**Skirtuminių lygčių sprendimo pavyzdžiai**

Skirtumine *k*-tosios eilės lygtimi vadiname lygtį

$$a\_{k}x\_{t+k}+a\_{k-1}x\_{t+k-1}+…+a\_{0}x\_{t}=b\_{t} \left(a\_{k}\ne 0\right).$$

Pradinės reikšmės$ x\_{0}, x\_{1},…, x\_{k-1}$ laikomos žinomomis.

Jei $b\_{t}=0 \left(t=0,1,…\right)$, lygtis vadinama homogenine.

Spręsime antros eiles homogeninę skirtuminę lygtį:

$a\_{2}x\_{t+2}+a\_{1}x\_{t+1}+a\_{0}x\_{t}=0$; $ x\_{0}, x\_{1}$ žinomi.

Pirmiausia sudarome charakteringąją lygtį

$$a\_{2}λ^{2}+a\_{1}λ+a\_{0}=0.$$

Ši lygtis turi dvi šaknis $λ\_{1}$ ir $λ\_{2}$.

Jei šaknys realios ir skirtingos, skirtuminės lygties sprendinys išreiškiamas formule

$x\_{t}=c\_{1}λ\_{1}^{t}+c\_{2}λ\_{2}^{t}$**.**

Jei šaknys realios ir vienodos ( $λ\_{1}=λ\_{2}=λ$), sprendinys išreiškiamas formule

$x\_{t}=(c\_{1}+c\_{2}t)λ^{t}$**.**

Jei šaknys kompleksinės, sprendinys išreiškiamas formule

$x\_{t}=R^{t}(c\_{1}\cos( \left(φt\right)+c\_{2}sin⁡(φt)))$**.**

Čia $R=\sqrt{\frac{a\_{0}}{a\_{2}}}$ , $ φ=arccos⁡(-\frac{1}{2}\frac{a\_{1}}{a\_{2}}\sqrt{\frac{a\_{2}}{a\_{0}}}$ )

Visose formulėse $c\_{1}$ ir $c\_{2}$ – dydžiai, nustatomi pagal žinomas pradines reikšmes.

*Nehomogeniniu lygties* atveju $b\_{t}= βb^{t}$ prie homogeninės lygties sprendinio pridedam narį (dalinį integralą)

$\frac{βb^{t}}{(a\_{2}b^{2}+a\_{1}b+a\_{0})}$ ,

jei šio reiškinio vardiklis nelygus nuliui. Priešingu atveju viena iš šaknų yra lygi *b*, o prie homogeninės lygties sprendinio pridedam narį $\frac{βtb^{t-1}}{(2a\_{2}b+a\_{1})}$. Tuo atveju, kai ir šio reiškinio vardiklis lygus nuliui, *b* yra kartotinė charakteringosios lygties šaknis. Tada prie homogeninės lygties sprendinio pridedam narį $\frac{βt^{2}b^{t-2}}{2a\_{2}}$.

**1 pavyzdys.**

Išspręsti skirtuminę lygtį homogeniniu ir nehomogeniniu $(β=11, b=1) $atvejais:

$20x\_{t+2}-8x\_{t+1}- x\_{t}=β, x\_{0 }=1, x\_{1 }=3,5.$

Iš pradžių spręsim homogeninį ($β=0) $atvejį . Randam charakteringosios lygties

$$20λ^{2}-8λ-1=0$$

šaknis $λ\_{1}=0,5$ ir $λ\_{2}=-0,1$. Todėl lygties sprendinys

$x\_{t}=c\_{1}(0,5)^{t}+c\_{2}(-0,1)^{t}$.

Dydžius $c\_{1}$ ir $c\_{2}$ nustatysim pagal žinomas pradines reikšmes:

$t=0: x\_{0}=c\_{1}(0,5)^{0}+c\_{2}(-0,1)^{0}= c\_{1}+c\_{2}=1$.

$t=1: x\_{1}=c\_{1}(0,5)^{1}+c\_{2}(-0,1)^{1}= 0,5c\_{1}-0,1c\_{2}=3,5$.

Todėl $c\_{1}=6, c\_{2}=-5$. Homogeninės lygties sprendinys:

$x\_{t}=6∙(0,5)^{t}-5∙(-0,1)^{t}$**.**

Dabar galime užrašyti ir nehomogeninės lygties sprendimą. Prie gautojo sprendinio pridėsim dalinį integralą $\frac{β}{\left(20-8-1\right)}=\frac{β}{11}$ . Kadangi duota, kad $β=11$,

$x\_{t}=c\_{1}(0,5)^{t}+c\_{2}(-0,1)^{t}+1$.

Iš naujo nustatome dydžius $c\_{1}$ ir $c\_{2}$. Jei pradinės sąlygos tos pačios, gauname

$x\_{t}=\frac{25}{6}(0,5)^{t}-\frac{25}{6}(-0,1)^{t}+1$**.**

**2 pavyzdys.**

Išspręsti skirtuminę lygtį homogeniniu ir nehomogeniniu *(*$β$ *=1, b=1)* atvejais:

$25x\_{t+2}-40x\_{t+1}+ 16x\_{t}=β, x\_{0 }=1, x\_{1 }= 4.$

Iš pradžių spręsim homogeninį ($β=0) $atvejį . Ieškom charakteringosios lygties

$$25λ^{2}-40λ+16=0$$

šaknų. Kadangi lygtis šiuo atveju turi dvi sutampančias šaknis $λ\_{1}=λ\_{2}=0,8 $, lygties sprendinys

$x\_{t}=(c\_{1}+c\_{2}t)(0,8)^{t}$.

Dydžius $c\_{1}$ ir $c\_{2}$ nustatysim pagal žinomas pradines reikšmes:

$x\_{0}=(c\_{1}+c\_{2}∙0)(0,8)^{0}= c\_{1}=1$.

$x\_{1}=(c\_{1}+c\_{2})(0,8)^{1}=4$.

Todėl $c\_{1}=1, c\_{2}=4$. Homogeninės lygties sprendinys:

$x\_{t}=(1+4t)(0,8)^{t}$**.**

Dabar galime užrašyti ir nehomogeninės lygties sprendimą. Prie gautojo sprendinio pridėsim dalinį integralą $\frac{β}{\left(25-40+16\right)}=β$ . Kadangi $β=1$,

$x\_{t}=(c\_{1}+c\_{2}t)(0,8)^{t}+1$.

Iš naujo nustatome dydžius $c\_{1}$ ir $c\_{2}$. Gauname $c\_{1}=0, c\_{2}=3,75.$ Todėl

$x\_{t}=3,75t(0,8)^{t}+1$**.**

**3pavyzdys.**

Išspręsti skirtuminę lygtį homogeniniu ir nehomogeniniu *(*$β$ *=1, b=1)* atvejais:

$4x\_{t+2}-2x\_{t+1}+ x\_{t}=b, x\_{0 }=1, x\_{1 }= 0.75.$

Iš pradžių spręsim homogeninį ($b=0) $atvejį . Ieškom charakteringosios lygties

$$4λ^{2}-2λ+1=0$$

šaknų. Kadangi lygties diskriminanatas (-2)(-2)-4∙4∙1 < 0 neigiamas, sprendinio ieškosim pavidalu

$x\_{t}=R^{t}(c\_{1}\cos( \left(φt\right)+c\_{2}sin⁡ (φt)))$.

Randam $R=\sqrt{\frac{1}{4}}$ = 0,5; $φ=\arccos(\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(-2\right)}{4}\sqrt{\frac{4}{1}} \right))=\arccos(\left(\frac{1}{2}\right))=\frac{π}{3}$ . Todėl

$x\_{t}=(0,5)^{t}(c\_{1}\cos( \left(\frac{π}{3}t\right)+c\_{2}sin⁡(\frac{π}{3}t)))$.

Dydžius $c\_{1}$ ir $c\_{2}$ nustatysim pagal žinomas pradines reikšmes:

$x\_{0}=\left(0,5\right)^{0}(c\_{1}\cos( \left(\frac{π}{3}0\right)+c\_{2}sin⁡(\frac{π}{3}0)))= c\_{1}=1 $.

$x\_{1}=\left(0,5\right)^{1}\left(c\_{1}\cos( \left(\frac{π}{3}\right)+c\_{2}sin⁡(\frac{π}{3}))=0,5(0,5c\_{1}+\frac{\sqrt{3}}{2})c\_{2}\right)=0,75$.

Iš čia $c\_{1}=1, c\_{2}=\frac{2}{\sqrt{3}}$. Homogeninės lygties sprendinys:

$x\_{t}=(0,5)^{t}(\cos( \left(\frac{π}{3}t\right)+\frac{2}{\sqrt{3}}sin⁡(\frac{π}{3}t)))$**.**

Dabar galime užrašyti ir nehomogeninės lygties sprendimą. Prie gautojo sprendinio pridėsim dalinį integralą $\frac{β}{\left(4-2+1\right)}=\frac{β}{3}$ . kadangi $β=1$, sprendinys

$x\_{t}=\left(0,5\right)^{t}(c\_{1}\cos( \left(\frac{π}{3}t\right)+c\_{2}sin⁡(\frac{π}{3}t)))+ \frac{1}{3}$ .

Iš naujo apskaičiavę dydžius $c\_{1}$ ir $c\_{2}$, gauname

$x\_{t}=\left(0,5\right)^{t}(\frac{2}{3}\cos( \left(\frac{π}{3}t\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}sin⁡(\frac{π}{3}t)))+ \frac{1}{3}$ **.**

**Uždaviniai savarankiškoms pratyboms**

Lygtis: $8x\_{t+2}- 6x\_{t+1}+x\_{t}=12, x\_{0}=10, x\_{1}=6.$

Sprendinys: $x\_{t}=2\left(\frac{1}{2}\right)^{t}+4\left(\frac{1}{4}\right)^{t}+4$.

Lygtis: $9x\_{t+2}- 6x\_{t+1}+x\_{t}=8, x\_{0}=3, x\_{1}=3.$

Sprendinys: $x\_{t}=(1+2t)\left(\frac{1}{3}\right)^{t}+2$.

Lygtis: $2x\_{t+2}- 2x\_{t+1}+x\_{t}=4, x\_{0}=5, x\_{1}=6.$

Sprendinys: $x\_{t}=(cos⁡(\frac{π}{4}t)+3sin⁡(\frac{π}{4}t))\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{t}+4$.

Lygtis: $25x\_{t+2}- 40x\_{t+1}+16x\_{t}=1, x\_{0}=2, x\_{1}=5.$

Sprendinys: $x\_{t}=(1+4t)\left(\frac{4}{5}\right)^{t}+1$.

Lygtis: $10x\_{t+2}+ 3x\_{t+1}-x\_{t}=\left(\frac{1}{2}\right)^{t}; x\_{0}=2, x\_{1}=-\frac{13}{30}.$

Sprendinys: $x\_{t}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^{t}+\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{t}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{t}$.