]; \tag{5.9.3}$$

čia $G(f)$ yra kompleksinės gaubtinės spektras. Kadangi FSK yra atskiras dažnio moduliavimo atvejis, tai kompleksinė gaubtinė skaičiuojama pagal formulę (5.5.1)

$$g(t) = A_c e^{j\theta(t)}, \tag{5.9.4}$$

kur pradinė fazė $\theta(t)$ išreiškiama sąryšiu (5.5.4):

$$\theta(t) = D_f \int_0^t m(\sigma) d\sigma \tag{5.9.5}$$

(t.p. žr. pastabą po formulės (5.5.4)). Apskaičiavę integralą (5.9.5), gauname tokią $\theta(t)$ išraišką:

$$\theta(t) = \begin{cases} \dfrac{4\Delta\theta}{T_0}(t - kT_0), & \text{kai} \left(k - \dfrac{1}{4}\right)T_0 < t < \left(k + \dfrac{1}{4}\right)T_0; \\ 2\Delta\theta - \dfrac{4\Delta\theta}{T_0}\left(t - kT_0\right), & \text{kai} \left(k + \dfrac{1}{4}\right)T_0 < t < \left(k + \dfrac{3}{4}\right)T_0; \end{cases} \tag{5.9.6}$$

čia T_0 yra moduliavimo signalo periodas, k yra periodo numeris ($k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$), o $\Delta\theta$ yra didžiausiasis fazės nuokrypis. Praktikoje skaitmeninio kampo moduliavimo signalai dažniausiai apibūdinami skaitmeninio moduliavimo indeksu h, kuris susijęs su didžiausiuoju fazės nuokrypiu sąryšiu (5.7.10). Pagal (5.7.10),

$$\Delta\theta = \frac{\pi}{2}h, \tag{5.9.7}$$

Įrašę (5.9.7) į (5.9.6), gauname

$$\theta(t)=\begin{cases}\dfrac{2\pi h}{T_0}(t-kT_0), & \text{kai}\left(k-\dfrac{1}{4}\right)T_0<t<\left(k+\dfrac{1}{4}\right)T_0;\\ \pi h-\dfrac{2\pi h}{T_0}(t-kT_0), & \text{kai}\left(k+\dfrac{1}{4}\right)T_0<t<\left(k+\dfrac{3}{4}\right)T_0;\end{cases} \tag{5.9.8}$$

Tai yra pjūklinė funkcija, kuri pavaizduota 5.9.2b pav. Apskaičiuosime moduliavimo indeksą h. Pagal 5.9.2b pav., didžiausiasis fazės nuokrypis lygus funkcijos $\theta(t)$ pokyčiui laiko intervale $0<t<T_0/4$. Iš formulės (5.5.10) išplaukia, kad šis pokytis lygus

$$\Delta\theta=2\pi\Delta F\frac{T_0}{4}=\frac{\pi}{2}\Delta FT_0=\pi\Delta FT_b; \tag{5.9.9}$$

čia $T_b=T_0/2$ yra vieno bito trukmė, o ΔF yra didžiausiasis dažnio nuokrypis. Įrašę (5.9.9) į h apibrėžimą (5.7.10), gauname

$$h=2\Delta FT_b=\frac{2\Delta F}{R}; \tag{5.9.10}$$

čia $R=1/T_b$ yra bitų sparta. Įrašę skaitines vertes, randame

$$h=\frac{2\cdot 100}{300}\approx 0.67\,.$$

Kadangi kompleksinė gaubtinė yra periodinis signalas, tai jos spektras išreiškiamas formule (2.5.21):

$$G(f)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}c_n\delta(f-nf_0)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}c_n\delta\left(f-n\frac{R}{2}\right); \tag{5.9.11}$$

čia $f_0=1/T_0=R/2$ yra moduliavimo signalo dažnis f_0, o c_n yra kompleksinės gaubtinės išraiškos Furjė eilute koeficientai (2.5.3):

$$c_n=\frac{1}{T_0}\int_a^{a+T_0}g(t)e^{-jn2\pi f_0 t}dt; \tag{5.9.12}$$

apatinis integravimo rėžis a gali būti bet koks (integralo reikšmė nuo jo nepriklauso). Apskaičiuosime šios funkcijos Furjė koeficientus. Tuo tikslu įrašome $\theta(t)$ išraišką (5.9.8) į kompleksinės gaubtinės išraišką (5.9.4), o (5.9.4) – į Furjė koeficientų išraišką (5.9.12). Laikysime, kad $a=-T_0/4$. Tuomet visame integravimo intervale $k=0$, ir

$$c_n=\frac{A_c}{T_0}\int_{-T_0/4}^{T_0/4}e^{j2\pi f_0(h-n)t}dt+\frac{A_c}{T_0}e^{j\pi h}\int_{T_0/4}^{3T_0/4}e^{-j2\pi f_0(h+n)t}dt\,. \tag{5.9.13}$$

Šiuos du dėmenis apskaičiuosime atskirai.

$$\frac{A_c}{T_0}\int_{-T_0/4}^{T_0/4}e^{j2\pi f_0(h-n)t}dt=\frac{A_c}{T_0}\cdot\left.\frac{e^{j2\pi f_0(h-n)t}}{j2\pi f_0(h-n)}\right|_{-T_0/4}^{T_0/4}=A_c\frac{\sin\frac{\pi}{2}(h-n)}{\pi(h-n)}\,. \tag{5.9.14}$$

Skaičiuodami antrąjį dėmenį reiškinyje (5.9.13), atliksime integravimo kintamojo pakeitimą $t'=t-(T_0/2)$ arba $t=t'+(T_0/2)$. Tuomet gauname

$$\frac{A_c}{T_0}e^{j\pi h}\int_{T_0/4}^{3T_0/4}e^{-j2\pi f_0(h+n)t}dt=\frac{A_c}{T_0}e^{j\pi h}\int_{-T_0/4}^{T_0/4}e^{-j2\pi f_0(h+n)[t'+(T_0/2)]}dt'=$$

$$\frac{A_c}{T_0}e^{j\pi h}\cdot e^{-j2\pi f_0(h+n)(T_0/2)}\cdot\int_{-T_0/4}^{T_0/4}e^{-j2\pi f_0(h+n)t'}dt'=\frac{A_c}{T_0}e^{-j\pi n}\cdot\int_{-T_0/4}^{T_0/4}e^{-j2\pi f_0(h+n)t'}dt'.$$

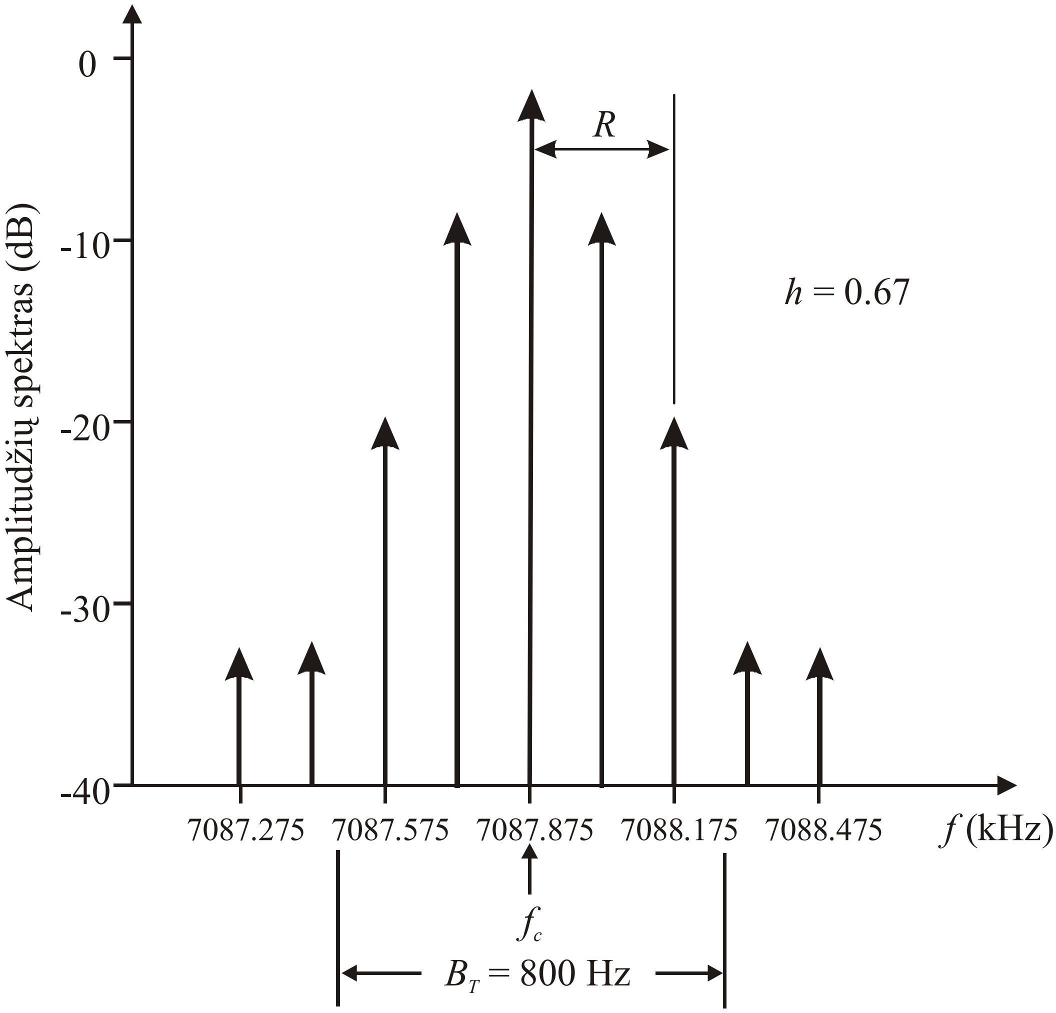
Pastarąjį integralą galima skaičiuoti pagal (5.9.14) formulę, tačiau vietoj reiškinio $h-n$ reikia naudoti reiškinį $-(h+n)$. Tokiu būdu gauname

$$\frac{A_c}{T_0} e^{j\pi h} \int_{T_0/4}^{3T_0/4} e^{-j2\pi f_0 (h+n)t} dt = A_c e^{-j\pi n} \frac{\sin\frac{\pi}{2}(h+n)}{\pi(h+n)} = A_c (-1)^n \frac{\sin\frac{\pi}{2}(h+n)}{\pi(h+n)}. \tag{5.9.15}$$

Įrašę (5.9.14) ir (5.9.15) į (5.9.13), gauname galutinę Furjė koeficientų išraišką:

$$c_n = A_c \left[\frac{\sin\frac{\pi}{2}(h-n)}{\pi(h-n)} + (-1)^n \frac{\sin\frac{\pi}{2}(h+n)}{\pi(h+n)} \right]. \tag{5.9.16}$$

Reiškiniai (5.9.11) ir (5.9.16) nusako FSK signalo su alternuojančiais dvejetainiais vienetais ir nuliais kompleksinės gaubtinės spektrą, kai yra duoti nešlio amplitudė A_c, bitų sparta R ir moduliavimo indeksas h. Šis spektras sudarytas iš atskirų linijų ties dažniais $nR/2$. FSK signalo spektras, pagal (5.9.3), – tai nešlio dažniu $f_c = 7087.875$ kHz paslinktas kompleksinės gaubtinės spektras. T.y., FSK signalo su alternuojančiais dvejetainiais vienetais ir nuliais spektras sudarytas iš atskirų linijų ties dažniais $f_c + nR/2$. Šio FSK signalo amplitudžių spektras, kai $R = 300$ b/s, o $h = 2/3 \approx 0.67$, yra pavaizduotas 5.9.3 pav. Šiame grafike linijų amplitudės yra išreikštos decibelais atžvilgiu nemoduliuoto nešlio amplitudės A_c, t.y., ant ordinačių ašies atidėtas dydis $20 \cdot \lg(|c_n|/A_c)$. 5.9.3 pav. pavaizduotos spektro linijos, kurios atitinka $|n| \leq 4$. Spektro linijų, kurios atitinka $|n| > 4$, amplitudės yra mažesnės už -40 dB.



5.9.3 pav. FSK signalo, kuris atitinka alternuojančią vienetų ir nulių seką, spektras, kai $|f_1 - f_2| = 200$ Hz, $f_c = 7087.875$ kHz, o $R = 300$ b/s.

(c) FSK signalo juostos plotis apytiksliai skaičiuojamas pagal Karsono taisyklę (5.5.30):

$$B_T \approx 2(\beta + 1)B; \tag{5.9.17}$$

čia B yra moduliavimo signalo juostos plotis, o β yra dažnio moduliavimo indeksas, kuris apibrėžiamas sąryšiu (5.5.17):

$$\beta = \frac{\Delta F}{B}, \tag{5.9.18}$$

kur ΔF yra didžiausiasis dažnio nuokrypis. Įrašę (5.9.18) į (5.9.17), gauname

$$B_T \approx 2(\Delta F + B). \tag{5.9.19}$$

Šiuo atveju didžiausiasis dažnio nuokrypis lygus dvejetainius nulį ir vienetą atitinkančių dažnių skirtumo pusei: $\Delta F = (f_2 - f_1)/2 = 100$ Hz. Stačiakampių impulsų sekos dažnių juostos pločiu praktikoje dažniausiai laikomas pirmojo nulio juostos plotis, kuris yra atvirkštinis impulso trukmei T_b (žr. 2.2.2a pav. ir formulę (2.5.28)). Taigi, $B = R = 300$ Hz. Įrašę šias vertes į reiškinį (5.9.19), randame apytikslį duotojo FSK signalo dažnių juostos plotį:

$$B_T \approx 2(100 + 300) = 800\ \text{Hz}.$$

Uždaviniai

5.1. AM signalas yra moduliuojamas garso dažnio signalu $m(t) = 0.2\sin\omega_1 t + 0.5\cos\omega_2 t$, kur $f_1 = 500$ Hz, $f_2 = 500\sqrt{2}$ Hz, o nešlio amplitudė $A_c = 100$ V. Šis AM signalas yra prijungtas prie 50 Ω apkrovos.
(a) Nubraižykite AM signalą (kaip 5.1.1b pav.). Nešlio dažnį galima pasirinkti laisvai.
(b) Koks yra moduliavimo procentas?
(c) Apskaičiuokite ir nubraižykite AM signalo amplitudžių spektrą.

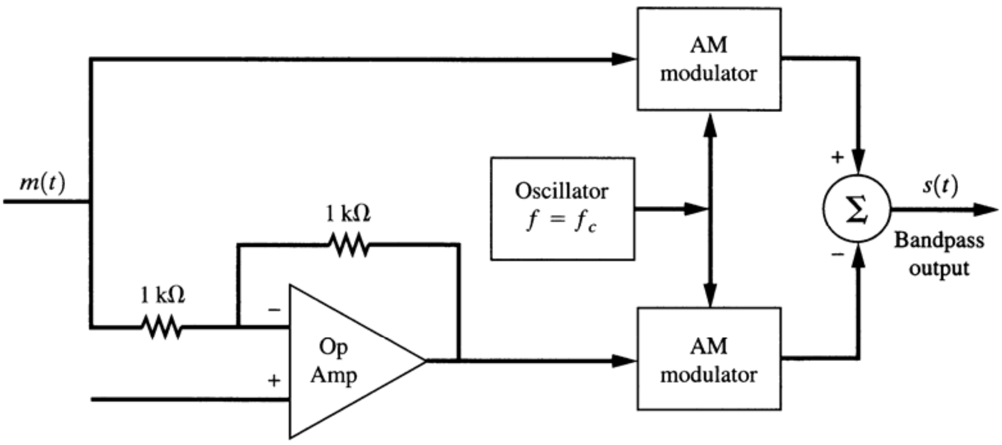
5.2. Duotas AM signalas, kuris aprašytas uždavinio 5.2 sąlygoje.
(a) Apskaičiuokite AM signalo vidutinę galią.
(b) Apskaičiuokite AM signalo didžiausiąją gaubtinės galią.

5.3. AM siųstuvas moduliuojamas bandomuoju video signalu $m(t) = -0.2 + 0.6\sin\omega_1 t$, kur $f_1 = 3.57$ MHz. Nešlio amplitudė $A_c = 100$.
(a) Nubraižykite AM signalo grafiką (kaip 5.1.1b pav.). Nešlio dažnį galima pasirinkti laisvai.
(b) Koks yra teigiamo ir neigiamo moduliavimo procentas?
(c) Apskaičiuokite ir nubraižykite AM signalo amplitudžių spektrą.

5.4. Dvipusės šalinės juostos numalšintojo nešlio (*double sideband suppressed carrier*, DSB-SC) signalas moduliuojamas signalu $m(t) = \cos\omega_1 t + 2\cos 2\omega_1 t$, kur $\omega_1 = 2\pi f_1$, $f_1 = 500$ Hz, o $A_c = 1$.
(a) Užrašykite šio DSB-SC signalo matematinę išraišką ir nubraižykite jo grafiką. Nešlio dažnį galima pasirinkti laisvai.
(b) Apskaičiuokite ir pavaizduokite grafiškai šio DSB-SC signalo amplitudžių spektrą.
(c) Apskaičiuokite vidutinę normuotąją galią.
(d) Apskaičiuokite didžiausiąją normuotąją gaubtinės galią.

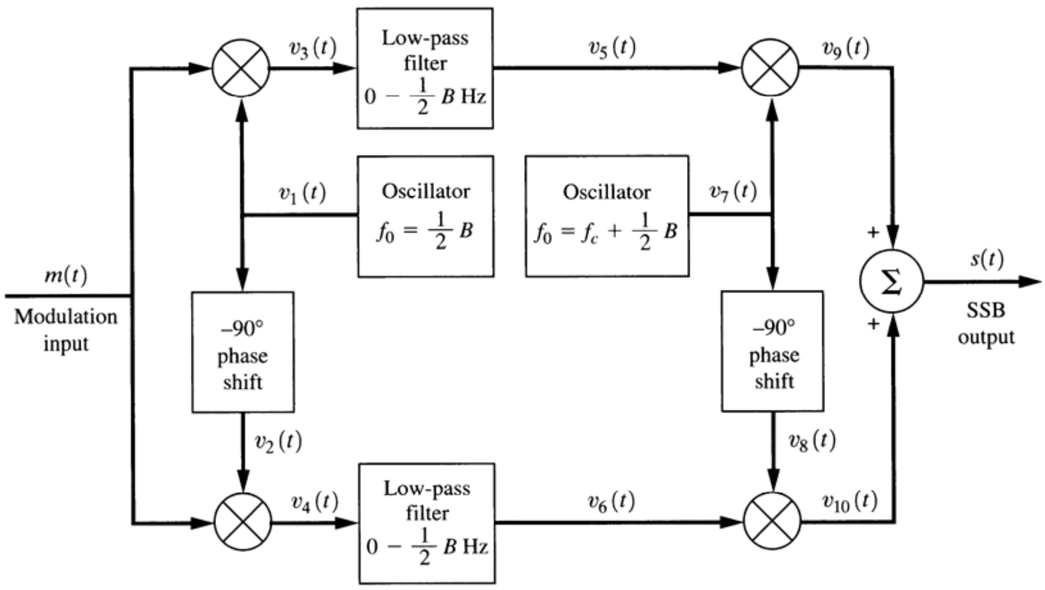
5.5. Įrodykite, kad DSB-SC signalo šalinių juostų galia yra 4 kartus didesnė už tos pačios amplitudės AM signalo, kurio moduliavimo procentas 100%, šalinių juostų galią.

5.6. Įrodykite, kad moduliatoriaus, kurio schema pavaizduota žemiau, išėjimo signalas yra DSB-SC signalas. *Pastaba*: Šioje schemoje naudojamas invertuojantysis operacinio stiprintuvo jungimas, t.y., operacinio stiprintuvo išėjimo signalas yra priešingas įėjimo signalui.



5.7. Įrodykite, kad fazės poslinkio -90° įrenginio (Hilberto transformatoriaus) impulsinis atsakas yra $1/(\pi t)$.

5.8. Įrodykite, kad moduliatoriaus, kurio schema pavaizduota žemiau, išėjimo signalas yra viršutinės vienpusės šalinės juostos (*upper single sideband*, USSB) signalas. Tuo tikslu užrašykite signalų $v_1(t) \div v_{10}(t)$ arba jų spektrų matematines išraiškas. Šiame paveiksle B žymi žemadažnio moduliavimo signalo $m(t)$ dažnių juostos plotį. Žemųjų dažnių filtrus galima laikyti idealiais, t.y., jų perdavimo funkcija lygi $H(f) = 1$, kai $|f| < B/2$, ir $H(f) = 0$, kai $|f| > B/2$.



5.9. Vienpusės šalinės juostos amplitudės moduliavimo (*single-sideband amplitude modulation*, SSB-AM) siųstuvas yra moduliuojamas sinusiniu signalu $m(t) = 5 \cos \omega_1 t$, kur $\omega_1 = 2\pi f_1$, $f_1 = 500$ Hz, o nešlio amplitudė $A_c = 1$.

(a) Išreiškite $\hat{m}(t)$.

(b) Išreiškite apatinės vienpusės šalinės juostos signalą.

(c) Apskaičiuokite SSB signalo efektinį vidurkį.

(d) Apskaičiuokite SSB signalo didžiausiąją vertę.

(e) Apskaičiuokite SSB signalo normuotąją vidutinę galią.

(f) Apskaičiuokite SSB signalo normuotąją didžiausiąją gaubtinės galią.

5.10. Apatinės vienpusės šalinės juostos AM signalas yra moduliuojamas stačiakampių impulsų vora

$$m(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{t - nT_0}{T}\right),$$

kur $T_0 = 2T$.
(a) Raskite šio SSB-AM signalo spektro $S(f)$ išraišką.
(b) Pavaizduokite amplitudžių spektrą $|S(f)|$.

5.11. Juostinio signalo išraiška yra

$$s(t) = 10\cos[(2\pi \times 10^8)t + 10\cos(2\pi \times 10^3)t].$$

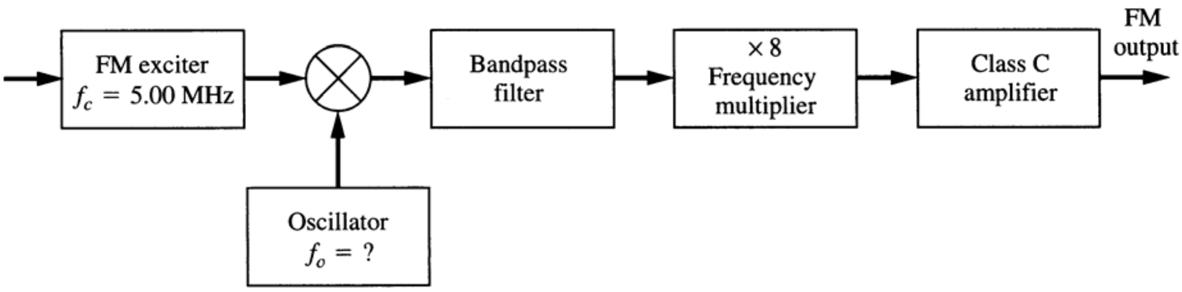
Apskaičiuokite šio signalo:

a) amplitudės moduliavimo procentą,
b) normuotąją galią,
c) didžiausiąjį fazės nuokrypį,
d) didžiausiąjį dažnio nuokrypį.

5.12. Moduliuoto dažnio (FM) signalo moduliavimo signalas yra sinusoidė, kurios dažnis f_m = 15 kHz, o moduliavimo indeksas β = 2.0.
(a) Apskaičiuokite šio FM signalo dažnių juostos plotį pagal Karsono taisyklę.
(b) Kokia FM signalo galios dalis sutelkta dažnių juostoje, kuri apskaičiuota pagal Karsono taisyklę?

5.13. FM siųstuvo struktūrinė schema pavaizduota žemiau. Siųstuvas naudojamas garso dažnio signalų perdavimui. Perdavimo funkcija turi būti plokščia iki 15 kHz dažnio. FM signalo nešlio dažnis turi būti lygus 103.7 MHz, o didžiausias dažnio nuokrypis turi būti lygus ΔF = 75 kHz. Apskaičiuokite šiuos siųstuvo parametrus:

a) juostinio filtro dažnių juostos plotį ir centrinį dažnį,
b) generatoriaus dažnį f_0,
c) pirminio FM moduliatoriaus (*FM exciter*) didžiausiąjį dažnio nuokrypį.



5.14. Tiesioginio FM siųstuvo virpesių kontūro, kuris pavaizduotas 5.5.2b pav., varikapų talpas valdanti įtampa lygi $v(t) = 5 + 0.05m(t)$, kur $m(t)$ yra žemadažnis moduliavimo signalas. Kiekvieno diodo talpa lygi $C_d = 100/\sqrt{1+2v(t)}$ pF, o C_0 = 180 pF. Koks turi būti ritės induktyvumas L, kad kontūro rezonansinis dažnis būtų lygus 5 MHz? Įrodykite, kad tuo atveju, kai $|m(t)|$ yra vienetų eilės arba mažesnis, generatorius, kurios dažnį uždavoda šis virpesių kontūras, veikia kaip dažnio moduliatoriaus, t.y., kad kontūro rezonansinis dažnis lygus $f_0(t) = f_c + \frac{1}{2\pi} D_f m(t)$. Raskite parametrą D_f.

5.15. FM siųstuvo nešlys $s(t) = 100\cos(2\pi\times10^9 t)$ yra moduliuojamas sinusiniu signalu. Yra žinoma, kad didžiausiasis dažnio nuokrypis, kuris atsiranda, moduliuojant sinusiniu signalu, kurio efektinis vidurkis 1 V, yra lygus 30 kHz. Apskaičiuokite visų FM signalo spektro linijų, kurių amplitudės didesnės už 0.01 A_c = 1 V, amplitudes ir dažnius, kai moduliavimo signalas yra:

(a) $m(t) = 2.5\cos(3\pi\times10^4 t)$;
(b) $m(t) = 1\cos(6\pi\times10^4 t)$.

5.16. FM moduliatoriaus išėjimo signalas yra $s(t) = 100\cos[2\pi1000t + \theta(t)]$, o moduliavimo signalas $m(t) = 5\cos(2\pi8t)$. Didžiausiasis dažnio nuokrypis, kurį sukelia 1 V amplitudės signalas, yra 8 Hz. Signalas $s(t)$ yra praleidžiamas pro idealųjį juostinį filtrą (su stačiakampe dažnine amplitudės charakteristika), kurio centrinis dažnis lygus 1000 Hz, juostos plotis 56Hz, o stiprinimo koeficientas lygus vienam. Apskaičiuokite normuotąją vidutinę galią:
(a) juostinio filtro įėjime,
(b) juostinio filtro išėjime.

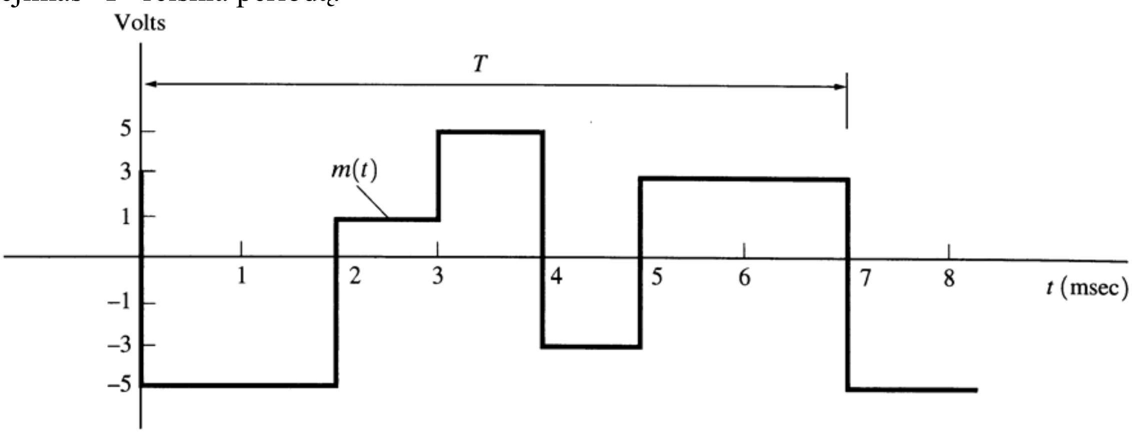
5.17. Fazės moduliavimo sistemoje 1 kHz dažnio sinusinis signalas moduliuoja 146.52 MHz dažnio nešlį. Didžiausiasis fazės nuokrypis lygus 45°. Apskaičiuokite ir pavaizduokite grafiškai moduliuotosios fazės signalo amplitudžių spektrą, jeigu nešlio amplitudė $A_c = 1$. Pagal Karsono taisyklę įvertinkite šio signalo apytikslį dažnių juostos plotį.

5.18. Dažnio moduliavimo sistemoje 1 kHz dažnio sinusinis signalas moduliuoja 146.52 MHz dažnio nešlį. Didžiausiasis dažnio nuokrypis lygus 5 kHz. Apskaičiuokite ir pavaizduokite grafiškai moduliuotojo dažnio signalo amplitudžių spektrą, jeigu nešlio amplitudė $A_c = 1$. Pagal Karsono taisyklę įvertinkite šio signalo apytikslį dažnių juostos plotį.

5.19. Fazės moduliavimo sistemoje naudojamas dviejų sinusoidžių sumos pavidalo moduliavimo signalas $m(t) = A_1\cos\omega_1 t + A_2\cos\omega_2 t$. Išreiškite moduliuotosios fazės signalo spektrą dydžiais A_c, ω_c, D_p, A_1, A_2, ω_1 ir ω_2.

5.20. Teigiamų ir neigiamų vienodos trukmės ir vienodos amplitudės stačiakampių impulsų vora (žr. 5.9.2a pav.) moduliuoja siaurajuosčio dažnio moduliavimo siųstuvą. Didžiausiasis fazės nuokrypis lygus 10°. Moduliavimo signalo impulsų amplitudė lygi 5 V, o periodas lygus 10 ms. Laiko momentas $t = 0$ atitinka teigiamąjį frontą.
(a) Apskaičiuokite šio signalo didžiausiąjį dažnio nuokrypį.
(b) Apskaičiuokite ir pavaizduokite grafiškai šio signalo amplitudžių spektrą, kai nešlio dažnis lygus 30 MHz.

5.21. Periodinis daugialygis skaitmeninis signalas, kuris pavaizduotas žemiau, moduliuoja plačiajuosčio dažnio moduliavimo siųstuvą. Apskaičiuokite ir pavaizduokite apytikslį šio signalo galios tankio spektrą, kai nešlio amplitudė $A_c = 5$, nešlio dažnis $f_c = 2$ GHz, o dažnio moduliavimo koeficientas $D_f = 10^5$ (žr. (5.5.4)). *Pastaba*: Signalo grafike, kuris pateiktas žemiau, žymėjimas "T" reiškia periodą.



5.22. Dvejetainis 2400 b/s spartos moduliavimo signalas, kurį sudaro stačiakampiai impulsai, yra perduodamas amplitudės manipuliavimo (*on-off keying*, OOK) sistema. Nešlio dažnis lygus 50 kHz.
(a) Apskaičiuokite ir pavaizduokite OOK signalo amplitudžių spektrą, kai perduodama alternuojančioji dvejetainių vienetų ir nulių seka. Nurodykite pirmojo nulio juostos plotį.
(b) Apskaičiuokite ir pavaizduokite OOK signalo galios spektrinį tankį, kai perduodama atsitiktinė dvejetainių vienetų ir nulių seka, kurioje nulio ir vienetų tikimybės sutampa.

5.23. Išspręskite uždavinį 5.22, kai vietoj amplitudės manipuliavimo naudojamas apgrąžinis fazės manipuliavimas (*binary phase shift keying*, BPSK).

5.24. Apskaičiuokite ir pavaizduokite dažninio manipuliavimo signalo spektrą, perduodant alternuojančiąją dvejetainių vienetų ir nulių seką. Dvejetainio vieneto dažnis lygus 50 kHz, dvejetainio nulio dažnis lygus 55 kHz, o bitų sparta lygi 2400 b/s. Apskaičiuokite pirmojo nulio dažnių juostos plotį.

5.25. 4800 b/s spartos atsitiktinė dvejetainių vienetų ir nulių seka perduodama, naudojant apgrąžinį fazės manipuliavimą. Apskaičiuokite 35 dB lygio dažnių juostos plotį (t.y., dažnių intervalą, už kurio ribų esančių spektro linijų amplitudės yra bent 35 dB žemiau didžiausiosios amplitudės).

5.26. Dvejetainis žemadažnis signalas praleidžiamas pro pakelto kosinuso formos kryčio filtrą, kurio kryčio koeficientas $r = 0.5$, ir po to moduliuoja nešlį. Bitų sparta lygi 2400 b/s.
(a) Apskaičiuokite juostinio signalo absoliutinį dažnių juostos plotį, kai naudojamas amplitudės manipuliavimas.
(b) Apskaičiuokite juostinio signalo apytikslį dažnių juostos plotį, kai naudojamas dažninis manipuliavimas, ir dvejetainį vienetą atitinka 50 kHz dažnis, o dvejetainį nulį atitinka 55 kHz dažnis.

5.27. Tuo atveju, kai FSK signalas detektuojamas, naudojant koherentinį detektorių, kurio schema pavaizduota 5.7.6b pav., dvejetainio vieneto dažnis f_1 ir dvejetainio nulio dažnis f_2 turi būti parinkti taip, kad viršutinio žemųjų dažnių filtro išėjimo signalas būtų lygus nuliui, kai perduodamas dvejetainis nulis, o apatinio filtro išėjimo signalas būtų lygus nuliui, kai perduodamas dvejetainis vienetas. Išveskite sąryšį tarp dažnių f_1, f_2 ir bitų spartos R, kuris turi būti tenkinamas, kad galiotų aukščiau minėtoji sąlyga.

5.28. Ketvirtinio fazės manipuliavimo (*quadrature phase shift keying*, QPSK) modemas naudojamas 3.6 kb/s spartos duomenų perdavimui telefono linija. Linijos dažnių juostos plotis lygus 2.4 kHz.
(a) Laikant, kad telefono linijos perdavimo charakteristika yra pakelto kosinuso formos (žr. (3.5.11)), koks turi būti kryčio koeficientas r?
(b) Koks turėtų būti kryčio koeficientas r, kad šia linija būtų įmanoma perduoti 4.8 kb/s spartos duomenis?

Priedas A. Matematiniai metodai, tapatybės ir lentelės

A-1. Trigonometrija

Apibrėžimai

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \tag{A-1}$$

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \tag{A-2}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{j(e^{jx} + e^{-jx})} \tag{A-3}$$

Trigonometrinės tapatybės

$$e^{\pm jx} = \cos x \pm j \sin x \quad (\text{Eulerio teorema}) \tag{A-4}$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \tag{A-5}$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \tag{A-6}$$

$$\cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \sin x \tag{A-7}$$

$$\sin\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \cos x \tag{A-8}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \tag{A-9}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \tag{A-10}$$

$$2 \cos x \cos y = \cos(x - y) + \cos(x + y) \tag{A-11}$$

$$2 \sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y) \tag{A-12}$$

$$2 \sin x \cos y = \sin(x - y) + \sin(x + y) \tag{A-13}$$

$$2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x \tag{A-14}$$

$$2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x \tag{A-15}$$

$$4 \cos^3 x = 3 \cos x + \cos 3x \tag{A-16}$$

$$4 \sin^3 x = 3 \sin x - \sin 3x \tag{A-17}$$

$$8 \cos^4 x = 3 + 4 \cos 2x + \cos 4x \tag{A-18}$$

$$8 \sin^4 x = 3 - 4 \cos 2x + \cos 4x \tag{A-19}$$

$$A \cos x - B \sin x = R \cos(x + \theta) \tag{A-20a}$$

čia $R = \sqrt{A^2 + B^2}$ (A-20b)

$$\theta = \tan^{-1}(B/A) \tag{A-20c}$$

$$A = R \cos \theta \tag{A-20d}$$

$$B = R \sin \theta \tag{A-20e}$$

A-2. Diferencialinis skaičiavimas

Išvestinės apibrėžimas

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + (\Delta x/2)) - f(x - (\Delta x/2))}{\Delta x} \tag{A-21}$$

Diferencijavimo taisyklės

$$\frac{du(x)v(x)}{dx} = u(x)\frac{dv(x)}{dx} + v(x)\frac{du(x)}{dx} \quad \text{(sandaugos išvestinė)} \tag{A-22}$$

$$\frac{d\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)}{dx} = \frac{v(x)\dfrac{du(x)}{dx} - u(x)\dfrac{dv(x)}{dx}}{v^2(x)} \quad \text{(santykio išvestinė)} \tag{A-23}$$

$$\frac{du[v(x)]}{dx} = \frac{du}{dv}\frac{dv}{dx} \quad \text{(sudėtinės funkcijos išvestinė)} \tag{A-24}$$

Išvestinių lentelė

$$\frac{d[x^n]}{dx} = nx^{n-1} \tag{A-25}$$

$$\frac{d \sin ax}{dx} = a \cos ax \tag{A-26}$$

$$\frac{d \cos ax}{dx} = -a \sin ax \tag{A-27}$$

$$\frac{d \tan ax}{dx} = \frac{a}{\cos^2 ax} \tag{A-28}$$

$$\frac{d \sin^{-1} ax}{dx} = \frac{a}{\sqrt{1 - (ax)^2}} \tag{A-29}$$

$$\frac{d \cos^{-1} ax}{dx} = -\frac{a}{\sqrt{1 - (ax)^2}} \tag{A-30}$$

$$\frac{d \tan^{-1} ax}{dx} = \frac{a}{1 + (ax)^2} \tag{A-31}$$

$$\frac{d[e^{ax}]}{dx} = ae^{ax} \tag{A-32}$$

$$\frac{d[a^x]}{dx} = a^x \ln a \tag{A-33}$$

$$\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x} \qquad \text{(A-34)}$$

$$\frac{d(\log_a x)}{dx} = \frac{1}{x}\log_a e \qquad \text{(A-35)}$$

$$\frac{d\left[\int_{a(x)}^{b(x)} f(\lambda, x)\, d\lambda\right]}{dx} = f(b(x), x)\frac{db(x)}{dx} - f(a(x), x)\frac{da(x)}{dx}$$

$$+ \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f(\lambda, x)}{\partial x}\, d\lambda \qquad \text{(Leibnico taisyklė)} \qquad \text{(A-36)}$$

A-3. Neapibrėžtumų aiškinimas

Jeigu riba $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ yra pavidalo $\frac{0}{0}$ arba $\frac{\infty}{\infty}$, tuomet

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\left[\frac{N(x)}{D(x)}\right] = \lim_{x\to a}\left[\frac{(dN(x)/dx)}{(dD(x)/dx)}\right] \qquad \text{(Lopitalio taisyklė)} \qquad \text{(A-37)}$$

Čia $N(x)$ yra trupmenos $f(x)$ skaitiklis, $D(x)$ yra trupmenos $f(x)$ vardiklis. Jeigu riba $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ yra pavidalo $0\cdot\infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0 arba 1^∞, tuomet ją visuomet įmanoma algebrinėmis operacijomis pakeisti vienu iš dviejų aukščiau minėtųjų neapibrėžtumų.

A-4. Integralinis skaičiavimas

Integralo apibrėžimas

$$\int f(x)\, dx = \lim_{\Delta x\to 0}\left\{\sum_n [f(n\,\Delta x)]\,\Delta x\right\} \qquad \text{(A-38)}$$

Integravimo metodai

1. Integravimo kintamojo pakeitimas. Pvz., perėjus nuo x prie naujo kintamojo $v = u(x)$,

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{u(a)}^{u(b)} \left(\left.\frac{f(x)}{dv/dx}\right|_{x=u^{-1}(v)}\right) dv \qquad \text{(A-39)}$$

2. Integravimas dalimis:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du \qquad \text{(A-40)}$$

3. Integralų lentelės (žr. A-5).
4. Kompleksinio kintamojo metodai.
5. Skaitmeniniai metodai.

A-5. Integralų lentelės

Neapibrėžtiniai integralai

$$\int (a + bx)^n\,dx = \frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)}, \qquad 0 < n \tag{A-41}$$

$$\int \frac{dx}{a + bx} = \frac{1}{b}\ln|a + bx| \tag{A-42}$$

$$\int \frac{dx}{(a + bx)^n} = \frac{-1}{(n-1)b(a+bx)^{n-1}}, \qquad 1 < n \tag{A-43}$$

$$\int \frac{dx}{c + bx + ax^2} = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{4ac - b^2}}\tan^{-1}\left(\dfrac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}}\right), & b^2 < 4ac \\ \dfrac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}}\ln\left|\dfrac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}}\right|, & b^2 > 4ac \\ \dfrac{-2}{2ax + b}, & b^2 = 4ac \end{cases} \tag{A-44}$$

$$\int \frac{x\,dx}{c + bx + ax^2} = \frac{1}{2a}\ln|ax^2 + bx + c| - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{c + bx + ax^2} \tag{A-45}$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + b^2x^2} = \frac{1}{ab}\tan^{-1}\left(\frac{bx}{a}\right) \tag{A-46}$$

$$\int \frac{x\,dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{2}\ln(a^2 + x^2) \tag{A-47}$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{a^2 + x^2} = x - a\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \tag{A-48}$$

$$\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(a^2 + x^2)} + \frac{1}{2a^3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \tag{A-49}$$

$$\int \frac{x\,dx}{(a^2 + x^2)^2} = \frac{-1}{2(a^2 + x^2)} \tag{A-50}$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{(a^2 + x^2)^2} = \frac{-x}{2(a^2 + x^2)} + \frac{1}{2a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \tag{A-51}$$

$$\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^3} = \frac{x}{4a^2(a^2 + x^2)^2} + \frac{3x}{8a^4(a^2 + x^2)} + \frac{3}{8a^5}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \tag{A-52}$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{(a^2+x^2)^3} = \frac{-x}{4(a^2+x^2)^2} + \frac{x}{8a^2(a^2+x^2)} + \frac{1}{8a^3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \tag{A-53}$$

$$\int \frac{x^4\,dx}{(a^2+x^2)^3} = \frac{a^2x}{4(a^2+x^2)^2} - \frac{5x}{8(a^2+x^2)} + \frac{3}{8a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \tag{A-54}$$

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^4} = \frac{x}{6a^2(a^2+x^2)^3} + \frac{5x}{24a^4(a^2+x^2)^2} + \frac{5x}{16a^6(a^2+x^2)} + \frac{5}{16a^7}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \tag{A-55}$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{(a^2+x^2)^4} = \frac{-x}{6(a^2+x^2)^3} + \frac{x}{24a^2(a^2+x^2)^2} + \frac{x}{16a^4(a^2+x^2)} + \frac{1}{16a^5}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \tag{A-56}$$

$$\int \frac{x^4\,dx}{(a^2+x^2)^4} = \frac{a^2x}{6(a^2+x^2)^3} - \frac{7x}{24(a^2+x^2)^2} + \frac{x}{16a^2(a^2+x^2)} + \frac{1}{16a^3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \tag{A-57}$$

$$\int \frac{dx}{a^4+x^4} = \frac{1}{4a^3\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x^2+ax\sqrt{2}+a^2}{x^2-ax\sqrt{2}+a^2}\right) + \frac{1}{2a^3\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{ax\sqrt{2}}{a^2-x^2}\right) \tag{A-58}$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{a^4+x^4} = -\frac{1}{4a\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x^2+ax\sqrt{2}+a^2}{x^2-ax\sqrt{2}+a^2}\right) + \frac{1}{2a\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{ax\sqrt{2}}{a^2-x^2}\right) \tag{A-59}$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x \tag{A-60}$$

$$\int x\cos x\,dx = \cos x + x\sin x \tag{A-61}$$

$$\int x^2\cos x\,dx = 2x\cos x + (x^2-2)\sin x \tag{A-62}$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x \tag{A-63}$$

$$\int x \sin x\, dx = \sin x - x\cos x \tag{A-64}$$

$$\int x^2 \sin x\, dx = 2x\sin x - (x^2 - 2)\cos x \tag{A-65}$$

$$\int e^{ax}\, dx = \frac{e^{ax}}{a}, \qquad a \text{ realus arba kompleksinis} \tag{A-66}$$

$$\int xe^{ax}\, dx = e^{ax}\left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\right), \qquad a \text{ realus arba kompleksinis} \tag{A-67}$$

$$\int x^2e^{ax}\, dx = e^{ax}\left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right), \qquad a \text{ realus arba kompleksinis} \tag{A-68}$$

$$\int x^3e^{ax}\, dx = e^{ax}\left(\frac{x^3}{a} - \frac{3x^2}{a^2} + \frac{6x}{a^3} - \frac{6}{a^4}\right), \qquad a \text{ realus arba kompleksinis} \tag{A-69}$$

$$\int e^{ax}\sin x\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+1}(a\sin x - \cos x) \tag{A-70}$$

$$\int e^{ax}\cos x\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+1}(a\cos x - \sin x) \tag{A-71}$$

Apibrėžtiniai integralai

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\, dx = \frac{\pi/n}{\sin(m\pi/n)}, \qquad n > m > 0 \tag{A-72}$$

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\, dx = \Gamma(\alpha), \qquad \alpha > 0; \tag{A-73a}$$

čia $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ (A-73b)

$\Gamma(1) = 1;\ \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ (A-73c)

$\Gamma(n) = (n-1)!$ jeigu n yra sveikasis teigiamas skaičius (A-73d)

$$\int_0^\infty x^{2n}e^{-ax^2}\, dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^{n+1}a^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{A-74}$$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-a^2x^2+bx}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a}e^{b^2/(4a^2)}, \qquad a > 0 \tag{A-75}$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}, \qquad a>0 \tag{A-76}$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2}, \qquad a>0 \tag{A-77}$$

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos bx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}\,e^{-b^2/4a^2}}{2a}, \qquad a>0 \tag{A-78}$$

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1}\cos bx\,dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{b^\alpha}\cos\tfrac{1}{2}\pi\alpha, \qquad 0<\alpha<1,\ b>0 \tag{A-79}$$

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1}\sin bx\,dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{b^a}\sin\tfrac{1}{2}\pi\alpha, \qquad 0<|\alpha|<1,\ b>0 \tag{A-80}$$

$$\int_0^\infty xe^{-ax^2}I_k(bx)\,dx = \frac{1}{2a}e^{b^2/4a}; \tag{A-81a}$$

$$\text{čia}\quad I_k(bx) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{bx\cos\theta}\cos k\theta\,d\theta \tag{A-81b}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^\infty \mathrm{Sa}(x)\,dx = \frac{\pi}{2} \tag{A-82}$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \int_0^\infty \mathrm{Sa}^2(x)\,dx = \frac{\pi}{2} \tag{A-83}$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{b^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2b}e^{-ab}, \qquad a>0,\ b>0 \tag{A-84}$$

$$\int_0^\infty \frac{x\sin ax}{b^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-ab}, \qquad a>0,\ b>0 \tag{A-85}$$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{\pm j2\pi yx}\,dx = \delta(y) \tag{A-86}$$

A-6. Eilutės

Baigtinės eilutės

$$\sum_{n=1}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2} \tag{A-87}$$

$$\sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \tag{A-88}$$

$$\sum_{n=1}^{N} n^3 = \frac{N^2(N+1)^2}{4} \tag{A-89}$$

$$\sum_{n=0}^{N} a^n = \frac{a^{N+1}-1}{a-1} \tag{A-90}$$

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!\,(N-n)!} x^n y^{N-n} = (x+y)^N \tag{A-91}$$

$$\sum_{n=0}^{N} e^{j(\theta+n\phi)} = \frac{\sin[(N+1)\phi/2]}{\sin(\phi/2)} e^{j[\theta+(N\phi/2)]} \tag{A-92}$$

$$\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} a^{N-k} b^k = (a+b)^N; \tag{A-93a}$$

$$\text{čia} \quad \binom{N}{k} = \frac{N!}{(N-k)!\,k!} \tag{A-93b}$$

Begalinės eilutės

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\right)(x-a)^n \qquad \text{(Teiloro eilutė)} \tag{A-94}$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 x} \quad \text{čia } a \le x \le a+T \qquad \text{(Furjė eilutė)} \tag{A-95a}$$

$$\text{čia} \quad c_n = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(x) e^{-jn\omega_0 x}\, dx \tag{A-95b}$$

$$\text{ir} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \tag{A-95c}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{A-96}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{A-97}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \tag{A-98}$$

Priedas B. Furjė transformacijos savybės

Lentelė B-1. Kai kurios Furjė transformacijų teoremos[1]

Operacija	**Laiko funkcija**	**Furjė transformacija**
Tiesinis darinys	$a_1 w_1(t) + a_2 w_2(t)$	$a_1 W_1(f) + a_2 W_2(f)$
Vėlinimas	$w(t - T_d)$	$W(f) e^{-j\omega T_d}$
Mastelio pakeitimas	$w(at)$	$\frac{1}{\|a\|} W\left(\frac{f}{a}\right)$
Kompleksinis jungimas	$w^*(t)$	$W^*(-f)$
Dualumas	$W(t)$	$w(-f)$
Realiojo signalo dažnio keitimas	$w(t)\cos(\omega_c t + \theta)$	$\frac{1}{2}[e^{j\theta} W(f - f_c) + e^{-j\theta} W(f + f_c)]$
Kompleksinio signalo dažnio keitimas	$w(t) e^{j\omega_c t}$	$W(f - f_c)$
Juostinis signalas	$\mathrm{Re}\{g(t) e^{j\omega_c t}\}$	$\frac{1}{2}[G(f - f_c) + G^*(-f - f_c)]$
Diferencijavimas	$\frac{d^n w(t)}{dt^n}$	$(j2\pi f)^n W(f)$
Integravimas	$\int_{-\infty}^{t} w(\lambda) d\lambda$	$(j2\pi f)^{-1} W(f) + \frac{1}{2} W(0)\delta(f)$
Sąsūka	$w_1(t) * w_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} w_1(\lambda) w_2(t - \lambda) d\lambda$	$W_1(f) W_2(f)$
Daugyba[2]	$w_1(t) w_2(t)$	$W_1(f) * W_2(f) = \int_{-\infty}^{\infty} W_1(\lambda) W_2(f - \lambda) d\lambda$
Daugyba iš t^n	$t^n w(t)$	$(-j2\pi)^{-n} \frac{d^n W(f)}{df^n}$

[1] $\omega_c = 2\pi f_c$.

[2] Užrašymas „$W_1(f) * W_2(f)$" reiškia funkcijų $W_1(f)$ ir $W_2(f)$ sąsūką.

Lentelė B-2. Kai kurios Furjė poros

Laiko funkcija	Funkcijos žymėjimas arba išraiška	Spektras (Furjė transformacija)
Stačiakampis impulsas	$\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$	$T[\mathrm{Sa}(\pi fT)]$
Trikampis impulsas	$\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$	$T[\mathrm{Sa}(\pi fT)]^2$
Vienetinis šuolis	$u(t) \equiv \begin{cases} +1, & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$	$\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$
Signum funkcija	$\mathrm{sgn}(t) \equiv \begin{cases} +1, & t>0 \\ -1, & t<0 \end{cases}$	$\frac{1}{j2\pi f}$
Konstanta	1	$\delta(f)$
Impulsas momentu $t = t_0$	$\delta(t - t_0)$	$e^{-j2\pi f t_0}$
"Sinc" funkcija	$\mathrm{Sa}(2\pi Wt)$	$\frac{1}{2W}\Pi\left(\frac{f}{2W}\right)$
Kompleksinė eksponentė	$e^{j(\omega_0 t + \varphi)}$	$e^{j\varphi}\delta(f - f_0)$
Harmoninė funkcija	$\cos(\omega_c t + \varphi)$	$\frac{1}{2}e^{j\varphi}\delta(f - f_c) + \frac{1}{2}e^{-j\varphi}\delta(f + f_c)$
Gauso funkcija	$e^{-\pi(t/t_0)^2}$	$t_0 e^{-\pi(f t_0)^2}$
Vienpusė eksponentinė funkcija	$\begin{cases} e^{-t/T}, & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$	$\frac{T}{1 + j2\pi fT}$
Dvipusė eksponentinė funkcija	$e^{-\lvert t \rvert/T}$	$\frac{2T}{1 + (2\pi fT)^2}$
Begalinė impulsų vora	$\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}\delta(t - kT)$	$f_0\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\delta(f - nf_0)$

Priedas C. Įvairių moduliavimo tipų kompleksinės gaubtinės

Lentelė C-1. Įvairių moduliavimo tipų kompleksinės gaubtinės[1]

Moduliavimo tipas	Kompl. gaubtinė $g(t)$	Sinfazinės dedmosios ampl. $x(t)$	Kvadratūrinės dedamosios amp. $y(t)$
Amplitudės moduliavimas (**AM**)	$A_c[1+m(t)]$	$A_c[1+m(t)]$	0
Dvipusės šalinės juostos numalšintojo nešlio moduliavimas (**DSB-SC**)	$A_c m(t)$	$A_c m(t)$	0
Fazės moduliavimas (**PM**)	$A_c e^{jD_p m(t)}$	$A_c \cos[D_p m(t)]$	$A_c \sin[D_p m(t)]$
Dažnio moduliavimas (**FM**)	$A_c e^{jD_f \int_{-\infty}^{t} m(\sigma)d\sigma}$	$A_c \cos\left[D_f \int_{-\infty}^{t} m(\sigma)d\sigma\right]$	$A_c \sin\left[D_f \int_{-\infty}^{t} m(\sigma)d\sigma\right]$
Vienpusės šalinės juostos AM su numalšintu nešliu (**SSB-AM-SC**)[2]	$A_c[m(t) \pm j\hat{m}(t)]$	$A_c m(t)$	$\pm A_c \hat{m}(t)$
Vienpusės šalinės juostos fazės moduliavimas (**SSB-PM**)[2]	$A_c e^{jD_p[m(t)\pm j\hat{m}(t)]}$	$A_c e^{\mp D_p \hat{m}(t)} \cos[D_p m(t)]$	$A_c e^{\mp D_p \hat{m}(t)} \sin[D_p m(t)]$
Vienpusės šalinės juostos dažnio moduliavimas (**SSB-FM**)[2]	$A_c e^{jD_f \int_{-\infty}^{t}[m(\sigma)\pm j\hat{m}(\sigma)]d\sigma}$	$A_c e^{\mp D_f \int_{-\infty}^{t} \hat{m}(\sigma)d\sigma} \cos\left[D_f \int_{-\infty}^{t} m(\sigma)d\sigma\right]$	$A_c e^{\mp D_f \int_{-\infty}^{t} \hat{m}(\sigma)d\sigma} \sin\left[D_f \int_{-\infty}^{t} m(\sigma)d\sigma\right]$

Moduliavimo tipas	Realioji gaubtinė $R(t)$	Pradinė fazė $\theta(t)$	Tiesiškumas	Pastabos
AM	$A_c[1+m(t)]$	$\begin{cases} 0, & m(t) > -1 \\ 180°, & m(t) < -1 \end{cases}$	T[3]	Kad detektavimui būtų įmanoma panaudoti gaubtinės detektorių, turi galioti $m(t) > -1$
DSB-SC	$A_c \lvert m(t) \rvert$	$\begin{cases} 0, & m(t) > 0 \\ 180°, & m(t) < 0 \end{cases}$	T	Detektavimui reikalingas koherentinis detektorius
PM	A_c	$D_p m(t)$	NT	D_p yra fazės nuokrypio konstanta (rad/V)
FM	A_c	$D_f \int_{-\infty}^{t} m(\sigma)d\sigma$	NT	D_f yra dažnio nuokrypio konstanta (rad/(V·s))
SSB-AM-SC[2]	$A_c \sqrt{[m(t)]^2 + [\hat{m}(t)]^2}$	$\mathrm{arctg}[\pm\hat{m}(t)/m(t)]$	T	Detektavimui reikia koherentinio detektoriaus
SSB-PM[2]	$A_c e^{\pm D_p \hat{m}(t)}$	$D_p m(t)$	NT	
SSB-FM[2]	$A_c e^{\pm D_f \int_{-\infty}^{t} \hat{m}(\sigma)d\sigma}$	$D_f \int_{-\infty}^{t} m(\sigma)d\sigma$	NT	

[1] $A_c > 0$ yra konstanta, kuri lemia signalo vidutinę galią (žr. formulę (4.3.9)); „T“ reiškia, kad moduliavimas yra tiesinis (t.y., dviejų to tipo moduliavimo ir vienodo nešlio dažnio juostinių signalų suma yra lygi signalui, kuris būtų gautas, jeigu moduliavimo signalas būtų lygus atitinkamų moduliavimo signalų sumai); „NT“ reiškia, kad moduliavimas yra netiesinis; $\hat{m}(t)$ yra funkcijos $m(t)$ Hilberto transformacija, t.y., signalas, kurio fazė paslinkta -90° atžvilgiu signalo $m(t)$ fazės (žr. (5.4.2) – (5.4.4)).

[2] Reiškiniuose, kuriuose naudojamas „$\pm$“ arba „$\mp$“, viršutinis ženklas atitinka viršutinės šalinės juostos signalą, o apatinis – apatinės šalinės juostos signalą.

[3] Griežtai kalbant, AM signalai nėra tiesiniai, nes, sudedant du AM signalus, sudedami ir jų nešliai, t.y., vietoj gaubtinės $A_c[1+m_1(t)+m_2(t)]$ gauname $A_c[2+m_1(t)+m_2(t)]$.

Priedas D. Beselio funkcijų lentelės

Lentelė D-1. Įvairių eilių pirmosios rūšies Beselio funkcijų vertės, esant kelioms argumento β vertėms

n \ β:	0.5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.9385	0.7652	0.2239	−0.2601	−0.3971	−0.1776	0.1506	0.3001	0.1717	−0.09033	−0.2459
1	0.2423	0.4401	0.5767	0.3391	−0.06604	−0.3276	−0.2767	−0.004683	0.2346	0.2453	0.04347
2	0.03060	0.1149	0.3528	0.4861	0.3641	0.04657	−0.2429	−0.3014	−0.1130	0.1448	0.2546
3	0.002564	0.01956	0.1289	0.3091	0.4302	0.3648	0.1148	−0.1676	−0.2911	−0.1809	0.05838
4		0.002477	0.03400	0.1320	0.2811	0.3912	0.3576	0.1578	−0.1054	−0.2655	−0.2196
5			0.007040	0.04303	0.1321	0.2611	0.3621	0.3479	0.1858	−0.05504	−0.2341
6			0.001202	0.01139	0.04909	0.1310	0.2458	0.3392	0.3376	0.2043	−0.01446
7				0.002547	0.01518	0.05338	0.1296	0.2336	0.3206	0.3275	0.2167
8					0.004029	0.01841	0.05653	0.1280	0.2235	0.3051	0.3179
9						0.005520	0.02117	0.05892	0.1263	0.2149	0.2919
10						0.001468	0.006964	0.02354	0.06077	0.1247	0.2075
11							0.002048	0.008335	0.02560	0.06222	0.1231
12								0.002656	0.009624	0.02739	0.06337
13									0.003275	0.01083	0.02897
14									0.001019	0.003895	0.01196
15										0.001286	0.004508
16											0.001567

Lentelė D-2. Įvairių eilių pirmosios rūšies Beselio funkcijų argumento β vertės, kai $I_n(\beta) = 0$

	Beselio funkcijos eilė n						
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
β vertė pirmajam nuliui	2.40	3.83	5.14	6.38	7.59	8.77	9.93
β vertė antrajam nuliui	5.52	7.02	8.42	9.76	11.06	12.34	13.59
β vertė trečiajam nuliui	8.65	10.17	11.62	13.02	14.37	15.70	17.00
β vertė ketvirtajam nuliui	11.79	13.32	14.80	16.22	17.62	18.98	20.32
β vertė penktajam nuliui	14.93	16.47	17.96	19.41	20.83	22.21	23.59
β vertė šeštajam nuliui	18.07	19.61	21.12	22.58	24.02	25.43	26.82
β vertė septintajam nuliui	21.21	22.76	24.27	25.75	27.20	28.63	30.03
β vertė aštuntajam nuliui	24.35	25.90	27.42	28.91	30.37	31.81	33.23

Literatūra

1. **Couch**, Leon W. II. Digital and analog communication systems. – 5th ed. – Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1997. – 742 p.
2. **Tomasi**, Wayne. Electronic communications systems: fundamentals through advanced. – 2nd ed. – Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1994. – 860 p.
3. **Eidukevičius**, Gytis, **Kajackas**, Algimantas. Radioelektronikos pagrindai. – Vilnius: Mintis, 1974 – 1977. T. I. – 1974. – 300 p. T. II. – 1977. – 312 p.