Egzaminui pateikta po dvi užduotis. Pirma paprastesnioji, skirta pritaikyti paskaitose išdėstytus metodus standartinio optimizavimo uždavinio sprendimui. Tai klasikinis uždavinys su apribojimais-lygybėmis, kur reikia užrašyti sąlygas kritiniam taškui surasti ir aprėmintos Hesse matricos determinantų pagalba įvertinti tą kritinį tašką. Kitame variante tai iškiliojo programavimo uždavinys (įsitikinti, ar tikrai iškiliojo), kuriam reikia užrašyti būtinas ir pakankamas ekstremumo sąlygas.

Abiem atvejais svarbiausia gauti ne patį skaitinį sprendinį (nors ir tai pageidautina), bet teisingai užrašyti sąlygas, iš kurių bus ieškomas sprendinys ir pagrįsti, kokiais teoriniais argumentais (matematiniais teiginiais) remiantis šios sąlygos užrašytos, taip pat kokia būtų jų sprendimo eiga, jei galutinio skaitinio sprendinio ir nepateiksite. Rekomenduočiau pradėti nuo šios paprastesniosios užduoties, užrašyti reikiamas lygtis ir priklausomybes, paaiškinimus dėl jų, bet pačią skaitinio sprendimo procedūrą atidėti, jei liks laiko po sudėtingesnės užduoties.

Sudėtingesnioji užduotis reikalauja pritaikyti paskaitose nagrinėtus metodus paskaitose nagrinėtų ar minėtų modelių modifikuotiems variantams išspręsti. Jei gerai išsiaiškinote, kaip taikėme optimizavimo procedūras, Eulerio lygtį, įvairius dinaminio programavimo priėjimus tam tikriems modeliams, nesunkiai juos pakartosite modifikuotam variantui (su kitokia tikslo funkcija, kitokiomis prielaidomis ir pan.).

Darbuose neturi būti vien formulės. Būtinai turite parašyti paaiškinimus, kodėl darote taip ar kitaip, taip pat paaiškinti ir interpretuoti gautą rezultatą.

Panašiai kaip ir tarpinio atsiskaitymo metu sprendimą parašykite ranka, skenuokite (perfotografuokite) ir atsiųskite man į tmedaiskis@gmail.com. Skenuotus (fotografuotus) lapus geriausia įkelti į Word kaip paveikslėlį, o Word failą spausdinti (konvertuoti) į pdf. Pasistenkit išvengti jpg failų. Labai pageidautina, kad viskas tilptų į vieną failą. Pavadinkite jį savo pavarde ir vardu, bet ir lapuose užrašykite pavardę bei studijų knygelės numerį.

Po 17:30 val. būsiu prisijungęs prie Teams, jei turėtumėte klausimų. Ten irgi įkelsiu užduotį.

Atlikti reikėtų per 2 valandas, bet pusvalandžio vėlavimas nebus smarkiai baudžiamas.

Jei jau labai nesisektų iki galo išspręsti modifikuotą variantą, vis tiek parodykite, kaip bandėte.

Sėkmės!

**Užduotis studentams, kurių studijų knygelės numerio paskutinis skaitmuo lyginis**

**1.** Užrašykite sąlygas, iš kurių galima rasti nurodytos funkcijos minimumą ar maksimumą

$$(x\_{1}-2)^{2}+(x\_{2}-3)^{2}+(x\_{3}-2)^{2}+5(x\_{4}-4)^{2}$$

tenkinantį apribojimus-lygybes

$$2x\_{1}- 2x\_{2}+4x\_{3}-20x\_{4}=-118 $$

$$4x\_{1} +2x\_{3} =14 $$

Kaip patikrinsite, ar šias sąlygas tenkinantis kritinis taškas yra minimumas ar maksimu­mas.$ $Jei liks laiko, apskaičiuokite to taško skaitines nežinomųjų reikšmes.

**2.** Tegu $x\_{0}$ eurų reikia T metų dalinti vartojimui ir taupymui. Metų t pradžioje dalį turimų lėšų skiriame vartojimui, likusią dalį investuojame metams su grąža $ρ$ . Pažymime $r=1+ρ.$

Pažymėkime $x\_{t-1}$ metų t-1 pabaigoje turimas lėšas, o $u\_{t}$ sprendimą, kiek suvartoti t metais. Tada dalis $x\_{t-1}-u\_{t}$ liks investicijoms, ir metų t pabaigoje turėsime $x\_{t}=r( x\_{t-1}-u\_{t})$ lėšų, iš jų $u\_{t+1}\leq x\_{t}$ skirsime vartojimui ir t.t. Naudingumo funkcija – kvadratinė šaknis: $\sqrt{u\_{t}}$ yra vartojimo $u\_{t}$ naudingumas. Be to, skirtingų laikotarpių naudingumo palyginimui naudokime diskontavimo koeficientą $δ<1$.

$$x\_{t}=r( x\_{t-1}-u\_{t})$$

$$0\leq u\_{t}\leq x\_{t-1}$$

$$x\_{t}\geq 0$$

$$(max)\sum\_{t=1}^{T}δ^{t-1}\sqrt{u\_{t}} $$

Išnagrinėkite šį uždavinį begalinio laiko režime $t\rightarrow \infty $ (7 temos 1.3 p.) ir raskite stacionarų ${u}/{x} $santykį – kokią likusių lėšų dalį optimalu stacionariai vartoti. Galite pradėti nuo „pažingsninio“ būdo, kad suskaičiavus $ω\_{T}\left(x\right), ω\_{T-1}\left(x\right), ω\_{T-2}\left(x\right)$ būtų lengviau suformuluoti prielaidą (spėjimą) dėl $ω\left(x\right) $išraiškos per neapibrėžtinį koeficientą (šiame variante tai nebus logaritmas).

Pabandykite tą patį rezultatą gauti Eulerio lygties pagalba. Iš jos lengvai rasite santykį $u\_{t+1}/u\_{t}$, o iš jo apskaičiuosite ribinę $u\_{t}/x\_{t-1}$ reikšmę ${u}/{x}.$

**Užduotis studentams, kurių studijų knygelės numerio paskutinis skaitmuo nelyginis**

**1**. Užrašykite būtinas ir pakankamas sąlygas nurodytos funkcijos minimumui rasti

$$\left(min\right) 2x\_{1}^{2}+3x\_{1}x\_{2}+5x\_{2}^{2}+x\_{1}x\_{3}+4x\_{3}^{2}$$

su apribojimais-nelygybėmis

$$7x\_{1}+ 8x\_{2}+13x\_{3}\geq 61$$

$$3x\_{1}+ 2x\_{2}+x\_{3}\leq 20$$

$$x\_{1}\geq 0$$

Paaiškinkite, kokia teorija remiantis užrašėte $ $šias sąlygas. *(Patarimas: Pirmoje nelygybėje* $\geq $ *lengvai galite pakeisti į* $ \leq $ *padauginę ją iš -1, o tada jau galite taikyti paskaitose nagrinėtas sąlygas).* Jei liks laiko,bandykite rasti skaitines sprendinio reikšmes.

**2.** Modifikuokite McCallo tarplaikinės darbo paieškos modelį tokiu būdu: tegu priėmęs pasiūlymą dirbti už $x$ eurų, asmuo toliau gauna ne pastovų kaip originaliame modelyje, o didėjantį uždarbį: $βx, β^{2}x, β^{3}x $ir t.t. $β>1$. Taigi priėmus darbo pasiūlymą gaunama nauda yra $x+δβx+ δ^{2}β^{2}x+δ^{3}β^{3}x+… $($δβ<1).$ Išveskite šiam atvejui lygtį, iš kurios apskaičiuotume *„reservation wage“* (rezervavimo algą). Siūlomos algos pasiskirstymo funkcija $F\_{x}\left(z\right)=F\left(z\right)$ laike nekinta. Bandykite Leibnitzo formulės pagalba pagrįsti, kokia šiuo atveju bus *„reservation wage“*, lyginant su baziniu modeliu: didesnė ar mažesnė? Pradėkit nuo paprastesnio modelio varianto; jei liks laiko, bandykite modifikuoti ir sudėtingesnį (su atleidimo iš darbo tikimybe) variantą. Tačiau galite iš karto pradėti ir nuo sudėtingesnio varianto, o paprastesnis bus gaunamas kaip jo dalinis atvejis.